ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

А.Д.Беклемишев
НГУ, 2004

5 апреля 2011 г.

Макроскопические коэффициенты переноса

Известно, что если взять моменты кинетического уравнения, то получим уравнения магнитной гидродинамики. Например, нулевой момент даёт уравнение непрерывности:

$$\int \left[\frac{df}{dt} - St(f)\right] d^3v = \frac{dn}{dt} + \mathrm{div}\, n\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

если нет источников частиц. А где же диффузия?
Дело в том, что поток частиц, который определяется по функции распределения как

$$n\mathbf{u} = \int \mathbf{v} f d^3 v, \tag{2}$$

содержит как конвективную, так и диффузионную часть, т.е., такую, которая пропорциональна *градиенту* концентрации n и зависит от частоты столкновений

$$n\mathbf{u} = n\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}. \tag{3}$$

Разделение потока на конвективный и диффузионный производится достаточно легко, если функция распределения близка к локально-максвелловской. Тогда скорость $\mathbf{u}_0$— это та функция координат, которая стоит в экспоненте сдвинутого максвелловского распределения

$$f_M = n \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}_0\right)^2}{2T}\right]. \tag{4}$$

Тем не менее, строго говоря разделение - неоднозначно.
Отличие точной функции распределения от локально-максвелловской в первом приближении пропорционально эффективной длине свободного пробега, λ. Таким образом, $\mathbf{F} \propto \lambda\nabla n$, $\lambda\nabla T$, $\lambda\nabla\mathbf{u}_0$, но могут быть и слагаемые пропорциональные градиентам других равновесных параметров, например, $\lambda\nabla\varphi$, $\lambda\nabla B$.

В линейном приближении

$$F_\alpha = D^{(n)}_{\alpha\beta}\frac{\partial n}{\partial x_\beta} + D^{(T)}_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta} + D^{(u)}_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} + F^{(pinch)}_\alpha. \qquad (5)$$

Первые два коэффициента переноса $D^{(n)}_{\alpha\beta}$, $D^{(T)}_{\alpha\beta}$, называются коэффициентами диффузии и термодиффузии соответственно, третий коэффициент, $D^{(u)}_{\alpha\beta\gamma}$, может появляться только в замагниченной плазме с градиентом скорости, а последнее слагаемое пропорционально градиентам полей, и называется пинчом.

Аналогично, для тензора плотности потока импульса можно найти поправки

$$\Pi^{(diss)}_{\alpha\beta} = R^{(n)}_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial n}{\partial x_\gamma} + R^{(T)}_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial T}{\partial x_\gamma} + R^{(u)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\delta} + R^{(fric)}_{\alpha\beta}. \tag{6}$$

В изотропной среде (без магнитного поля) первые два слагаемых зануляются автоматически, а третье - сводится к тензору вязкости. Последнее слагаемое описывает силу трения либо о поля (напр. в ГОЛ-3), либо о другие сорта частиц.
Для вектора плотности потока энергии

$$S^{(diss)}_{\alpha} = \chi^{(n)}_{\alpha\beta}\frac{\partial n}{\partial x_\beta} + \chi^{(T)}_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta} + \chi^{(u)}_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} + S^{(pinch)}_{\alpha}. \tag{7}$$

Может оказаться так, что изменение равновесия на длине свободного пробега - не мало. В частности, длина свободного пробега может быть длиной пробега *волны*. Тогда, раскладывать гидродинамические потоки в ряд по малости $\lambda\nabla$ - нельзя. В этом случае говорят о *нелокальности* переносов, уравнения становятся интегральными:

$$F_\alpha = \int D^{(n)}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) n(\mathbf{x}') d^3x' + \ldots \tag{8}$$

- В термоядерной плазме переносы почти всегда существенно нелокальны, однако на практике из-за сложности интегрального представления их описывают в локальном приближении.
- Разделение потоков на конвективную и диффузионную часть существенно неоднозначно. Например, можно говорить либо о диффузии магнитного поля в плазму ($F_\alpha = 0$), либо о диффузии плазмы сквозь магнитное поле ($F_\alpha \neq 0$), причём оба описания - эквивалентны.
- Уравнения Брагинского представляют собой достаточно полный результат вычисления коэффициентов переноса для столкновительной плазмы.

Формальный вывод коэффициентов переноса в столкновительной среде основан на разложении функции распределения вблизи локально-максвелловской.

1. В *методе Чэпмена-Энскога* разложение происходит по полиномам Сонина-Лагерра:

$$f = f_M \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i S_{3/2}^i \left(\frac{v^2}{v_T^2}\right)\right), \tag{9}$$

$$S_r^i(z) = \sum_{k=1}^{i} (-z)^k \frac{\Gamma(r+i+1)}{\Gamma(r+k+1)\, k!\, (i-k)!}. \tag{10}$$

Коэффициенты A_i ищутся путём последовательной подстановки в кинетическое уравнение с интегралом столкновений, а потом по ним можно найти все потоки. По крайней мере для нейтрального газа ряд очень быстро сходится.

2. В *методе Грэда* разложение происходит просто по степеням скорости

$$f = f_M (1 + a_i v_i + b_{ik} v_i v_k + \dots). \tag{11}$$

В газе разложение Грэда сходится хуже, однако в плазме (с интегралом столкновений Ландау) сходимость методов - сравнима.

Траектории частиц и кинетическое равновесие в токамаке

Если плазма достаточно горячая, её в первом приближении можно считать бесстолкновительной. Как мы видели, равновесная функция распределения в бесстолкновительной плазме может быть только функцией интегралов движения. Посмотрим, что это означает для плазмы токамака.
Если ларморовский радиус мал по сравнению с размером неоднородности поля, то сохраняется адиабатический инвариант - магнитный момент частицы. Кроме того, в квазистационарном случае сохраняется энергия, и, из-за осевой симметрии токамака, сохраняется азимутальная компонента обобщённого импульса. Итак, равновесная функция распределения может быть любой функцией вида

$$f = f_0\left(\mu, \varepsilon, P_\zeta\right), \tag{12}$$

где

$$P_\zeta = mR^2\dot{\zeta} + \frac{q}{c}RA_\zeta\left(\mathbf{r}\right) \tag{13}$$

- азимутальный импульс частицы, а угол ζ отсчитывается вокруг большого обхода тора, а R - радиус от оси симметрии тора.

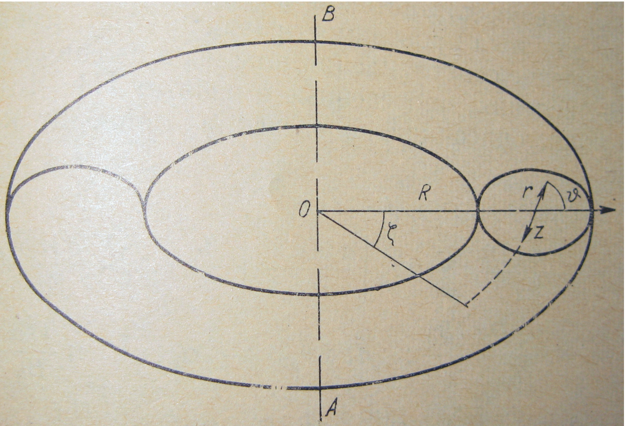

Рис. 1. Система тороидальных координат r, ϑ, ζ).

Одновременное наличие трёх независимых интегралов движения означает, что траектория частицы полностью определяется ими. Вся траектория - в фазовом пространстве и шестимерна. Если нас интересует форма этой траектории в реальном пространстве, то скоростные переменные можно исключить с помощью сохранения μ, ε. В частности, продольная скорость

$$v_{\|} = \sigma \sqrt{\frac{2}{m}\left(\varepsilon - q\varphi_0\left(\mathbf{r}\right) - \mu B\left(\mathbf{r}\right)\right)}, \quad \sigma = \pm 1. \tag{14}$$

Здесь $\varphi_0\left(\mathbf{r}\right)$ - электростатический потенциал в равновесии. Продольная скорость - скорость вдоль силовой линии магнитного поля, так что большая часть азимутальной угловой скорости $\dot{\zeta}$ (в нулевом приближении по отношению дрейфовой скорости к тепловой) содержится в $v_{\|}$:

$$\dot{\zeta} = v_{\|} \cos\chi / r = v_{\|} \frac{B_\zeta}{RB}, \tag{15}$$

где $\chi-$ угол наклона силовой линии. Таким образом, траектория должна лежать на поверхности

$$P_\zeta = \frac{RB_\zeta}{B} \sigma \sqrt{2m\left(\varepsilon - q\varphi_0\left(\mathbf{r}\right) - \mu B\left(\mathbf{r}\right)\right)} + \frac{q}{c} A_\zeta\left(\mathbf{r}\right) = \mathrm{const}. \tag{16}$$

В осесимметричной системе дрейфовая поверхность - тороидальная поверхность вращения. Её можно найти приближённо в пределе малой тороидальности системы (тонкий тор круглого сечения). В этой модели можно считать

$$B = B_0 \left[\mathbf{e}_\zeta + \Theta \mathbf{e}_\theta\right] / \left(1 + \epsilon \cos\theta\right), \tag{17}$$

где $R = R_0 \left(1 + \epsilon \cos\theta\right)$, R_0 - радиус магнитной оси, $\theta-$ полоидальный угол, $\epsilon = r/R_0 \ll 1$ - тороидальность, $\Theta \sim \epsilon-$ угол наклона силовых линий на магнитной поверхности.

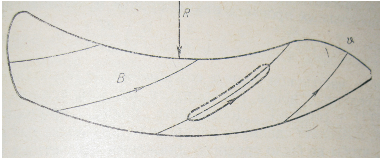

Рис. 4. Траектория ведущего центра («банан»).

Теперь, дрейфовая поверхность задаётся в виде

$$P_\zeta \approx m v_\parallel \left(1 + \epsilon \cos\theta\right) - \frac{q}{c} \int_0^r B_\theta \, dr = \mathrm{const.} \tag{18}$$

Разложение вблизи точки $(r_0, 0)$ (на экваторе) даёт сечение дрейфовой поверхности в виде

$$0.5\Omega\Theta^2 (r - r_0)^2 + \Delta v_\| \Theta (r - r_0) - v_g r_0 (\cos\theta - 1) = 0, \tag{19}$$

где $\Delta v_\| = v_\| (r_0, 0) + v_E/\Theta$, $v_g = \left(\mu B_0 + m v_\|^2\right)/m\Omega R_0$.

$$r - r_0 = \frac{1}{\Omega\Theta}\left[-\Delta v_\| \pm \sqrt{\Delta v_\|^2 + 2\Omega v_g r_0 (\cos\theta - 1)}\right]. \tag{20}$$

Если

$$\Delta v_\|^2 < 4\Omega v_g r_0 \tag{21}$$

- частицы запертые, если больше - пролётные.

Положительно заряженные пролётные частицы обходят магнитную ось против часовой стрелки и отклоняются внутрь от магнитной поверхности, если $\Delta v_{\parallel} > 0$.

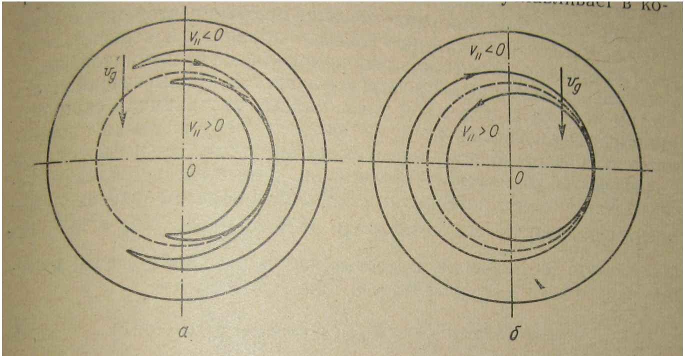

Рис. 3. Траектория «запертых» (*а*) и пролетных (*б*) частиц в плоскости (r, ϑ):

Если нашей целью является функция распределения кинетического равновесия при наличии слабых столкновений, то она должна быть не только функцией интегралов движения, но и локально максвелловской:

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{T}}, \tag{22}$$

где n, T - функции пространственных переменных, выраженных через интегралы движения. У запертых частиц распределение сдвинуто на величину, разную по знаку для электронов и ионов

$$u_{\|} = -\frac{cT}{qn_0 B_0}\frac{dn_0}{dr}, \tag{23}$$

где

$$n_0 = n\left(\frac{q}{c}\int_0^r B_\theta dr\right). \tag{24}$$

Причина сдвига в том, что в одну и ту же точку попадают частицы с внешних и внутренних банановых траекторий (в зависимости от знака $\Delta v_{\|}$), а из-за радиальной неоднородности плотности, их разное число. Поэтому есть асимметрия по тороидальной скорости, причём в разную сторону в зависимости от знака заряда.

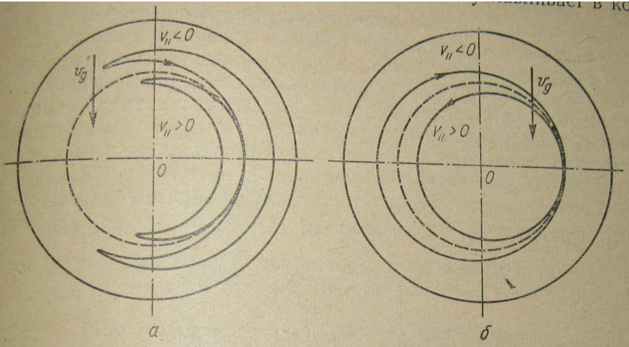

Рис. 3. Траектория «запертых» (*а*) и пролетных (*б*) частиц в плоскости (r, ϑ):

Оценим среднюю скорость запертых частиц относительно пролётных.

- превышение плотности частиц с продольной скоростью $\Delta v_{\parallel}$ над симметричными

$$\Delta n = -\frac{dn_0}{dr}\delta \approx -\frac{dn_0}{dr} v_{dr} \frac{2\pi r}{\Delta v_{\parallel}\Theta} \approx \rho\sqrt{\epsilon}/\Theta, \tag{25}$$

- излишек частиц движется с $\Delta v_{\parallel}$ это всё равно, что все частицы имеют скорость

$$u_{\parallel} \sim \Delta v_{\parallel} \frac{\Delta n}{n} \approx \epsilon \frac{cT}{qn_0 B_{\theta}} \frac{dn_0}{dr}. \tag{26}$$

- Оценим силу трения запертых частиц о пролётные:

$$F \sim \sqrt{\epsilon} \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right) n_0 m u_\parallel \sim \sqrt{\epsilon} \nu m \frac{cT}{qB_\theta} \frac{dn_0}{dr}. \tag{27}$$

Здесь множитель $\sqrt{\epsilon}$ учитывает долю запертых частиц, а эффективная частота столкновений соответствует рассеянию на угол ϵ.

- В изотермической плазме пролётные ионы движутся вместе с запертыми ионами, так как здесь обмен импульса наиболее эффективен. А запертые электроны трутся о пролётные, и все вместе - о ионы. Баланс сил даёт

$$\nu_{ee} \sqrt{\epsilon} n m_e \left(u_{\parallel e} - u_{\parallel i} \right) + \nu_{ei} m_e j_\parallel / e = 0. \tag{28}$$

Появляется бутстрэп-ток

$$I_{\parallel b} = -\sqrt{\epsilon} \frac{c}{B_\theta} \frac{dp}{dr}. \tag{29}$$

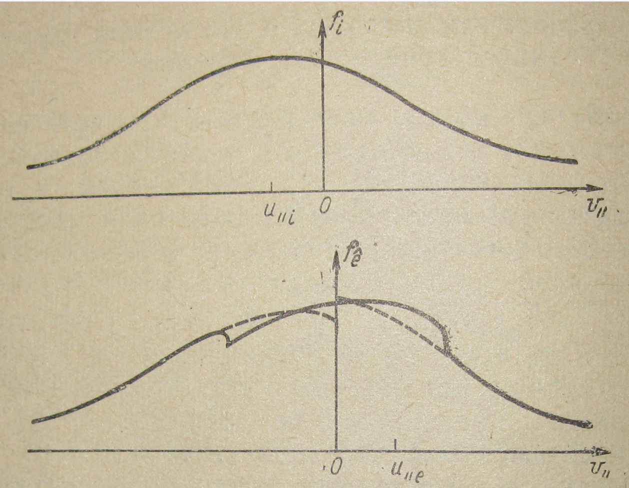

Рис. 2. Распределение электронов (нижний рисунок) и ионов (верхний) разреженной плазмы.

- Трение электронов о ионы приводит к затуханию торможению бутстрэп-тока, а значит - дрейфу плазмы наружу! Скорость дрейфа находится из баланса сил вдоль тора

$$\langle nv_r \rangle = -(\nu_{ee} + \nu_{ei}) \sqrt{\epsilon} \frac{\rho^2}{\Theta^2} \frac{dn_0}{dr} . \quad (30)$$

Это - неоклассическая диффузия.

- Климонтович Ю.Л. "Статистическая физика"М.: Наука, 1982
- Ишимару С. "Основные принципы физики плазмы"М.: Атомиздат, 1975
- Галеев А.А., Сагдеев Р.З. “Неоклассическая’ теория диффузии в сб. Вопросы теории плазмы т .7, с.205, М.: Атомиздат, 1973
- Морозов А.И., Соловьёв Л.С. "Движение заряженных частиц в электромагнитных полях в сб. Вопросы теории плазмы т .2, с.177, М.: Атомиздат, 1963
- Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. "Введение в нелинейную физику М.: Наука, 1988
- Кадомцев Б.Б. "Турбулентность плазмы"в сб. Вопросы теории плазмы т .4, с.188, М.: Атомиздат, 1964