

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет: **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра: **ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки: **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Кардаша Данила Юрьевича

Тема работы: Кинетические неустойчивости в длинной диамагнитной  
ловушке

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой

к.ф.-м.н.

в.н.с., ИЯФ СО РАН

Научный руководитель

к.ф.-м.н.

с.н.с., ИЯФ СО РАН

Беклемишев А.Д./ \_\_\_\_\_  
(подпись, МП)

Черноштанов И.С./ \_\_\_\_\_  
(подпись, МП)

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Дата защиты: «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Новосибирск — 2021 г.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Динамика частиц в гофрированном плоском слое</b>	<b>4</b>
1.1 Динамика частиц в продольной волне . . . . .	4
1.2 Энергия передаваемая волне . . . . .	7
<b>2 Структура электромагнитных волн в пузыре</b>	<b>10</b>
2.1 Основные уравнения . . . . .	10
2.1.1 Восстановление электрического поля . . . . .	12
2.2 Модель равновесия Котельникова . . . . .	13
2.3 Результаты расчетов . . . . .	14
<b>Заключение</b>	<b>19</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>19</b>
<b>Приложение А</b>	<b>21</b>
2.4 Тензор диэлектрической проницаемости для горячей плазмы	21

# Введение

Линейные системы, такие как открытые ловушки и системы с обращенным полем рассматриваются как одни из претендентов на роль компактных термоядерных реакторов с высокой плотностью энергии и относительно простой конструкцией. Современный концепт диамагнитного удержания [1], являющийся чем-то средним между газодинамической ловушкой (ГДЛ) и системой с обращенным полем, улучшает стандартное удержание ГДЛ, предлагая значительно уменьшенный размер реактора за счет увеличенной плотности частиц. Удержание энергии в диамагнитных "пузырях", вероятно, будет хуже, чем в системах с обращенным полем, но первоначальные оценки предполагают, что потребуются менее строгие условия для поддержания равновесия.

Основная идея диамагнитного удержания заключается в создании области, занятой плазмой с высоким значением  $\beta$  ( $\beta$  – отношение давления плазмы к давлению магнитного поля). В диамагнитном пузыре имеются три существенно отличные области - это внутренняя область, внешняя вакуумная область и переходной слой. Во внутренней области отсутствует магнитное поле, а плотность плазмы постоянна и равна максимальному значению. Во внешней вакуумной области магнитное поле примерно равно вакуумному магнитному полю, давление плазмы равно нулю. В переходном слое диамагнитного "пузыря" плотность плазмы и давление магнитного поля резко меняются, кроме того, функция распределения частиц в переходном слое заведомо не максвелловская (т.к. в переходном слое течет диамагнитный ток, обеспечивающий вытеснение магнитного поля из занятой плазмой области). Существует несколько различных моделей равновесия для данного слоя. Основной подход в данном случае заключается в предположении некоторой функции распределения, удовлетворяющей условия равновесия, из которой можно получить выражения для тока, а затем из

уравнения максвелла ( $rot\vec{B} = (4\pi/c)\vec{j}$ ) нахождение магнитного поля. Существует несколько моделей равновесия определяющих данную структуру. Например, функция распределения в виде вращающейся максвелловской функции распределения [2]. В данной работе рассмотрена некоторая простейшая модель равновесия [3] для анализа пространственной структуры электромагнитных волн.

Описанные выше условия диамагнитного удержания могут провоцировать возбуждение кинетических неустойчивостей, приводящих к раскачке высокочастотных колебаний плазмы. Магнитное поле практически полностью вытеснено плазмой, что может приводить к не сохранению магнитного момента и, возможно, хаотическому движению частиц с их быстрыми потерями [4]. Таким образом необходимо исследовать устойчивость положения равновесия при данной конфигурации. Количество потенциально опасных типов колебаний очень велико. Также существует большое количество механизмов их возбуждений. Основным интерес представляют кинетические неустойчивости. В особенности ожидаются возмущения с частотой порядка циклотронной частоты ионов. Такие неустойчивости могут иметь механизм похожий на механизм черенковского излучения и в этом случае энергия таких волн может изменяться по механизму резонансного взаимодействия. По-видимому, наибольшую опасность представляют поверхностные волны, проявляющиеся как колебания границы “пузыря”.

В данной работе проведена оценка энергии передаваемой от частиц поверхностной волне в простейшем приближении двумерного движения. Определен необходимый критерий неустойчивости в такой модели. Также исследована структура поверхностных электромагнитных волн в геометрии с продольной однородностью для неоднородности вдоль одной координаты.

# 1 Динамика частиц в гофрированном плоском слое

## 1.1 Динамика частиц в продольной волне

Рассматривается бесконечный плоский слой плазмы ограниченный двумя плоскостями с расстоянием между ними  $2a$ . Границы плазмы считаются резкой (ларморовский радиус частиц много мал по сравнению с характерным размером столба). Метод заключается в том, что рассматривается небольшое возмущение границ плазмы, при котором граница принимает форму гофрированной плоскости. Движение частиц предполагается бесстолкновительным, а столкновения с границами считаются абсолютно упругими. Границу плазмы можно описать соотношениями  $x = a + b \cos(kz - \omega t)$  и  $x = -a - b \cos(kz - \omega t)$ . Пример такой структуры показан на рис. 1.1. Условие малости возмущения означает слабую гофрировку, то есть  $a \gg b$ . Задача заключается в том, чтобы определить энергию, передаваемую частицами волне. Особую роль в этом играют резонансные частицы, в данном случае это частицы, которые будут оставаться в одном периоде гофрировки, т.е. те вдоль траектории которых фаза возмущения остается постоянной. Для простоты перейдем в систему отсчета, движущуюся с фазовой скоростью волны  $v_\phi = \omega/k$ . Изменение скорости частицы после соударения описывается следующими соотношениями:

$$(\vec{v}, \vec{l}) = (\vec{v}', \vec{l}), \quad (\vec{v}, \vec{n}) = -(\vec{v}', \vec{n}) \quad (1.1)$$

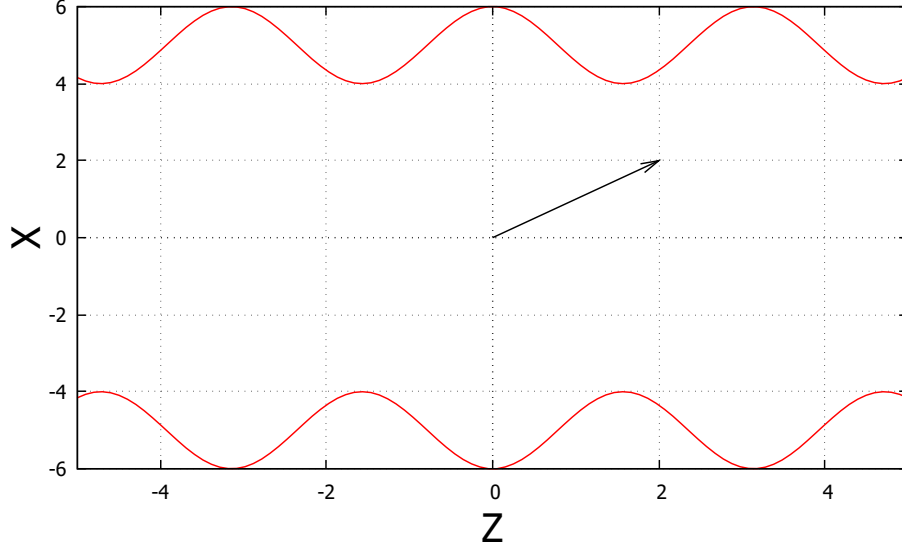


Рисунок 1.1: Пример структуры слоя. Красными линиями показаны границы плазмы, стрелкой - пример направления скорости частицы

Вектор  $\vec{l} = (-\alpha, 1)$  является касательным к гофрировке в точке соударения частицы с границей, а вектор  $\vec{n} = (1, \alpha)$  перпендикулярен к границе, здесь для краткости введено обозначение  $\alpha = kb \sin(kz_0)$ . Координата  $z_0$  – это координата точки в которой произошло столкновение, выражение для нее будет приведено ниже. Вектор  $\vec{v} = (v_x, v_z)$  – вектор скорости, которую имела частица до столкновения. Соответственно  $\vec{v}' = (v'_x, v'_z)$  – скорость частицы после столкновения. Далее рассматриваем сечение Пуанкаре [5] плоскостью  $x = 0$ , то есть ищем соотношение связывающее продольную скорость и координату частицы в моменты пересечения плоскости  $x = 0$ . В декартовых координатах система 1.1 принимает вид:

$$v_z - \alpha v_x = v'_z - \alpha v'_x, \quad \alpha v_z + v_x = -\alpha v'_z - v'_x \quad (1.2)$$

Разрешив эту систему относительно неизвестного вектора  $\vec{v}'$ , получим:

$$v'_z = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} v_z - \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} v_x, \quad v'_x = -\frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} v_x - \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} v_z \quad (1.3)$$

В выражении для  $\alpha$  фигурирует  $z_0$ , которое можно найти следующим об-

разом. Траектория частицы в декартовых координатах описывается соотношениями  $x = v_x t$  и  $z = z_b + v_z t$ . Условие пресечение частицы с границей можно записать в виде:

$$v_z t = z_0 - z_b, \quad v_x t = a + b \cos(kz_0) \quad (1.4)$$

Разделив первое уравнение на второе, т.о. избавимся от зависимости по  $t$  и получим секулярное уравнение на  $z_0$ :

$$\frac{v_x}{v_z} = \frac{a + b \cos(kz_0)}{z_0 - z_b} \quad (1.5)$$

Разрешим это уравнение в приближении малой гофрировки ( $a \gg b$ ). В нулевом приближении:  $z_0 = z_b + (v_z/v_x)a$ . Если взять решения в нулевом приближении как аргумент для косинуса, получим выражения для решения в первом порядке приближения малого параметра  $b$ :  $z_0 = z_b + (v_z/v_x)(a + b \cos(k(z_b + (v_z/v_x)a)))$ , также можем определить  $x$ -координату точки столкновения  $x_0 = a + b \cos(k(z_b + (v_z/v_x)a))$ . Из этого можем выразить время через которое координата по  $x$  снова станет равной нулю  $t = x_0/v'_x$  и найти продольную координату и скорость частицы в этот момент времени:

$$z'_b = z_0 + v'_z \frac{x_0}{v'_x}, \quad v'_z = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} v_z - \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} v_x \quad (1.6)$$

Таким образом, получено отображение, описывающее динамику частицы в волне. Оно может использоваться для исследования бесстолкновительно обмена энергией между поверхностной волной и частицами плазмы.

## 1.2 Энергия передаваемая волне

Очевидно, что энергия частицы сохраняется только в системе отсчета волны. В лабораторной системе отсчета можно посчитать изменение кинетической энергии частицы, которая передается волне при одиночном столкновении частицы с границей плазмы

$$\Delta w = \frac{m}{2}(v'^2 - v^2), \quad (1.7)$$

где  $v^2 = v_x^2 + v_z^2$  (аналогично для  $v'$ ). Чтобы посчитать изменение энергии, осуществим переход в систему отсчета волны с помощью замены:  $v_z \mapsto v_z - \frac{\omega}{k}$ , затем используем выражение 1.3, и переходим в обратно в лабораторную систему отсчета  $v_z \mapsto v_z + \frac{\omega}{k}$ :

$$\begin{aligned} \Delta w = \frac{m}{2} & \left( -\left(v_z - \frac{\omega}{k}\right)^2 - v_x^2 + \left[ \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} v_x + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \left(v_z - \frac{\omega}{k}\right) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \left(v_z - \frac{\omega}{k}\right) - \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} v_x + \frac{\omega}{k} \right]^2 \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

И учитывая малость параметра  $\alpha$ :

$$\Delta w \approx 2m\alpha v_x \frac{\omega}{k} \quad (1.9)$$

Далее используется метод, приведенный в [6], для оценки декремента затуханий Ландау. Для этого оценим число столкновений частиц с границей плазмы за 1 с как скорость движения частиц относительно волны, деленную на расстояние между горбами  $(v_z - (\omega/k))/\lambda$ , где  $(\lambda = 2\pi/k)$

Сначала следует определить условие при котором частицы являются “захваченными” (т.е. те которые могут оставаться в одном периоде гофрировки). Основным критерием таких частиц служит то, что  $z$ -компонента



скорости в системе отсчета волны изменит свой знак, т.о.:

$$\frac{v'_z}{v_z} < 0, \quad \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} - \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \frac{v_x}{v_z} < 0$$

Учтем малость параметра  $\alpha$ , тогда:  $2\alpha v_x/v_z > 1$ . Вернемся в лабораторную систему отсчета и оценим параметр  $\alpha$  его верхней границей  $\alpha \leq kb$  тогда:

$$|v_z - \frac{\omega}{k}| < 2kb|v_x| \quad (1.10)$$

Суммируя по всем частицам, захваченными волной, можно вычислить изменение энергии волны:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & \frac{1}{\pi} mkb\omega \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \int_{\frac{\omega}{k}}^{2kbv_x} (v_z - \frac{\omega}{k}) f(v_x, v_z) dv_z dv_x - \\ & - \frac{1}{\pi} mkb\omega \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \int_{-2kbv_x}^{\frac{\omega}{k}} (v_z - \frac{\omega}{k}) f(v_x, v_z) dv_z dv_x \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $f(v_x, v_z)$  – функция распределения.

При движении резонансной частицы в гофрированном цилиндре сохраняются (выражения написаны в системе отсчета, где гофрировка покоится) полная энергия  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = const$ ,  $y$ -компонента скорости  $v_y$  и адиабатический инвариант  $(a + b \cos(kz))v_x = const = (a + b)v_{x0}$ . Выражая  $v_x$  из выражения для адиабатического инварианта и подставляя его в выражение для полной энергии, получим

$$v_{x0}^2 \frac{a + b}{a + b \cos(kz)} + v_z^2 = const \quad (1.12)$$

Используя малость амплитуды волны  $b \ll a$ , преобразуем (1.12):

$$v_z^2 - v_{x0}^2 \frac{b}{a} \cos(kz) = const \quad (1.13)$$

Учитывая  $\dot{z} = v_z$  и предполагая  $kz \ll 1$ , найдем уравнение, описывающее

продольное движение резонансной частицы в системе отсчета волны

$$\begin{aligned}\dot{z} = v_z &= |v_{x0}| \sqrt{b/a} \sqrt{\cos(kz) - 1} \approx i \sqrt{b/(2a)} |v_{x0}| kz, \\ z &= z_0 \cos(\Omega_z t), \quad \Omega_z = \sqrt{\frac{b}{2a}} k |v_{x0}|.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Таким образом, время пролета резонансной частицы между гофрами порядка  $1/\Omega_z = \sqrt{2a/b}/|kv_{x0}| \sim \sqrt{2ab}/|v_{z0} - \omega/k|$ . За это время продольная скорость (в системе отсчета волны) меняет знак, а кинетическая энергия частицы (в лабораторной системе отсчета) изменяется на  $v_{z0}^2 - (v_{z0} - 2\omega/k)^2 = 4(\omega/k)(v_{z0} - \omega/k)$ . Таким образом, если разложить функцию распределения в интеграле 1.11 в области резонанса - нулевой член разложения просто сократится. В первом приближении остается только интеграл с первой производной по продольной скорости. Энергия, передаваемая в единицу времени от частиц поверхностной волне, оценивается аналогично случаю плазменной волны:

$$\frac{dW}{dt} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x^2 \left. \frac{\partial f(v_x, v_z)}{\partial v_z} \right|_{v_z=\omega/k} . \quad (1.15)$$

Таким образом можно сделать вывод, что волна может накачиваться энергией от частиц при наличии положительной производной функции распределения по продольной скорости.

## 2 Структура электромагнитных волн в пузыре

Для исследования пространственной структуры колебаний используем приближение холодной плазмы, предполагая, что фазовая скорость волн значительно превышает тепловую скорость частиц плазмы. Предполагается, что диамагнитная ловушка достаточно длинна, что позволяет пренебречь продольной неоднородностью. В качестве невозмущенной системы используем предложенную в статье [3] модель. Используемая в ней специфическая функция распределения ионов приводит к точному занулению магнитного поля внутри “пузыря” и плотности плазмы снаружи. Несмотря на нефизичность, такая структура позволяет легко найти возмущение полей вне переходного слоя, сосредоточившись на происходящих в нем процессах.

### 2.1 Основные уравнения

Уравнение для низкочастотных (с частотой много меньше плазменной частоты электронов) колебаний в длинном плазменном в приближении  $E_{\parallel} = 0$  (связанном с высокой подвижностью электронов вдоль магнитного поля) столбе можно записать в виде [7]:

$$(\mathbf{b}\nabla)_i \chi_{ik} (\mathbf{b}\nabla)_k B_{\parallel} + \frac{\omega^2}{c^2} B_{\parallel} = 0, \quad (2.1)$$

где  $B_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{B}$  – продольная компонента возмущения магнитного поля,  $\mathbf{b}$  – единичный вектор, направленный вдоль внешнего магнитного поля,  $\chi_{ik}$  – тензор, обратный тензору  $\varepsilon_{ik} = N_{\parallel}^2 \delta_{ik}$ ,  $N_{\parallel} = k_{\parallel} c / \omega$  – коэффициент преломления,  $\varepsilon_{ik}$  – тензор диэлектрической проницаемости.

Если можно пренебречь эффектами конечного ларморовского радиуса и компоненты тензора диэлектрической проницаемости удовлетворяют соотношениям  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$ , уравнение (2.1) записывается в компактной форме

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \chi_{ik} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x_k} + \frac{\omega^2}{c^2} B_{\parallel} = 0. \quad (2.2)$$

Для расчетов используется тензор диэлектрической проницаемости в приближении холодной плазмы  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{\perp} (\delta_{ik} - h_i h_k) + ig \varepsilon_{ikl} h_l + \varepsilon_{\parallel} h_i h_k$ , где  $\mathbf{h}$  – единичный вектор вдоль магнитного поля,  $\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum_s \omega_{ps}^2 / (\omega^2 - \Omega_s^2)$ ,  $g = \sum_s \omega_{ps}^2 \Omega_s / (\omega(\omega^2 - \Omega_s^2))$ ,  $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum_s \omega_{ps}^2 / \omega^2 \approx 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$ ,  $\omega_{ps}$  и  $\Omega_s$  – плазменная и циклотронная частота для частиц сорта  $s$ . Компоненты тензора  $\chi_{ik}$  равны

$$\chi_{11} = \chi_{22} = \frac{\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2}{(\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2)^2 - g^2}, \quad \chi_{12} = -\chi_{21} = -\frac{ig}{(\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2)^2 - g^2}. \quad (2.3)$$

Для колебаний с  $\omega \ll \Omega_e$  в плотной плазме с  $\omega_{pi} \gg \Omega_i$  (и с однозарядными ионами) компоненты тензора диэлектрической проницаемости можно упростить:

$$\varepsilon_{\perp} \approx 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \approx -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2},$$

$$g \approx \frac{\omega_{pi}^2 \Omega_i}{\omega(\omega^2 - \Omega_i^2)} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \Omega_e} = \frac{\omega_{pi}^2 \Omega_i}{\omega(\omega^2 - \Omega_i^2)} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega \Omega_i} = \frac{\omega}{\Omega_i} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} = \frac{\omega}{\Omega_i} \varepsilon_{\perp}. \quad (2.4)$$

В декартовых координатах уравнение (2.2) можно записать в виде (учитывается, что в холодной плазме  $\chi_{11} = \chi_{22}$  и  $\chi_{12} = -\chi_{21}$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_{11}(x) \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x} + ik_y \chi_{12}(x) B_{\parallel} \right) + ik_y \left( \chi_{21}(x) \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x} + ik_y \chi_{22} B_{\parallel} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} B_{\parallel} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_{11}(x) \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} + ik_y \frac{\partial \chi_{12}}{\partial x} - k_y^2 \chi_{11} \right) B_{\parallel} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При численном решении уравнения (2.5) на равномерной сетке удобно использовать следующую схему:

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{11}(x_{i+1/2})(B_{\parallel i+1} - B_{\parallel i}) - \chi_{11}(x_{i-1/2})(B_{\parallel i} - B_{\parallel i-1})}{\Delta x^2} + \\ + \left( \frac{\omega^2}{c^2} + ik_y \chi'_{12}(x_i) - k_y^2 \chi_{11}(x_i) \right) B_{\parallel i} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

т.е. задача сводится к поиску частот, при которых матрица  $(\chi_{11}(x_{i+1/2})\delta_{i+1,j} - (\chi_{11}(x_{i+1/2}) + \chi_{11}(x_{i-1/2}))\delta_{i,j} + \chi_{11}(x_{i-1/2})\delta_{i-1,j})/\Delta x^2 + (\omega^2/c^2 + ik_y \chi'_{12}(x_i) - k_y^2 \chi_{11}(x_i))\delta_{i,j}$  имеет нулевые собственные значения. Отметим что, решения уравнения 2.5 существуют только для ограниченного дискретного набора частот.

### 2.1.1 Восстановление электрического поля

Пусть известно решение уравнения (2.1). Найдём электрическое поле волны. В плоском случае, используя приближение  $E_{\parallel} = 0$ , из уравнения  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}/c$  найдём

$$\frac{i\omega}{c} B_{\parallel} = \frac{i\omega}{c} B_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad B_x = -N_{\parallel} E_y, \quad B_y = N_{\parallel} E_x. \quad (2.7)$$

Из уравнения  $\nabla \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{D}/c$ , где  $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ , следует

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{c} (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y) &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - ik_z B_y = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{ic}{\omega} N_{\parallel}^2 E_x, \\ -\frac{i\omega}{c} (\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y) &= -\frac{\partial B_z}{\partial x} + ik_z B_x = -\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{ic}{\omega} N_{\parallel}^2 E_y. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом,

$$-\frac{i\omega}{c} \chi_{ik}^{-1} E_k = -(\mathbf{h} \times \nabla B_{\parallel})_k, \quad E_i = -\frac{ic}{\omega} \chi_{ik} (\mathbf{h} \times \nabla B_{\parallel})_k. \quad (2.9)$$

В декартовых координатах

$$E_x = \frac{ic}{\omega} \left( \chi_{xx} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial y} - \chi_{xy} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x} \right), \quad E_y = -\frac{ic}{\omega} \left( \chi_{yy} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x} - \chi_{yx} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial y} \right), \quad E_z = E_{\parallel} = 0. \quad (2.10)$$

## 2.2 Модель равновесия Котельникова

Далее для анализа структуры колебаний используется модель равновесия предложенная в [3]. Пусть плазма с концентрацией частиц  $n_0$  занимает бесконечный слой с толщиной  $2a$ , магнитное поле на бесконечности однородное с напряженностью  $B_0$ . Направим ось  $z$  вдоль магнитного поля, ось  $x$  – поперек слоя плазмы. Считается, что функция распределения ионов равна  $f_i = (n_0/(2\pi V))\delta(v - V)H(V - (v_x + G(x)))$ , где  $G(x) = \Omega A_y/B_0$  – нормированная компонента векторного потенциала,  $\Omega = eB_0/(mc)$  – циклотронная частота ионов в поле  $B_0$  и  $H(x)$  – функция Хевисайда. В случае диамагнитного “пузыря” давление плазмы равно давлению магнитного поля, т.е.  $B_0 = \sqrt{4\pi m n_0} V$ . Распределение концентрации ионов выражается через функцию  $G(x)$ :

$$n(x) = \frac{n_0}{\pi} (\pi/2 + \arcsin(1 - G(x)/V)), \quad (2.11)$$

распределение векторного потенциала в переходном слое описывается уравнением

$$G''(x) = \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \sqrt{G(2V - G)}, \quad (2.12)$$

где  $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m}$  – плазменная частота ионов в “пузыре”. После домножения на  $G'(x)$  уравнение (2.12) можно проинтегрировать:

$$\int_0^{G/V} \frac{\sqrt{\pi} dg}{\sqrt{(g-1)\sqrt{g(2-g)} + \arcsin(g-1) + \pi/2}} = \frac{\omega_{pi}}{c}(x-a). \quad (2.13)$$

Постоянные интегрирования выбраны из условий  $B_z = (B_0/\Omega)G' = 0$  при  $G = 0$  (на границе переходного слоя и плазмы) и  $B_z = B_0 = \sqrt{4\pi m n_0}V$  при  $G = 2V$  (на границе переходного слоя и вакуума).

## 2.3 Результаты расчетов

Численный расчет структуры электромагнитных волн производился со следующими значениями параметров: скорость ионов в функции распределения  $V = 4,37709 * 10^7$  м/с (что равно тепловой скоростью протона с энергией 1 кэВ), магнитное поле в вакуумном пространстве  $B_v = 10^4$  Гс, ширина переходного слоя  $b = 6.34$  см. Концентрация во внутренней области диамагнитного пузыря ( $n_0$ ), где отсутствует магнитное поле, выбрана из соображений равенства давлений  $B_v^2/8\pi = n_0 T$  и при указанных выше параметрах равна  $n_0 \approx 2.5 * 10^{15}$  см<sup>-3</sup>.

Особый интерес представляют волны для которых фазовая скорость близка к скорости ионов:  $\omega/k_z \sim V$ . По-видимому такие волны, как было сказано ранее в п.1.2, могут обмениваться с частицами плазмы энергией по механизму резонансного взаимодействия Ландау.

Изменение значений циклотронной и плазменной частот во всех трех областях диамагнитного пузыря с переходным слоем как в модели Котель-

никова показано на рисунках 2.1 и 2.2 соответственно.

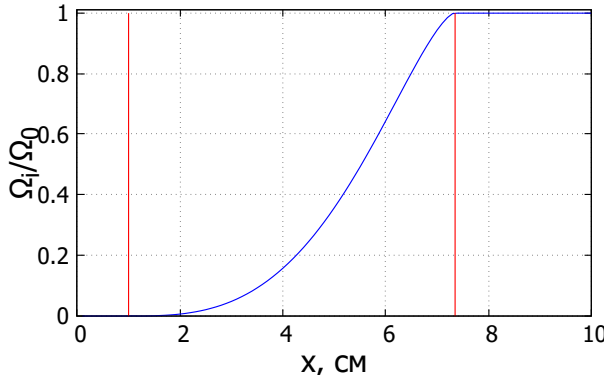


Рисунок 2.1: Изменение циклотронной частоты вдоль координаты  $x$

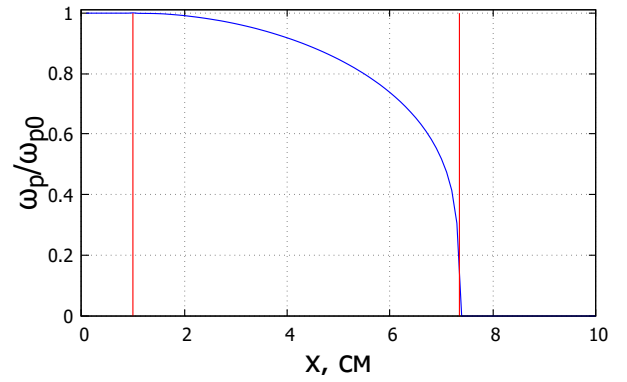


Рисунок 2.2: Изменение плазменной частоты вдоль координаты  $x$

При численном решении рассчитывались собственные значения для ряда частот в двух областях: в области низких частот (для наглядных решений имеющих малое количество нулей), и области близким к резонансным частотам (удовлетворяющим условию  $\omega/k_z \sim V$ ). Важно отметить, что при такой модели численного расчета уравнения собственные числа могут меняться скачками и смена знака еще не означает нахождение нулевых собственных значений в промежутке между значениями разного знака, поэтому следует отслеживать изменение собственных чисел на всем промежутке исследуемой области частот. И если есть основания полагать, что график собственных чисел плавно проходит через нулевое значение, то в таком случае можно достаточно точно определять значения собственных частот. На рисунке 2.4 показаны собственные значения для диапазона частот вблизи собственной частоты. На рисунке 2.3 показано характерное решение для продольной составляющей магнитного поля в области частот много меньших циклотронной частоты ионов, имеющее малое количество нулей, параметры волны:  $k_z = 0.5 k_y = 0$  собственная частота  $\omega \approx 1.8513 \cdot 10^{-5} c^{-1}$ .

Так же указанным выше способом можно восстановить электрические



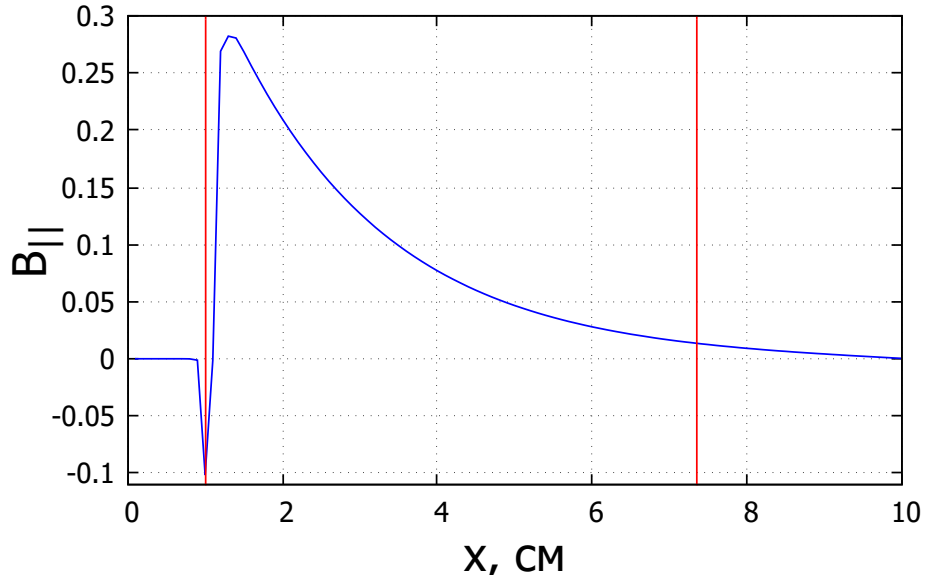


Рисунок 2.3: Продольная составляющая магнитного поля для малой частоты

поля для  $x$  и  $y$  составляющих ( 2.5). Следует отметить, что эти две компоненты сдвинуты на фазу  $\pi/2$  относительно друг-друга, из чего следует, что поляризация волны эллиптическая.

Далее исследуется поведение решений в резонансной области ( $V \sim \omega/k_z$ ) для вышеупомянутых параметров – это частоты порядка ионной циклотронной частоты ( $\omega_{res} \approx 0.23\Omega_i$ ). В этой области также имеется достаточное количество решений, так что можно говорить о существовании волн, которые могут обмениваться энергией с частицами по механизму резонансного взаимодействия Ландау. Пример поведения собственных значений указан на рис 2.6. Как видно из рис. 2.7, решения в этой области имеют большее количество нулей, но также экспоненциально затухают внутрь плазмы и наружу. Также заметно, что все возмущения сконцентрированы в переходном слое. Примеры электрических полей показаны на рис. 2.8.

Из проведенных расчетов можно сделать некоторые выводы:

- Возмущения сосредоточены в переходном слое, они экспоненциально убывают внутрь плазменного слоя и в сторону вакуумной области, причем намного быстрее в сторону внутренней области диамагнитно-

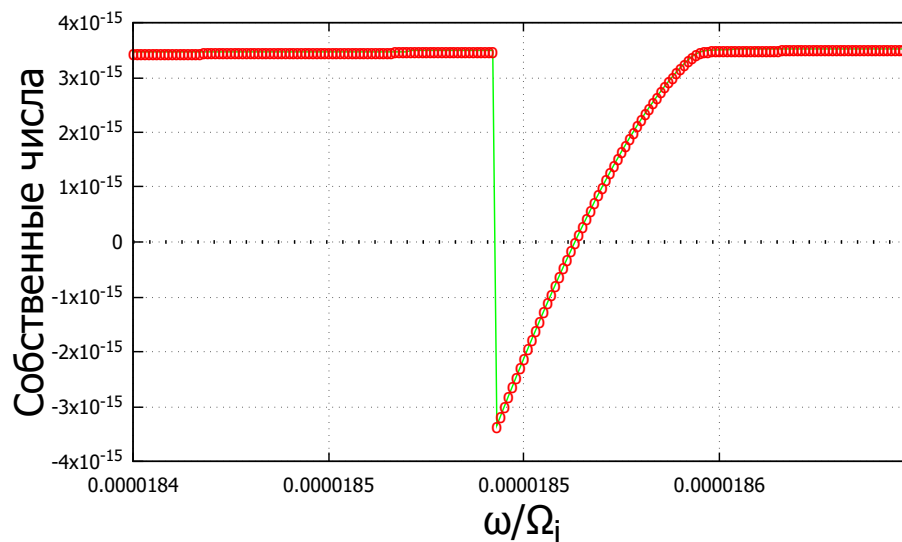


Рисунок 2.4: Поведение собственных чисел для малой частоты

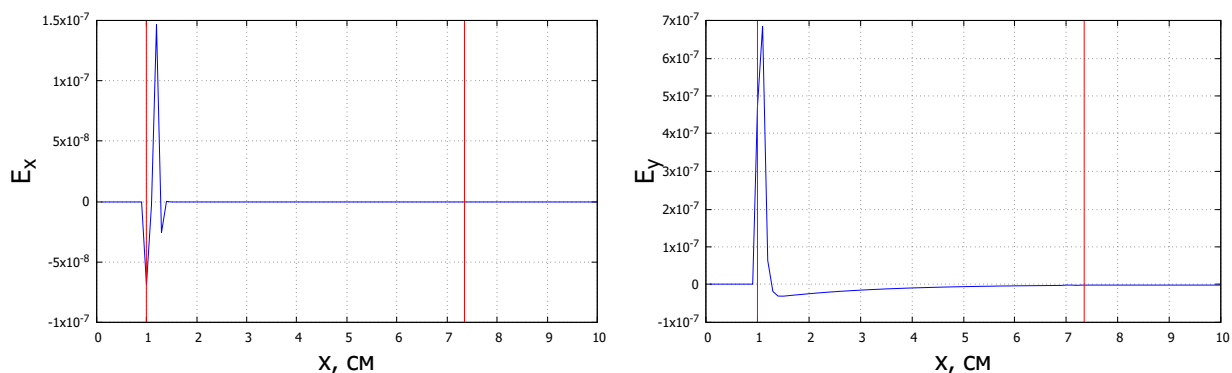


Рисунок 2.5: Пример  $x$ -составляющей (слева) и  $y$ -составляющей (справа) электрического поля для волны в низкочастотной области

го пузыря.

- Количество нулей решения возрастает с ростом частоты.

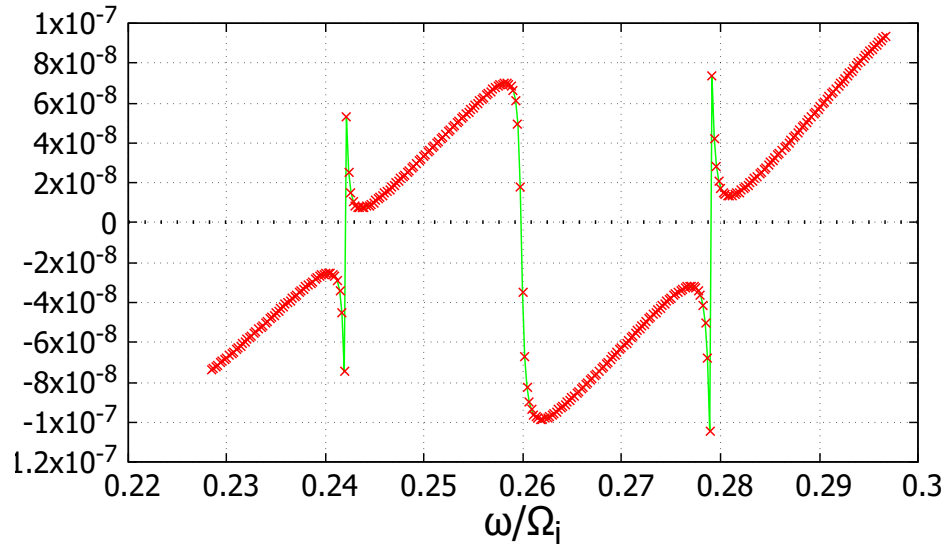


Рисунок 2.6: Пример поведения собственных чисел в резонансной области

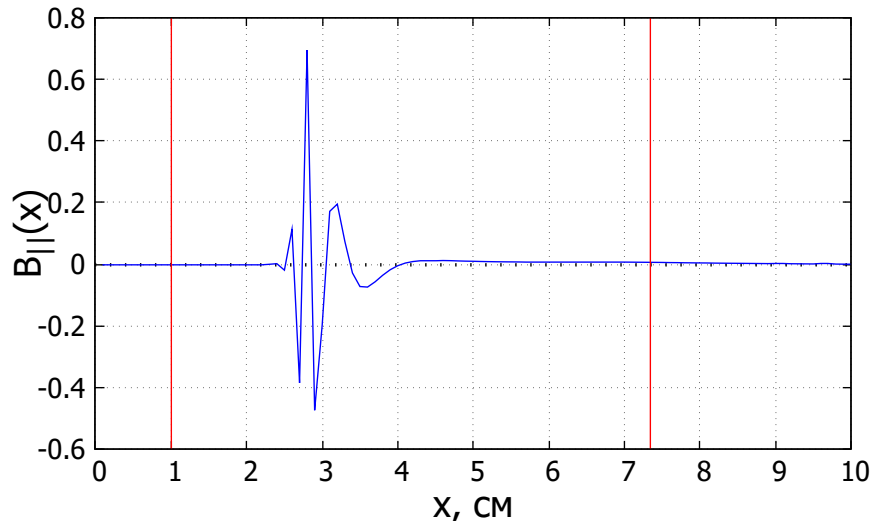


Рисунок 2.7: Пример продольного магнитного поля в резонансной области

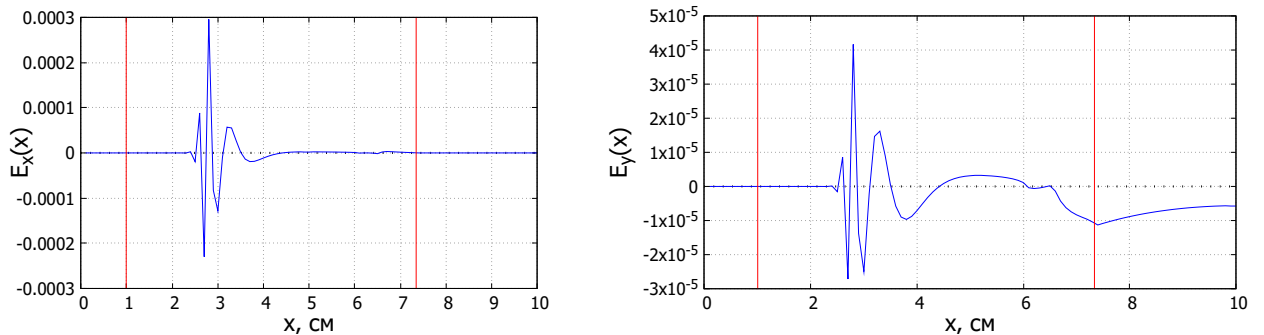


Рисунок 2.8: Пример  $x$ -составляющей (слева) и  $y$ -составляющей (справа) электрического поля для волны в резонансной области

# Заключение

Была исследована динамика частиц в гофрированном плоском слое. В приближении нулевого ларморовского радиуса частиц аналитически найдены оценки для энергии передаваемой от частиц плазмы поверхностным волнам в диамагнитном пузыре. Установлено, что возбуждение поверхностных волн возможно если имеется участок функции распределения с положительной производной по продольной скорости.

Исследована структура поверхностных электромагнитных волн в приближении холодной плазмы в приближении продольной однородности. Найдены поверхностные волны электрические и магнитные поля которых сосредоточены в переходном слое и экспоненциально затухают внутрь к однородному слою и наружу к вакуумной области. Найдены волн с фазовыми скоростями приблизительно равными скоростям ионов. По-видимому такие волны могут эффективно обмениваться энергией с частицами плазмы, кроме того могут эффективно рассеивать частицы плазмы, что может приводить к аномальным потерям.

В дальнейшем планируется исследование электромагнитных свойств плазмы с горячими ионами.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Beklemishev Alexei D. Improved plasma confinement at high beta // [AIP Conference Proceedings](#). — 2016. — Vol. 1771, no. 1. — P. 030001. — <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4964157>.
- [2] Stability of annular equilibrium of energetic large orbit ion beam / H. Vernon Wong, H. L. Berk, R. V. Lovelace, N. Rostoker // [Physics of Fluids B: Plasma Physics](#). — 1991. — Vol. 3, no. 11. — P. 2973–2986. — <https://doi.org/10.1063/1.859931>.
- [3] Kotelnikov Igor. On the structure of the boundary layer in a Beklemishev diamagnetic bubble // [Plasma Physics and Controlled Fusion](#). — 2020. — . — Vol. 62, no. 7.
- [4] Chernoshtanov Ivan. Collisionless particle dynamic in an axi-symmetric diamagnetic trap. — 2020. — 02.
- [5] Лихтенберг А. Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика — М.: Мир. — 1984. — С. 528.
- [6] Арцимович Л.А. Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. — М.: Атомиздат, 1979.—320 с.
- [7] Тимофеев А.В. Резонансные явления в колебаниях плазмы, М.: Физматлит. — 2000.
- [8] Александров А.Ф. Богданкевич Л.С. Рухадзе А.А. Основы физики плазмы. — Высшая школа, 1988. — С. 418.

# Приложение А

## 2.4 Тензор диэлектрической проницаемости для горячей плазмы

Для определения электромагнитных свойств плазмы в приближении горячей плазмы необходимо найти тензор диэлектрической проницаемости в центральной области с вытесненным магнитным полем используется выражение (4.1.11) из [8].

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_a \frac{e_a^2}{\epsilon_0 \omega} \int d^3p u_i \frac{\partial f_0}{\partial p_j} \left[ \frac{\rho}{\omega - (k, u)} - i\pi \delta(\omega - (k, u)) \right] \quad (2.14)$$

где  $f_0$  - невозмущенная функция распределения. В случае переходного слоя как в модели Котельникова функция распределения ионов имеет вид:

$$f_0(\vec{u}) = \frac{n_0}{2\pi V} \delta(v - V) f(u_z) \quad (2.15)$$

где  $v = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ , а  $f(u_z)$  - некоторое распределение по  $Z$  компоненте скорости. В простейшем случае  $f(u_z) = \delta(u_z - V_z)$ . Рассмотрим для начала только эрмитову компоненту тензора диэлектрической проницаемости (первое слагаемое в 2.14), учитывая вклад только ионов.

1)  $i = x, j = x$  :

$$Re(\varepsilon_{ij}^{(i)}) = \frac{n_0 m^2}{2\pi V} \int u_x \delta'(v - V) \frac{u_x}{v} \frac{v dv d\phi}{\omega - (k, u)}$$

Осуществляется в цилиндрические координаты, угол  $\phi$  - угол с осью  $x$ . Вектор  $\vec{k}$  выбирается следующим образом:  $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$

$$Int = \frac{n_0 m^2}{2\pi V} \int \frac{v^2 \cos^2(\phi) \delta'(v - V) dv d\phi}{\omega - k_z V_z - k_x v \cos \phi}$$

За счет производной по  $\delta$  - функции интеграл разбивается на два:

$$I_1 = 2V \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\phi)}{w - k_z V_z - k_x V \cos(\phi)} d\phi$$

Вынесем из знаменателя  $k_x V$  и обозначим  $c_1 = \frac{w - k_z V_z}{k_x V}$  Итого:

$$I_1 = \frac{2}{k_x} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi}{c_1 - \cos \phi} d\phi = \frac{2}{k_x} \left( \int_0^{2\pi} -\cos \phi d\phi + c_1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{c_1 - \cos \phi} d\phi \right)$$

Первый интеграл равен нулю, т.к. является интегралом косинуса по полному периоду, второй интеграл считаем, используя таблицу интегралов в итоге получаем:

$$I_1 = \frac{4\pi c_1}{k_x} \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 - 1}} - 1 \right) \quad (2.16)$$

Второй интеграл имеет вид:

$$I_2 = V^2 k_x \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\phi)}{(w - k_z V_z - k_x V \cos(\phi))^2} d\phi = \frac{1}{k_x} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\phi)}{(c_1 - \cos(\phi))^2} d\phi$$

Аналогично, используя таблицы интегралов, получаем:

$$I_2 = \frac{2\pi c_1}{k_x} \left( \frac{3c_1 - 2c_1^3 - 2\sqrt{c_1^2 - 1} + 2c_1^2 \sqrt{c_1^2 - 1}}{(c_1^2 - 1)^{3/2}} \right) \quad (2.17)$$

Таким образом получаем выражение для  $\varepsilon_{xx}$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\omega_p^2}{\omega k_x V} \frac{c_1^2}{(c_1^2 - 1)^{3/2}} \quad (2.18)$$

2) Для случая  $i = y$ ,  $j = y$  все аналогично, только  $\cos^2 \rightarrow \sin^2$  в знаменателе интегралов, тогда получается:

$$I_1 = \frac{2}{k_x} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi}{c_1 - \cos \phi} d\phi = \frac{4\pi}{k_x} (c_1 - \sqrt{c_1^2 - 1})$$

$$I_2 = \frac{1}{k_x} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\phi) \cos(\phi)}{(c_1 - \cos \phi)^2} d\phi = \frac{-2\pi}{k_x} \left( \frac{1 - 2c_1^2 + 2c_1 \sqrt{c_1^2 - 1}}{\sqrt{c_1^2 - 1}} \right)$$

Таким образом выражение для  $\varepsilon_{yy}$ :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\omega_p^2}{\omega k_x V \sqrt{c_1^2 - 1}} \quad (2.19)$$

3) случай Антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{xx}^A = -i \frac{\omega_p^2}{\omega k_x V} \frac{c_1^2}{\sqrt{1 - c_1^2}} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{yy}^A = -i \frac{\omega_p^2 * \sqrt{1 - c_1^2}}{\omega k_x V} \quad (2.21)$$

Таким образом ионный вклад в тензор диэлектрической проницаемости для функции распределения 2.15 имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \frac{\omega_p^2}{\omega k_x V} \frac{\left(\frac{\omega - k_z V_z}{k_x V}\right)^2}{\left(\left(\frac{\omega - k_z V_z}{k_x V}\right)^2 - 1\right)^{3/2}} - i \frac{\omega_p^2}{\omega k_x V} \frac{\left(\frac{\omega - k_z V_z}{k_x V}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega - k_z V_z}{k_x V}\right)^2}} \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(i)} = \frac{\omega_p^2}{\omega k_x V \sqrt{\left(\frac{\omega - k_z V_z}{k_x V}\right)^2 - 1}} - i \frac{\omega_p^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega - k_z V_z}{k_x V}\right)^2}}{\omega k_x V} \quad (2.23)$$

Компонента тензора  $\varepsilon_{zz}$  не так интересна в плоской случае, так что ее значение может ограничиваться только электронным вкладом. Электронный вклад в тензор диэлектрической проницаемости в случае холодных электронов имеет известное значение:  $\varepsilon_{ij}^{(e)} = \varepsilon_{\perp}^{(e)} (\delta_{ij} - h_i h_j) + i g^{(e)} \varepsilon_{ijl} h_l + \varepsilon_{\parallel}^{(e)} h_i h_j$ , где  $\mathbf{h}$  – единичный вектор вдоль магнитного поля. При учете только электронов:  $\varepsilon_{\perp}^{(e)} = -\omega_{pe}^2 / (\omega^2 - \Omega_e^2)$ ,  $\varepsilon_{\parallel}^{(e)} = -\omega_{pe}^2 / \omega$ , и  $g^{(e)} = \omega_{pe}^2 \Omega_e / (\omega(\omega^2 - \Omega_e^2))$ .



Таким образом, если магнитное поле направлено только вдоль  $z$ , то:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{xx}^{(i)} + \varepsilon_{\perp}^{(e)} & ig^{(e)} & 0 \\ -ig^{(e)} & 1 + \varepsilon_{yy}^{(i)} + \varepsilon_{\perp}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel}^{(e)} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$