



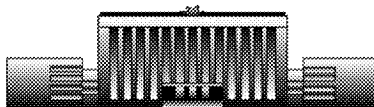
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ**

**им. Г.И. Будкера СО РАН
(ИЯФ СО РАН)**

С.С. Попов

**Полное задание периодических бильярдных
траекторий внутри правильных
многоугольников**

ИЯФ 2026-03



**НОВОСИБИРСК
2026**

ПОЛНОЕ ЗАДАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БИЛЬЯРДНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ВНУТРИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

С. С. Попов

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН

e-mail: s.s.popov@inp.nsk.su

В работе описан многолистный атлас карт (аналогичный плоским структурам в теории бильярдов в рациональных многоугольниках), на котором бильярдная траектория также может быть представлена в виде прямых линий. Предложенная конструкция позволяет итерационным способом задавать начальные условия для сколь угодно сложных периодических траекторий в правильных многоугольниках. Доказано, что разработанная процедура «покрывает» всё множество периодических траекторий.

Ключевые слова: Бильярды, правильные многоугольники, периодические траектории, плоские структуры, параллелограммы.

§ 1. Введение

Математические бильярды со времён Пуанкаре и Биркгофа являются одной из наиболее интересных областей динамических систем. Они представляют собой наглядные модели широкого класса как реальных физических явлений, так и сугубо умозрительных математических вопросов во многих областях знания [1, 2, 3, 4]. Данная работа посвящена рассмотрению динамической системы, заданной на некоторой структуре в виде атласа карт с бесконечным числом особых точек. В последних можно выделять отдельные группы связанных друг с другом трансляционной симметрией особых точек. Динамическая система, заданная прямыми линиями на данной структуре, дает наглядный способ распрямления бильярдных траекторий правильных многоугольников и некоторых типах равнобедренных треугольников, позволяющий выработать иерархию для периодических траекторий. Таковая иерархия позволяет рекуррентным образом переходить от самых простых из них к сложным и «неограниченно запутанным», вычисляя стартовые условия для них. Под структурой будем понимать многолистное накрытие евклидовой плоскости из карт в форме параллелограммов. Склейка листов осуществляется по конечным открытым отрезкам на краях отдельных карт. Отличие от классических плоских структур [5, 6] — в наличии наложений или сгибов по отрезкам, а также в отсутствии выделенного фундаментального многоугольника.

Работа содержит 7 глав и заключение. Во второй главе описывается общий принцип построения рассматриваемой структуры. Третья глава рассматривает связи сложных структур с более простыми. В четвертой вводится линейно-поступательная динамическая система на семействе структур. Пятая

глава выводит условия периодичности траекторий, а шестая и седьмая главы посвящены бильярду в правильных многоугольниках..

§ 2. Об одной «плоской» структуре на параллелограммах

Пусть заданы последовательности $\{l_n^0\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\{h_n^0\}_{-\infty}^{+\infty}$, такие, что выполняются следующие равенства:

$$h_n^0 = A(l_n^0 + l_{n+2}^0); \quad l_n^0 = B(h_n^0 + h_{n-2}^0). \quad (2.1)$$

Очевидно, такие последовательности существуют. Действительно, подставив одно уравнение в другое, найдем, что

$$h_n^0 = AB(h_{n-2}^0 + 2h_n^0 + h_{n+2}^0).$$

Легко найти, что общий член задается выражением

$$h_n^0 = aq_1^n + bq_2^n,$$

где

$$q_{1,2} = \left(\frac{1}{AB} - 2\right)/2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{AB} - 2\right)^2/4 - 1} \quad (2.2)$$

есть решения характеристического уравнения. Легко видеть, что в случае $\left(\frac{1}{AB} - 2\right)^2/4 < 1$ имеем

$$q_{1,2} = e^{\pm i\varphi},$$

где φ — некоторый действительный угол, задающий ограниченные квазипериодические последовательности. Далее ограничимся действительными решениями для последовательностей $\{l_n^0\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\{h_n^0\}_{-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$.

Построим следующую структуру. Зададим для каждого n пару параллелограммов с горизонтальными сторонами l_n^0, l_{n+2}^0 и боковыми h_n с попарно равными углами β^0 при вершинах (см. рис. 1). Из них составим общий параллелограмм со стороной $l_n^0 + l_{n+2}^0$ так, чтобы старшая по номеру часть находилась справа. В случае $l_{n+2}^0 \cdot l_n^0 < 0$ результирующий параллелограмм получится наложением. Размножив полученную фигуру и состыковав её соответствующим образом, получим бесконечную полосу ширины $h_n \sin(\beta_0)$, состоящую из чередующихся параллелограммов, показанную на рис. 1.

Наименьший период полосы, очевидно, равен $L_n^0 = l_n^0 + l_{n+2}^0$.

Назовем полученную конструкцию простой структурой нулевого порядка или, для краткости, классом с индексом n и обозначим ее U_n^0 . Когда будет идти речь о совокупности траекторий динамической системы внутри класса, то такое множество также будем называть классом траекторий.

Склеим с каждой стороной l_{n+2}^0 простую структуру с индексом $n+2$, а со стороной l_n^0 — соответственно с индексом $n-2$. Накладывающиеся друг на друга части разных классов расположим в разных «слоях» трехмерного пространства. Каждая вершина, или особая точка, будет точкой ветвления.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В направлении боковых сторон получается аналогичная конструкция элементарной плоской структуры с точностью до замены h на l .

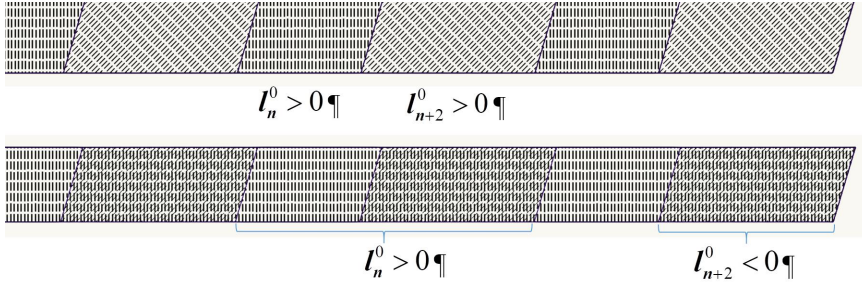


Рис. 1: Плоские структуры на параллелограммах.

В случае $h_{n+2}^0 \cdot h_n^0 < 0$ склейку осуществим с наложением, аналогичным случаю $l_{n+2}^0 \cdot l_n^0 < 0$. Если для каждой вершины параллелограммов, например, на нижней стороне выбрать вершину на верхней, отстоящую на целое число периодов, то отрезки между ними образуют другую простую структуру, заполняющую ту ж полосу, как показано на рис. 2. Для новой структуры введем боковую сторону $\tilde{h}_n^0$. Очевидно, будет выполнена связь $\tilde{h}_n^0 = \tilde{A}(l_n^0 + l_{n+2}^0)$, $l_n^0 = \tilde{B}(\tilde{h}_n^0 + \tilde{h}_{n-2}^0)$ с независимыми от номера константами.

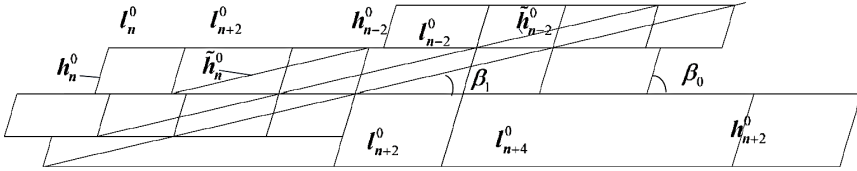


Рис. 2: Модифицированные простые плоские структуры на параллелограммах.

Согласно замечанию 1 построим структуры вдоль боковых сторон $\tilde{h}$. и Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} h_{n-2}^1 &= l_n^0, & h_n^1 &= l_{n+2}^0, \\ l_{n-2}^1 &= \tilde{h}_{n-2}^0 = r_m^1 h_{n-2}^0, \\ l_n^1 &= \tilde{h}_n^0 = r_m^1 h_n^0, \\ L_n^1 &= l_n^1 + l_{n+2}^1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Число r_m^1 определяется соотношениями (2.1), углом β^0 и числом минимальных периодов m_1 , пересеченных диагональю h_n^0 . Как видно, из новых параллелограммов со сторонами h_n^1, L_n^1 получается семейство простых структур с таким же сопряжением друг с другом, как и предыдущее с нулевым верхним индексом:

$$h_n^1 = A^1(l_n^1 + l_{n+2}^1); \quad l_n^1 = B^1(h_n^1 + h_{n-2}^1). \quad (2.4)$$

Такие конструкции будем называть структурами первого порядка.

Повторяя процедуру, можно получить семейства второго порядка и выше. Такая рекурсия задается произвольной генерирующей последовательностью

$\{m_j\}_0^\infty$, где $m_j \in \mathbb{Z}$ — число охваченных периодов предыдущей структуры. При каждом шаге рекурсии новый класс пересекает в минимальном периоде пару классов предыдущего порядка. Заметим из обозначений (2.3) и (2.4), что

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{h_n^k}{l_n^k + l_{n+2}^k} = \frac{l_{n+2}^{k-1}}{r_m^k (h_n^{k-1} + h_{n+2}^{k-1})} = \frac{B^{k-1}}{r_m^k}, \\ B^k &= \frac{l_n^k}{h_n^k + h_{n-2}^k} = \frac{r_m^k h_{n-2}^{k-1}}{l_n^{k-1} + l_{n+2}^{k-1}} = r_m^k A^{k-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Откуда с учетом (2.2) следует независимость от генерирующей последовательности параметров:

$$\begin{aligned} A^k B^k &= AB, \\ q^k &= q, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а, следовательно, и параллельность границ классов, заданных одной генерирующей последовательностью. Границы классов и другие прямые, соединяющие особые точки, согласно традиции будем называть сепаратрисами.

§ 3. Некоторые свойства классов

Зафиксируем некоторые свойства классов, вытекающие из алгоритма их построения.

Рассмотрим последовательность классов $\{U_{n_j}^0\}$, в которые проникает класс k -го порядка с конечным генерирующим набором $\{m_j\}_0^k$. Для него построим $\{n_j^k\}$ — последовательность индексов классов $\{U_{n_j}^k\}$. Очевидно, область значений $\{n_j^k\}$ содержит всего одно число n^k . Последовательность $\{n_j^{k-1}\}$ содержит два числа $n^k, n^k + 2$ и, очевидно, является периодической. Прямая линия, параллельная отрезкам l_n^k , пересекает m_k минимальных периодов в каждом классе порядка $k - 1$.

Для $\{n_j^{k-2}\}$ имеем три числа $n^k, n^k + 2, n^k + 4$. Тогда

$$\begin{aligned} \{n_j^{k-p} \mid j \in \mathbb{N}\} &\supset \{n^k, n^k + 2, \dots, n^k + 2p\}, \\ \{n_j^0 \mid j \in \mathbb{N}\} &\supset \{n^k, n^k + 2, \dots, n^k + 2k\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Закон задания классов U_n^0 может оказаться периодическим в случае делимости $\frac{2\pi}{\varphi} = N \in \mathbb{Z}$. Тогда для $p > N/2$ подмножество $\{U_{n_j}^0\}_{n^k}^{n^k+2k}$, пересекающееся с классом $\{U_n^k\}$, будет содержать классы, отличающиеся только индексами.

ЛЕММА 3.1. *Все возможные особые точки простых структур нулевого порядка находятся в вершинах параллелограммов, образующих минимальные периоды классов высших порядков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно для любых классов порядка 0 и 1, в которых особые точки представляют эквидистантные повторы пар точек

на границах классов и на концах боковых сторон элементарных ячеек. Пусть утверждение верно для классов $(k-1)$ -го порядка. Для каждого $m_k \in \mathbb{Z}$ два соседних класса $(k-1)$ -го порядка перемежаются в классе порядка k . По построению все вершины минимальных ячеек классов $(k-1)$ -го порядка лежат на границах соседних классов порядка k , поскольку сторона $h_n^k = l_{n+2}^{k-1}$ последовательно отображается в себя при параллельном переносе вдоль класса порядка k . Она содержит особые точки только на концах этих сторон, значит, границы новых классов также их содержат. Параллельные же границам и несовпадающие с ними прямые не могут содержать особые точки, так как не содержат в себе вершин ячеек низшего класса.

ЛЕММА 3.2. *Всякий U_n^k содержится в объединении $U_n^0 \cup U_{n+2}^0 \cup \dots \cup U_{n+2k}^0$ классов порядка 0. Для всех других классов U_s^0 с индексами $s < n$ или $s > n+2k$ пересечение $U_n^k \cap U_s^0 = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из рекуррентного алгоритма построения классов.

§ 4. Динамическая система

Будем рассматривать эволюцию динамической системы, представляющую собой свободное прямолинейное движение на построенной плоской структуре. С помощью такой системы зададим два дискретных потока, отображающие последовательно точки параллельных сторон элементарных ячеек простых структур (см. рис. 3). Повторяющиеся параллелограммы будем считать

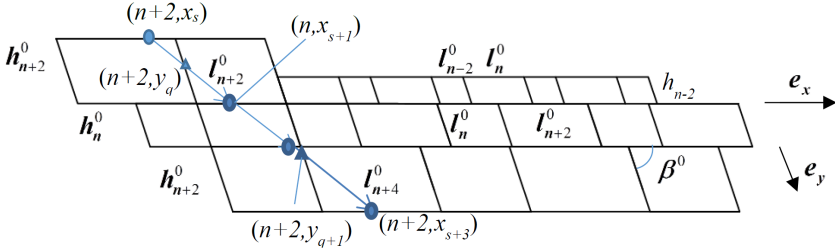


Рис. 3: Динамическая система на многолистной параллелограммной структуре.

тождественными. Определим конфигурационное пространство потоков соответствующими парами чисел как координаты, отсчитанные от левого верхнего угла ближайшего младшего параллелограмма, расположенного слева выше, и индекс структуры. За единицу примем длины соответствующих сторон элементарной ячейки. Таким образом, оба потока суть отображения в себя:

$$x : M \rightarrow M \quad (4.1)$$

$$y : M \rightarrow M, \quad (4.2)$$

где $M = \mathbb{Z} \times (0, 1)$. Вектор скорости частицы при таком отображении будет сохраняться. В качестве параметра времени удобно рассматривать перемещение вдоль e_x или e_y .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случаях перехода с изменением знака у h или l имеем неустранённое наложение с потерей однозначности отображений внутри класса. Однако задающая их прямая все же однозначна, и получающиеся наложения можно доопределять в этих случаях до однозначных.

§ 5. Периодические траектории на плоской структуре

ТЕОРЕМА 1. *Всякая траектория отображений (4.1), (4.2), заданная прямой, параллельной сторонам плоской структуры порядка k с генерирующей последовательностью целых чисел $\{m_j\}_1^k$, является периодической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.1, на каждой стороне элементарной ячейки класса U_n^0 найдутся конечные отрезки, параллельно переносимые внутри класса U_n^k , причем такие, что на каком-то шаге отображения одна из концевых точек совпадет с особой. Отображение же особых точек класса U_n^0 , очевидно, периодически. При этом отображение параллельным переносом всех точек вышеозначенных отрезков переводит их в один и тот же класс, поскольку между границами особых точек нет, на которых возможно разделение точек отрезка по разным классам. Так как набор классов нулевого порядка, входящий в U_n^k , конечен по лемме 3.2, то отображения окажутся периодическими.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность траекторий внутри класса U_n^k , удовлетворяющих условиям теоремы 1, назовем пучком класса.

Теорема 1 и принцип построения высших классов позволяют легко находить стартовый угол для периодической траектории.

Пусть имеется структура порядка U_n^k , тогда из рис. 4, по теореме синусов имеем:

$$h_n^{k-1} \sin(\pi - (\beta^{k-1} + \beta^k)) = m_k (l_n^{k-1} + l_{n+2}^{k-1}) \sin \beta^k.$$

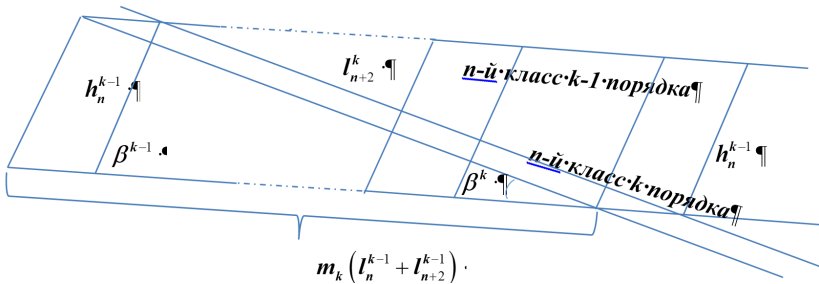


Рис. 4: К вычислению рекурсии углов периодических траекторий.

С учетом (2.5) получаем

$$\frac{\sin \beta^{k-1} \cos \beta^k + \cos \beta^{k-1} \sin \beta^k}{\sin \beta^k} = \frac{m_k}{A^{k-1}},$$

что легко привести к виду:

$$\tan \beta^k = \frac{\tan \beta^{k-1}}{\left(\frac{m_k}{A^{k-1} \cos \beta^{k-1}} - 1 \right)}. \quad (5.1)$$

Учитывая $h_n^{k-1} = l_{n+2}^k \frac{\sin \beta^k}{\sin \beta^{k-1}}$, получаем $r_{m_k}^k = \frac{\sin \beta^{k-1}}{\sin \beta^k}$ и далее из (2.5) и (2.6):

$$A^k = \frac{A^0 B^0}{A^{k-1}} \frac{\sin \beta^k}{\sin \beta^{k-1}}. \quad (5.2)$$

Таким образом, рекуррентные соотношения (5.1), (5.2) определяют при заданной генерирующей последовательности угол наклона прямой линии $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{m_k}^k$, задающей периодичность в (4.1), (4.2).

§ 6. Периодические траектории в правильных многоугольниках

Вначале проясним связь прямолинейных траекторий на атласе параллелограммных структур с бильярдными траекториями внутри правильного N -угольника.

Прежде всего, классифицируем траектории внутри правильного многоугольника. Сначала пронумеруем вершины, как показано на рис. 5. Присвоим стороне, лежащей между n -й и $(n+1)$ -й вершинами, номер n . Тогда все лучи, испытавшие последнее соударение от нулевой стороны, можно разбить на N множеств так, что лучи в n -м множестве отражаются под углом в диапазоне:

$$\theta \frac{n-1/2}{2} \leq \beta < \theta \frac{n+1/2}{2},$$

где θ — центральный угол многоугольника. Такие же классы можно ввести и для всех других сторон исходного бильярда. Как видно из рисунка, луч остается в том же классе после следующего отражения, если он не пересек оснований трапеции, образованной исходной стороной многоугольника и стороной с индексом n . Распрямляя траекторию, легко видеть, что луч принадлежит рассматриваемому классу тогда и только тогда, когда выпрямленная траектория находится в некоторой полосе, претерпевая не менее двух пересечений со сторонами многоугольника. Последняя составлена из одинаковых равнобоких трапеций, образованных сторонами многоугольника с индексами, отличающимися на n . Этим же индексом будем описывать класс.

Если строить класс с определенной стороной, то мы не всегда захватим все стороны многоугольника. То есть могут существовать инвариантные подмножества сторон с одинаковым классом. Будем в дальнейшем считать такие множества эквивалентными, хотя в принципе их можно различить, вводя дополнительную индексацию. Таким образом, любой ансамбль лучей внутри бильярда мы можем разбить на непересекающиеся классы лучей.

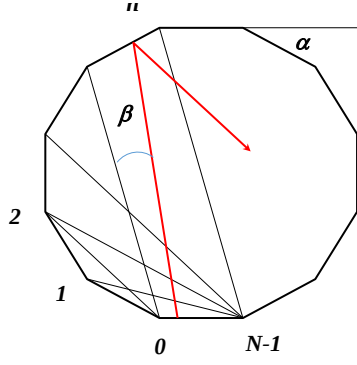


Рис. 5: Классификация лучей в правильном многоугольнике.

Рассмотрим полосу, составленную из трапеций (см. рис. 6). Длины оснований трапеции и диагональ обозначим соответственно l_n, l_{n+2}, h_n . Очевидно, что:

$$l_n = 2R \sin \left(\frac{\theta(n-1)}{2} \right); \quad l_{n+2} = 2R \sin \left(\frac{\theta(n+1)}{2} \right); \quad h_n = 2R \sin \left(\frac{\theta n}{2} \right), \quad (6.1)$$

и выполнены равенства при независящих от n константах:

$$A = B = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (6.2)$$

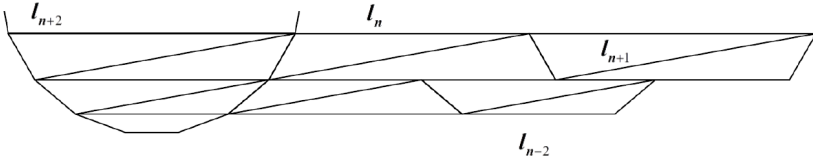


Рис. 6: Построение параллелограммных плоских структур для многоугольного бильярда.

Таким образом, полученные полосы или классы соответствуют рассмотренным ранее структурам, составленным из параллелограммов с условиями $h_0 = 0, l_1 = 0$. Это позволяет строить классы следующих порядков.

Между ближайшими по индексу классами с $h_r = h_s = 0$ траектория представляет собой прямой отрезок и только при переходе через них «ломается». При стандартной развертке мы получим две полосы из трапеций (см. рис. 7). В отраженной полосе сепаратрисы можно отложить как продолжение их же из класса U_2^0 . Отраженный класс будем считать U_{-2}^0 . При сворачивании по линии нулевого класса плоскости U_{-2}^0 и всех к нему присоединенных с отрицательными индексами классов получим отраженные траектории (см. пунктирные стрелки на рис. 7). Также эти полуплоскости можно совместить поворотом на π вокруг центра ребра, тогда изначальные траектории отобразятся

в штрих-пунктирные. Поскольку число периодов в классе первого порядка зависит только от генерирующей последовательности, то всегда можно определить: траектория, принадлежащая этому классу, при пересечении U_0^0 перейдет в класс с индексом 2 или -2 . Очевидно, сепаратрисы в множестве классов с положительными индексами перейдут в них же во множестве с отрицательными.

Таким образом, уравнения (5.1), (5.2) сохраняют силу для переставляемых в классах с нулевой шириной сепаратрисных траекторий.

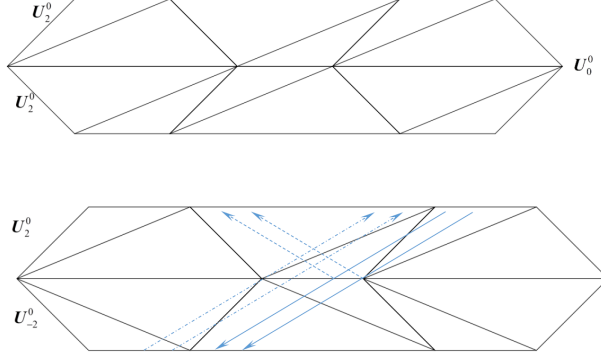


Рис. 7: Варианты перехода через класс нулевой ширины.

Остается найти правило, позволяющее любую выпрямленную траекторию, за исключением, быть может, множества нулевой меры, отнести к классу k -го порядка. Для нулевого порядка оно уже найдено. Пусть это верно для класса U_n^{k-1} , и в нем угол отклонения луча $\alpha_{m_{k-1}}^{k-1}$ от данного класса удовлетворяет неравенству $\beta_{m_{k+1}}^k < \alpha_{m_{k-1}}^{k-1} < \beta_{m_k}^k$. Очевидно, достаточно найти критерий распределения луча именно по этим классам (см. рис. 8).

Четырехугольник $OCPF$ является частью класса с набором $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k$, а $ORGD$ — с набором $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k + 1$. Параллелограмм $DWPQ$ — область их пересечения. Очевидно, все траектории, пересекающие DC и параллельные диагонали OS , проходят в классах с упомянутыми наборами одинаковый путь за одинаковое время. Траектории с наклоном в предыдущем классе $\alpha_{m_{k-1}}^{k-1}$ к DC такие, что $\angle CTS < \alpha_{m_{k-1}}^{k-1} < \beta_{m_k}^k$, отнесем к классу с последовательностью $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k$, и наоборот, при $\beta_{m_{k+1}}^k < \alpha_{m_{k-1}}^{k-1} < \angle CTS$ — к классу $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k + 1$.

Действительно, отложим DH параллельно диагонали OS , получим подобные пары треугольников: $\triangle ODT \sim \triangle DFH$ и $\triangle ODC \sim \triangle DFG$. Значит:

$$FH = \frac{1}{2}FG = \frac{l_n^{k-1} + l_{n+2}^{k-1}}{2}.$$

Следовательно, сепаратриса для распределения траекторий по классам с набором, отличающимся на единицу в последнем индексе, определяется однозначно для любого набора из конечных целых чисел. Она наклонена под углом $\angle CTS = \beta_{m_k + \frac{1}{2}}^k$.

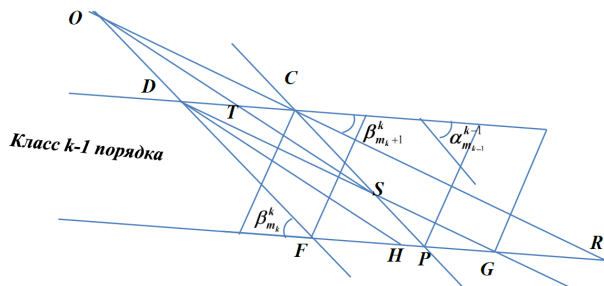


Рис. 8: Разбивка траекторий по классам следующего порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Траектории классов U_n^k любого n с набором $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, \pm\infty$ согласно теореме 1 окажутся полностью принадлежащими пучку класса U_n^{k-1} с генерирующим набором $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Диапазон для числа заходов траектории, отнесённой к классу порядка k , в элементарные ячейки класса порядка $k-1$ на отрезке пересечения составляет $[|m_k|, |m_k| + 1]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Периодическая траектория с конечным набором $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k$ на структуре, порождённой правильным многоугольником, является периодической в нём. Период в многоугольнике кратен периоду на структуре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замыкания траектории на структуре последнее пересечение может иметь место на стороне многоугольника, отличной от начальной. Запустив цикл дальше, попадем в третью сторону через такое же количество переходов и отражений. Через конечное число таких циклов придем в начальную сторону по теореме о возвращении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Траектория с генерирующим набором $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k + \frac{1}{2}$ периодична. Она принадлежит классу U^{k+r} с набором $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, \dots, m_{k+r}$, где $r \leq N$, а числа $m_{k+1}, \dots, m_{k+r}$ по модулю не превосходят единицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение точек одной границы класса U_n^{k-1} на другую (см. рис. 9). «Угловая» точка A с вычетом целого числа периодов $m_k(l_n^{k-1} + l_{n+2}^{k-1})$ переходит в середину отрезка $K'D'$, а точка C — в середину $L'F'$. Точки B и E — центры горизонтальных сторон AC и CG соседних параллелограммов с индексами n и $n+2$ внутри одного периода класса U_n^{k-1} — отображаются соответственно в центры B' и E' с индексами $n+2$ и n .

Как видно, часть стороны большего параллелограмма отображается в меньшую, а правый и левый отрезки FG и CD , не вошедшие в нее, становятся левым и правым на нижней стороне. Согласно общему принципу, траектории через меньшую сторону переходят в класс U_{n-2}^{k-1} , а через большую — в U_{n+2}^{k-1} .

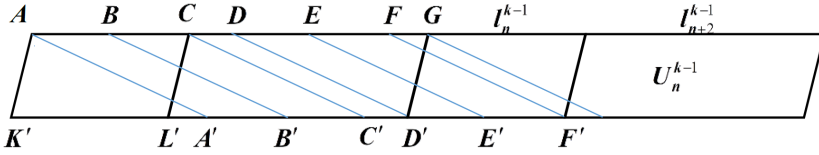


Рис. 9: Отображение границ класса U_n^{k-1} траекториями с полуцелым индексом.

Пусть $n = 1$, тогда $l_1^{k-1} = 0$, и пучок, образованный этой стороной, имеет нулевую ширину. Не более чем через N переходов он пробежит середины нечетных классов, попав в U_{1+2N}^{k-1} . Последний, очевидно, совпадает с U_1^{k-1} . Пучок, сформированный на стороне с длиной l_3^{k-1} , при выходе из класса U_1^{k-1} делится пополам, и его части переставляются, после чего он сохраняется до попадания в класс, содержащий нулевой параллелограмм с $l_d^{k-1} = 0$, с еще одним делением и перестановкой. В противном случае (когда многоугольник нечетный) пучок центральной частью попадает в класс с $h_d^{k-1} = 0$. Некоторая центральная часть вырезается отрезком l_{d-2}^{k-1} и тоже переставляется относительно центра последнего. Формально здесь совершается переход в классы с отрицательными индексами, но в данном рассуждении мы можем отождествить классы с равными по модулю индексами. Внешние же части изначального пучка переставляются в классе U_{d-2}^{k-1} , минуя U_d^{k-1} , в результате чего поток возвращается в U_1^{k-1} на сторону l_3^{k-1} , дважды переставленный относительно своего центра. Следовательно, этот пучок также периодичен.

Пучок, выходящий со стороны l_2^{k-1} в классе U_2^{k-1} , ничем не делится, поскольку имеет минимальную ненулевую ширину, и также испытывает две перестановки относительно своего центра до своего возвращения на стартовую сторону. Рассуждая аналогично, получим периодичность классов U_4^{k-1}, U_5^{k-1} и т. д. вплоть до максимально широких потоков.

У самой длинной сепаратрисы возврат в начальную точку происходит не более чем через N переходов, что ограничивает $r \leq N$.

Для обоснования последнего утверждения заметим, что для произвольной траектории с полуцелым m_k из рассмотренных выше существует последовательность индексов классов порядка $k-1$, $\{n_i\}_1^r$, в которые заходит траектория, и для нее верно $n_{\min} \leq n_i \leq n_{\max}$. Как уже установлено, между крайними (их можно назвать поворотными) членами последовательности изменения происходят строго монотонно и на 2. А это невозможно, если какие-либо из чисел $m_{k+1}, \dots, m_{k+r}$ по модулю превосходят единицу.

ТЕОРЕМА 2. Для всякой траектории бильярда в правильном многоугольнике существует последовательность содержащих ее пучков периодических траекторий, заданная рекурсией (5.1), (5.2). Множество всех направлений таких периодических траекторий всюду плотно на единичной окружности. Любая периодическая траектория задается рекурсией (5.1), (5.2) с конечной генерирующей последовательностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество возможных направлений на единичной окружности дочерних пучков следующих порядков, представленное на

рис. 10a. Сплошными линиями показаны направления пучков некоторого порядка k , соответствующие своим нижним индексам. Пунктирными линиями показаны сепаратрисы между соседними классами, соответствующие полужелтым индексам. Точки между сплошными линиями показывают множество дочерних классов следующего порядка.

Повернув исходную картину на $-\pi$ и совместив с ней же, получим заполнение на рис. 10b. Полученная картина всего лишь отождествляет оба направления движения вдоль линии траектории под углами β и $\beta - \pi$. При этом пересечений классов не возникнет. Распрямив дугу для более детального рассмотрения, получим заполнение, показанное на рис. 11. Стрелками показано последовательное растяжение масштабов.

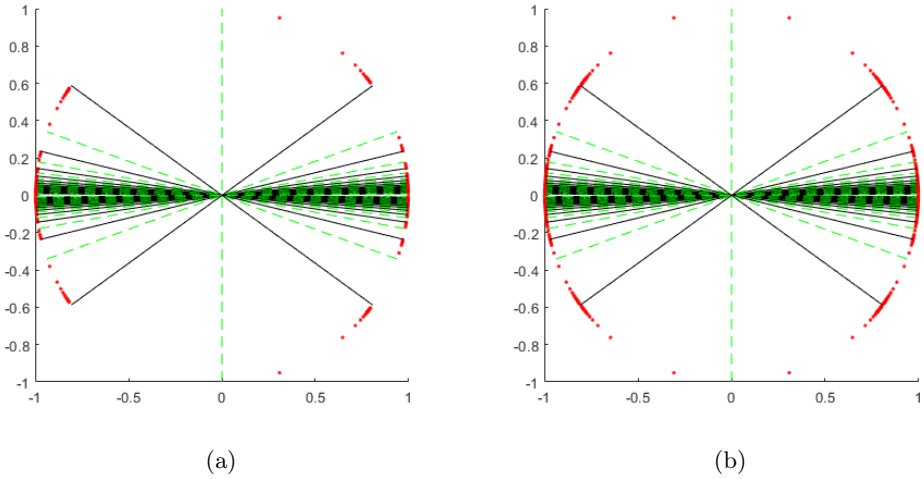


Рис. 10: Заполнение единичной окружности направлениями дочерних классов (a) и их объединение с собой со смещением на π (б).

Ближайшие направления к соседним классам соответствуют, очевидно, индексам $m_{k+1} = \pm 1$. Как и на рис. 10b, каждое направление $\beta_{m_k}^k$ является предельной точкой при $m_{k+1} \rightarrow \pm\infty$. Но направления следующего порядка $\beta_{m_{k+1}}^{k+1}$ также являются предельными точками. Они содержатся в некотором отрезке, не полностью покрывающем интервал направлений между сепаратрисами $(\beta_{m_k-1/2}^k, \beta_{m_k+1/2}^k)$.

Покажем, что оставшиеся «зазоры» покрываются интервалом направлений:

$$[\beta_{m_k}^k + \beta_{-1/2}^{k+1} - \pi, \beta_{m_k}^k + \beta_{1/2}^{k+1}].$$

На рисунке они показаны штрих-пунктирными линиями.

Для доказательства накрытия верхнего зазора достаточно обосновать неравенство:

$$\beta_{m_k-1/2}^k - \beta_{m_k}^k \leq \beta_{1/2}^{k+1}. \quad (6.3)$$

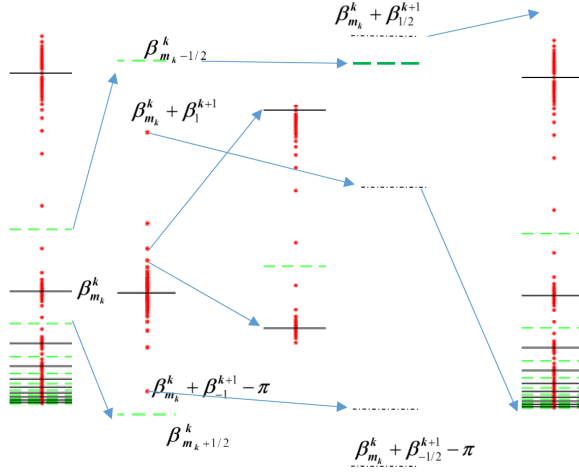


Рис. 11: Иерархия пучков периодических траекторий.

Поскольку область определения рассматриваемых углов есть $[0, \pi]$, то данное условие эквивалентно:

$$\operatorname{tg}(\beta_{m_k-1/2}^k - \beta_{m_k}^k) \leq \operatorname{tg} \beta_{1/2}^{k+1},$$

кроме случая автоматического выполнения (6.1) при $\beta_{m_k-1/2}^k - \beta_{m_k}^k \leq \pi/2$, $\beta_{1/2}^{k+1} \geq \pi/2$, а так же обратного случая

$$\beta_{m_k-1/2}^k - \beta_{m_k}^k \geq \pi/2, \quad \beta_{1/2}^{k+1} \leq \pi/2 \quad (6.4)$$

Их рассмотрим отдельно, позднее.

Используя тангенс разности, с учётом (5.1) получим

$$\frac{1/2 A^{k-1} \sin \beta^{k-1}}{m_k(m_k - 1/2) - (2m_k - 1/2) A^{k-1} \cos \beta^{k-1} + (A^{k-1})^2} \leq \frac{A^k \sin \beta^k}{1/2 - A^k \cos \beta^k}$$

Учитывая положительность числителей и (5.2), можем записать

$$\frac{1/2 A^0 B^0}{m_k(m_k - 1/2) - (2m_k - 1/2) A^{k-1} \cos \beta^{k-1} + (A^{k-1})^2} \leq \frac{(A^k)^2}{1/2 - A^k \cos \beta^k} \quad (6.5)$$

Выразив неотрицательный синус через модуль тангенса, из рекурсии (5.1), (5.2) получим

$$A^k = \frac{A^0 B^0}{\sqrt{m_k^2 - 2m_k A^{k-1} \cos \beta^{k-1} + (A^{k-1})^2}} \quad (6.6)$$

Аналогичным образом для косинуса получается выражение

$$\cos \beta^k = \frac{m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1}}{\sqrt{m_k^2 - 2m_k A^{k-1} \cos \beta^{k-1} + (A^{k-1})^2}} \quad (6.7)$$

Числитель (6.7) автоматически определяет знак, как тангенса в (5.1), так и косинуса здесь. Подставляя наконец (6.6) и (6.7) в (6.5) и, сократив положительные множители, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_k (m_k - 1/2) - (2m_k - 1/2) A^{k-1} \cos \beta^{k-1} + (A^{k-1})^2} \leq \\ & \leq \frac{4A^0 B^0}{m_k^2 - 2m_k A^{k-1} \cos \beta^{k-1} + (A^{k-1})^2 - 2(m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1}) A^0 B^0} \end{aligned}$$

Для более удобного анализа неравенства выделим одинаковые части в знаменателях

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1})^2 + (A^{k-1})^2 \sin^2 \beta^{k-1} - 1/2 (m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1})} \leq \\ & \leq \frac{4A^0 B^0}{(m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1})^2 + (A^{k-1})^2 \sin^2 \beta^{k-1} - 2(m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1}) A^0 B^0} \quad (6.8) \end{aligned}$$

Из (6.2) следует $\frac{A^0 B^0}{4} \geq 1$, тогда при одинаковых знаках знаменателей неравенство выполняется. При разных знаках пропорциональная тангенсу разности $\operatorname{tg}(\beta_{m_k-1/2}^k - \beta_{m_k}^k)$ левая часть (6.8) обязательно положительна, тогда $0 \geq \operatorname{tg} \beta_{1/2}^{k+1}$ и автоматически выполнено (6.3), а случай (6.4) невозможен.

Аналогичным образом доказывается

$$\beta_{m_k+1/2}^k - \beta_{m_k}^k \geq \beta_{-1/2}^{k+1} - \pi, \quad (6.9)$$

или эквивалентное $\beta_{m_k}^k - \beta_{m_k+1/2}^k \leq \pi - \beta_{-1/2}^{k+1}$. Последнее исследуется аналогичным предыдущему случаю способом, с переходом к

$$\operatorname{tg}(\beta_{m_k}^k - \beta_{m_k+1/2}^k) \leq \operatorname{tg}(-\beta_{m_k+1/2}^{k+1})$$

Результирующее неравенство после всех подстановок и сокращений будет иметь похожий на (6.8) вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1})^2 + (A^{k-1})^2 \sin^2 \beta^{k-1} + 1/2 (m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1})} \leq \\ & \leq \frac{4A^0 B^0}{(m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1})^2 + (A^{k-1})^2 \sin^2 \beta^{k-1} + 2(m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1}) A^0 B^0} \end{aligned}$$

Оно так же выполнено при одинаковых знаках знаменателей независимо от знака $(m_k - A^{k-1} \cos \beta^{k-1})$, а при разных — автоматически выполняется (6.9).

Таким образом, область направлений, однозначно отнесенная к классу, накрывается счетным множеством интервалов конечной меры с границами из

направлений дочерних пучков периодических траекторий, являющихся предельными. При таком разбиении используются:

$$m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Поскольку, с одной стороны, $m_k = 0$ возвращает нас в пучок $U_n^{k-2}(m_{k-2})$ (см. рис. 8 и (5.1)), а с другой, как ясно из (5.1), существует бесконечно много менее отклоненных пучков $U_n^{k-1}(m'_{k-1})$, чем $U_n^{k-1}(m_{k-1})$, использование нулевых членов в генерирующей последовательности для кодирования периодических траекторий или разбиения на классы направлений смысла не имеет.

Интервалы в полученном разбиении имеют меру меньшую, чем ширина исходного пучка, и позволяют выполнить следующее разбиение на аналогичные, уже свои дочерние классы. Неограниченно повторяя процедуру, получим всюду плотное множество предельных точек внутри класса $U_n^k(m_k)$. Следовательно, для почти любого наперед заданного направления β в начальном многоугольнике существует генерирующая последовательность $\{m_k\}_0^\infty$, однозначно задающая последовательность пучков $\{U_n^k(m_k)\}_0^\infty$ такую, что:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin(\beta_{m_k+1/2}^k - \beta_{m_k-1/2}^k) = 0.$$

Для самого направления верно

$$\beta = \theta n + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^k, \quad (6.10)$$

где θ — центральный угол многоугольника, γ_k^k — пересчитанное отклонение класса порядка k от предшественника:

$$\gamma_{m_k} = \begin{cases} \beta_{m_k}^k, & m_k > 0, \\ \beta_{m_k}^k - \pi, & m_k < 0. \end{cases}$$

Генерирующая последовательность не зависит от начальной точки траектории на сторонах многоугольника, поскольку используемая рекурсия (5.1), (5.2) этой информации не содержит.

Из доказанной плотности следует, что любая конечно-периодическая траектория задаётся описанной рекурсией с конечной генерирующей последовательностью.

§ 7. Примеры периодических траекторий в правильных многоугольниках

На рисунках ниже представлены примеры периодических траекторий. Вычисления проводились в пакете Wolfram Mathematica. Заданная точность вычислений для последовательности отклонений и звеньев траекторий устанавливалась в 24 знака. Многоугольники описаны вокруг единичной окружности.

На рис. 12 представлены траектории нулевого и первого порядков. Стартовые сегменты обозначены стрелками. В первом случае каждое звено параллельно одной из сторон. Во втором генерирующая последовательность состоит из одного элемента $m_1 = 2$.

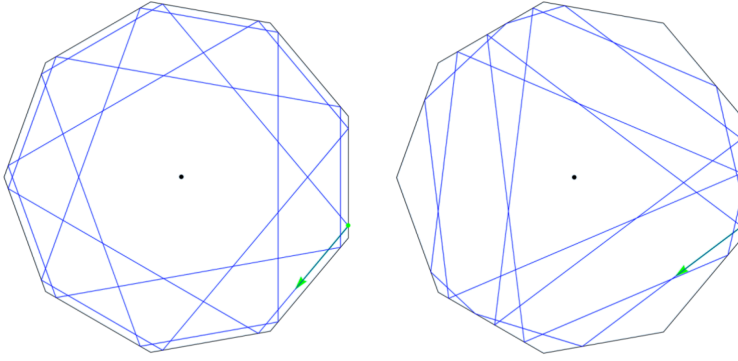


Рис. 12: Периодическая траектория нулевого порядка слева и первого справа в правильном 9-угольнике.

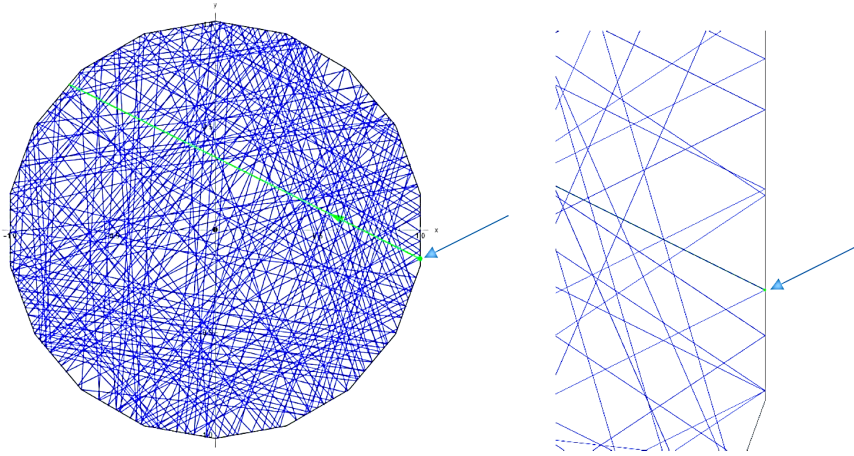


Рис. 13: Пример траектории четвертого порядка.

Более сложный случай с траекторией четвертого порядка в 18-угольнике можно видеть на рис. 13. Длина полного периода здесь равна 222 отражениям. Погрешности совмещения крайних точек периода по косинусу отклонения от нормали к стороне и по положению на стороне составили менее 10^{-30} . Стартовое положение указано стрелками.

На рис. 14 показано подобранное приближение пучками периодических траекторий траектории с полуцелым значением $m_2 = 5/2$ в 11-угольнике. График представляет частичные суммы отклонений из (6.10). Генерирующая последовательность имеет вид $\{1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1\}$.

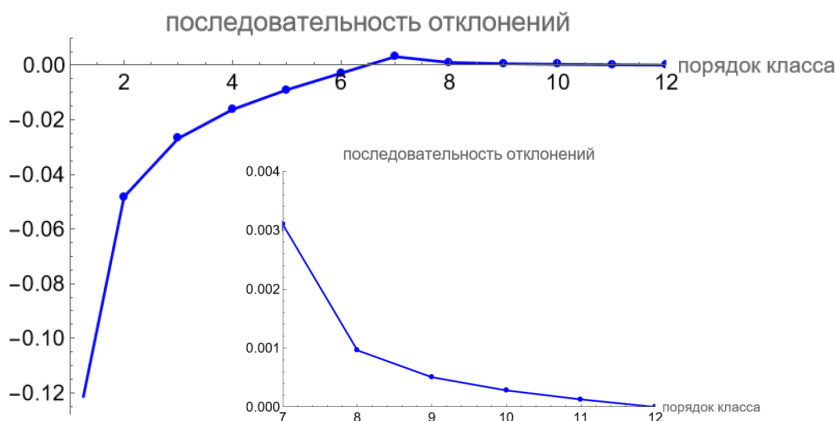


Рис. 14: Последовательность накопленных отклонений для последовательных приближений траектории с полуцелым индексом первого порядка в одиннадцатигульнике.

§ 8. Заключение

В рациональных многоугольниках общего вида динамика описывается геодезическими потоками на многообразиях с особенностями, порожденных фундаментальным многоугольником с помощью трансляций и поворотов [6, 5]. Как показано в работах [1, 5], направления, параллельные линиям, соединяющим пары из всевозможных положений вершин исходного многоугольника, подвергнутого всевозможным отражениям относительно своих сторон и их композиций, определяют периодические траектории.

Представленный алгоритм по сути позволяет простым способом задавать такие направления отрезков. Кроме этого, найденная иерархия позволяет категоризировать траектории по «сложности» или некоторой «запутанности», определяемой количеством ненулевых членов генерирующей последовательности. Роль некоторого «фундаментального» многоугольника или ячейки для любого исходного правильного многоугольника здесь играет универсальная пара параллелограммов. Они формируют топологическое многообразие трансляциями и гомотетией. Базой может служить совокупность таких параллелограммов (точнее, их внутренностей) и их сдвигов. Для замыкания ветвлений в особых точках классов одинакового порядка и генерирующей последовательности требуется совпадение сторон.

В отличие от общего к рациональным многоугольникам подхода [5, 6], в предложенном методе при построении многообразия для выпрямленных траекторий приходится учитывать изменения размеров базовых элементов при переходе траектории между ними, а также изменения их формы в итерации. Взамен при дальнейшем анализе динамики не используются дополнительные сложные гомеоморфизмы фазового или конфигурационного пространств типа сжатия-растяжения.

При каждом шаге рекурсии минимальный период получается сшивкой двух подпоследовательностей с относительным сдвигом на 2. В результате получается фракталоподобное усложнение структуры периода. На рис. 15 показан пример такого поведения для генерирующей последовательности $\{1, 2, 3, -2, 2\}$.

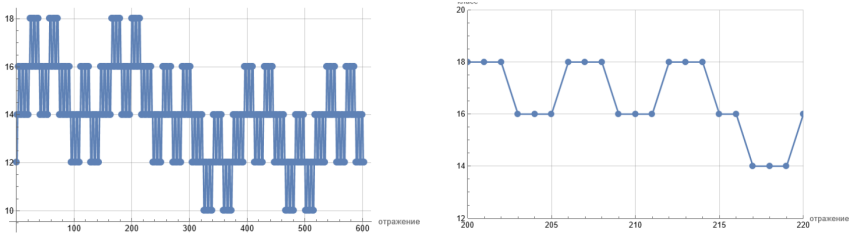


Рис. 15: Отображение последовательности классов периодической траектории в 21-угольнике с генерирующей последовательностью $\{1, 2, 3, -2, 2\}$.

Поскольку любой правильный многоугольник составлен из копий образующего его равнобедренного треугольника, то полученные условия периодичности применимы и для него¹.

Кроме того, выводы сохраняют силу для «условного» многоугольника с ветвлением в центре, образованного многократным отражением относительно боковой стороны равнобедренного треугольника с рациональным углом при вершине (см. рис. 16). Здесь, конечно, теряется наглядность иерархии, поскольку некоторые классы содержат дополнительный центр ветвления (центр многоугольника), расположенный не на их границе. Это приводит к переходам реальной траектории между классами, наложенными друг на друга под некоторым углом. Однако на саму периодичность это, опять-таки, не влияет. Проекция сепаратрис на плоскость XU содержат проекции некоторых особых точек, а они – суть образы вершин треугольника в его группе отражений. Этого достаточно для периодичности в рациональном треугольнике [1, 5].

¹Строго говоря, нужно разделять чётные и нечётные многоугольники, так как в первых склеиваются при одном обороте одинаковые стороны, а во вторых — разные, но, очевидно, на связь периодичности в многоугольнике и треугольнике это не влияет

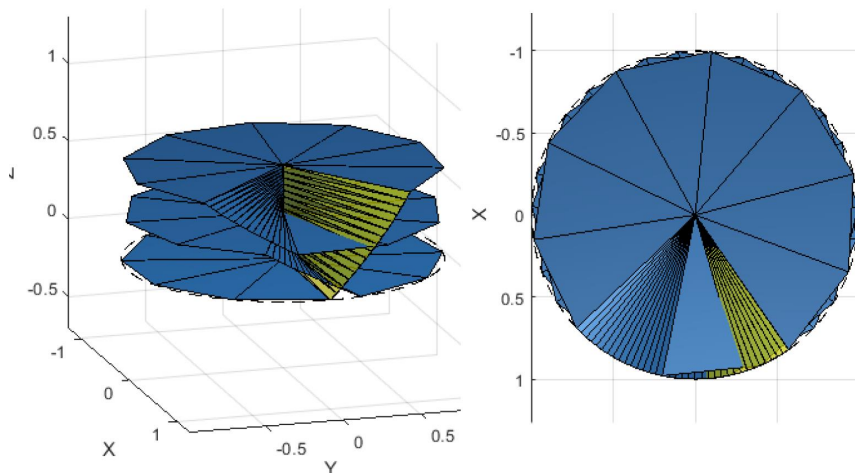


Рис. 16: Пример многоугольника с ветвлением.

Более того, для нерациональных равнобедренных треугольников с достаточно малым углом при вершине часть периодических пучков также кодируется (5.1), (5.2) последовательностями классов, не содержащих центр ветвления. Действительно, данный многоугольник порождает аналогичные параллелограммные структуры с такими же условиями периодичности переходов, если последовательность пучков не заходит в класс с центральным ветвлением. Достаточно малость нужна для существования хотя бы одного класса конечной ширины и периода, не содержащего центра многоугольника.

Таким образом, представленный рекуррентный алгоритм может оказаться полезным для исследования динамики бильярдов и в некоторых типах многоугольников.

Список литературы

- [1] Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков, *Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики)*, Наука, М., 1990.
- [2] С. Табачников, *Геометрия и бильярды*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2011.
- [3] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Бильярды: Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 1991.
- [4] Г. А. Гальперин, “Бильярды и динамические системы”, *Математическое просвещение*, **7** (2003), 7–28.
- [5] Н. Masur, “Closed trajectories for quadratic differentials with applications to billiards”, *Duke Mathematical Journal*, **53**:2 (1986), 307–314 .
- [6] Я. Б. Воробец, “Плоские структуры и бильярды в рациональных многоугольниках: альтернатива Вича”, *УМН*, **51**:5(311) (1996), 3–42; *Russian Math. Surveys*, **51**:5 (1996), 779–817.
- [7] Я. Б. Воробец, Г. А. Гальперин, А. М. Степин, “Периодические бильярдные траектории в многоугольниках: механизмы рождения”, *УМН*, **47**:3(285) (1992), 9–74; *Russian Math. Surveys*, **47**:3 (1992), 5–80.

С.С. Попов

**Полное задание периодических бильярдных траекторий
внутри правильных многоугольников**

Препринт ИЯФ СО РАН
2026-03

Ответственный за выпуск М.В. Кузин

Работа поступила 17.07.2026 г.

Сдано в набор 20.07.2026 г.

Подписано в печать 20.07.2026 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1 печ.л., 1 уч.-изд.л.

Тираж 70 экз. Бесплатно. Заказ № 17

*Обработано на РС и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11*