

УЧРЕЖДЕНИЕ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН  
(ИЯФ СО РАН)

С.А. Никитин, И.Б. Николаев

РАСЧЕТ ИНТЕНСИВНОСТИ ТУШЕКОВСКИХ  
ЭЛЕКТРОНОВ В НАКОПИТЕЛЕ ВЭПП-4М

ИЯФ 2010-42

НОВОСИБИРСК  
2010

## **Расчет интенсивности тушековских электронов в накопителе ВЭПП-4М**

*С.А. Никитин, И.Б. Николаев*

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
630090, Новосибирск, Россия

### **Аннотация**

В работе представлены формулы для расчёта интенсивности внутрисгусткового рассеяния электронов в нерелятивистском и релятивистском приближении для одномерной и двумерной моделей столкновений. Приведены расчёты интенсивности тушековских электронов и поляризационного вклада для ускорителя ВЭПП-4М в сравнении с экспериментальными данными.

---

# 1 Введение

Метод резонансной деполяризации с использованием тушековского поляриметра успешно применялся для измерения энергии пучка ускорителя ВЭПП-4М в диапазоне энергии  $1.5 \div 1.9$  ГэВ, что позволило прецизионно измерить массы  $J/\psi$ ,  $\psi'$  [1],  $D$  [2] – мезонов, а также  $\tau$ -лептона [3]. В настоящее время обсуждаются планы экспериментов в области 5 ГэВ, среди которых возможным является уточнение масс частиц  $\Upsilon$ -семейства. Для оценки эффективности тушековского поляриметра в данной области энергии необходимо провести расчёт интенсивности тушековского рассеяния и поляризационного вклада с учётом релятивистской модели столкновений в системе центра масс сталкивающихся частиц. Отметим, что традиционным подходом [4] является нерелятивистское приближение, работающее для энергий порядка 1 ГэВ.

В данной работе представлены формулы для расчёта интенсивности внутрисгусткового рассеяния электронов в борновском приближении для нерелятивистского и релятивистского случаев с одномерным и двумерным распределением поперечных импульсов в пучке. Проведено численное сравнение нерелятивистского и релятивистского подходов на примере накопителя ВЭПП-4М. Приведены и проанализированы формулы релятивистской теории с кулоновскими поправками В.М. Страховенко. Выполнен численный расчёт интенсивности тушековских электронов и имеющегося в нём поляризационного вклада в зависимости от энергии пучка и от положения сцинтилляционного счетчика на ВЭПП-4М с учётом верхнего и нижнего пределов на импульс рассеянных частиц в сравнении с экспериментальными данными.

## 2 Нерелятивистский и релятивистский расчеты в борновском приближении

### 2.1 Плоский пучок

Нерелятивистская формула для сечения упругого (Мёллеровского) рассеяния неполяризованного электрона на неполяризованном электроне, записанная в борновском приближении ( $\alpha/\beta \ll 1$ ,  $\alpha = 1/137$  – постоянная тонкой структуры) в системе центра масс (с.ц.м.) имеет вид [5]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{16\beta^4} \left[ \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right]. \quad (1)$$

Здесь  $\beta$  величина скорости частиц в единицах скорости света; первый член в скобках — резерфордовский, второй — необходим для симметрии формулы для упругого рассеяния, так как при смене аргумента  $\theta$  на  $\pi - \theta$  величина сечения должна сохраняться. Третий член описывает интерференцию прямого и обменного рассеяния двух идентичных частиц. Сечение быстро растет в области малых углов  $\theta \ll 1$ , где становится по виду резерфордовским:  $d\sigma/d\Omega \approx (r_0^2/\beta^4)/\theta^4$ .

В релятивистском варианте формула сечения без учета спиновых эффектов выглядит как [5]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2(2q^2 + 1)^2}{2\beta^4(q^2 + 1)^3} \cdot \left[ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \frac{q^4}{(2q^2 + 1)^2} \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right], \quad (2)$$

где  $q$  - начальный импульс частицы в с.ц.м. в единицах массы электрона (скорость света принята за 1). При  $\theta \ll 1$ , как и в нерелятивистском случае, дифференциальное сечение  $\propto \theta^{-4}$ . Таким образом, в дифференциальном сечении релятивизм в первую очередь (т.е. при малых углах рассеяния) проявляется в виде фактора

$$R_d(q) \approx \frac{(d\sigma)_{rel}}{(d\sigma)_{nonrel}} = \frac{2q^2 - 1}{\sqrt{q^2 - 1}}. \quad (3)$$

Эффективность тушековского поляриметра определяется скоростью счета частиц, испытавших внутрисгустковое рассеяние. В произвольно выбранной системе отсчёта число актов рассеяния в элементе объёма  $dV$  за время  $dt$  даётся величиной [6]

$$d\sigma \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - [\vec{v}_1, \vec{v}_2]} n_1 n_2 dV dt = d\sigma \cdot \frac{\sqrt{(q_1 q_2)^2 - m^4}}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} n_1 n_2 dV dt, \quad (4)$$

где  $d\sigma$  - инвариантное сечение,  $n_1$ ,  $n_2$  и  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  - плотности и скорости сталкивающихся потоков частиц с массами  $m$ ;  $q_{1,2}$  - 4-импульсы;  $\mathcal{E}_{1,2}$  - энергии частиц. Важно отметить, что величины  $I = \sqrt{(q_1 q_2)^2 - m^4}$ ,  $dV dt$ ,  $n_{1,2}/\mathcal{E}_{1,2}$  - инварианты, как и число событий. Импульс в системе центра масс ( $\vec{q}$ ) для пучка в накопителе определён через поперечные к оси пучка компоненты импульсов частиц ( $\vec{p}_{\perp 1,2}$ ) соотношением

$$\vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{p}_{\perp 1} - \vec{p}_{\perp 2}),$$

которое справедливо в нерелятивистском случае ( $|\vec{p}_{\perp 1,2}| \ll 1$ )<sup>1</sup>, а в релятивистском ( $|\vec{p}_{\perp 1,2}| > 1$ ) верно с точностью порядка произведения разброса поперечного импульса и относительного разброса энергии в пучке [7].

В нерелятивистском случае скорость счета рассеянных частиц в Гц с учетом приведенного определения эффективного числа событий равна

$$W_{non-rel} = \frac{1}{2} \frac{\langle 2q\sigma \rangle cN_b^2}{\gamma^2 V_b}, \quad (5)$$

$\gamma$  – Лоренц-фактор,  $V_b = 8\pi^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z$  – объём сгустка в лабораторной системе  $XYZ$ ;  $N_b$  – число частиц;  $\sigma$  – сечение для данного  $q$ , проинтегрированное по телесному углу в пределах, отвечающих условию регистрации рассеянной частицы. Скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение с функцией распределения по  $q > 0$ , которая для плоского пучка выглядит как [4]

$$f dq = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sigma_q} \exp\left(-\frac{q^2}{\sigma_q^2}\right) dq, \quad (6)$$

$\sigma_q = \gamma\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{x'}$  – характерный угловой разброс в пучке в горизонтальной плоскости.

Пусть  $\psi$  – угол в с.ц.м. между направлением импульса рассеянного электрона и осью, совпадающей с осью  $Z$ , вдоль которой движется пучок в лабораторной системе;  $\varphi$  – азимутальный угол рассеяния относительно направления импульсов в начальном состоянии – оси  $X$ . При этом  $\cos\theta = \sin\psi \cos\varphi$ , а  $d\Omega = \sin\psi d\psi d\varphi$ . Электрон в результате рассеяния приобретает приращение импульса вдоль оси  $Z$ , которое в лабораторной системе равно  $\Delta p = \gamma q \cos\psi$ . В единицах начального импульса  $p_0 \approx \gamma \mathcal{E}_q$ ,  $\mathcal{E}_q = \sqrt{q^2 + 1}$

$$\Delta p/p_0 \approx q/\mathcal{E}_q = \frac{q \cos\psi}{\sqrt{q^2 + 1}}. \quad (7)$$

Очевидно, что в нерелятивизме  $\Delta p/p_0 \approx q \cos\psi$ . Величины  $\mu_1 = \Delta p_1/(\gamma q)$  и  $\mu_2 = \Delta p_2/(\gamma q)$  определяются нижней ( $\Delta p_1$ ) и верхней ( $\Delta p_2$ ) границами отклонения импульса в лабораторной системе (взятыми по модулю).  $\Delta p_1$  характеризует минимальное отклонение энергии от равновесной, при превышении которого частицы попадают на счетчик.  $\Delta p_2$  указывает на апертурные ограничения.

---

<sup>1</sup>Здесь и далее в Главе импульс и энергия даны в единицах массы:  $m = c = 1$ .

Получим выражение для скорости счета сначала в нерелятивистском пределе ( $q \ll 1$ ). В зависимости от значения  $q$  возможны два варианта записи сечения  $\sigma$ :

$$\sigma = \begin{cases} 2 \int_{\arccos \mu_2}^{\arccos \mu_1} \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \chi d\chi d\varphi = \frac{\pi r_0^2}{2q^4} \left[ \frac{1}{x^2} + \ln x \right] \Big|_1^{\mu_1}, & \text{если } q > \frac{\Delta p_2}{\gamma}; \\ 2 \int_0^{\arccos \mu_2} \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \chi d\chi d\varphi = \frac{\pi r_0^2}{2q^4} \left[ \frac{1}{x^2} + \ln x \right] \Big|_1^{\mu_1}, & \text{если } \frac{\Delta p_1}{\gamma} < q < \frac{\Delta p_2}{\gamma}. \end{cases}$$

Используя (1,5,6,7), найдем скорость счёта

$$W_{1D}^{non-rel} = \frac{\sqrt{\pi} r_0^2 c N_b^2}{\gamma^2 V_b \sigma_q^3} \{ J_{1D}^{non-rel}(\chi_1) - J_{1D}^{non-rel}(\chi_2) \} \quad (8)$$

где

$$J_{1D}^{non-rel}(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \left[ \frac{\chi}{\varepsilon} - 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon}{\chi} \right] \frac{e^{-\chi}}{\chi^2} d\chi$$

$$\chi_{1,2} = (\Delta p_{1,2} / \gamma \sigma_q)^2.$$

В релятивистском случае выражение для инварианта  $I$  имеет вид  $I = 2q\sqrt{q^2 + 1}$  [7]. В результате вычислений, подобных тем, что проделаны выше, получим:

$$W_{1D}^{rel} = \frac{\sqrt{\pi} r_0^2 c N_b^2}{\gamma^2 V_b \sigma_q^3} \{ J_{1D}^{rel}(\chi_1) - J_{1D}^{rel}(\chi_2) \}, \quad (9)$$

$$J_{1D}^{rel}(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \frac{(2\chi\sigma_q^2 + 1)^2}{\chi^2 \sqrt{\chi\sigma_q^2 + 1}} \left[ \frac{\chi}{\varepsilon(\chi\sigma_q^2 + 1)} - 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon(\chi\sigma_q^2 + 1)}{\chi} \right. \\ \left. - \frac{\chi^2 \sigma_q^4}{(2\chi\sigma_q^2 + 1)^2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon(\chi\sigma_q^2 + 1)}{\chi}} - 1 + 2 \ln \frac{\varepsilon(\chi\sigma_q^2 + 1)}{\chi} \right) \right] e^{-\chi} d\chi. \quad (10)$$

Отношение

$$R_{eff} = \frac{W_{1D}^{rel}}{W_{1D}^{non-rel}} \quad (11)$$

характеризует степень влияния релятивистских поправок в сечении внутреннего рассеяния в пучке на загрузку счетчиков. На Рис. 1 построена

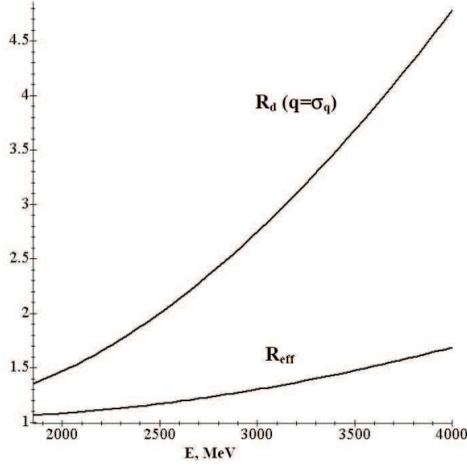


Рис. 1. Зависимость факторов  $R_d$  при  $q = \sigma_q$  и  $R_{eff}$  от энергии пучка для ВЭПП-4М.

зависимость  $R_{eff}$  от энергии  $E$  для параметров пучка ВЭПП-4М в диапазоне от 1.85 до 4 ГэВ. При этом  $\Delta p_1 = 0.8\%$ , что соответствует типичному расстоянию счетчика до орбиты  $A = 1$  см, и  $\Delta p_2 \approx 1.1\%$ . Для сравнения рядом построена аналогичная зависимость фактора  $R_d$ , вычисленная для значений  $q = \sigma_q$ .

Согласно полученному результату скорость счета рассеянных неполяризованных частиц для условий экспериментов на ВЭПП-4М в области энергий  $E < 2$  ГэВ можно оценивать и в нерелятивистском приближении ( $R_{eff} \approx 1$ ).

Для учёта вклада поляризации мы используем нерелятивистскую формулу в с.ц.м. [8]:<sup>2</sup>

$$d\sigma = d\sigma_0 \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} \vec{\zeta}_1 \cdot \vec{\zeta}_2 \right), \quad (12)$$

$d\sigma_0$  – сечение для неполяризованных частиц (см. формулу (2));  $\vec{\zeta}_{1,2}$  – векторы поляризации сталкивающихся электронов. Это приводит к из-

<sup>2</sup>Релятивистская теория внутрисгусткового рассеяния в электрон-позитронном накопителе с учетом кулоновских поправок и поляризации рассмотрена в [9, 7].

мененной скорости счета ( $\vec{\zeta}_1 = \vec{\zeta}_2 = \vec{\zeta}$ )

$$W_{1D}^{non-rel,pol} = \frac{\sqrt{\pi} r_0^2 c N_b^2}{\gamma^2 V_b \sigma_q^3} \left[ J_{1D}^{non-rel,pol}(\chi_1) - J_{1D}^{non-rel,pol}(\chi_2) \right], \quad (13)$$

где

$$J_{1D}^{non-rel,pol}(\varepsilon) = J_{1D}^{non-rel}(\varepsilon) + \zeta^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2\chi^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\chi}\right) e^{-\chi} d\chi.$$

Величина эффекта поляризации в скорости счета отрицательна и равна отношению

$$\Delta = \frac{\zeta^2 J_2}{J_1} < 0. \quad (14)$$

## 2.2 Двумерная модель столкновений

В [10] для расчета тушековской диффузии и времени жизни пучка мы ввели модифицированную функцию распределения по импульсу  $q$ , принимающую во внимание двумерный характер парного взаимодействия внутри сгустка:

$$f(k, q) dq = \frac{2kq}{\sigma_q^2} \cdot S(u, k) dq, \quad (q > 0), \quad (15)$$

$$S(u, k) = \exp\left[-\frac{u}{2}(1+k^2)\right] I_0\left[\frac{u}{2}|1-k^2|\right], \quad u = q^2/\sigma_q^2.$$

В отличие от одномерной модели (1D) импульс  $q$  в с.ц.м. включает компоненты по двум осям –  $X$  и  $Y$  в поперечной к оси пучка плоскости: <sup>3</sup>  $q^2 = q_X^2 + q_Y^2$ ;  $u = q^2/\sigma_q^2$ ; параметр  $\sigma_q = \gamma\sigma_{X'}$  совпадает с аналогичной величиной в 1D-модели;  $I_0$  – модифицированная функция Бесселя. Использован дополнительный параметр связи  $k = \sigma_{X'}/\sigma_{Y'}$ , отношение радиального и вертикального угловых разбросов в пучке. При  $k \rightarrow \infty$  ("плоский пучок") функция распределения совпадает с (3). При  $k \rightarrow 1$  ("круглый пучок") распределение становится по форме максвелловским:  $f(p) \propto p \cdot \exp(-p^2/\sigma_p)$ . Универсальный вид функции  $f(q, k)$ , рассчитанной для различных значений параметра связи  $k$ , приведён на Рис. 2.

---

<sup>3</sup>Как указано выше, импульс в с.ц.м. равен полуразности поперечных импульсов сталкивающихся частиц с относительной точностью  $\sim (\sigma_E/E)$ , где  $\sigma_E/E$  – разброс энергии [7].

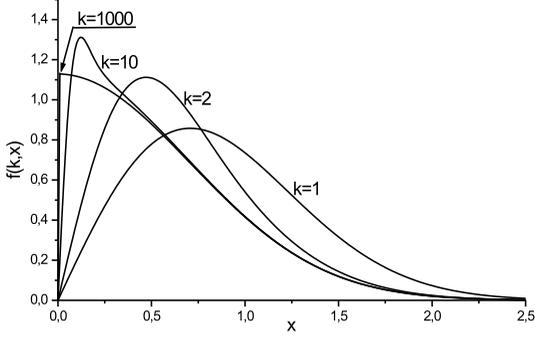


Рис. 2. Функция распределения  $f(k, x)$ ,  $x = q/\sigma_q$ .

С учетом модифицированной функции распределения скорость счета тушековских электронов получается равной

$$W_{2D}^{non-rel,pol} = \frac{\pi r_0^2 c N_b^2 k}{\gamma^2 V_b \sigma_q^3} \left[ J_{2D}^{non-rel,pol}(\chi_1) - J_{2D}^{non-rel,pol}(\chi_2) \right], \quad (16)$$

$$J_{2D}^{non-rel}(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \chi^{-3/2} \left[ \frac{\chi}{\varepsilon} - 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon}{\chi} \right] S(\chi, k) d\chi, \quad (17)$$

$$J_{2D}^{non-rel,pol}(\varepsilon) = J_{2D}^{non-rel} + \frac{\zeta^2}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \chi^{-3/2} \ln \frac{\varepsilon}{\chi} S(\chi, k) d\chi. \quad (18)$$

Пределы в интегралах идентичны тем, что имеют место в одномерном приближении. Величина скачка находится формулой (14). С использованием данного выражения проанализированы экспериментальные данные, устанавливающие зависимость величины деполяризационного скачка от вертикального эмиттанса пучка.

В релятивистском приближении скорость счета без учета поляризации:

$$W_{2D}^{rel} = \frac{\pi r_0^2 c N_b^2 k}{\gamma^2 V_b \sigma_q^3} \{ J_{2D}^{rel}(\chi_1) - J_{2D}^{rel}(\chi_2) \}, \quad (19)$$

$$J_{2D}^{rel}(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(2\chi\sigma_q^2 + 1)^2}{\chi^{3/2} \sqrt{\chi\sigma_q^2 + 1}} \left[ \frac{\chi}{\varepsilon(\chi\sigma_q^2 + 1)} - 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon(\chi\sigma_q^2 + 1)}{\chi} - \frac{\chi^2 \sigma_q^4}{(2\chi\sigma_q^2 + 1)^2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon(\chi\sigma_q^2 + 1)}{\chi}} - 1 + 2 \ln \frac{\varepsilon(\chi\sigma_q^2 + 1)}{\chi} \right) \right] S(\chi, k) d\chi. \quad (20)$$

Последнее выражение использовано для сравнения теоретической оценки интенсивности внутрисгусткового рассеяния с измеренной зависимостью загрузки счетчиков тушековского поляриметра от энергии пучка.

Изложенный метод даже с учетом двумерности столкновений в сравнении с подходом [9, 7] является приближенным. В формулах для сечения (1,2) заменён единицей множитель в числителе интерференционного слагаемого, который в общем случае равен

$$\cos \left\{ \frac{\alpha}{2\beta} \ln \left[ \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\}.$$

Этот множитель учитывает кулоновские поправки при скорости сталкивающихся частиц в с.ц.м.  $\beta \leq \alpha$  (когда условие Борна нарушено). Кроме того, хотя основная часть сечения нами рассмотрена и в релятивистском приближении тоже, вклад поляризации учитывается в виде исключительно нерелятивистской поправки, которая относительно мала. Применимость нашего приближенного подхода обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, расчет выполняется для частиц, получающих большие изменения в импульсе при рассеянии:  $\eta = \delta p/p \sim 1\%$  и более. Это ведет к выполнению условия  $\alpha/\eta \leq 1$ , что согласно численному анализу в [9, 7] позволяет использовать борновское приближение. Второе обстоятельство связано с тем, что вклад поляризации и в точной теории остается относительно малым [7]. Поэтому можно применить нерелятивистскую спиновую поправку в сечение (12) и в релятивистском случае для оценки степени убывания величины деполяризационного скачка с энергией, добавив в (19) соответствующие интегралы с множителем  $\zeta^2$  (см. (13,14,16)). В двумерном случае интеграл  $J_2$  из формулы (14) приближенно равен

$$J_2 \approx \int_{\chi_2}^{\infty} \frac{(2\chi\sigma_q^2 + 1)^2}{2\chi^{3/2}\sqrt{Q}} \cdot \ln \frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot S(\chi, k) d\chi + \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{(2\chi\sigma_q^2 + 1)^2}{2\chi^{3/2}\sqrt{Q}} \cdot \ln \frac{\chi_1 Q}{\chi} \cdot S(\chi, k) d\chi, \quad (21)$$

а интеграл  $J_1$  определен выражением в фигурных скобках (19).

### 3 Формулы релятивистской теории с кулоновскими поправками

В работе [7] проделаны расчёты для релятивистского случая с кулоновскими поправками для скорости счёта тушековских электронов  $\nu$ :

$$\nu_{\zeta}(\eta) = \frac{2\pi r_e^2 c N^2 k}{\gamma^2 V_b \eta^2 \sigma_q^2} \int_{\eta}^1 d\beta g\left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) \left\{ \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 - \frac{\eta^2}{\beta^2} \left[ \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 + (1+\zeta^2) \ln \frac{\beta}{\eta} f_c\left(\frac{\eta}{\beta}, \frac{\alpha}{\eta}\right) \right] \right\}, \quad (22)$$

где  $\eta = \Delta p/E$  – нижняя граница рассеяния по продольному импульсу,  $\beta$  – скорость в системе центра масс,  $\zeta$  – степень поляризации,  $\gamma_b = E_b/m$  – гамма фактор,  $\sigma_q$  – радиальный разброс импульсов в пучке,

$$g(Y) = \exp(-Y\beta_+^2) I_0(Y\beta_-^2) \quad , \quad \beta_{\pm}^2 = \frac{1}{2\delta_z^2} \pm \frac{1}{2\delta_x^2},$$

здесь  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя,  $\delta_z, \delta_x$  – вертикальный и радиальный разбросы импульсов в единицах массы электрона, а  $k = \delta_x/\delta_z$  – отношение радиального и вертикального разбросов импульсов в пучке. Формула написана в приближении  $\eta \ll 1$  и выполняется при любых разбросах поперечных импульсов в пучке. Скорость счёта не зависит от направления поляризации сталкивающихся частиц. Кулоновская поправка  $f_c$  в пределе больших скоростей  $\beta \gg \alpha$  стремится к единице ( $|f_c - 1| < 10^{-2}$ , при  $\beta > \alpha$ ), что соответствует борновскому приближению [7], следовательно кулоновской поправкой  $f_c$  можно пренебречь, что соответствует формулам более ранней работы [9]. Формулу (22) без кулоновских поправок будем называть моделью Байера-Каткова-Страховенко (BKS). При ещё более малых  $\eta$  вклад самой поляризации становится порядка  $\eta$  и пренебрежимо малым. Поэтому в формуле (22) для расчётов параметров пучка можно полностью пренебречь вторым членом в квадратных скобках.

Из-за малости относительной передачи импульса  $\eta \ll \delta_{x,z}$  в интеграле

$$I(\eta, \delta_x, \delta_z) = \frac{1}{\delta_x \delta_z} \int_{\eta}^1 g\left(\frac{v^2}{1-v^2}\right) \left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)^2 dv \quad (23)$$

Normalized integral,  $\eta=1.0\%$

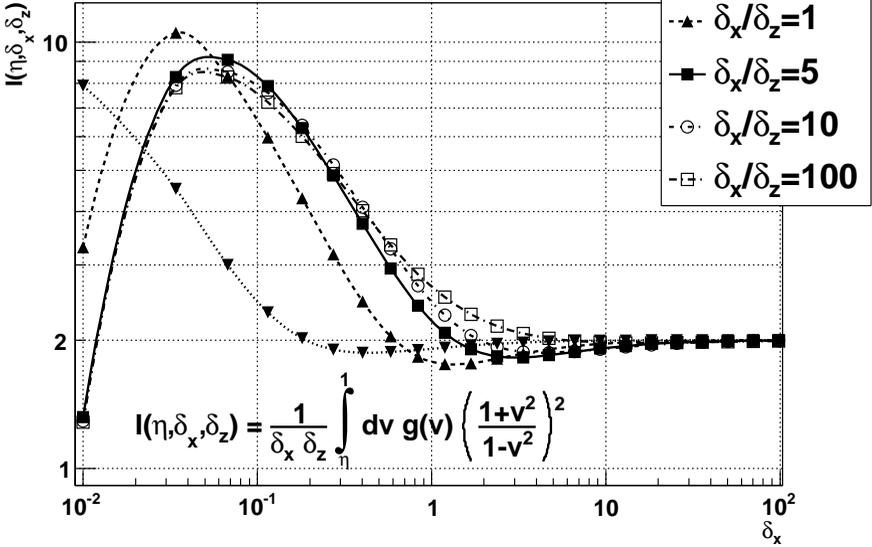


Рис. 3. Нормированный на поперечный разброс импульсов безразмерный интеграл (23) в зависимости от радиального разброса в импульсах при разных отношениях поперечных разбросов.

нижний предел интегрирования можно положить равным нулю. Таким образом,  $I(\eta, \delta_x, \delta_z) \approx I(0, \delta_x, \delta_z)$  и зависит только от разброса поперечных импульсов. При больших разбросах поперечных импульсов в пучке ( $\delta_{x,z} \gg 1$ ) интеграл (23) стремится к 2 (см. Рис. 3). Следовательно, асимптотическое поведение интенсивности внутрисгусткового рассеяния при больших разбросах поперечных импульсов выглядит следующим образом:

$$\nu(\eta) = \frac{4\pi r_e^2 c N^2}{\gamma^2 V_b \eta^2}. \quad (24)$$

Без учёта зависимости объема пучка от энергии, асимптотически интенсивность внутрисгусткового рассеяния спадает как  $E^{-2}$ . Для параметров ВЭПШ-4М  $\eta = 0.01$ ,  $I = 1$  мА,  $f_0 = 0.82$  МГц (частота обращения), размеры пучка:  $\sigma_x = 0.09$  см,  $\sigma_z = 0.015$  см,  $\sigma_l = 6$  см,  $V_b = 0.36$  см<sup>3</sup>,  $E = 1.85$  ГэВ, интенсивность внутрисгусткового рассеяния составит 3.7 кГц. Точный расчёт по формуле (22) дает 7 кГц.

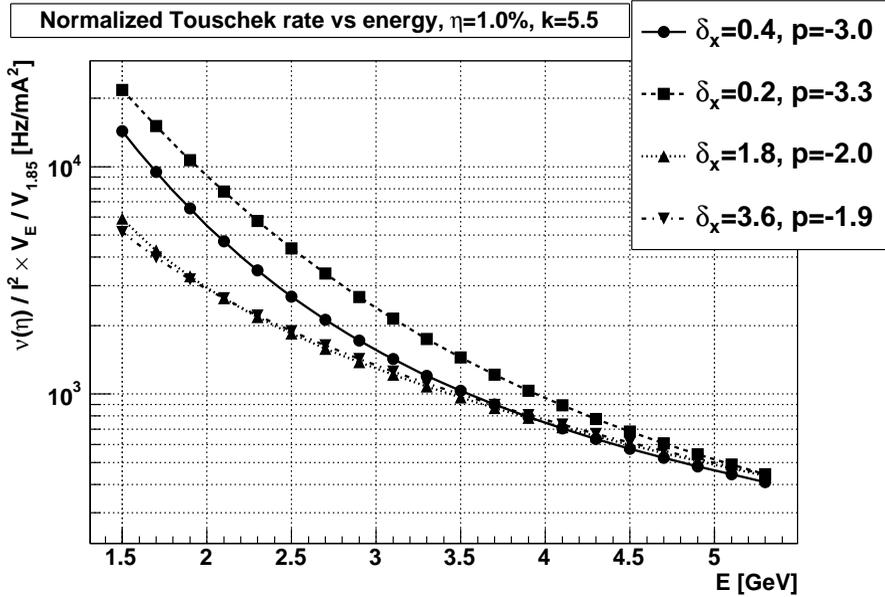


Рис. 4. Зависимость нормированной на квадрат тока и объем пучка интенсивность внутрисгусткового рассеяния от энергии при различных радиальных разбросах импульса в пучке. Сплошной линией обозначено реальное значение поперечного разброса в ВЭПП-4М ( $\delta_x(1.85 \text{ ГэВ}) = 0.4$ ).

На Рис. 4 показана зависимость нормированной на квадрат тока и объем пучка интенсивности внутрисгусткового рассеяния от энергии при различных поперечных разбросах импульсов в пучке. Расчет выполнен для отношения поперечных разбросов  $k = 5.5$ . Степень падения с энергией существенно зависит от величины разброса поперечных импульсов. Для типичного углового разброса пучка в ВЭПП-4М  $10^{-4}$  ( $\delta_x = 0.4$ ), интенсивность ведёт себя как  $\propto E^{-3}$ .

Скачок в интенсивности внутрисгусткового рассеяния есть относительная разница интенсивностей поляризованного ( $\zeta \neq 0$ ) и неполяризованного ( $\zeta = 0$ ) сгустка:

$$\Delta(\eta) = \frac{\nu_\zeta(\eta) - \nu_0(\eta)}{\nu_0(\eta)}. \quad (25)$$

При этом асимптотическое поведение скачка при больших разбросах по-

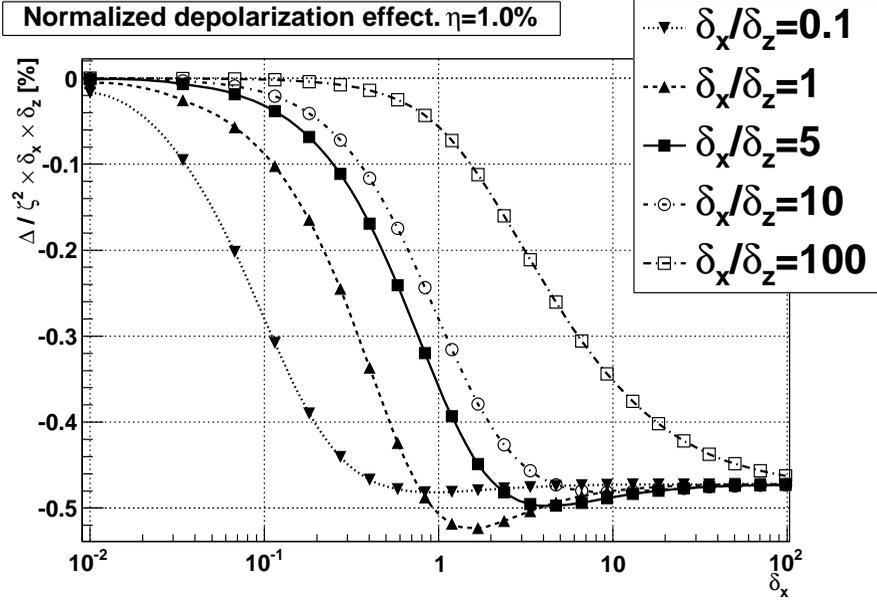


Рис. 5. Нормированная на  $\delta_x \delta_z$  и степень поляризации  $\zeta^2$  величина эффекта при деполаризации в зависимости от радиального разброса импульсов в пучке для различных отношений радиального и вертикального разбросов.

перечных импульсов ( $\delta_{x,z} \gg 1$ , см. Рис. 5):

$$\frac{\Delta(\eta)}{\zeta^2} \approx -0.5 \frac{\eta}{\delta_x \delta_z}. \quad (26)$$

Таким образом, величина эффекта пропорциональна относительной передаче импульса  $\eta$  и обратно пропорциональна поперечному разбросу импульсов в пучке. С ростом энергии каждый из поперечных разбросов по импульсам растёт квадратично, откуда эффект падает с энергией как четвертая степень.

На Рис. 6 приведен расчет падения величины скачка с энергией, выполненный в борновском приближении по формулам (14, 19, 21), а также расчёт, выполненный по формуле (25). Выше 3.5 ГэВ и до 5 ГэВ зависимость хорошо аппроксимируется степенной функцией  $\propto E^{-3.5}$ , что близко к асимптотике  $E^{-4}$  при  $E \rightarrow \infty$  (26).

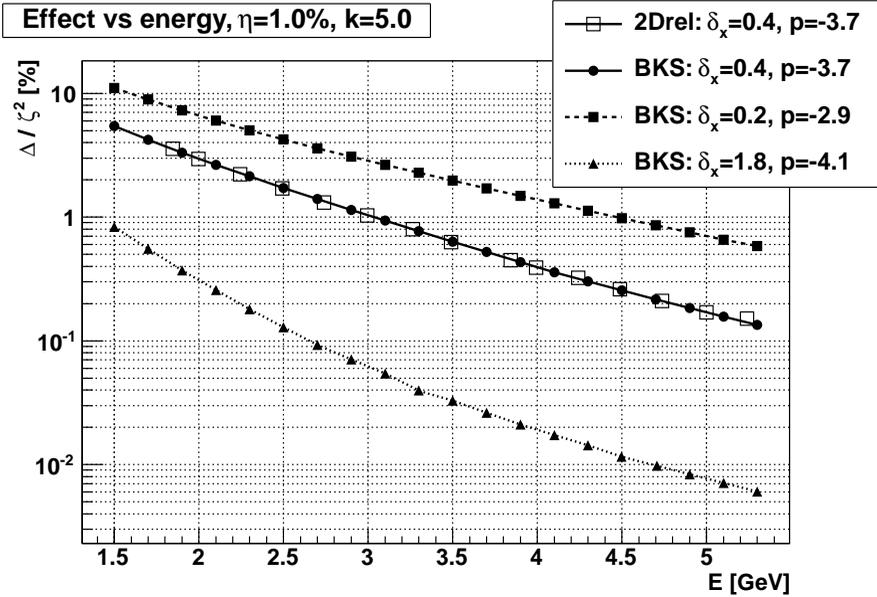


Рис. 6. Расчетная зависимость скачка в скорости счета тушековских частиц от энергии пучка ВЭПП-4М при различных импульсных разбросах в пучке. Используются релятивистская формула двумерной модели в борновском приближении (2Drel) и модель Байера-Каткова-Страховенко (BKS)

При увеличении поперечного импульсного разброса в интенсивность внутрисгусткового рассеяния начинают давать больший вклад малые углы и большие импульсы рассеяния, таким образом, снижается вклад поляризации. На Рис. 6 показана энергетическая зависимость скачка для различных импульсных разбросов. Кроме того, величина скачка зависит от отношения поперечных импульсных разбросов  $k$  (см. параграф 5.3).

На Рис. 7 построены кривые энергетической зависимости интенсивности внутрисгусткового рассеяния, вычисленной в разных подходах. Используются формулы борновского приближения: релятивистские (9), (19) в одномерной (1D) и двумерной (2D) моделях, соответственно, и нерелятивистская (1D) формула (8); а также формула релятивистской теории с кулоновскими поправками (22). На энергии 5 ГэВ интенсивность внутрисгусткового рассеяния для двумерного релятивистского случая в

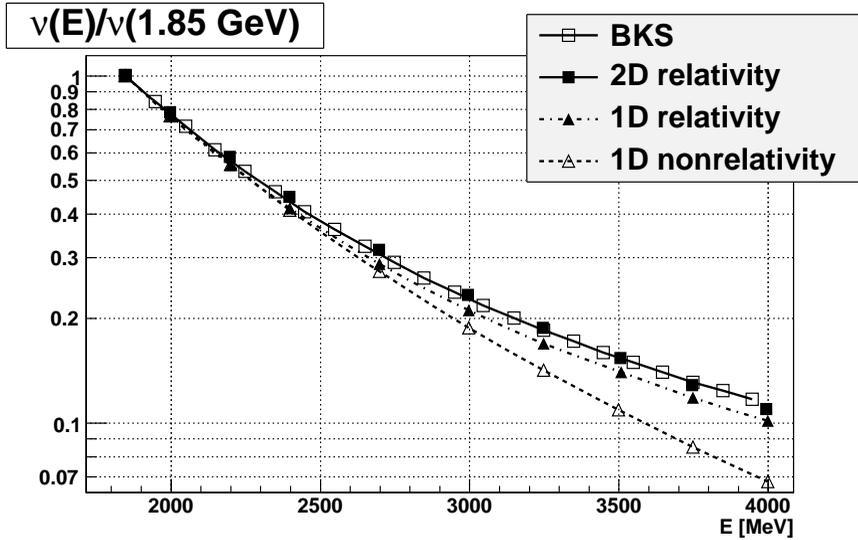


Рис. 7. Сравнение нормированной на квадрат тока и объем пучка интенсивности внутрисгусткового рассеяния в различных приближениях.

два раза превышает интенсивность одномерного нерелятивистского приближения. Важно отметить хорошее согласие расчетов, выполненных по релятивистским формулам борновского приближения и формуле полной теории.

## 4 Верхняя и нижняя граница по энергии регистрируемых частиц

Электрон, рассеиваясь внутри сгустка, получает относительное приращение энергии  $\varepsilon$ , и амплитуда его бетатронных колебаний изменяется. Если обозначить азимут рассеяния как  $\theta_1$ , положение счетчика как  $\theta_2$ , то для амплитуды возбуждаемых при этом бетатронных колебаний частицы в месте положения счетчика можно получить выражение

$$X = 2\varepsilon C \sqrt{\beta_2} + \eta_2 \varepsilon,$$

где  $\beta_2$  и  $\eta_2$  — бета- и дисперсионная функции в месте расположения

счетчика, а  $s$  определяется параметрами на азимуте рассеяния

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{H_1},$$

где  $H_1 = [\eta_1^2 + (\alpha_1\eta_1 + \beta_1\eta_1')^2]/\beta_1$ . Знак « $'$ » означает дифференцирование по продольной координате. Если счетчик находится на расстоянии  $A$  от равновесной орбиты, то легко получить выражение для нижней границы по энергии

$$\frac{\Delta p_1}{p} = \frac{A}{2C\sqrt{\beta_2} + \eta_2}. \quad (27)$$

Верхняя граница по энергии определяется апертурными ограничениями и может быть выражена через средние бета- и дисперсионную функции

$$\frac{\Delta p_2}{p} = \frac{B}{2C\sqrt{\bar{\beta}} + \bar{\eta}} \quad (28)$$

Здесь  $\alpha = -\beta'/2$ , а  $B$  — апертура камеры ускорителя в полукольцах.

В формуле (27) не учтена зависимость от фазы бетатронных колебаний ( $\varphi$ ), что означает рассмотрение многооборотных явлений. В области энергий  $< 2$  ГэВ на ВЭПП-4М типичными приращениями импульса для частиц, регистрируемых тушековским поляриметром, являются значения  $\sim 1\%$ , что превышает размеры ВЧ-сепаратрисы. Это значит что многооборотные явления будут давать менее заметный вклад в скорость счета  $W$ . По этой причине мы используем однооборотное приближение для нижней оценки  $W$ .

При таком рассмотрении выражение для нижней границы по импульсу примет вид

$$\frac{\Delta p_1}{p} = \frac{A}{2C\sqrt{\beta_2} \cos(\Delta\Psi_{12} + \varphi_0) + \eta_2}, \quad (29)$$

где  $\Delta\Psi_{12}$  — набег фазы от азимута рассеяния до счетчика

$$\Delta\Psi_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{ds}{\beta}, \quad \text{а} \quad \varphi_0 = \arccos\left(-\frac{\eta_1}{\sqrt{H_1\beta_1}}\right).$$

Выражение для верхней границы остается неизменным, так как в этом случае нас интересует движение по кольцу в целом и нет необходимости следить за фазой.

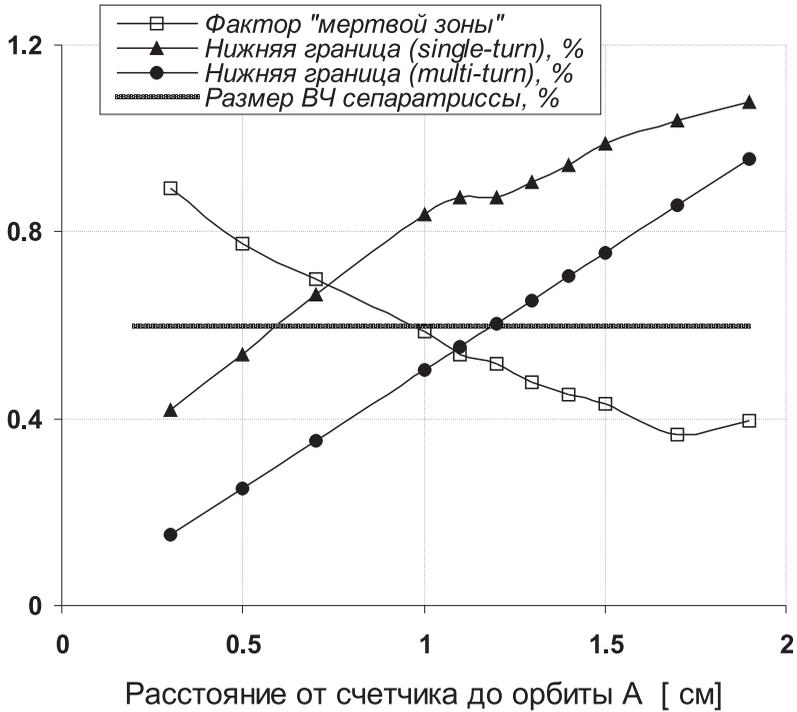


Рис. 8. Верхняя и нижняя границы по величине возмущения импульса рассеянных электронов, регистрируемых счетчиком в экспериментальном промежутке ВЭПП-4М, в зависимости от расстояния от счётчика до орбиты (A). Показана также зависимость от A фактора "мертвых зон" и энергетическая апертура, определяемая размером ВЧ сепаратрисы ( $E = 1.84$  ГэВ,  $U_{RF} = 400$  кэВ).

Кроме того, существуют такие участки ("мертвые зоны") кольца ускорителя, с которых на одном обороте после акта рассеяния частицы не попадают на счетчик, что, очевидно, приводит к уменьшению скорости счета. В расчетах это учитывается фактором "мертвых зон" – коэффициентом, равным отношению длины этих зон к периметру накопителя.

На Рис. 8 построены рассчитанные с учетом фазовых соотношений и усреднения по азимуту накопителя зависимости нижней границы  $\Delta p_1/p$  и фактора "мертвых зон" от положения счетчика (A). Показан уровень

энергетической апертуры, определяемый напряжением ускоряющих резонаторов.

Найденные численные соотношения для верхней и нижней границ возмущения импульса использованы для применения полученных в работе формул борновского приближения к расчету загрузки счетчиков тушековского поляриметра и величины поляризационного эффекта.

## 5 Сравнение расчетов и экспериментальные данные

### 5.1 Загрузка счетчиков

На Рис. 9 приведены данные расчета и измерения загрузки отдельного сцинтилляционного счётчика в зависимости от расстояния ( $A$ ), на которое удален его внутренний торец от орбиты пучка на энергии 1.55 ГэВ. Расчет выполнен по релятивистским формулам борновского приближения с учетом двумерности столкновений для двух значений отношения вертикального эмиттанса к радиальному. Использовано однооборотное приближение с верхней границей по возмущению импульса, задаваемой апертурой вакуумной камеры в полукольцах около (3 см), и нижней границей, зависящей от  $A$ . Параметр связи колебаний выбран с учетом реально наблюдаемого соотношения вертикального и горизонтального фазовых объёмов. Измеренная кривая расположена немного выше расчетных. Расхождение увеличивается по мере приближения счетчика к орбите и достигает 20% при  $A = 16$  мм. Отличие численного расчёта от результатов измерения, по нашему мнению, обусловлено следующими причинами. Во-первых, в скорости счёта имеется вклад от рассеяния на остаточном газе. Во-вторых, происходит регистрация дополнительных частиц из гало пучка, которые не учитываются в численном расчёте однооборотного приближения. Гало состоит из частиц с большими, порядка размера динамической апертуры, отклонениями энергии от равновесной. Совершив некоторое число оборотов, такие частицы либо падают на стенку вакуумной камеры накопителя, либо возвращаются обратно в пучок. Влияние гало растет с увеличением размера энергетической апертуры, определяемой напряжением ВЧ резонаторов.

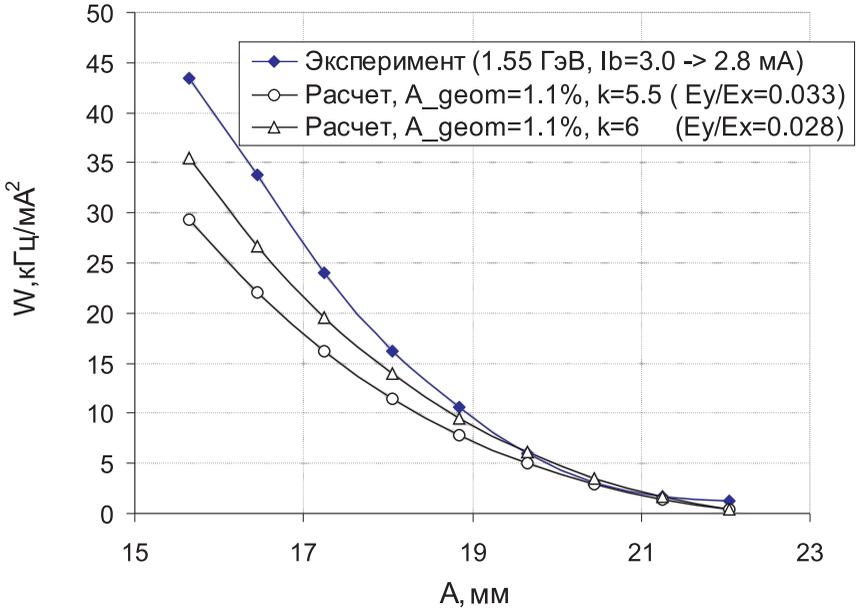


Рис. 9. Сравнение расчетной и измеренной зависимости загрузки сцинтиляционного счётчика от расстояния между ним и орбитой пучка. Расчет выполнен по релятивистским формулам борновского приближения с учетом двумерности столкновений для двух значений отношения вертикального эмиттанса к радиальному.

## 5.2 Зависимость скорости счёта тушековских электронов от энергии

В работе [11] представлены результаты измерения зависимости нормированной на квадрат тока и объем пучка скорости счёта тушековских электронов от энергии. Измерения выполнялись в диапазоне от 1.85 до 4.0 ГэВ. Для каждой точки по энергии напряжение ВЧ резонатора выставлялось таким образом, чтобы обеспечить постоянную длину сгустка. Орбита пучка корректировалась к положению орбиты на энергии 1.85 ГэВ, положение счётчиков выбиралось таким образом, чтобы загрузка внутреннего и наружного счётчиков были равны и при этом расстояние между ними сохранялось неизменным. Измерялись ток пучка и все

три его размера. Применялась специальная процедура выделения сигнала (коррелированных) совпадений сигналов с двух счётчиков. Подгонка результатов осуществлялась функцией  $p_1 \cdot (E/1.85)^{p_2}$ , где  $p_1$  — скорость счёта тушековских частиц, а  $p_2$  — степень падения тушековских электронов с энергией. В результате обработки, получена степень падения с энергией  $E^{-2.2 \pm 0.2}$ , что на 4 стандартных отклонения отличается от значения, полученного численным расчётом ( $E^{-3.0}$ , см. Рис. 4). Отличие, по нашему мнению, может быть вызвано следующими факторами: измерения в работе [11] проводились без изучения фоновых условий, на которые существенным образом влияет режим работы ВЭПП-4М; при фиксации длины сгустка растёт размер энергетической сепаратрисы, что увеличивает вклад многооборотных частиц в скорость счёта, что не учитывается в наших расчётах; на энергии меньше 2.8 ГэВ была включена магнитная змейка, увеличивающая разброс по импульсам и, соответственно, уменьшая интенсивность внутрисгусткового рассеяния на низкой энергии (см. Рис 4 для различных поперечных разбросов). Таким образом, для проверки энергетической зависимости требуются дополнительные измерения.

### 5.3 Зависимость величины деполяризационного скачка от вертикального эмиттанса и от энергии

В [12] нами представлены результаты эксперимента по измерению влияния вертикального эмиттанса пучка на величину деполяризационного скачка, а также соответствующие расчеты по нерелятивистской формуле двумерного приближения. Ранее подобная зависимость, но применительно к другой установке — ВЭПП-2М и при другой энергии — 500 МэВ, исследовалась в [9].

Из приведённых выше формул 2D приближения следует, что величина поляризационного эффекта в скорости счёта может зависеть от углового разброса в пучке по вертикали. Расчет деполяризационного скачка по формуле (19) представлен на Рис. 10 . Величина параметра связи в реальных условиях на ВЭПП-4М составляет около  $k \approx 3 \div 5$ , что соответствует отношению вертикального фазового объема в пучке к горизонтальному несколько сотых. Из графика следует, что на энергии 1.85 ГэВ скачок не должен превосходить  $2 \div 2.5$  % ( $\zeta = 80$  %). В пределе плоского пучка ( $k \rightarrow \infty$ ) расчетная величина скачка стремится к  $\approx 5$ %. В эксперименте был измерен скачок при двух значениях вертикального размера пучка, который регулировался с помощью корректирующей бетатронную связь повернутой на  $45^\circ$  квадрупольной линзы. Данные описанного

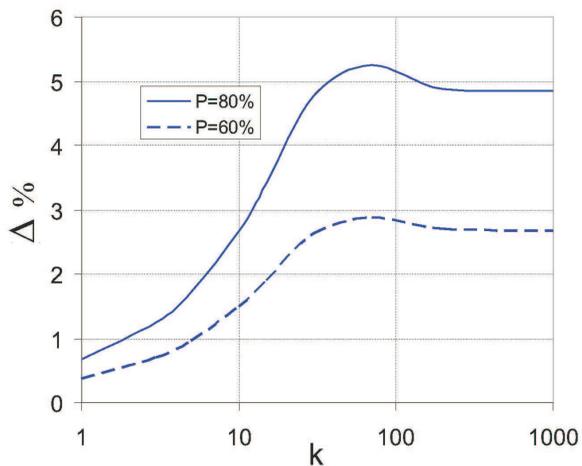


Рис. 10. Расчетная величина скачка в зависимости от параметра связи ( $k$ ) для двух значений степени поляризации при  $E = 1840$  МэВ,  $A = 1$  см.

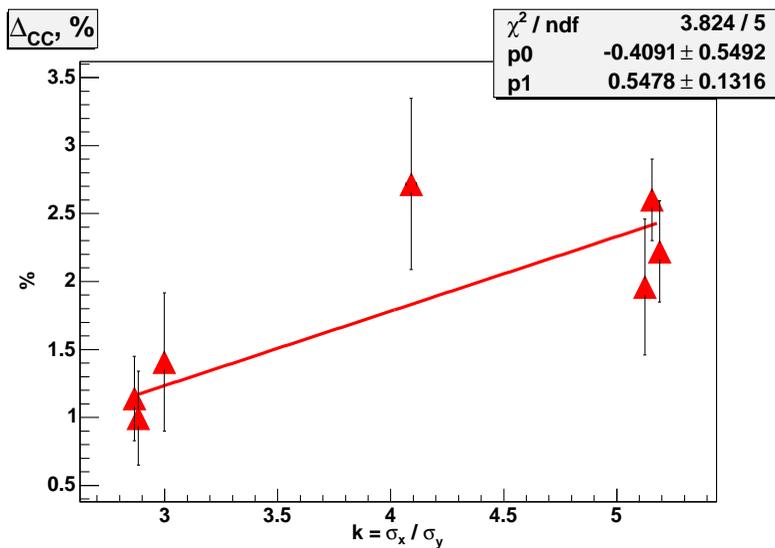


Рис. 11. Измеренная зависимость скачка в скорости счета тушековских частиц от параметра связи.

эксперимента использованы также для построения зависимости скачка в тушековских совпадениях на счетчиках от параметра связи (Рис. 11). Скачок в скорости счета тушековских электронов падает с уровня  $\approx 2.5\%$  с увеличением вертикального размера (или, соответственно, с уменьшением параметра связи  $k$ ) примерно в 1.6 раз. Это находится в хорошем согласии с расчётной зависимостью на Рис. 10 при  $\zeta = 80\%$ .

Можно предложить следующее объяснение эффекту уменьшения скачка с увеличением вертикального эмиттанса. Относительный вклад поляризации растёт с увеличением угла рассеяния  $\theta$  и максимален при  $\theta = \pi/2$  (см. (12)). В то же время основная часть сечения меняется  $\propto \theta^{-4}$ . Поэтому при фиксированном диапазоне возмущений импульса регистрируемых частиц в лабораторной системе ( $\eta$ ) основную информацию о поляризации несут события с малыми значениями импульса в с.д.м. ( $p$ ). Согласно виду функции плотности распределения двумерного приближения  $f(k, p)$  (см. Рис. 2) с увеличением параметра связи  $k$  (т.е. вертикального эмиттанса) доля таких событий должна падать из-за увеличивающегося провала  $f$  вблизи точки  $p = 0$ .

## 6 Заключение

Представлены формулы для расчёта внутрисгусткового рассеяния в нерелятивистском и релятивистском случае при одно- и двумерном поперечном разбросе импульса в пучке. Расчёты показывают существенное влияние релятивизма на интенсивность внутрисгусткового рассеяния на энергии выше 3 ГэВ. В данной области энергии для расчёта интенсивности тушековского рассеяния и имеющегося в нем поляризационного вклада на ВЭПП-4М нельзя применить нерелятивистское приближение, которое обладает достаточной точностью лишь при более низкой энергии — до 2 ГэВ. В то же время проведенный расчет релятивистской поправки позволяет предположить, что ее роль для накопителей нового поколения с эмиттансами  $\sim 10^{-9}$  м и энергией в обозначенном диапазоне будет заметно снижена, так как поперечный разброс импульса в них будет меньше в несколько раз по сравнению с машинами традиционного типа. Проведен анализ асимптотического поведения рассеяния при больших разбросах поперечных импульсов. Выполнен расчёт верхней и нижней границы по переданным продольным импульсам рассеявшихся частиц, попадающих на сцинтилляционный счётчик. Нормированная на объем интенсивность внутрисгусткового рассеяния ведёт себя как  $E^{-3.0}$ . Показано, что поляризационный вклад в скорость счета (деполяризации-

онный скачок) в пределе больших энергий падает как  $E^{-4}$ . Рассчитанный и наблюдаемый в эксперименте эффект уменьшения скачка при относительном увеличении вертикального эмиттанта объяснён особенностями функции распределения по импульсу в приближении двумерного рассеяния.

## Благодарности

Авторы благодарны В. М. Страховенко за ценные замечания, а также В. Е. Блинову и В. Н. Жиличу за всестороннее обсуждение.

## Список литературы

- [1] V.M. Aulchenko et al. Phys. Lett. B 573 (2003) p.63-79.
- [2] V.V. Anashin et al. Phys. Lett. B 686 (2003) p.84-90.
- [3] A.G. Shamov et al. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 181-182 (2009) p.311-313.
- [4] G. Brook. Cyclic accelerators of charged particles, Moscow, Atomizdat, 1970;  
Le Duff J. // CERN Accelerator School Proceedings, CERN 89-01 (Feb 1989). - P.114-130.
- [5] А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. 4-е изд. М.: Наука, 1981. стр. 292.
- [6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II (Теория поля), 7-е изд., М.: Наука, 1988.
- [7] V.M. Strakhovenko. arXiv:0912.5429v1[physics.acc-ph] 30 Dec2009.
- [8] V.B. Berestetsky, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevsky. Quantum electrodynamics, Moscow, Nauka, 1989.
- [9] V.N. Bayer, V.M. Katkov, V.M. Strakhovenko. Doklady Akademii Nauk SSSR, v. 241, №4, p.797 (1978).
- [10] D.Yu. Golubenko, S.A. Nikitin. PAC 2001, Vol.4 of 5, p.2845; Препринт ИЯФ 99-110 (1999).
- [11] O.V. Anchugov et al. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2009, Vol.109, №4, p.590-601.
- [12] S.A. Nikitin, I.B. Nikolaev. Proceedings of 10th European Particle Accelerator Conference (EPAC 06), Edinburgh, Scotland, 26-30 Jun 2006, p.184-1186.