



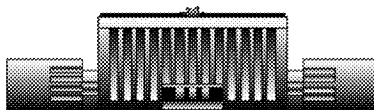
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ**

**им. Г.И. Будкера СО РАН
(ИЯФ СО РАН)**

А.Д. Беклемишев, С.Е. Константинов, М.С. Христо

**Сокращённая МГД для параксиальных
ловушек с большим бета**

ИЯФ 2026-01



**НОВОСИБИРСК
2026**

Сокращённая МГД для параксиальных ловушек с большим бета

А.Беклемишев, С.Константинов, М.Христо

28 января 2026 г.

Аннотация

Выводится полная система уравнений сокращённой магнитной гидродинамики для открытых ловушек с высоким относительным давлением плазмы. На основе малого параметра, обратного аспектного отношения ловушки, высокочастотная ветвь магнитного звука заменяется параксиальным квазиравновесием. Система уравнений может быть использована для разработки численных моделей разрядов в газодинамических ловушках.

1 Введение

Основной идеей приближения сокращённой МГД [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], разработанной изначально для описания нелинейных процессов в плазме токамака, было отделение относительно низкочастотных возмущений альфвеновского типа от высокочастотного магнитного звука. Магнитозвуковая ветвь считается находящейся в квазиравновесии, что, при низком β , эквивалентно пренебрежению возмущением продольного магнитного поля вообще. В открытых ловушках типа ГДЛ [10] или в проектных режимах ГДМЛ [11] с $\beta \sim 0.5$ пренебрегать возмущением продольного поля, конечно, нельзя, но основную идею можно сохранить. Более того, её точность за счёт малости обратного аспектного отношения $\epsilon = a/L$, отношения радиуса плазмы a к характерной длине L , значительно выше, чем в токамаках. Например, в ГДЛ расстояние между пробками составляет 7м при характерном радиусе плазмы в 15см, так что $\epsilon = 2\%$. Напротив, величина β , в отличие от токамаков, эффективным малым параметром не является, поскольку уже в текущих экспериментах пиковые значения достигают $\beta \sim 0.6$.

Установление поперечного равновесия в открытых ловушках происходит со скоростью быстрого магнитного звука, которая не снижается даже в пределе полного вытеснения магнитного потока, $\beta \rightarrow 1$. Характерная частота при этом $\omega_{\perp} \sim c_A/a$, где c_A - альфвеновская скорость по вакуумному полю. Продольное равновесие также устанавливается со скоростью звука, которая при $\beta \rightarrow 1$ становится одного порядка с альфвеновской. В результате, $\omega_{\parallel} \sim v_{Ti}/L \sim c_A/L$. С такими же характерными частотами развиваются конвективные неустойчивости; для желобковых мод $\gamma \sim v_{Ti}/L \sim \omega_{\parallel}$. В результате, поперечное

квазиравновесие устанавливается гораздо быстрее выравнивания давления вдоль ловушки и развития конвективных неустойчивостей: $\omega_{\perp}/\omega \sim \epsilon^{-1} \gg 1$ даже в пределе большого давления плазмы. Надо отметить, что термин «высокое β » в приближении сокращённой МГД встречается часто, однако реально предполагается $\beta \sim \epsilon$ в соответствии с условиями в плазме токамаков.

Диссипативные процессы, изменяющие распределение равновесных параметров, в открытой ловушке типа ГДЛ имеют характерную частоту $\omega_{diss} \sim 1/\tau_{\parallel} \sim \omega_{\parallel}/R$, где R - эффективное пробочное отношение. Поскольку в ГДЛ $R \sim 35$, в дальнейшем будем считать характерные скорости диссипативных процессов малыми величинами второго порядка: $\omega_{diss} \sim \epsilon \omega_{\parallel} \sim \epsilon^2 \omega_{\perp}$. Целью вывода сокращённой МГД являются уравнения конвективной динамики плазмы со средними характерными частотами порядка ω_{\parallel} . Однако более медленные диссипативные процессы также необходимо учитывать, поскольку они влияют на долговременную нелинейную эволюцию фонового равновесия плазмы. Совместное описание фоновых процессов переноса и турбулентной конвекции сильно усложняет модель, но для моделирования разрядов открытых ловушек является необходимостью.

Использование малого обратного аспектного отношения открытых ловушек в качестве параметра разложения является стандартным приёмом. В частности, в фундаментальной работе Ньюкомба [12] проведён анализ МГД-устойчивости плазмы параксиальных ловушек с конечным β и учётом анизотропии давления и дрейфовых эффектов. Эта работа базируется на консервативной бесстолкновительной модели и не приспособлена для описания диссипативных процессов, которые необходимы для моделирования разрядов в ловушках типа ГДЛ. Широко

применяемые Ньюкомбом координаты Лагранжа также совершенно не годятся для моделирования квазистационарной конвекции (что имеет место, например, в режиме вихревого удержания в ГДЛ [13]).

Вариационный метод вывода сокращённой МГД с точностью ϵ^2 использован в [8, 9], причём утверждается, что возможно описание слабо-диссипативных систем при конечном β . Возможно ли учесть сильную диссипацию в граничных условиях на электродах плазмоприёмника, что необходимо для описания эффектов частичной вмороженности и вихревого удержания – неясно. Ещё одно ограничение этих работ – использование мелкомасштабности возмущений $\epsilon = (k_\perp a)^{-1} \ll 1$ в качестве второго малого параметра, причём считается $\beta \sim \epsilon$ и давление изотропно. Применимость этого приближения для открытых ловушек типа ГДЛ ограничена, поскольку наиболее опасной модой при наличии эффекта конечного ларморовского радиуса (КЛР) является $m = 1$ с малым k_\perp .

Основной метод вывода сокращённой МГД – редуцированное представление векторных полей общего вида с помощью определённого набора скалярных полей меньшей размерности, реализующего разложение по малому параметру задачи. Этот метод действительно эффективен и мы будем его использовать при выводе, однако наш набор скалярных полей должен быть приспособлен к новой задаче. В стандартной сокращённой МГД возмущение магнитного поля описывается единственной (продольной) компонентой векторного потенциала, а поперечное электрическое поле и скорость плазмы полностью определяются её электростатическим потенциалом. Например, в [3] рассматривается модель плоского слоя и задача сводится к зацепленным уравнениям для продольного векторного потенциала ψ и продольной завихренности

сти течения U :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\phi, \psi] + \eta(J - J_0), \quad J = \nabla^2 \psi, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \rho[\phi, U] + [J, \psi], \quad U = \nabla^2 \phi, \quad (2)$$

где $[A, B] \equiv \nabla A \times \nabla B \cdot \vec{e}_z$, J — продольная плотность тока, ϕ — электростатический потенциал, η — проводимость, а J_0 моделирует равновесную плотность тока (в токамаке). Система (1),(2) представляет собой стандартный «скелет» сокращённой МГД, описывающий винтовые моды и альфвеновские колебания, на который могут навешиваться дополнительные физические эффекты. Например, моделирование баллонных мод потребует введения в систему дополнительных уравнений для эволюции давления и продольной скорости. Кроме эволюционных уравнений система содержит ещё два соотношения типа $U = \nabla^2 \phi$, которые мы в дальнейшем будем называть «уравнениями связи».

В этой работе мы попробовали не навешивать на «скелет» сокращённой МГД дополнительные эффекты и связи, которые мы посчитали бы важными и нужными, а вывести полную систему «на все случаи жизни» из первых принципов. Это делает её, конечно, весьма громоздкой. Позитивным свойством такого подхода является возможность последующей редукции полной модели к более простым, причём можно будет быть уверенным в отсутствии в них внутренних противоречий. Например, численные модели с продольным течением обычно нуждаются в диссипации звуковых колебаний, что может быть достигнуто введением продольной вязкости. В то же время продольная вязкость эквивалентна столкновительной диссипации анизотропии давления и, поэтому, связана сразу со

многими аспектами модели, в частности, с продольными потерями через пробку.

Область применимости полученной системы ограничена приближениями исходной МГД модели: даже с учётом возможности дрейфовых поправок эффекты конечного ларморовского радиуса описываются неполно. В частности, моделирование режима диамагнитного удержания [14] потребует отдельной схемы для внутренности диамагнитного пузыря с незамагниченной плазмой, а также, возможно, для корректного описания структуры переходного слоя в присутствии быстрых ионов. Тем не менее, сокращённая МГД с учётом источников и диссипативных эффектов может быть очень полезна для моделирования переходных режимов от вихревого [13] к диамагнитному удержанию. Это необходимо для обоснования соответствующих режимов работы ГДМЛ [11].

В разделе 2 мы обсуждаем вывод полной системы уравнений движения плазмы из дрейфовой теории следуя классическим работам. В разделе 3 приводится редуцированное представление векторных полей - магнитного поля и скорости. В разделе 4 обсуждаются условия поперечного квазиравновесия с точностью ϵ^2 , в разделе 5 – универсальная запись закона Ома, в разделе 6 – связь скорости и условия замыкания токов. На этой основе в разделе 7 получено уравнение на поперечную сжимаемость течения, которое обычно, ввиду сложности, заменяется постулированным условием несжимаемости. В разделе 8 из условия замыкания токов выводится уравнение переноса обобщённой завихренности, а в разделе 9 – уравнения продольного движения и эволюции компонент давления. В разделе 10 приводится полная замкнутая система из 6 эволюционных уравнений и 5 уравнений связи, а в Заключение обсуждается область применения.

2 Гидродинамика разреженной плазмы

Начнем вывод с полных исходных уравнений магнитной гидродинамики. В литературе существует множество вариаций этой системы уравнений с различными приближениями и условиями замыкания. В открытых ловушках плазма обычно слабостолкновительная с существенной анизотропией давления. Кроме того, целью сокращённой МГД являются низкочастотные процессы, в которых стоит учитывать дрейфовые, диссипативные и двужидкостные эффекты, источники и стоки частиц и энергии. Чтобы построить более-менее универсальную модель, сохраним основной каркас уравнений и в них добавим свободные члены с ясным физическим смыслом, которые в конкретных приложениях можно будет использовать для описания нужных эффектов. Чтобы наша система уравнений была совместима с дрейфовыми поправками типа эффектов конечного ларморовского радиуса (КЛР), надо установить её соответствие с дрейфовой теорией.

Сначала получим выражения для локальной скорости потока частиц с зарядом e и массой m из дрейфовой теории. Скорость дрейфа \vec{R} используем из обзора [15] (в форме Брагинского) в терминах «сглаженных» проекций скорости частицы на магнитное поле $\vec{B} = \vec{b}B$ в точке ведущего центра (U_{\parallel}, U_{\perp}):

$$U_{\parallel} = u_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{2\omega_c} \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{b}, \quad (3)$$

$$U_{\perp} = u_{\perp} - \frac{u_{\parallel} u_{\perp}}{2\omega_c} \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{b}, \quad (4)$$

$$\dot{\vec{R}} = U_{\parallel} \vec{b} + c \frac{\vec{E} \times \vec{b}}{B} + \frac{U_{\perp}^2}{2\omega_c} \vec{b} \times \nabla \ln B + \frac{U_{\parallel}^2}{\omega_c} \vec{b} \times \vec{\kappa} + \frac{\vec{F} \times \vec{b}}{m\omega_c}, \quad (5)$$

причём адиабатическим инвариантом с точностью до членов второго порядка малости является величина

$$m\mu = \frac{m^2 U_{\perp}^2}{2B}. \quad (6)$$

Здесь \vec{u} - локальная скорость частицы, $\omega_c = eB/mc$, и по сравнению с [15] в (5) изменены некоторые обозначения и добавлена скорость дрейфа под действием «прочих» поперечных сил \vec{F} (например, инерции, гравитации или трения с другим сортом частиц). Поправка к скорости (3) может показаться малой, но формально вклад от неё в (5) такого же порядка как и дрейфы, и её придётся сохранить, чтобы избежать ошибки впоследствии.

Для вычисления гидродинамической плотности потока частиц путём усреднения по функции распределения будем использовать методы из обзоров [16, 17]. Для этого нам понадобится связь кривизны силовых линий магнитного поля с локальной плотностью тока и градиентом модуля магнитного поля. Будем использовать соотношения

$$\nabla \times \vec{b} = \frac{1}{B} \nabla \times \vec{B} + \vec{b} \times \nabla \ln B \approx \frac{4\pi}{cB} \vec{j} + \vec{b} \times \nabla \ln B, \quad (7)$$

$$\vec{b} \cdot \nabla \times \vec{b} \approx \frac{4\pi}{cB} j_{\parallel}, \quad \vec{b} \times \vec{\kappa} \approx \frac{4\pi}{cB} \vec{j}_{\perp} + \vec{b} \times \nabla \ln B, \quad (8)$$

где $\vec{\kappa} = (\vec{b} \nabla) \vec{b}$ - кривизна магнитного поля, а знак приближения соответствует пренебрежению током смещения (или включению его в \vec{j}). Теперь мы можем усреднить (5) по функции распределения, которая должна зависеть от сглаженных скоростей \vec{U} :

$$\begin{aligned} n \langle \dot{\vec{R}} \rangle &= n \langle v_{\parallel} \rangle \vec{b} + \frac{4\pi p_{\perp}}{eB^2} j_{\parallel} \vec{b} + nc \frac{\vec{E} \times \vec{b}}{B} + \\ &+ c \frac{p_{\perp} + p_{\parallel}}{eB} \vec{b} \times \nabla \ln B + \frac{4\pi p_{\parallel}}{eB^2} \vec{j}_{\perp} + nc \frac{\langle \vec{F} \rangle \times \vec{b}}{eB}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь n - плотность, а p_{\perp}, p_{\parallel} - компоненты тензора давления данного сорта частиц. По сравнению с формулой (1.13) в [17] в этом выражении есть дополнительное слагаемое (второе), возникшее из-за поправки первого порядка по $1/\omega_c$ к продольной скорости из (3).

Плотность потока ларморовских центров отличается от плотности потока частиц на величину «обтекающего» потока $\nabla \times \vec{K}$, где \vec{K} - плотность кинематического момента ларморовских кружков [17]:

$$\vec{K} = \frac{1}{2}n \langle \vec{r} \times \vec{v} \rangle = -\frac{p_{\perp}}{m\omega_c} \vec{b}, \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{K} = \frac{1}{m\omega_c} \left(\vec{b} \times \nabla p_{\perp} - 2p_{\perp} \vec{b} \times \nabla \ln B - \frac{4\pi p_{\perp}}{cB} \vec{j} \right). \quad (11)$$

Теперь локальная плотность потока частиц определённого сорта может быть записана в виде:

$$n\vec{v} = n \langle v_{\parallel} \rangle \vec{b} + \frac{c}{eB} \left[ne\vec{E} \times \vec{b} + n \langle \vec{F} \rangle \times \vec{b} + \vec{b} \times \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \left(\frac{4\pi}{cB} \vec{j}_{\perp} + \vec{b} \times \nabla \ln B \right) \right], \quad (12)$$

где все параметры - n, e, p относятся к данному сорту частиц. Отличие от формулы (1.18) в [17] и формулы (1.17) в [18] заключается в отсутствии слагаемого с продольным током, которое точно сократилось. Это приведёт к изменённому результату и для плотности тока. Учитывая сорта частиц и квазинейтральность, можно найти плотность продольного тока:

$$j_{\parallel} = \sum_k en \left(\vec{v} \vec{b} \right) = \sum_k en \langle v_{\parallel} \rangle. \quad (13)$$

Это выражение выглядит менее парадоксально, чем приведённое в [17, 18] (формулы (1.23) и (1.18) соответственно), где плотность продольного тока получилась в $1 +$

$4\pi p_{\perp}/B^2$ раз меньше. Эта поправка может оказаться важна для плазмы высокого давления.

Для поперечного тока полученные в литературе [17, 18] выражения корректны, но мы будем использовать альтернативную форму его записи

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{c}{B} \left(\vec{b} \times \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{b} \times \vec{\kappa} + \sum_k n \langle \vec{F} \rangle \times \vec{b} \right), \quad (14)$$

где компоненты давления - суммарные по сортам частиц. К этой форме можно прийти, если выразить \vec{j}_{\perp} в правой части исходного уравнения (12) через $\vec{b} \times \vec{\kappa}$.

Уравнение (14) сворачивается в МГД-подобную форму, если из него найти поперечную объёмную силу, действующую на плазму:

$$\sum_k n \langle \vec{F} \rangle_{\perp} = -\nabla p_{\perp} - (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{\kappa} + \frac{1}{c} \vec{j}_{\perp} \times \vec{B}. \quad (15)$$

Эта суммарная сила включает инерцию всего плазменного потока, включая «обтекающий», а не только потока ларморовских кружков. В этом смысле можно считать, что уравнение движения анизотропной плазмы поперёк поля в дрейфовой теории точно согласуется с магнитной гидродинамикой:

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\perp} = -\nabla p_{\perp} - (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{\kappa} + \frac{1}{c} \vec{j}_{\perp} \times \vec{B} + \vec{f}_{\perp}, \quad (16)$$

где \vec{f} - «прочая» объёмная сила. Это означает, что вместо поперечной компоненты уравнения движения ионов можно использовать выражение (12), где $\langle \vec{F} \rangle$ - сила, включающая инерцию самого потока $\rho \vec{v}$.

МГД уравнения движения плазмы с анизотропным давлением, основанные на работах Чу-Голдбергера-Лоу [19], можно найти, например, в обзоре Волкова [16]. Мы их запишем с добавлением свободных источников:

1. Уравнение непрерывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \zeta\rho = q_\rho, \quad (17)$$

где дивергенции скорости введено обозначение

$$\zeta = \nabla \cdot \vec{v}, \quad (18)$$

а q_ρ - плотность объёмного источника массы (например, из-за ионизации нейтралов).

2. Уравнение движения плазмы как целого:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{p} + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] + \vec{f}, \quad (19)$$

где дивергенция тензора давления в замагниченной анизотропной плазме может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overleftrightarrow{p} &= \nabla p_\perp + \left(\vec{B} \nabla \right) \left[\frac{\vec{B}}{B^2} (p_\parallel - p_\perp) \right] \equiv \\ &\equiv \nabla p_\perp + \delta \vec{f}_p, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\delta \vec{f}_p = (p_\parallel - p_\perp) \vec{\kappa} + \vec{B} \left(\vec{b} \nabla \right) \frac{p_\parallel - p_\perp}{B}, \quad (21)$$

а \vec{f} - объёмная сила (например, вязкая, или возникающая из-за инжекции импульса с частицами). Продольная вязкая сила в \vec{f} не входит, она учитывается анизотропией давления.

3. Упрощённые уравнения для компонент тензора давления могут быть получены из поперечной адиабаты ЧГЛ и одномерной продольной адиабаты с учётом источников и диссипации:

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} + \zeta p_{\perp} - \frac{p_{\perp}}{B} \frac{dB}{dt} + q_{\perp} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} + \zeta p_{\parallel} + 2p_{\parallel}(\vec{b}\nabla)v_{\parallel} + q_{\parallel} = 0. \quad (23)$$

Здесь q_{\perp}, q_{\parallel} – отвечают за источники нагрева (в том числе с частицами) и дивергенции потоков тепла в рамках конкретной модели замыкания. В отличие от работы [16] мы здесь пока сохранили dB/dt , поскольку его исключение зависит от конкретной модели закона Ома. Для описания продольной вязкости течения в источники достаточно включить релаксацию анизотропии с частотой ν_T :

$$q_{r\perp} = \nu_T (p_{\perp} - p_{\parallel}), \quad q_{r\parallel} = -2\nu_T (p_{\perp} - p_{\parallel}). \quad (24)$$

Альтернативные варианты замыкания магнитной гидродинамики, лучше приспособленные для моделирования затухания Ландау продольного звука, обсуждаются в [20]. Наш базовый вариант с продольной вязкостью кажется более подходящим для описания медленной эволюции равновесия и вытянутых вдоль поля мод в газодинамических ловушках.

4. Закон Ома идеальной одножидкостной МГД

$$\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] = 0 \quad (25)$$

является радикальным упрощением по сравнению с более реалистичным двухжидкостным описанием

условий протекания тока. В частности, поперечная скорость плазмы, которую из него можно легко найти, по сравнению с (12) содержит только дрейф в скрещенных полях. Сохранить возможность усложнения этой модели можно по общей схеме введения произвольной поправки. При выводе уравнений сокращённой гидродинамики способ использования поперечной и продольной компонент закона Ома отличается: поперечная нужна для описания связи скорости плазмы с электрическим полем, а продольная - для описания продольной плотности тока. В нашей модели электроны можно считать безмассовыми, тогда скорость плазмы совпадает со скоростью ионов, а продольное электрическое поле определяется равновесием электронной жидкости вдоль силовых линий. Поэтому, вместо поперечной компоненты закона Ома будем использовать поперечную часть уравнения (12) для ионной компоненты в виде:

$$\vec{v}_\perp = c \frac{\vec{E} \times \vec{b}}{B} + \vec{v}_d, \quad (26)$$

где \vec{v}_d - модельно-зависимая дополнительная скорость поперечного дрейфа:

$$\vec{v}_d = \frac{c}{q_i B} \left[\vec{b} \times \nabla p_{\perp i} + (p_{\parallel i} - p_{\perp i}) \vec{b} \times \vec{\kappa} \right] + \frac{nc}{q_i B} \langle \vec{F}_i \rangle \times \vec{b}, \quad (27)$$

$$n \langle \vec{F}_i \rangle = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f}_i - q_i \frac{\vec{j}}{\sigma}, \quad (28)$$

и q_i - заряд иона. Учёт \vec{v}_d в том или ином виде может понадобиться для описания резистивных и дрейфовых эффектов.

Продольная компонента обобщённого закона Ома может быть записана как

$$E_{\parallel} = \mathcal{E}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = -\frac{1}{ne} \left[\left(\vec{b} \nabla \right) p_{\parallel e} + (p_{\perp e} - p_{\parallel e}) \left(\vec{b} \nabla \right) \ln B \right] + \\ + \frac{j_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{f_{\parallel e}}{ne} \end{aligned} \quad (30)$$

и в этой формуле $e > 0$, т.е. заряд электрона есть $-e$. Учёт градиента давления электронов через \mathcal{E} позволит описывать влияние амбиполярного потенциала. Как амбиполярный потенциал, так и дрейфовые эффекты, в том числе КЛР, нельзя считать малыми в современных открытых ловушках типа ГДЛ, поэтому соответствующие поправки к идеальному закону Ома должны быть интегрированы в математическую модель. Для сокращения записи ниже будем использовать выражения (26), (29).

Система МГД уравнений (17), (19), (22), (23), (26), (29) является полной. Модель также должна содержать определения свободных слагаемых $\left(q_{\rho}, \vec{f}, q_{\perp}, q_{\parallel}, \vec{v}_d, \mathcal{E} \right)$ при их наличии.

3 Представление векторных полей

Для сведения векторных уравнений к скалярным обычно требуется репер - привязка к системе координат или постоянному векторному полю. В случае стандартной со-кращённой МГД постоянным является некоторое «продольное» магнитное поле, а изменения поля описываются исключительно как малые поперечные поправки на его фоне. При высоком относительном давлении плазмы $\beta \sim 1$ этот подход не работает, поскольку все компоненты магнитного поля могут сильно меняться. В нашей модели малым параметром является непараксиальность, т.е. естественным реперным полем является постоянное направление оси магнитной системы установки \vec{e}_z , а магнитная ось разряда при этом может меняться. Магнитная система ловушки находится снаружи от плазмы, так что она может оказывать влияние на динамику только через внешние боковые граничные условия на магнитное поле, которые мы будем полагать известными.

Нам необходимо получить более полное представление магнитного поля по сравнению со стандартной со-кращённой МГД, учитывающее в том числе и возмущения продольного поля. Для этого понадобятся минимум два скалярных поля, в качестве которых мы выберем осевые компоненты магнитного поля и векторного потенциала. При этом точность представления магнитного поля должна быть как минимум ϵ^2 , поскольку кривизна силовых линий, влияющая на конвекцию, имеет порядок $\sim \epsilon^2$. Выберем представление магнитного поля в виде

$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z + \vec{e}_z \times \nabla \psi + \nabla_{\perp} s, \quad (31)$$

где $B_z(\vec{r}, t)$ - произвольное аксиальное поле, $\psi(\vec{r}, t)$ - аксиальная компонента векторного потенциала, и $s(\vec{r}, t)$ - по-

правка, описывающая дивергентное поперечное поле. Параксиальность магнитного поля означает, что $\psi, s \sim \epsilon^1$.

Из $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ имеем

$$\nabla_{\perp}^2 s = -\frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (32)$$

что можно считать определением s . Здесь и ниже обозначение « \perp » относится к компонентам, перпендикулярным \vec{e}_z , а не магнитному полю. Таким образом, магнитное поле определено с помощью двух произвольных скалярных функций B_z, ψ и *граничных условий* для уравнения (32). Граничные условия играют важную роль. Например, с их помощью можно описать вакуумное магнитное поле с винтовой симметрией как в установке СМОЛА при $B_z = \text{const}$.

Для отыскания всех компонент поля необходимо решать двумерное уравнение Пуассона (32) с соответствующим граничным условием, определяемым внешним полем. Наше представление магнитного поля (31) делает уравнение Пуассона двумерным в плоскости (x, y) , что упрощает численное решение.

По известному магнитному полю можно получить выражение для плотности тока с помощью уравнения Максвелла:

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \vec{e}_z \nabla_{\perp}^2 \psi - \nabla_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \vec{e}_z \times \nabla \left(B_z - \frac{\partial s}{\partial z} \right). \quad (33)$$

Слагаемое с $\partial \psi / \partial z$ описывает дивергентную часть поперечного тока плазмы, которая замыкается продольным током.

Абсолютную величину поля можно найти по

$$B^2 = B_z^2 + |\vec{e}_z \times \nabla \psi + \nabla_{\perp} s|^2. \quad (34)$$

С точностью ϵ^2

$$B = B_z + \frac{|\vec{e}_z \times \nabla\psi + \nabla_\perp s|^2}{2B_z}. \quad (35)$$

Форма силовой линии может быть найдена из решения уравнения

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dz} = \frac{\vec{e}_z \times \nabla\psi + \nabla_\perp s}{B_z}, \quad (36)$$

где \vec{r}' - поперечный радиус-вектор от оси системы, штрих означает производную по z . Единичный вектор вдоль поля

$$\vec{b} = \frac{(\vec{e}_z + \vec{r}')}{h}, \quad (37)$$

где $h = \sqrt{1 + r'^2}$. Если использовать параксиальное приближение, т.е. считать $\vec{r}' \sim \epsilon$, $\vec{e}_z \nabla \sim \epsilon$, то с точностью ϵ^1

$$\vec{b} \approx \vec{e}_z + \vec{r}', \quad (38)$$

а кривизна магнитной силовой линии получится величиной второго порядка:

$$\vec{\kappa} = \left(\vec{b} \nabla \right) \vec{b} \approx \vec{r}''. \quad (39)$$

В старшем приближении по параксиальности вектор кривизны ортогонален к \vec{e}_z , что будет использоваться при дальнейшем выводе.

Гидродинамическая скорость плазмы также является векторным полем, которое нужно выразить через скалярные. Представим его в виде

$$\vec{v} = v_\parallel \vec{b} + \vec{e}_z \times \nabla\chi + \nabla_\perp u. \quad (40)$$

Из-за сильной анизотропии уравнения движения, поле «продольной» скорости v_{\parallel} логично привязать к направлению магнитного поля \vec{b} , а не к \vec{e}_z . Это не мешает оставить две другие компоненты - вихревую, $\vec{e}_z \times \nabla \chi$, и дивергентную, $\nabla_{\perp} u$, привязанными к \vec{e}_z , хотя выбранное представление теперь неортогонально (в меру непараксиальности). В дальнейшем мы установим, что из условия поперечного квазиравновесия следует второй порядок малости дивергентной части поперечной скорости $\nabla_{\perp} u \sim \epsilon^2$, так что можно не учитывать её инерцию и связать с прочими параметрами разряда уравнением Пуассона типа (32). Несмотря на малость, дивергентная часть поперечной скорости очень важна для описания долгосрочной эволюции плотности, завихренности и давления плазмы. В выражении ζ через компоненты скорости не содержится вихревой потенциал скорости χ :

$$\zeta \equiv \nabla \cdot \vec{v} = \left(\vec{B} \nabla \right) \frac{v_{\parallel}}{B} + \nabla_{\perp}^2 u. \quad (41)$$

В стандартной сокращённой МГД представление поперечной скорости соответствует дрейфу в скрещенных полях и производится посредством скалярного потенциала электрического поля φ , а отдельного вихревого потенциала скорости χ нет. Наш подход основан на обратной логике: поскольку течение плазмы обладает инерцией, а у поля её почти нет, то именно течение формирует распределение электрического поля в плазме, а не наоборот. Это означает, что по найденной из уравнений движения скорости мы будем искать компоненты электрического поля и выражать их через χ, u с помощью обобщённого закона Ома или (26).

4 Поперечное квазиравновесие

Сутью «сокращения» магнитной гидродинамики является описание высокочастотной ветви поперечного магнитного звука как квазиравновесия. В параксиальном приближении хорошо известное условие поперечного равновесия плазмы можно приближённо записать как

$$B^2 + 8\pi p_{\perp} = B_v^2, \quad (42)$$

где B_v - вакуумное магнитное поле, p_{\perp} - поперечное давление плазмы. Проблема с этим выражением в том, что при $\beta = 8\pi p_{\perp}/B_v^2 \rightarrow 1$ любые малые погрешности вычисления становятся важными и, например, могут привести к нефизическим решениям типа $B^2 < 0$. В реальности, если в какой-то момент окажется, что $\beta > 1$, это приведёт к быстрому расширению плазмы и, сначала, дисбаланс сил компенсируется инерцией, а затем расширение приведёт к адиабатическому снижению давления. Существует обратная связь между p_{\perp} и B , вне рамок уравнения равновесия, предотвращающая нефизические решения. Эта обратная связь порождает и быстрые магнитозвуковые колебания, которые мы надеемся исключить из рассмотрения с помощью уравнения (42). Ситуация похожа на описание несжимаемой жидкости: если использовать только условие $\rho = const$, забывая про $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, можно сильно ошибиться.

В качестве быстрой обратной связи между давлением плазмы и полем в силовой трубке, в магнитной гидродинамике действуют механизмы адиабатического изменения давления, $p_{\perp}/\rho^{\gamma} = const$, и вмерзженности, $\rho/B = const$. В совокупности это даёт $p_{\perp}/B^{\gamma} = const$. Важным частным случаем является поперечная адиабата ЧГЛ (Чу-

Голдбергера-Лоу):

$$\frac{p_{\perp}}{\rho B} = \text{const}, \quad (43)$$

которая с учётом вмороженности соответствует $\gamma = 2$. Её мы и будем использовать в дальнейшем.

Константа в правой части адиабаты на самом деле является медленно меняющейся функцией, эволюция которой определяется процессами продольного перетекания плазмы и поперечного переноса, но остаётся постоянной на коротком периоде магнитного звука. Именно такого типа функции следует использовать в уравнениях в условиях квазиравновесия. Введём «медленную» функцию

$$\beta_s(\vec{r}, z, t) \equiv \frac{8\pi p_{\perp}}{B^2}, \quad 0 \leq \beta_s \leq \infty. \quad (44)$$

С её помощью условие поперечного равновесия может быть переписано в виде пары уравнений на «медленные» составляющие магнитного поля, \bar{B} , и давления, \bar{p}_{\perp} :

$$\bar{B} = \frac{B_v}{\sqrt{1 + \beta_s}}, \quad (45)$$

$$\bar{p}_{\perp} = \frac{\beta_s B_v^2}{8\pi(1 + \beta_s)}. \quad (46)$$

Как видно, проблема $B^2 < 0$ полностью исчезла.

Параксиальное поперечное квазиравновесие (42) в нашем представлении имеет точность ϵ^0 . С этой точки зрения под B_v можно понимать несколько различные постоянные или функции координат. По выводу уравнения равновесия в прямой системе это должно быть магнитное поле снаружи от плазмы. Само это поле зависит от токов во внешних проводниках и может реагировать на изменения магнитного поля в плазме из-за наведённых токов.

Например, поле снаружи от плазмы, окружённой проводящим кожухом, будет возрастать с ростом диамагнетизма плазмы. Не углубляясь в детали описания внешних граничных условий для магнитного поля, будем считать, что они заданы именно в виде функции $B_v(z, t)$. Её можно использовать для повышения точности квазиравновесия с учётом непараксиальности.

Для уточнения уравнения (42) необходимо при его выводе из уравнения движения (19) учесть влияние поперечных сил второго порядка малости на площадь сечения силовой трубки. Например, силы, возникающей из-за натяжения искривлённых силовых линий. Эта сила стремится выпрямить силовую трубку, а не изменить её сечение, но она также имеет небольшую дивергентную часть. Ненулевая дивергенция поперечных сил соответствует магнитозвуковым возмущениям и в нашей модели должна привести всего лишь к небольшому смещению квазиравновесия от его нулевого приближения (45). Таким образом, поправка к квазиравновесию может быть найдена из дивергенции поперечных компонент уравнения движения.

Найдём дивергенции от поперечных к полю компонент слагаемых в уравнении движения (19) с помощью тождеств

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \overleftrightarrow{p})_{\perp} = \nabla_{\perp}^2 p_{\perp} + \nabla \cdot (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{\kappa}, \quad (47)$$

$$\frac{1}{c} \nabla \cdot [\vec{j} \times \vec{B}] = -\nabla_{\perp}^2 p_M + 2 \nabla \cdot p_M \vec{\kappa}, \quad (48)$$

где $p_M = B^2/8\pi$ - давление магнитного поля. Для описания квазиравновесия дивергенцию инерционного члена опустим, но $\rho(\vec{v} \nabla) \vec{v}_{\perp}$ можно при необходимости считать спрятанной в \vec{f} (для возможных приложений с быстро

вращающейся плазмой). Тогда получим:

$$\nabla_{\perp}^2 (p_{\perp} + p_M) + \nabla_{\perp} \cdot \left[(p_{\parallel} - p_{\perp} - 2p_M) \vec{\kappa} - \vec{f} \right] = 0. \quad (49)$$

Вслед за Ньюкомбом [12] обозначим

$$Q \equiv 2p_M + p_{\perp} - p_{\parallel}, \quad P = p_{\perp} + p_M. \quad (50)$$

Как известно [16, 12], знак Q определяет МГД критерий шланговой неустойчивости, т.е. эта величина характеризует жёсткость системы относительно изгибов.

Уравнение (49) содержит производные, поперечные к магнитному полю, а хотелось бы переписать его в плоскости, перпендикулярной к оси системы, как предыдущие уравнения Пуассона. Это можно сделать следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp b} &= \nabla_{\perp z} + \vec{e}_z (\vec{e}_z \nabla) - \vec{b} (\vec{b} \nabla) \approx \\ &\approx \nabla_{\perp z} - \vec{r}' (\vec{e}_z \nabla) - \vec{e}_z (\vec{r}' \nabla_{\perp}) - \vec{r}' (\vec{r}' \nabla), \end{aligned} \quad (51)$$

так что с точностью ϵ^2 , в плоскости, поперечной к оси системы, имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 (p_{\perp} + p_M) + (\vec{r}' \nabla_{\perp})^2 (p_{\perp} + p_M) - \\ - \nabla_{\perp} \cdot \left[Q \vec{\kappa} + \vec{f} \right] = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

В нулевом приближении параксиальное квазиравновесие имеет однородное решение $P = p_{\perp} + p_M = B_v^2/8\pi = \text{const}$, а уравнение (52) можно рассматривать как условие на поправку к его правой части. Второе слагаемое при этом оказывается порядка ϵ^3 , им можно пренебречь и пользоваться уравнением (49) в плоскости $z = \text{const}$.

Поперечное квазиравновесие с точностью ϵ^2 будет выглядеть как

$$p_M = \frac{P}{1 + \beta_s}, \quad \bar{B} = \frac{\sqrt{8\pi P}}{\sqrt{1 + \beta_s}}, \quad (53)$$

$$\bar{p}_\perp = \frac{\beta_s P}{1 + \beta_s} = \beta_s p_M, \quad (54)$$

где P заменяет давление вакуумного поля $B_v^2/8\pi$ нулевого приближения и является решением двумерного уравнения Пуассона

$$\nabla_\perp^2 P = \nabla_\perp \cdot [Q\vec{\kappa} + \vec{f}] \quad (55)$$

с граничным условием сшивки с давлением поля вне плазмы $P \rightarrow B_v^2/8\pi$. Правая часть уравнения (55) – второго порядка малости, и в ней можно использовать давление и поле нулевого приближения.

5 Электромагнитное поле и закон Ома

Электрическое поле входит в скорость дрейфа (26), а следовательно должна быть связь между функцией скорости χ и потенциалом плазмы φ , как в классической сокращённой МГД. Эту связь можно найти с помощью закона Ома. В нашей модели закон Ома можно записать как

$$\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] = \mathcal{E}\vec{b} + \frac{1}{c} [\vec{v}_d \times \vec{B}] \equiv \vec{E}_0, \quad (56)$$

а через потенциал скорости

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{1}{c} [(\vec{e}_z \times \nabla\chi) \times \vec{B}]. \quad (57)$$

Продольное электрическое поле представляет собой малую поправку и слабо влияет на связь χ и φ , однако оно может генерировать существенный ток и, следовательно, возмущать поперечное магнитное поле. Поскольку само $\psi \sim \epsilon^1$, нам достаточно вычислить его с точностью ϵ^0 , чтобы найти кривизну $\vec{\kappa}$ в ведущем порядке. С такой точностью из проекции закона Ома на магнитное поле получим

$$E_{\parallel} = - \left(\vec{b} \nabla \right) \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{E}, \quad (58)$$

или

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \left(\vec{b} \nabla \right) \varphi + c \mathcal{E} \quad (59)$$

как связь ψ и φ , что аналогично стандартным моделям сокращённой МГД. Заметим, что здесь $\vec{b} \approx \vec{e}_z + \vec{r}'$, а наклон силовой линии \vec{r}' даётся выражением (36) и зависит как от ψ , так и от дивергентной части поперечного поля. В качестве альтернативы можно использовать проекцию закона Ома на ось z :

$$E_z = - (\vec{e}_z \nabla) \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = E_{0z} - \frac{\vec{e}_z}{c} \left[[\vec{e}_z \times \nabla \chi] \times \vec{B} \right], \quad (60)$$

$$\vec{e}_z \left[[\vec{e}_z \times \nabla \chi] \times \vec{B} \right] = - \left(\vec{B} \nabla_{\perp} \chi \right) = -B (\vec{r}' \nabla_{\perp} \chi). \quad (61)$$

Поскольку $A_z = -\psi$, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c (\vec{e}_z \nabla) \varphi + B (\vec{r}' \nabla_{\perp} \chi) + c E_{0z}. \quad (62)$$

Связь χ и потенциала плазмы φ получим из дивергенции \vec{E} с Кулоновской калибровкой векторного потенциала:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &\equiv -\nabla^2 \varphi = \\ &= \nabla \cdot \vec{E}_0 - \nabla \cdot \left(B_z \nabla_{\perp} \chi - \vec{e}_z \left(\vec{B}_{\perp} \nabla_{\perp} \chi \right) \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Эту связь также можно переписать в виде поперечного уравнения Пуассона

$$\nabla_{\perp}^2 \varphi = \nabla_{\perp} (B_z \nabla_{\perp} \chi) - \delta q, \quad (64)$$

где δq – поправка,

$$\delta q = \nabla \cdot \vec{E}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{B}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \chi \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (65)$$

Второе и третье слагаемое в δq имеют порядок ϵ^2 , но первое

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = \vec{B} \nabla \frac{\mathcal{E}}{B} + \frac{1}{c} \nabla \cdot \left[\vec{v}_d \times \vec{B} \right], \quad (66)$$

также может содержать слагаемые порядка ϵ^0 , зависящие от скорости диамагнитного дрейфа \vec{v}_d . Если эта скорость велика или сравнима со скоростью дрейфа в скрещенных полях, например, из-за большого ларморовского радиуса ионов как в ловушке ГДЛ, то δq может оказаться важным слагаемым в (64).

Из закона Ома взятием ротора можно получить уравнение вмерзженности магнитного поля:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[\vec{v} \times \vec{B} \right] - c \nabla \times \vec{E}_0 \quad (67)$$

и преобразовать его к виду

$$\frac{d \vec{B}}{dt} = \left(\vec{B} \nabla \right) \vec{v} - \zeta \vec{B} - c \nabla \times \vec{E}_0, \quad (68)$$

и далее к скалярному уравнению на осевую компоненту магнитного поля

$$\frac{dB_z}{dt} = \left(\vec{B} \nabla \right) v_z - \zeta B_z - c \vec{e}_z \cdot \nabla \times \vec{E}_0, \quad (69)$$

или модуль магнитного поля

$$\frac{dB}{dt} = \left(\vec{b} \nabla \right) v_{\parallel} - B \vec{v} \cdot \vec{\kappa} - \zeta B - c \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{E}_0. \quad (70)$$

Напомним, что мы используем обозначения $\zeta = \nabla \cdot \vec{v}$, $\vec{\kappa} = \left(\vec{b} \nabla \right) \vec{b}$. Выражения для $\nabla \cdot \vec{E}_0$, $\nabla \times \vec{E}_0$ для учёта дрейфов и резистивности должны обсуждаться в связи с конкретной используемой физической моделью задачи. Альтернативные формы записи уравнения (70) будут приведены ниже: (93), (94). В разделе 7 также показано, что в условиях поперечного квазиравновесия уравнение (70) должно использоваться не как уравнение переноса B , а для определения дивергенции поперечной скорости плазмы.

С помощью уравнений (68), (70) можно получить и скорость изменения касательного вектора \vec{b} , которая понадобится в дальнейшем:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \left[\left(\vec{b} \nabla \right) \vec{v} \right]_{\perp} + \frac{c}{B} \left[\nabla \times \vec{E}_0 \right]_{\perp}. \quad (71)$$

6 Уравнение движения и замыкание токов

Основным уравнением классической сокращённой МГД является уравнение для продольной компоненты завихренности скорости, которое можно вывести взятием ротора уравнения движения (19), или из условия замыкания токов $div \vec{j} = 0$ с учётом тока поляризационного дрейфа. Мы будем следовать второму подходу. Для этого найдём поперечные компоненты плотности тока из уравнения движения как сумму поляризационного, диамагнит-

ного и дрейфового токов

$$\vec{j}_\perp = c \frac{\vec{B}}{B^2} \times \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla \cdot \overleftarrow{p} - \vec{f} \right) \equiv \vec{j}_{pol} + \vec{j}_d + \vec{j}_f. \quad (72)$$

Дивергенция тензора давления даётся выражением (20). Для каждой из компонент найдём дивергенции. При этом токи \vec{j}_{pol}, \vec{j}_f считаем порядка ϵ^2 , так что их дивергенции можно искать в нулевом приближении, а ток \vec{j}_d имеет порядок ϵ^0 и требует аккуратности.

Дивергенцию диамагнитного тока запишем как

$$\nabla \cdot \vec{j}_d = c \nabla p_\perp \cdot \nabla \times \frac{\vec{B}}{B^2} + c \nabla \cdot \left[\frac{\vec{B}}{B^2} \times \delta \vec{f}_p \right]. \quad (73)$$

Далее, первое слагаемое преобразуем по схеме $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{x} \cdot \vec{b})(\vec{y} \cdot \vec{b}) + ([\vec{x} \times \vec{b}] \cdot [\vec{y} \times \vec{b}])$ и получаем

$$\begin{aligned} \nabla p_\perp \cdot \nabla \times \frac{\vec{B}}{B^2} &= \frac{4\pi j_\parallel}{B^2} (\vec{b} \nabla) p_\perp + \\ &+ \frac{1}{B} [\nabla p_\perp \times \vec{b}] \cdot (\vec{\kappa} + \nabla \ln B). \end{aligned} \quad (74)$$

Поскольку диамагнитный ток при $\beta \sim 1$ большой, его дивергенцию необходимо знать с высокой точностью. В вакуумном поле и при низком β величина $\nabla \ln B$, как и кривизна $\vec{\kappa}$ - второго порядка по непараксиальности, но в целевом режиме даже при малой кривизне возможны большие поперечные градиенты магнитного поля. При этом дивергенция диамагнитного тока остаётся малой за счёт примерной параллельности векторов ∇p_\perp и $\nabla \ln B$. Использовать здесь условие квазиравновесия в нулевом приближении нельзя, поскольку его точность недостаточна.

Найдём $[\nabla p_\perp \times \vec{b}] \cdot \nabla B$ с точностью ϵ^2 с помощью полного уравнения движения (72):

$$\nabla p_\perp \times \vec{b} = \vec{b} \times \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f} + \delta \vec{f}_p \right] - \frac{B}{4\pi} [\nabla \times \vec{B}]_\perp, \quad (75)$$

при том, что $\vec{b} \times \delta \vec{f}_p = (p_\parallel - p_\perp) \vec{b} \times \vec{\kappa}$. Далее заметим, что

$$[\nabla \times \vec{B}]_\perp \cdot \nabla B = B [\nabla \times \vec{b}]_\perp \cdot \nabla B = B \vec{\kappa} \cdot [\nabla B \times \vec{b}], \quad (76)$$

и следовательно

$$[\nabla p_\perp \times \vec{b}] \cdot \nabla B = \vec{b} \times \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f} + (p_\parallel - p_\perp - 2p_M) \vec{\kappa} \right] \cdot \nabla B. \quad (77)$$

Дивергенция тока из-за $\delta \vec{f}_p$ также оказывается пропорциональным кривизне:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{\vec{B}}{B^2} \times \delta \vec{f}_p \right] &= \nabla \cdot \left[\frac{\vec{b}}{B} \times (p_\parallel - p_\perp) \vec{\kappa} \right] = \\ &= \nabla \cdot \left[\frac{p_\parallel - p_\perp}{B} (\nabla \times \vec{b})_\perp \right] = \\ &= \vec{b} \times \vec{\kappa} \cdot \nabla \frac{p_\parallel - p_\perp}{B} - (\vec{B} \nabla) \cdot \left((p_\parallel - p_\perp) \frac{\vec{b} \nabla \times \vec{b}}{B^2} \right). \end{aligned} \quad (78)$$

При этом продольный ток связан с продольной компонентой векторного потенциала ψ согласно (33), и

$$\vec{b} \cdot \nabla \times \vec{b} = \frac{4\pi j_\parallel}{cB} = \frac{\nabla_\perp^2 \psi}{B}, \quad (79)$$

так что

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{\vec{B}}{B^2} \times \delta \vec{f}_p \right] &= \vec{b} \times \vec{\kappa} \cdot \nabla \frac{p_\parallel - p_\perp}{B} - \\ &- (\vec{B} \nabla) \cdot \frac{\nabla_\perp^2 \psi (p_\parallel - p_\perp)}{B^3}. \end{aligned} \quad (80)$$

Собирая все компоненты, получим дивергенцию диамагнитного тока с точностью ϵ^2 :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{j}_d = c\vec{b} \times \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f} \right] \cdot \frac{\nabla B}{B^2} + \frac{c}{B} \vec{b} \times \vec{\kappa} \cdot \nabla (p_{\parallel} - p_M) + \\ + \frac{j_{\parallel}}{2p_M B} \left(\vec{B} \nabla \right) p_{\perp} - \left(\vec{B} \nabla \right) \frac{j_{\parallel} (p_{\parallel} - p_{\perp})}{2p_M B}, \quad (81) \end{aligned}$$

где $p_M = B^2/8\pi$, причём градиент поперечного давления в комбинации с кривизной сократился.

В результате повторного использования уравнения движения в выражении для $\nabla \cdot \vec{j}_d$ присутствуют слагаемые с инерцией и \vec{f} . Их стоит объединить с дивергенциями токов \vec{j}_{pol}, \vec{j}_f соответственно:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\vec{j}_{pol} + \vec{j}_f \right) + c\vec{b} \times \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f} \right] \cdot \frac{\nabla B}{B^2} = \\ = -\frac{c}{B} \vec{b} \cdot \nabla \times \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f} \right]. \quad (82) \end{aligned}$$

Таким образом, суммарная дивергенция поперечного тока имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{j}_{\perp} = \frac{c}{B} \left(\vec{b} \times \vec{\kappa} \cdot \nabla (p_{\parallel} - p_M) - \vec{b} \cdot \nabla \times \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f} \right] \right) + \\ + \frac{j_{\parallel}}{2p_M B} \left(\vec{B} \nabla \right) p_{\perp} - \left(\vec{B} \nabla \right) \frac{j_{\parallel} (p_{\parallel} - p_{\perp})}{2p_M B}. \quad (83) \end{aligned}$$

Инерционное слагаемое можно было бы переписать через потенциал скорости χ , но это действие лучше отложить до разрешения уравнения относительно производной по времени, которое проведено в следующем параграфе.

Дивергенция поперечного тока может быть использована как часть уравнения замыкания токов в условии

квазиинейтральности:

$$\nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot \vec{j}_\perp + \left(\vec{B} \nabla \right) \frac{j_\parallel}{B} = 0, \quad (84)$$

в котором появляется ещё одно слагаемое с продольным током. Попробуем собрать их в комбинацию S_j :

$$S_j = \frac{j_\parallel}{2p_M B} \left(\vec{B} \nabla \right) p_\perp + \left(\vec{B} \nabla \right) \frac{Q j_\parallel}{2p_M B}, \quad (85)$$

где $Q = 2p_M + p_\perp - p_\parallel$, как и ранее, так что условие замыкания токов в плазме имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{\kappa} \cdot \nabla (p_\parallel - p_M) - \vec{b} \cdot \nabla \times \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{f} + \\ + 2p_M \left(\vec{b} \nabla \right) \left[\frac{Q \nabla_\perp^2 \psi}{2p_M B} \right] + \frac{\nabla_\perp^2 \psi}{B} \left(\vec{b} \nabla \right) p_\perp = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Далее это уравнение будет преобразовано в закон эволюции обобщённой завихренности течения.

7 Поперечная несжимаемость

Скорость течения плазмы (40) в нашей модели не может быть произвольной, она должна соответствовать только переходам между квазиравновесными состояниями. В нулевом приближении по ϵ это означает, что поперечная скорость должна быть бездивергентной, т.е.

$$\vec{v}_\perp^{(0)} = \vec{e}_z \times \nabla \chi, \quad (87)$$

где $\chi(\vec{r}, z, t)$ - вихревой потенциал. В стандартной сокращённой гидродинамике ситуация аналогична, но роль χ

играет электростатический потенциал, поскольку поперечная «несжимаемость» является следствием сохранения продольного магнитного поля при низком β . В нашем случае природа поперечной несжимаемости течения связана с квазиравновесием при наличии вмороженности. Действительно, в нулевом порядке по ϵ , когда продольным течением и переносами можно пренебречь, в движущейся силовой трубке давление плазмы связано с «медленной» функцией β_s как (46), и при этом меняется согласно адиабате (22), т.е.

$$\frac{d}{dt} \ln p_{\perp} = -2 \nabla \cdot \vec{v}_{\perp} = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\beta_s}{1 + \beta_s} \right) = O(\epsilon^2). \quad (88)$$

Найдём $\nabla \cdot \vec{v}_{\perp}$ из явного выражения для скорости поперечного дрейфа (26). Это позволит узнать, какому самосогласованному полю соответствует нужный тип поперечной скорости.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v}_{\perp} &= \nabla \cdot \left[c \frac{\vec{E} \times \vec{b}}{B} + \vec{v}_d \right] = \\ &= -\frac{\vec{B}}{B^2} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - c \vec{E} \cdot \nabla \times \frac{\vec{B}}{B^2} + \nabla \cdot \vec{v}_d. \end{aligned} \quad (89)$$

При помощи промежуточных выкладок

$$c \vec{E} \cdot \nabla \times \frac{\vec{B}}{B^2} = \frac{j_{\parallel} E_{\parallel}}{2p_M} + c \frac{\vec{E} \times \vec{b}}{B} \cdot (\vec{\kappa} + \nabla_{\perp} \ln B) \quad (90)$$

получаем выражение

$$\nabla \cdot \vec{v}_{\perp} = -\vec{v} \cdot \vec{\kappa} - \left(\frac{d}{dt} \right)_{\perp} \ln B + q_u, \quad (91)$$

где

$$q_u = -\frac{j_{\parallel} \mathcal{E}}{2p_M} + \vec{v}_d \cdot (\vec{\kappa} + \nabla_{\perp} \ln B) + \nabla \cdot \vec{v}_d, \quad (92)$$

и $(d/dt)_\perp = \partial/\partial t + e_z \times \nabla \chi \cdot \nabla$ содержит только поперечные к полю компоненты скорости. По физическому смыслу первое слагаемое в (91) отвечает за изменение удельного объёма искривлённой силовой трубки при дрейфе вдоль радиуса кривизны, а второе - за медленное изменение сечения трубки при эволюции квазиравновесия из-за поперечного переноса и продольного течения. При низком давлении плазмы вторым слагаемым обычно пренебрегают, но нам надо его сохранить и также найти с точностью ϵ^2 . Остаток, q_u , соответствует амбиполярным, дрейфовым и диссипативным эффектам.

Выражение (91) эквивалентно поперечной компоненте уравнения (70) переноса для модуля магнитного поля

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_\perp \ln B = -\nabla \cdot \vec{v}_\perp - \vec{v} \cdot \vec{\kappa} + q_u, \quad (93)$$

или, с полными производными и дивергенцией скорости,

$$\frac{d}{dt} \ln B = (\vec{b} \nabla) v_\parallel - \zeta - \vec{v} \cdot \vec{\kappa} + q_u. \quad (94)$$

Таким образом, нужный тип поперечной скорости плазмы, совместимый с квазиравновесием (53), (54), реализуется с условием (91). Причинная логика следующая: продольное течение и переносы медленно меняют распределение β_s на участке силовой трубки, в результате смещается точка квазиравновесия и меняются p_\perp , B . По скорости изменения B с помощью (91) находим поперечную дивергенцию скорости. Заметим, что квазиравновесие определяет только поперечную дивергенцию скорости, полную дивергенцию ζ из (94) найти не получится.

Малая дивергентная часть нашего представления скорости (40) описывается потенциалом u . Теперь можно

сказать, что он удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона

$$\nabla_{\perp}^2 u = \nabla \cdot \vec{v}_{\perp}, \quad (95)$$

где $\nabla \cdot \vec{v}_{\perp}$ берётся из (91). Уточнённое квазиравновесие (53) можно переписать как

$$\ln \bar{B} = \frac{1}{2} (\ln P - \ln(1 + \beta_s) + \ln(8\pi)), \quad (96)$$

и использовать в уравнении для поперечной дивергенции скорости плазмы (95). В итоге, для нее получим уравнение

$$\nabla_{\perp}^2 u = -\vec{v} \cdot \vec{\kappa} - \frac{1}{2P} \left(\frac{dP}{dt} \right)_{\perp} + \frac{1}{2 + 2\beta_s} \left(\frac{d\beta_s}{dt} \right)_{\perp} + q_u. \quad (97)$$

8 Обобщённая завихренность

Вихревое движение неоднородной жидкости удобно описывать с помощью вектора обобщённой завихренности

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \rho \vec{v}. \quad (98)$$

Перепишем через (98) ротор силы инерции капли жидкости, входящий в условие замыкания токов (86), используя уравнение непрерывности и тождество

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times [\nabla \times \vec{v}]. \quad (99)$$

Сперва перепишем инерцию в виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \nabla \cdot \vec{v} + \rho \nabla \frac{v^2}{2} + v^2 \nabla \rho - \vec{v} \times \vec{\Omega}, \quad (100)$$

а затем возьмём её ротор

$$\begin{aligned} \nabla \times \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \nabla \frac{v^2}{2} \times \nabla \rho - \\ &- \left(\vec{\Omega} \nabla \right) \vec{v} + 2\vec{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} + \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \times \rho \vec{v}. \end{aligned} \quad (101)$$

Нас интересует только продольная проекция этого выражения и, соответственно, продольная часть обобщённой завихренности $\Omega = \vec{\Omega} \cdot \vec{b}$. Поперечную компоненту завихренности находим как

$$\vec{\Omega}_\perp \approx \nabla (\rho v_\parallel) \times \vec{b}, \quad (102)$$

тогда для продольной компоненты Ω , с использованием (71), получим

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \nabla \times \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &\approx \frac{d\Omega}{dt} + \vec{b} \cdot \nabla \frac{v_\perp^2}{2} \times \nabla \rho - \\ &- \vec{\Omega}_\perp \frac{d\vec{b}}{dt} - \Omega \left(\vec{b} \nabla \right) v_\parallel + 2\Omega \zeta + \rho \nabla \zeta \cdot \nabla_\perp \chi. \end{aligned} \quad (103)$$

С помощью выражения (103) удаётся разрешить уравнение замыкания токов (86) относительно производной по времени введением ещё одной скалярной функции - продольной компоненты обобщённой завихренности. Само уравнение после этого можно будет назвать уравнением переноса завихренности, а его конечный вид выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \left(2\zeta - \left(\vec{b} \nabla \right) v_\parallel \right) &+ \vec{b} \cdot \nabla \frac{v^2}{2} \times \nabla \rho + \\ &+ \rho \nabla \zeta \cdot \nabla_\perp \chi - \vec{b} \times \vec{\kappa} \cdot \nabla (p_\parallel - p_M) = \\ &= \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{f} + 2p_M \left(\vec{b} \nabla \right) \left[\frac{Q \nabla_\perp^2 \psi}{2p_M B} \right] + \frac{\nabla_\perp^2 \psi}{B} \left(\vec{b} \nabla \right) p_\perp. \end{aligned} \quad (104)$$

Остаётся связать потенциал скорости χ и завихренность Ω . В параксиальном приближении это достаточно просто:

$$\Omega = \vec{b} \cdot \nabla \times \rho \vec{v} = \nabla_{\perp} \cdot \rho \nabla_{\perp} \chi + \rho v_{\parallel} \frac{\nabla_{\perp}^2 \psi}{B}. \quad (105)$$

Второе слагаемое отвечает за завихренность продольного течения при $\vec{b} \cdot \nabla \times \vec{b} \neq 0$. Сложность задачи в том, что, если эволюция скорости определяется переносом завихренности, то вихревой потенциал скорости оказывается решением уравнения эллиптического типа (105) относительно χ .

Решать уравнение связи (105) относительно χ по известной Ω при произвольном распределении плотности – непросто, особенно если есть области с низкой плотностью, как, например, в залимитерной зоне SOL. Возникновение структур типа стримеров (быстрых струй) в областях с большими перепадами плотности, по-видимому, является неустранимым физическим эффектом. Попытки замены обобщённой завихренности на обычную (с целью упрощения уравнения связи) приводят к переусложнению эволюционного уравнения.

9 Продольное движение и эволюция давления

Известно, что продольное течение слабостолкновительной плазмы с околосвуковыми частотами плохо описывается магнитной гидродинамикой из-за сильного кинетического эффекта - затухания Ландау. Проблему применимости и уточнения модели продольного движения плазмы следует решать в каждой конкретной задаче, а

мы используем слабо-столкновительную магнитную гидродинамику с анизотропным давлением. В этом случае продольная компонента уравнения движения (19) с учётом (20) и параксиальности даёт

$$\rho \vec{b} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -(\vec{b}\nabla)p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\vec{b}\nabla) \ln B + f_{\parallel}. \quad (106)$$

Используя выражение (71) для $d\vec{b}/dt$, получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_{\parallel}}{dt} = & -(\vec{b}\nabla)p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\vec{b}\nabla) \ln B + \rho v_{\parallel} \vec{v} \cdot \vec{\kappa} + \\ & + \rho \left(\vec{b}\nabla \right) \frac{v^2}{2} + f_{\parallel} + \rho \frac{c}{B} \vec{v} \cdot \left[\nabla \times \vec{E}_0 \right]_{\perp}. \end{aligned} \quad (107)$$

Диссипация продольного течения (желательная для численного моделирования) моделируется столкновительной релаксацией анизотропии давления, что эквивалентно продольной вязкости. В этом случае уравнение (23) можно переписать в виде

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} + \zeta p_{\parallel} + 2p_{\parallel} (\vec{b}\nabla) v_{\parallel} - 2\nu_T (p_{\perp} - p_{\parallel}) + \hat{q}_{\parallel} = 0. \quad (108)$$

Уравнение (22) также может быть переписано с учётом (94) и продольной вязкости:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\perp}}{dt} + 2\zeta p_{\perp} - p_{\perp} \left(\vec{b}\nabla \right) v_{\parallel} + p_{\perp} \vec{v} \cdot \vec{\kappa} - \\ - p_{\perp} q_u + \nu_T (p_{\perp} - p_{\parallel}) + \hat{q}_{\perp} = 0. \end{aligned} \quad (109)$$

Заметим, что по сравнению со стандартным видом уравнения для поперечного давления [16] здесь появилось новое слагаемое $p_{\perp} \vec{v} \cdot \vec{\kappa} \sim \epsilon^2$, которое связано с изменением объёма силовой трубки в искривлённом поле. По видимому, этот член ранее опускался из-за малости кривизны. В нашей модели можно либо использовать уравнение связи (54), либо свести (22) к уравнению эволюции

β_s :

$$\frac{d\beta_s}{dt} + \beta_s \left((\vec{b} \nabla) v_{\parallel} - \vec{v} \cdot \vec{\kappa} + q_u \right) + \nu_T \left(\beta_s - \frac{p_{\parallel}}{p_M} \right) + \frac{\hat{q}_{\perp}}{p_M} = 0. \quad (110)$$

10 Итоговая система уравнений сокращённой МГД

Соберём все полученные выше уравнения в виде полной системы. Магнитное поле представляется в виде

$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z + \vec{e}_z \times \nabla \psi + \nabla_{\perp} s, \quad (111)$$

где осевое поле можно переобозначить как $B_z \equiv \sqrt{8\pi p_M}$ и выразить через поперечное давление плазмы с помощью условия квазиравновесия. Если $\beta_s = p_{\perp}/p_M$, и P является решением уравнения связи

$$\nabla_{\perp}^2 P = \nabla_{\perp} \cdot \left[(p_{\parallel} - (2 + \beta_s) p_M) \vec{\kappa} + \vec{f} \right], \quad (112)$$

то

$$p_M = \frac{P}{1 + \beta_s}. \quad (113)$$

Здесь $\vec{\kappa}$ – кривизна, \vec{f} – внешняя объёмная сила. В нулевом порядке по параксиальности P – местное давление вакуумного магнитного поля, а правая часть (112) имеет порядок ϵ^2 , так что его можно решать итерациями. Уравнения связи решаются с граничными условиями на границе вакуумного объёма, которые могут зависеть от времени.

Поправка s удовлетворяет своему уравнению связи, обеспечивающему вездивергентный характер магнитного поля

$$\nabla_{\perp}^2 s = -\frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (114)$$

Вектор скорости плазмы представляется в виде

$$\vec{v} = v_{\parallel} \vec{b} + \vec{e}_z \times \nabla \chi + \nabla_{\perp} u, \quad (115)$$

где вихревой потенциал χ можно найти из продольной компоненты обобщённой завихренности Ω путём решения уравнения связи

$$\nabla_{\perp} \cdot \rho \nabla_{\perp} \chi = \Omega - \rho v_{\parallel} \frac{\nabla_{\perp}^2 \psi}{B}. \quad (116)$$

Малая дивергентная часть поперечной скорости $\nabla_{\perp} u$ должна быть согласована с изменениями поперечного квазиравновесия:

$$\nabla_{\perp}^2 u = -\vec{v} \cdot \vec{\kappa} - \frac{1}{2P} \left(\frac{dP}{dt} \right)_{\perp} + \frac{1}{2 + 2\beta_s} \left(\frac{d\beta_s}{dt} \right)_{\perp} + q_u. \quad (117)$$

Здесь $(d/dt)_{\perp} \equiv \partial/\partial t + \vec{e}_z \times \nabla \chi \cdot \nabla$, скорость изменения P определяется внешними (граничными) условиями и малыми поправками в правой части (112), а

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\beta_s}{dt} \right)_{\perp} = & - \left(\vec{b} \nabla \right) \beta_s v_{\parallel} + \beta_s \vec{v} \cdot \vec{\kappa} - \beta_s q_u - \\ & - \nu_T \left(\beta_s - \frac{p_{\parallel}}{p_M} \right) - \frac{\hat{q}_{\perp}}{p_M} \end{aligned} \quad (118)$$

может быть подставлена в явном виде из уравнения эволюции поперечного давления (ниже), но сохранена для

сокращения записи. Нужно отметить, что без учёта дрейфовых и диссипативных эффектов при большом β_s существенный вклад в дивергенцию поперечной скорости вносит продольное перетекание энергии плазмы, а при малом она определяется кривизной поля $\nabla_{\perp}^2 u \sim -\vec{v} \cdot \vec{\kappa}$.

Полная система динамических уравнений сокращённой магнитной гидродинамики состоит из

1. уравнения непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \zeta\rho = q_{\rho}; \quad (119)$$

2. продольной компоненты закона Ома

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = c \left(\vec{b}\nabla \right) \varphi + c\mathcal{E}, \quad (120)$$

причём локальный электростатический потенциал плазмы определяется по вихревому потенциалу скорости уравнением связи

$$\nabla_{\perp}^2 \varphi = \nabla_{\perp} (B_z \nabla_{\perp} \chi) - \delta q; \quad (121)$$

3. уравнения переноса обобщённой завихренности

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \left(2\zeta - \left(\vec{b}\nabla \right) v_{\parallel} \right) = & -\vec{b} \cdot \nabla \frac{v^2}{2} \times \nabla \rho + \\ & + \vec{b} \times \vec{\kappa} \cdot \nabla (p_{\parallel} - p_M) - \rho \nabla \zeta \cdot \nabla_{\perp} \chi + \\ & + 2p_M \left(\vec{b}\nabla \right) \left[\frac{Q \nabla_{\perp}^2 \psi}{2p_M B} \right] + \frac{\nabla_{\perp}^2 \psi}{B} \left(\vec{b}\nabla \right) (\beta_s p_M) + \\ & + \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{f}; \quad (122) \end{aligned}$$

4. продольного уравнения движения

$$\rho \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -(\vec{b}\nabla)p_{\parallel} + \frac{(p_{\parallel} - \beta_s p_M)}{2} (\vec{b}\nabla) \ln p_M + \\ + \rho v_{\parallel} \vec{v} \cdot \vec{\kappa} + \rho \left(\vec{b}\nabla \right) \frac{v^2}{2} + f_{\parallel} + \rho \frac{c}{B} \vec{v} \cdot \left[\nabla \times \vec{E}_0 \right]_{\perp}, \quad (123)$$

5. и двух замыкающих уравнений для поперечной и продольной компонент давления:

$$\frac{d\beta_s}{dt} + \beta_s \left(\left(\vec{b}\nabla \right) v_{\parallel} - \vec{v} \cdot \vec{\kappa} + q_u \right) + \\ + \nu_T \left(\beta_s - \frac{p_{\parallel}}{p_M} \right) + \frac{\hat{q}_{\perp}}{p_M} = 0, \quad (124)$$

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} + \zeta p_{\parallel} + 2p_{\parallel} (\vec{b}\nabla) v_{\parallel} - \\ - 2\nu_T (\beta_s p_M - p_{\parallel}) + \hat{q}_{\parallel} = 0. \quad (125)$$

Таким образом, полная модель требует решения 6 скалярных трёхмерных уравнений во времени и 5 двумерных уравнений связи эллиптического типа.

11 Заключение

Получена полная система уравнений сокращённой магнитной гидродинамики для плазмы параксиальных ловушек с высоким анизотропным давлением. Для самосогласованного учёта диссипации и дрейфовых эффектов использованы свободные члены, которые могут меняться в зависимости от использованной физической модели.

Система уравнений может применяться при разработке численных моделей разрядов в газодинамических ловушках. Сокращённая МГД с учётом источников и диссипативных эффектов может быть очень полезна для моделирования эволюции и устойчивости переходных режимов от вихревого удержания при низком давлении плазмы к диамагнитному удержанию с $\beta \sim 1$.

Список литературы

- [1] Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуце, ЖЭТФ 65, 575-589 (1973)
- [2] Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуце, ЖЭТФ 66, 2067 (1974)
- [3] H. R. Strauss, Phys. Fluids 19, 134 (1976)
- [4] H. R. Strauss, Finite-aspect-ratio MHD equations for tokamaks. Nucl. Fusion 23, 649 (1983)
- [5] Zank G. P., Matthaeus W. H. The equations of reduced magnetohydrodynamics. J. Plasma Phys. 48, 85-100 (1992)
- [6] H. R. Strauss, Reduced MHD in nearly potential magnetic fields. J. Plasma Phys. 57, 83 (1997)
- [7] S. E. Kruger, C. C. Hegna, and J. D. Callen Generalized reduced magnetohydrodynamic equations. Phys. Plasmas 5: 4169-4182 (1998)
- [8] V. P. Pastukhov, Adiabatic separation of motions and reduced MHD equations. Plasma Phys. Rep. 26, 529-538 (2000)

- [9] Pastukhov, V.P. Equations for nonlinear MHD convection in shearless magnetic systems. Plasma Phys. Rep. 31, 577–590 (2005)
- [10] Иванов А. А., Приходько В. В. Газодинамическая ловушка: результаты исследований и перспективы. Успехи физических наук. 187, 547–574 (2017)
- [11] Д. И. Сковородин, И. С. Черноштанов, В. Х. Амиров, В. Т. и др. Газодинамическая многопробочная ловушка ГДМЛ. Физика плазмы 49, 831-884 (2023)
- [12] W.A. Newcomb, Equilibrium and stability of collisionless systems in the paraxial limit. J. Plasma Physics 26, 529–584 (1981)
- [13] A.D. Beklemishev, P.A. Bagryanski, M.S. Chaschin, E.I. Soldatkina, Vortex confinement of plasmas in symmetric mirror traps. Fus. Sci. Technol. 57, 351–360 (2010)
- [14] A.D. Beklemishev Diamagnetic “bubble” equilibria in linear traps. Physics of Plasmas 23, 082506 (2016)
- [15] Сивухин Д.В. «Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях», в сб. Вопросы теории плазмы п/р Леонтовича М.А., т.1, с.7, М.: Госатомиздат, 1963
- [16] Волков Т.Ф. «Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы», в сб. Вопросы теории плазмы п/р Леонтовича М.А., т.4, с.3, М.: Атомиздат, 1964
- [17] Захаров Л.Е., Шафранов В.Д. «Равновесие плазмы с током в тороидальных системах», в сб. Вопросы теории плазмы п/р Леонтовича М.А., Кадомцева Б.Б., т.11, с.118, М.: Энергоиздат, 1982

- [18] Сковорода А.А. «Магнитные ловушки для удержания плазмы», М.ФИЗМАТЛИТ, 2009
- [19] Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф. «Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений» в сб. Проблемы современной физики, вып. 7, с.139 (1957)
- [20] G. W. Hammett, W. Dorland, and F. W. Perkins, Fluid models of phase mixing, Landau damping, and nonlinear gyrokinetic dynamics. Phys. Fluids B 4, 2052–2061 (1992)

А.Д. Беклемишев, С.Е. Константинов, М.С. Христо

**Сокращённая МГД для параксиальных ловушек с
большим бета**

Препринт ИЯФ СО РАН
2026-01

Ответственный за выпуск М.В. Кузин

Работа поступила 28.01.2026 г.

Сдано в набор 29.01.2026 г.

Подписано в печать 29.01.2026 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1 печ.л., 1 уч.-изд.л.

Тираж 70 экз. Бесплатно. Заказ № 1

*Обработано на РС и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11*