

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования**

**«Новосибирский национальный исследовательский  
государственный университет»**

**(Новосибирский государственный университет, НГУ)**

**Физический факультет**

**Выпускная квалификационная бакалаврская работа**

Кафедра физики плазмы

---

(название кафедры)

Минаков Владимир Алексеевич  
(фамилия, имя, отчество студента)

---

**Название работы:**

Неустойчивость длинного протонного пучка  
в плазменном кильватерном ускорителе

---

---

**Научный руководитель:**

д-р физ.-мат. наук, доцент Лотов Константин Владимирович  
(звание, фамилия, имя, отчество, роспись)

---

**Новосибирск — 2014 год**

# Оглавление

1	Введение	2
2	Моделирование	5
3	Результаты	8
4	Заключение	19
	Литература	20

# 1: Введение

Плазма способна выдерживать электрические поля в  $10^2 - 10^3$  раз большие, чем традиционные металлические ускоряющие структуры. При достаточно большом поле электрон будет вырван из металла. Плазма — это состояние, в котором электроны оторваны от ионов, потому она не боится больших полей. Большие поля позволяют увеличить темп ускорения, этим обусловлен интерес к плазменному кильватерному ускорению.

В кильватерном ускорителе в плазменную ячейку запускается два пучка: драйвер и витнесс. Витнесс — это ускоряемый пучок, состоящий из заряженных частиц. Драйвер — это высокоэнергичный пучок заряженных частиц или же лазерный импульс. При прохождении сквозь плазму он расталкивает электроны, тяжелые же ионы остаются на своих местах. Электроны начинают колебаться вокруг своих положений равновесия, тем самым создавая волну, в поле которой и ускоряется витнесс.

Электронные и лазерные драйверы относительно просты в получении. С их использованием проведено множество экспериментов, и получены свои рекорды. Энергия частицы в заряженном драйвере должна быть достаточно велика, чтобы он двигался со скоростью, близкой к скорости света. Масса протона гораздо больше массы электрона, а потому частицы протонного драйвера должны обладать значительно большей энергией. Таких пучков не так много в мире, и работать с ними достаточно трудно. Большим плюсом использования протонного пучка является то, что он содержит достаточную энергию, чтобы уско-

рительное число электронов до энергий порядка ТэВ в одной плазменной секции.

Поле, которое способна выдержать плазма, хоть и большое, но не бесконечное и по порядку величины равно  $E_0 = \sqrt{4\pi n_e c^2 m_e}$ , где  $n_e$  — это плотность электронов плазмы,  $c$  — скорость света,  $m_e$  — масса электрона. Плазменная длина волны равна  $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p = \sqrt{\pi m_e c^2/n_e e^2}$ , где  $\omega_p$  — это плазменная частота. Для эффективного ускорения необходимо получить как можно большие поля, для этого необходимо увеличивать плотность плазмы, что приводит к уменьшению длины волны. В плазменном ускорении используется плазма с плотностью  $n_0 \approx 7 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$  и выше. При такой плотности длина волны будет практически равна 1 мм. Для возбуждения плазменной волны, длина которой составляет 1 мм или меньше, необходимо сжать протонный пучок в продольном направлении до субмиллиметровых размеров. Современные протонные пучки имеют длину около 10 см, и такое сильное их сжатие не представляется возможным при использовании традиционных технологий. Если же пучок имеет резкий фронт, то плазменная волна сама нарежет его на большое число микросгустков нужной длины. Дробление пучка на сгустки вызвано самомодуляционной неустойчивостью. Появившиеся в результате сгустки резонансно раскачивают плазменную волну.

Для подтверждения физических принципов, а именно развития самомодуляции и выяснения возможности ускорения электронов в плазме, в ЦЕРНе планируется проведение эксперимента AWAKE. В качестве драйвера будет использован пучок протонов с синхротрона SPS, имеющий энергию 400 ГэВ. Этот пучок не имеет резкого переднего фронта. При запуске такого пучка в плазму возможно развитие шланговой и других неустойчивостей, быстро разрушающих пучок. Для решения этой проблемы в плазму совместно с пучком запускают короткий лазерный импульс. Они синхронизированы так, что импульс находится в середине пучка, и они летят со скоростью, близкой к скорости света. В плазменной ячейке газ, ионизуясь лазерным

импульсом, становится плазмой. Таким образом, половина пучка, не имеющая резкого фронта, проходит сквозь нейтральный газ, не возмущая его. Взаимодействует с плазмой только вторая половина пучка. То есть плазма видит пучок с резким передним фронтом, а значит самомодуляция разовьется так, как нам необходимо. Далее пучок самомодулируется на расстоянии 4 метра, на оставшихся 6 метрах ячейки он раскачивает волну, в которой электронный сгусток ускоряется до энергии порядка 2 ГэВ.

В этой работе мы численно исследуем чувствительность возбуждаемых плазменных полей к вариациям параметров пучка и плазмы, указанных в таблице 1.1. Отклик поля на малые изменения характеризует уровень флуктуаций экспериментальных результатов от выстрела к выстрелу. Исследование больших изменений помогает идентифицировать эффекты, ограничивающие рост поля, и соответственно найти пути для его повышения.

Таблица 1.1: Исходные параметры эксперимента AWAKE и обозначения.

Параметр, обозначение	Величина
Плотность плазмы, $n_0$	$7 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$
Атомная масса ионов плазмы, $M_i$	85.5
Число частиц в целом пучке, $N_b$	$3 \times 10^{11}$
Длина пучка, $\sigma_{zb}$	12 см
Радиус пучка, $\sigma_{rb}$	0.02 см
Энергоразброс пучка, $\delta W_b$	0.35%
Угловой разброс пучка, $\delta\alpha_b = \epsilon_b/\sigma_{rb}$	$4.5 \times 10^{-5}$
Положение лазерного импульса относительно центра пучка, $\xi_s$	0 см

Ключевым параметром, определяющим поведение кильватерного поля, является пиковый ток или, что эквивалентно, приращение поля за счет одного микросгустка. Этот параметр не сильно отличается для современных протонных ускорителей ТэВного класса, поэтому качественные результаты, полученные для SPS, применимы и к другим ускорителям.

Основные результаты данной работы изложены в препринте [1].

## 2: Моделирование

В плазменном кильватерном ускорении значительную роль играет численное моделирование. В мире существует не так много кодов, адекватно описывающих кильватерную задачу. Одним из этих кодов является квазистатический осесимметричный 2d3v код LCODE [2–5], разработанный в ИЯФ СО РАН К.В. Лотовым и А.П. Соседкиным. Именно с помощью него мы проводили моделирование в данной работе. Мы используем цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$ , где  $z$  измеряется от входа в плазму, также используется сопутствующая координата  $\xi = z - ct$ , отсчет которой ведется от центра пучка.

Код получает информацию о задаче в виде конфигурационного файла, представляющего собой текстовый файл, в котором описаны все необходимые для вычислений параметры задачи. Все физические величины, используемые в коде, обезразмерены на соответствующие им плазменные величины. Так все расстояния обезразмерены на  $c/\omega_p$ , все времена на  $\omega_p^{-1}$ , массы на  $m_e$ , плотности на  $n_0$ .

Для получения отклика кильватерного поля на изменение какого-либо параметра мы запускаем серию вычислений, в которых все параметры кроме одного остаются неизменными. В некоторых случаях, например для вариации радиуса драйвера, этому соответствует изменение одного-двух значений, но некоторые вариации требуют более сложной модификации входных данных.

Плотность плазмы напрямую не является входным параметром LCODE, но сокрыта в коэффициентах обезразмеривания других величин. Поэтому для реализации варьирования плотности плазмы

был написан скрипт, автоматически пересчитывающий более двадцати значений с использованием соответствующих степенных коэффициентов.

С другой сложностью мы сталкиваемся, когда варьируем положение лазерного импульса относительно центра пучка. Так как скорости обоих пучков почти равны скорости света, то их положение друг относительно друга почти не меняется. Поэтому реакция плазмы на два пучка такая же, как на один пучок с резкой границей, расположенной в точке, где находится лазерный импульс. Производить вычисления для той части пучка, что летит перед импульсом, не имеет смысла. Проблема заключается в ограниченности шаблонов формы пучка, заложенных в код. Задание соответствующей исходным параметрам формы пучка напрямую возможно, однако же изменение положения лазерного импульса относительно протонного пучка приводит к изменению формы существенной для нас части пучка на такую, что для её генерации только лишь средствами LCODE уже не обойтись. Для преодоления этого затруднения можно использовать то, что после завершения каждого шага по времени LCODE сохраняет информацию о частицах протонного пучка в файл. Пучок нужной формы можно получить модификацией такого файла, сгенерированного для целого пучка гауссовой формы, внешними средствами. Затем следует использовать возможность LCODE продолжить вычисления с произвольным файлом описания частиц пучка. Единственное затруднение заключается в том, что для генерации изначального файла LCODE требует проведения вычислений как минимум одного шага по времени. Чтобы исключить изменение формы пучка за время этого шага, его продолжительность была уменьшена в  $10^5$  раз по отношению к последующим шагам, используемых для моделирования.

В данной работе проведено варьирование восьми параметров. Для каждого параметра рассчитано около десяти вариантов. Каждый посчитанный вариант представляет из себя несколько десятков файлов самых

различных форматов и содержания: графики, изображения, числовые массивы. Из-за большой длительности вычислений (порядка недели) применялся запуск LCODE с выводом как можно большего количества диагностической информации, что позволяет максимально полно и разносторонне анализировать результат без проведения повторных вычислений.

### 3: Результаты

Основным результатом данной работы являются группы графиков зависимости амплитуды кильватерного поля от расстояния, пройденного пучком. Графики сгруппированы так, что в каждой группе мы меняем один параметр.

Амплитуду кильватерного поля мы будем характеризовать максимумом  $\Phi_{\max}(z)$  безразмерного кильватерного потенциала  $\Phi(z, \xi)$  на оси:

$$\Phi(z, \xi) = \frac{\omega_p}{cE_0} \int_{\xi}^{\infty} E_z(z, \xi') d\xi', \quad (3.1)$$

где  $E_z$  — это электрическое поле на оси. Вычисление максимума производится по всем  $\xi$  при фиксированном  $z$ . Причиной выбора именно этой величины является меньший уровень шумов, чем у  $E_z$ . Мы также используем размерную величину  $\Phi_m = E_0 \Phi_{\max}$ , чтобы характеризовать ускоряющий градиент.

Зависимость кильватерной амплитуды от плотности плазмы [Рис. 3.1], в основном, определяется скейлингом  $E_0 \propto \sqrt{n_0}$ . То есть, чем выше плотность плазмы, тем большее поле она может выдержать. При больших плотностях плазмы радиус пучка составляет несколько плазменных длин волн, и потому может развиваться филаментация пучка. Это трехмерное явление, и потому не может быть получено при использовании осесимметричного кода. Точная толщина пучка, при которой разовьется филаментация, пока не известна, и потому мы строим кривые, соответствующие наибольшим плотностям плазмы тонкими линиями, чтобы показать, что они могут оказаться нереалистичными.

Уровень насыщения поля можно понять из зависимости безраз-

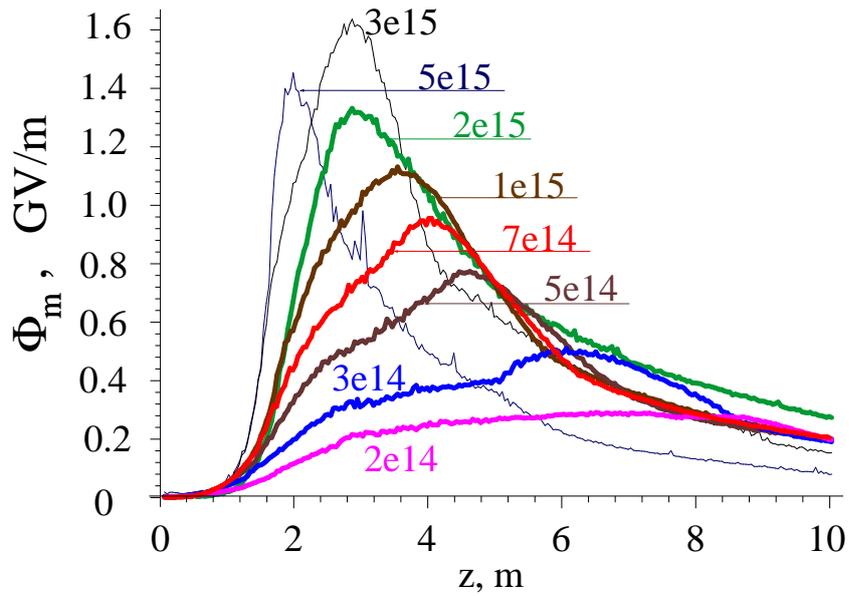


Рис. 3.1: Зависимость  $\Phi_m(z)$  от расстояния при различных плотностях плазмы  $n_0$ .

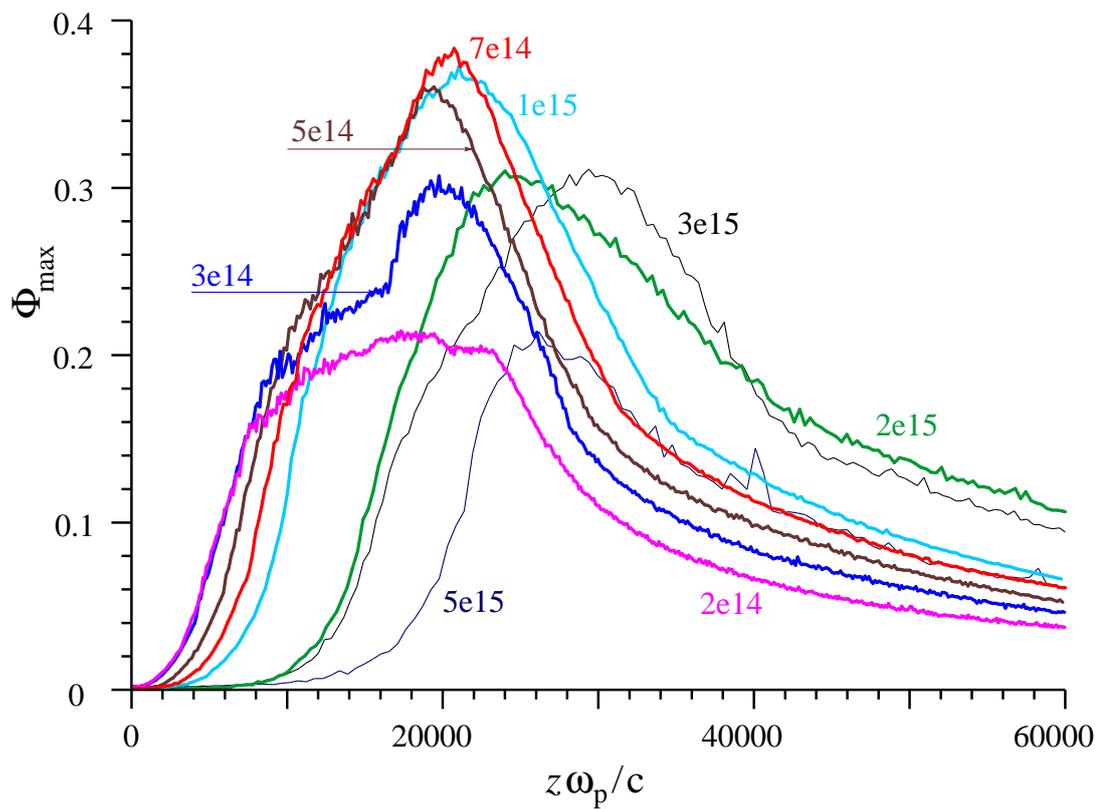


Рис. 3.2: Зависимость безразмерной кильватерной амплитуды  $\Phi_{\max}$  от безразмерного расстояния  $z\omega_p/c$  при различных плотностях плазмы. Графики окрашены таким же образом, как и на рисунке 3.1.

мерной амплитуды  $\Phi_{\max}$  от безразмерной координаты [рис. 3.2]. Мы видим, что существует оптимальная плотность плазмы, при которой амплитуда безразмерного поля максимальна. При больших плотностях кильватерное поле ограничено нелинейным увеличением длины волны. Приближенная теория этого эффекта [6] дает следующее выражение для амплитуды кильватерной волны в момент оптимальной группировки микросгустков:

$$\Phi_{\max} = \left( \frac{4\beta\Delta E}{\alpha E_0} \right)^{1/3}, \quad (3.2)$$

где  $\Delta E$  — это величина поля от одного микросгустка,  $\alpha \approx 0.1$  и  $\beta \approx 0.5$  геометрические факторы, зависящие от радиуса пучка. Формула (3.2) дает  $\Phi_{\max} \approx 0.4$  для исходных параметров. Поскольку плазменная волна имеет слабую нелинейность и радиус пучка больше чем  $c/\omega_p$ , вклад  $\Delta E$  одного микросгустка определяется, в основном, плотностью пучка. Таким образом  $\Delta E$  практически не меняется при вариации плотности плазмы. Предельное поле (3.2) зависит от плотности плазмы через  $E_0$  и  $\alpha$ . По сравнению с базовым вариантом ( $n_0 = 7 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$ ), в варианте с плотной плазмой с  $n_0 = 5 \times 10^{15} \text{см}^{-3}$ ,  $E_0$  примерно в 2.7 раз больше и  $\alpha$  в 2 раза больше, также на 40% меньше  $\Phi_{\max}$ , что находится в хорошем согласии с рисунком 3.2. Кильватерная амплитуда при высоких плотностях, таким образом, ограничена нелинейным насыщением роста волны.

Теоретически [6] получено число сгустков, когерентно возбуждающих волну:

$$N_{\text{eff}} = \left( \frac{4\beta E_0^2}{\alpha \Delta E^2} \right)^{1/3}. \quad (3.3)$$

После умножения на плазменную длину волны  $2\pi c/\omega_p$  мы получаем длину  $L_{\text{eff}}$  пучка, которая эффективно возбуждает волну. Для исходных параметров  $N_{\text{eff}} = 130$  и  $L_{\text{eff}} = 16$  см, что приблизительно равно длине пучка. При меньших плотностях плазмы длина волны больше, число сгустков уменьшается, поле не достигает насыщения и приблизительно равно  $N\Delta E \propto \sqrt{n_0}$ . Кривые для низкой плотности

следуют этому соотношению достаточно хорошо, так для кривых с плотностью  $n_0 = (5, 3, 2) \times 10^{14} \text{см}^{-3}$  максимумы амплитуд относятся как  $\sqrt{5} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ . Амплитуда при низких плотностях плазмы ограничена длиной пучка, а исходные параметры находятся близко к границе между нелинейным ограничением и ограничением, связанным с длиной пучка.

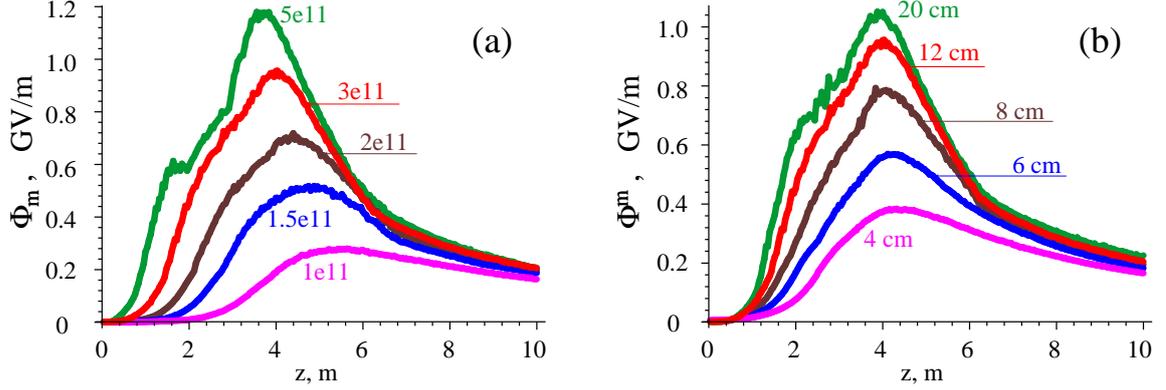


Рис. 3.3: Зависимость кильватерной амплитуды  $\Phi_{\max}^m$  от расстояния при различном числе частиц в пучке  $N_b$ (a) и различном пиковом токе  $\sigma_{zb}$ (b).

Зависимость кильватерной амплитуды от числа частиц в пучке как для случая фиксированной длины пучка [рис. 3.3(a)], так и для случая фиксированного пикового тока [рис. 3.3(b)] также определяется наличием двух вышеупомянутых ограничений. Чтобы наглядно показать это, мы построим график максимума кильватерной амплитуды в зависимости от варьируемых параметров. Для фиксированной длины пучка  $\Delta E \propto N_b$ , и формула (3.2) дает нам скейлинг  $\Phi_m \propto \Phi_{\max} \propto N_b^{1/3}$  (тонкая непрерывная линия на рисунке 3.4(a)). Если кильватерная амплитуда ограничена длиной пучка, тогда она прямо пропорциональна числу частиц, возбуждающих волну, и  $\Phi_m \propto N_b$  (тонкая пунктирная линия на рисунке 3.4(a)). Исходный набор параметров (он всегда окрашен в красный цвет) находится в переходной области.

Для фиксированного тока пучка нет простого скейлинга для описания максимальной амплитуды кильватерного поля в режиме нелинейного ограничения. Для однородного пучка с постоянным

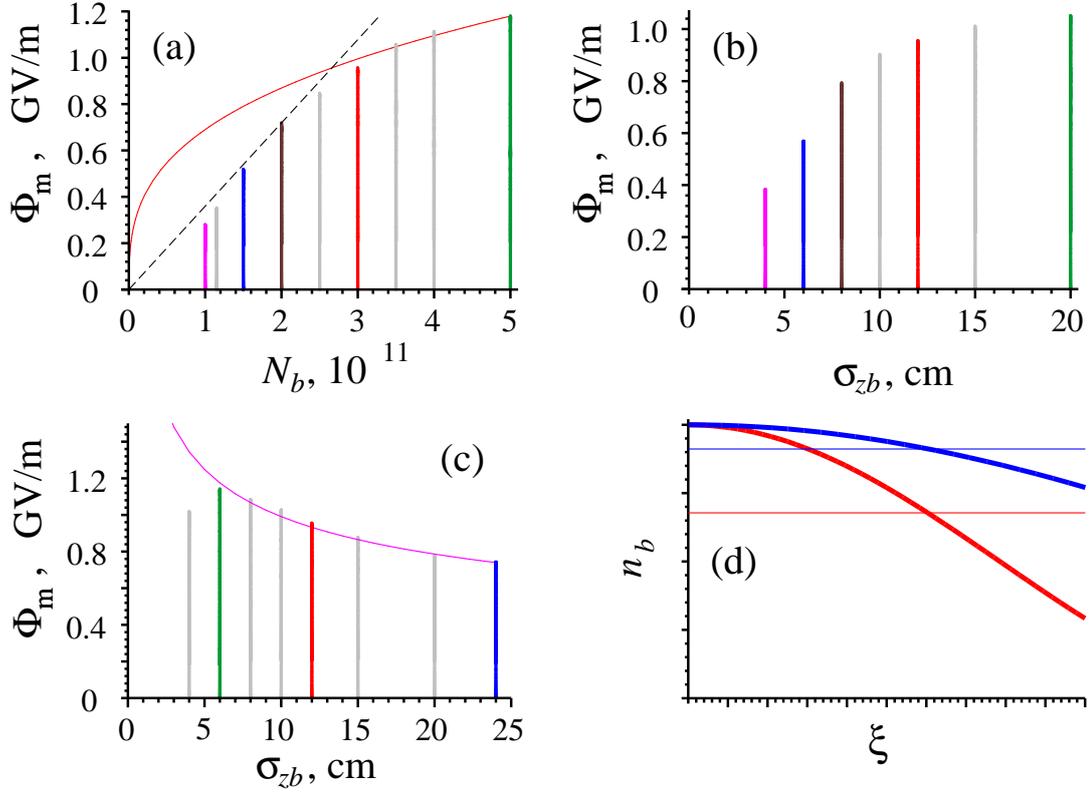


Рис. 3.4: Абсолютный максимум кильватерной амплитуды  $\Phi_m$  (высота столбиков) в зависимости от варьируемого параметра: число частиц в пучке для фиксированной длины пучка (а), длина пучка для фиксированного пикового тока (б), длина пучка для фиксированного числа частиц в пучке (с), Иллюстрация настоящих (толстые линии) и средних (тонкие линии) плотностей пучка для обычного (красный) и удлиненного (синий) пучков (d).

током амплитуда поля не должна зависеть от длины пучка. Наш же пучок имеет гауссовское распределение плотности, так что средняя по возбуждающему поле интервалу плотность оказывается меньшей, чем пиковая. Чем длиннее пучок, тем ближе средняя плотность к пиковой [рис. 3.4(d)]. Поскольку среднее значение  $\Delta E$  пропорционально средней плотности, мы наблюдаем слабый рост амплитуды с ростом числа частиц в нелинейно ограниченной части на рисунке 3.4(b). В той части, где имеется ограничение по длине,  $\Phi_m \propto N_b \propto \sigma_{zb}$ .

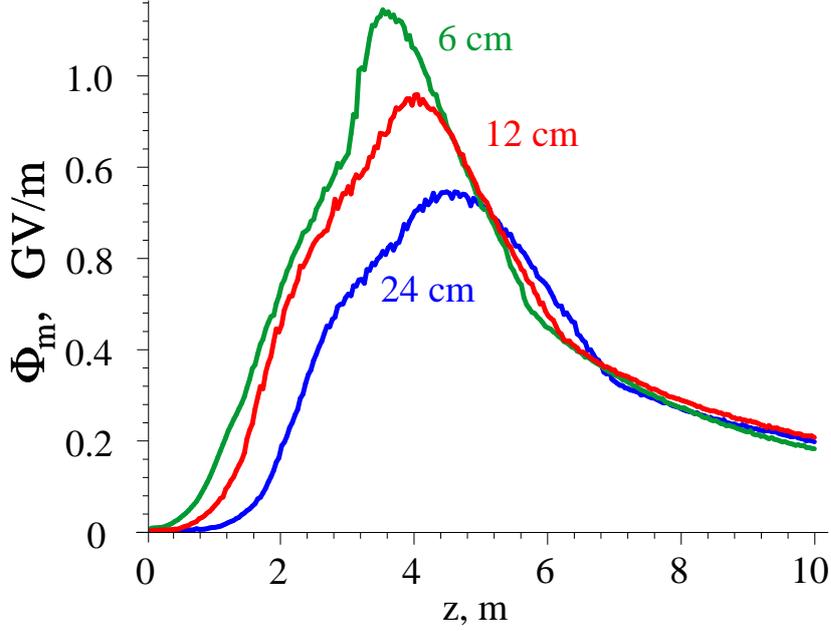


Рис. 3.5: Зависимость кильватерной амплитуды  $\Phi_{\max}$  от расстояния при различных длинах пучка при постоянном числе частиц в пучке.

Если изменять длину пучка, не меняя число частиц [рис. 3.5], то результат будет совпадать со скейлингом (2). Теперь  $\Delta E \propto n_{b0} \propto \sigma_{zb}^{-1}$ , и  $\Phi_m \propto \sigma_{zb}^{-1/3}$ . Этот скейлинг показан на рисунке 3.4 (с) тонкой линией. Для малых  $\sigma_{zb}$  длина пучка уменьшается быстрее, чем  $N_{\text{eff}} \propto \sigma_{zb}^{2/3}$ , так что короткие пучки находятся в области ограничения по длине с  $\Phi_m \approx \text{const}$ .

Как мы видим из рисунка 3.6, исходный радиус пучка является оптимальным для данного набора других параметров. Этот оптимум возникает из-за двух эффектов. При больших радиусах вклад  $\Delta E$  микросгустка уменьшается как  $\sigma_{rb}^{-2}$ . Полная кильватерная амплитуда тоже убывает как  $\sigma_{rb}^{-2}$ , поскольку при  $\sigma_{rb} > 0.2$  мм оно ограничено количеством микросгустков.

При малом радиусе у пучка очень велик угловой разброс, и потому пучок быстро разлетается, это сильно уменьшает кильватерную амплитуду. Диффузионный характер расходимости пучка для малых  $\sigma_{rb}$  показан на рисунке 3.7 в сравнении с обычной самомодуляцией.

Зависимость кильватерной амплитуды от начального углового

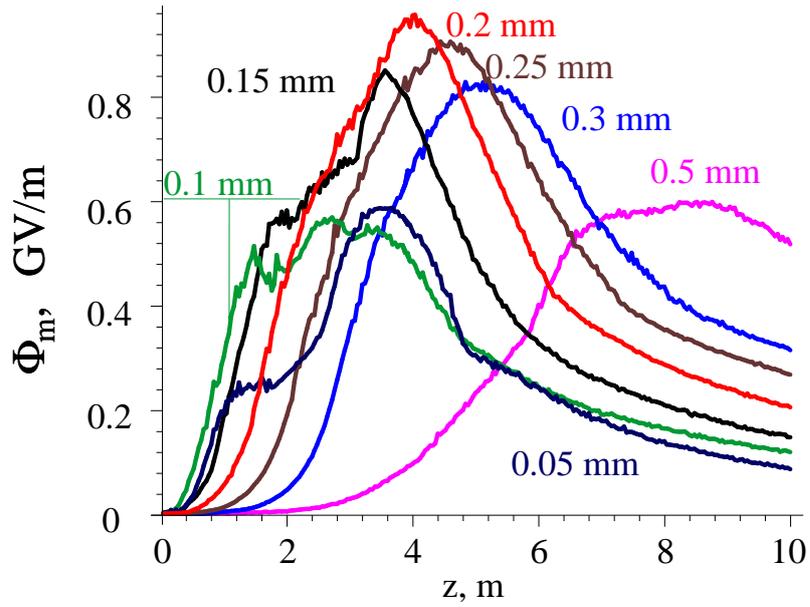


Рис. 3.6: Зависимость кильватерной амплитуды  $\Phi_{\max}$  от расстояния при различных радиусах пучка.

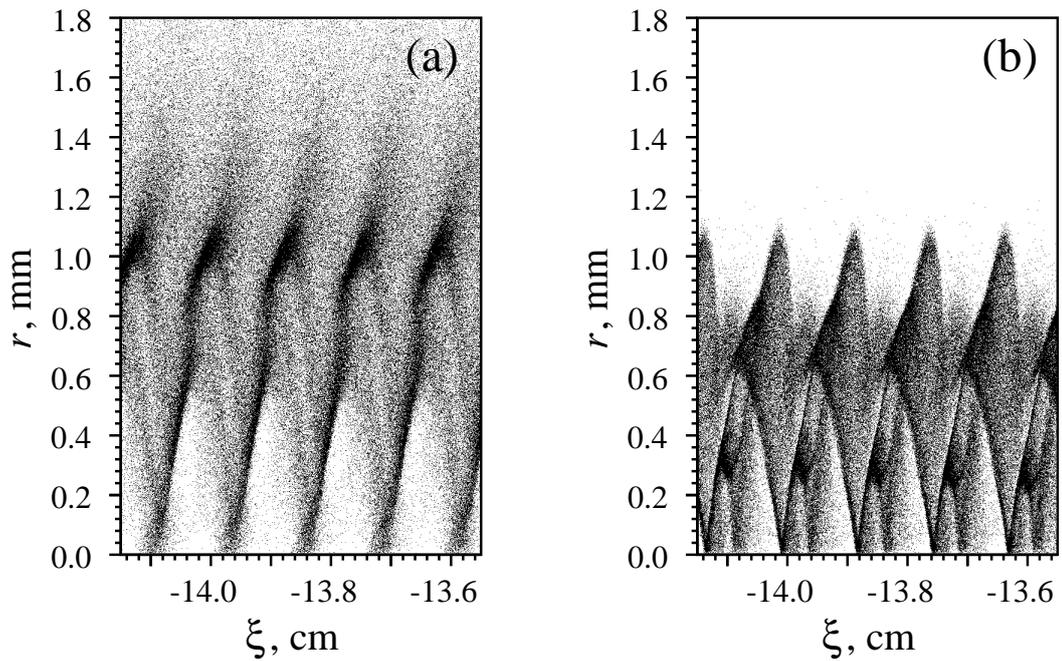


Рис. 3.7: Изображение формы пучка в момент развитой самомодуляции ( $z = 4\text{ м}$ ) для начальных радиусов пучка 0.05 мм (а) и 0.2 мм (б).

разброса [рис. 3.8] определяется эмиттансом драйвера. Если эмиттанс ниже некоторого порогового значения, он не имеет никакого влияния на амплитуду и влияет только на скорость деградации пучка

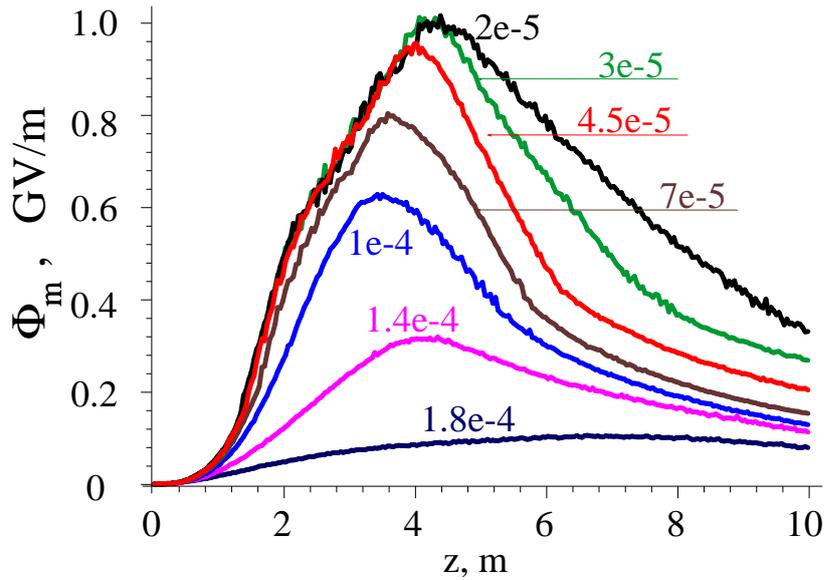


Рис. 3.8: Зависимость кильватерной амплитуды  $\Phi_{\max}$  от расстояния при различных начальных угловых разбросах пучка.

на стадии полной модуляции. Как только эмиттанс превышает пороговое значение, амплитуда поля круто падает вниз.

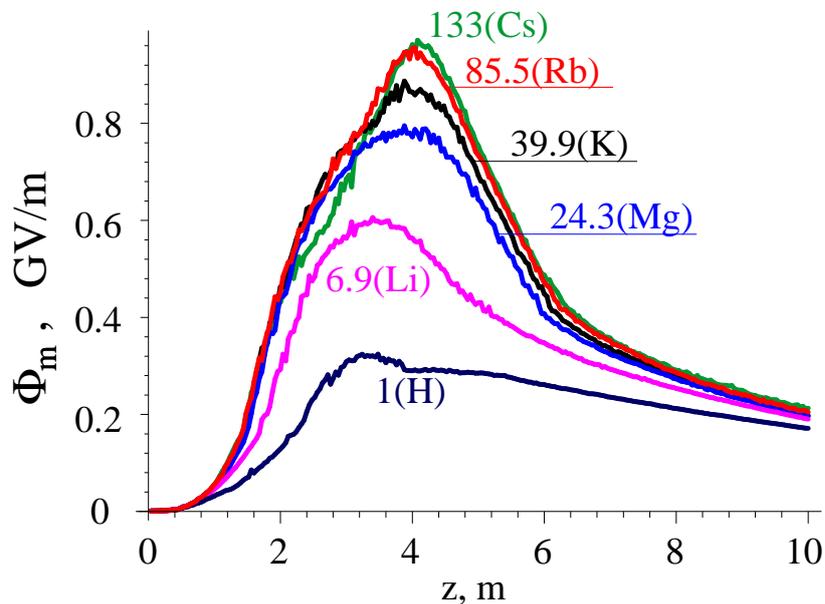


Рис. 3.9: Зависимость кильватерной амплитуды  $\Phi_{\max}$  от расстояния при различных атомных массах ионов.

Зависимость максимума поля от атомной массы ионов [рис. 3.9]. Для выбранных параметров пучка уменьшение поля из-за движения ионов является существенным для атомных весов ниже 40. Для большего

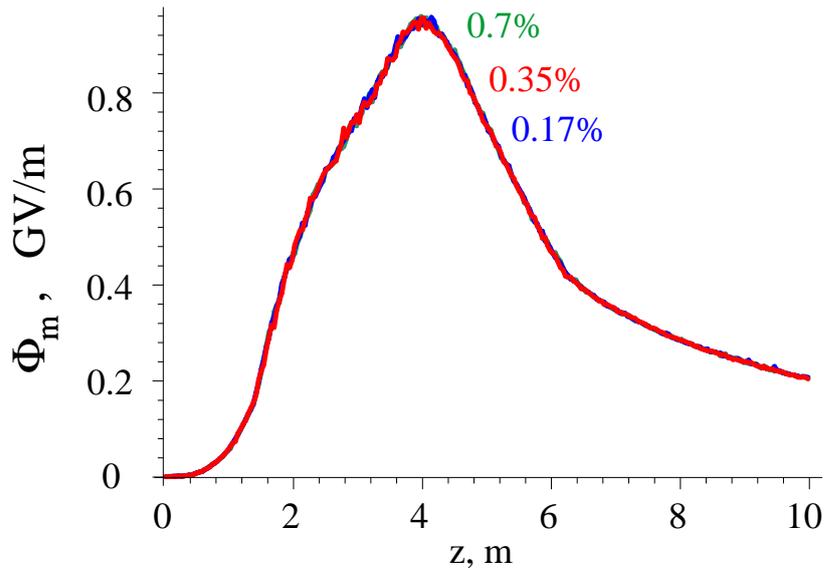


Рис. 3.10: Зависимость кильватерной амплитуды  $\Phi_{\max}$  от расстояния при различных энергоразбросах пучка.

пикового тока пучка движение ионов может стать дополнительной проблемой.

Разумные изменения энергоразброса не влияют на кильватерную амплитуду [рис. 3.10].

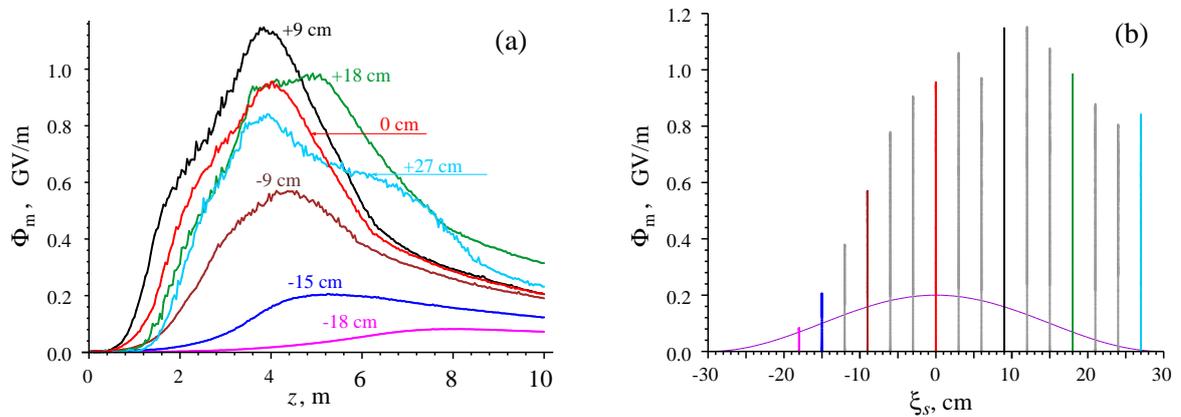


Рис. 3.11: (a) Зависимость кильватерной амплитуды  $\Phi_{\max}$  от расстояния при различных положениях  $\xi_s$  резкой границы пучка и (b) абсолютный максимум кильватерной амплитуды  $\Phi_m$  (высота столбиков) в зависимости от  $\xi_s$ . Кривая на фрагменте (b) показывает форму пучка.

Амплитуда также существенно зависит от положения  $\xi_s$  ионизирующего лазерного импульса относительно центра пучка. Эта дистанция контролируется системой синхронизации лазерного и протонного пучков. Мы принимаем начальную плотность пучка в виде

$$n_b(r, \xi) = 0.5 n_{b0} e^{-r^2/2\sigma_{rb}^2} \left[ 1 + \cos \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi}{\sigma_{zb}} \right) \right], -\sigma_{zb}\sqrt{2\pi} < \xi < \xi_s,$$

что близко к распределению Гаусса и плавно стремится к нулю при  $|\xi| = \sigma_{zb}\sqrt{2\pi}$ . Для отрицательных  $\xi_s$  поле, как и ожидалось, слабое, так как недостаточно сгустков в оставшемся пучке. Наибольшее значение поля мы наблюдаем при  $\xi_s \approx \sigma_{zb}$ , в этом случае самомодуляция достаточно сильна, так как поле создается наиболее плотной частью пучка. Меньшая амплитуда при  $\xi_s > \sigma_{zb}$  связана с более поздним развитием самомодуляции.

Подводя итог, мы введем понятие чувствительности  $S$  кильватерной амплитуды к изменению параметров пучка и плазмы в таблице 3.1. Определим  $S_A$  как коэффициент пропорциональности между относительным изменением абсолютного максимума  $\Phi_m$  и малой относительной вариацией параметра  $X$ :

$$\delta\Phi_m/\Phi_m = S_a^X \delta X/X. \quad (3.4)$$

Таблица 3.1: Чувствительности кильватерной амплитуды к изменениям параметров плазмы и пучка.

Параметр	$S_a$
Плотность плазмы	0.4
Число частиц пучка	0.7
Длина пучка (фиксированный пиковый ток)	0.3
Длина пучка (фиксированное число частиц)	-0.4
Радиус пучка	0
Угловой разброс пучка	-0.3
Атомная масса ионов	0
Энергоразброс пучка	0
Местоположение затравки неустойчивости	0.3

Для расчета чувствительности местоположения затравки неустойчивости в качестве параметра  $X$  мы использовали  $\sigma_{zb}$ . Как мы видим, отсутствуют такие параметры системы, к которым кильватерная амплитуда была бы особенно чувствительна.

## 4: Заключение

Проведенное исследование не только позволило получить чувствительность возбуждаемого кильватерного поля к параметрам драйвера и плазмы, но также помогло выявить физические эффекты, ограничивающие амплитуду поля в разных областях пространства параметров. Самым важным эффектом является нелинейное нарастание длины кильватерной волны. Пока этот эффект не вступает в силу, амплитуда прямо пропорциональна числу протонов, возбуждающих поле. Как только за счет улучшения некоторых параметров достигается предел, дальнейший рост ускоряющего поля резко замедляется. Следующими по важности эффектами являются расходимость пучка за счет эмиттанса и движение ионов плазмы. Оба эффекта характеризуются некоторыми пороговыми значениями или, если быть точным, поверхностями в многомерном пространстве параметров. Если порог пересечен, амплитуда кильватерной волны быстро падает. Если нет, то они не повлияют на кильватерную амплитуду.

Базовый набор параметров эксперимента AWAKE находится близко к границе, связанной с нелинейным удлинением и близко к порогу расходимости пучка и ионного движения. Это означает, что увеличение заряда пучка или его пикового тока по сравнению с исходными параметрами не дадут пропорционального усиления кильватерного поля. Также нет большого запаса прочности по эмиттансу пучка и ионной массе. Путем к достижению больших полей может быть уменьшение эмиттанса вкупе с увеличением плотности, но это тема для отдельного исследования.

# Литература

- [1] K.V.Lotov, V.A.Minakov, A.P.Sosedkin Parameter sensitivity of plasma wakefields driven by self-modulating proton beams arXiv:1405.1825 [physics.plasm-ph].
- [2] K.V.Lotov, Phys. Plasmas **5**, 785 (1998).
- [3] K.V.Lotov, Phys. Rev. ST Accel. Beams **6**, 061301 (2003).
- [4] K.V. Lotov, A. Sosedkin, E.Mesyats, Simulation of Self-modulating Particle Beams in Plasma Wakefield Accelerators. Proceedings of IPAC2013 (Shanghai, China), p.1238-1240.
- [5] [www.inp.nsk.su/~lotov/lcode](http://www.inp.nsk.su/~lotov/lcode)
- [6] K.V.Lotov, Phys. Plasmas **20**, 083119 (2013).