

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

М.М. Карлинер, К.И. Попов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ  
ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ПОПЕРЕЧНЫХ СВЯЗАННЫХ МОД  
НА КОЛЛАЙДЕРЕ ВЭПП-4

ИЯФ 2004-41

НОВОСИБИРСК  
2004

**Использование обратной связи  
для подавления неустойчивости  
поперечных связанных мод  
на коллайдере ВЭПП-4**

*М.М. Карлинер, К.И. Попов*

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
630090 Новосибирск, СО РАН

**Аннотация**

В препринте изложена теория обратной связи с учетом хроматизма. Полученные результаты были использованы для численных расчетов системы обратной связи на ускорителе ВЭПП-4. Показано, что совместное использование резистивной обратной связи и отрицательного хроматизма позволяет добиться повышения порога по току в несколько раз без слишком больших требований, предъявляемых к точности выставления фазы и амплитуды обратной связи.

---

# 1 Введение

Эта статья посвящена применению обратной связи для подавления неустойчивости поперечных связанных мод (НПСМ). Последняя является основным ограничивающим фактором для интенсивности пучка в больших накопителях [1-5]. Источником подобного рода неустойчивости может быть электромагнитное взаимодействие пучка с окружающей его структурой (вакуумной камерой, ВЧ системой и т.п.), взаимодействие с электронным облаком или со встречным пучком. НПСМ возникает, если наведенные поля короткие, т.е. если они полностью затухают за время одного оборота. Таким образом, использование одномодового резонатора не предотвращает возникновение НПСМ.

Чтобы увеличить ток пучка, ограниченный неустойчивостью ПСМ, можно использовать многосгустковый режим. Но в подобном режиме может возникнуть многосгустковая неустойчивость. Чтобы избежать такой неустойчивости, необходимо, чтобы наведенные поля затухали до прихода следующего сгустка. К сожалению, этого не всегда возможно добиться, даже в случае использования одномодового резонатора.

Один из способов подавления многосгустковой неустойчивости – это использование обратной связи. До недавних пор обратная связь использовалась для подавления исключительно многосгустковых неустойчивостей. Идея была в том, чтобы уменьшить ток сгустка до уровня ниже порога НПСМ и перейти к многосгустковому режиму, таким образом получив ток, превышающий исходный в равное количество сгустков число раз. Возникающая при этом многосгустковая неустойчивость должна быть подавлена обратной связью. Но расчеты показывают, что резистивная обратная связь вызывает неустойчивость высших внутрисгустковых мод. Эта неустойчивость является частным случаем НПСМ. Инкремент этой неустойчивости мал и не представляет опасности для электронных накопителей из-за радиационного затухания. Но для протонных колец, таких как ЛНС, где радиационное затухание отсутствует, подобная неустойчивость может привести к полному разрушению пучка. Таким образом, снова появляется проблема НПСМ.

Как недавно выяснилось, в многосгустковом режиме электронное или ионное облако также может вызвать односгустковую неустойчивость,

сходную с НПСМ, вследствие чего ограничивается ток пучка [6,7]. Таким образом, приходится использовать обратную связь для подавления не только многосгустковой неустойчивости, но и НПСМ.

В свое время предлагалось подавлять НПСМ путем использования реактивной обратной связи, которая должна предотвращать изменение частоты нулевой моды с увеличением тока [8]. Теория реактивной обратной связи была разработана в двухчастичной модели и в модели сплошной среды с использованием уравнения Власова в [9,10]. Теория показала, что применение реактивной обратной связи действительно может привести к увеличению порога НПСМ. Это заключение было подтверждено при помощи компьютерного моделирования [11,12]. С другой стороны, исследования резистивной обратной связи показали, что она абсолютно неэффективна как средство борьбы с НПСМ [10].

Влияние обратной связи на порог НПСМ было позднее проверено на накопителе РЕР[13]. При этом было подтверждено, что использование реактивной ОС действительно позволяет увеличить порог НПСМ.

Но неожиданно оказалось, что использование резистивной ОС также позволяет увеличить этот порог, причем даже более эффективно [13]. Подобный результат также был получен в экспериментах на ВЭПП-4 (ИЯФ, Новосибирск) [14].

На LEP использование обратной связи долгое время было неэффективным. В.Данилов и Е.Переведенцев предположили, что поперечная ОС не может работать, если пучок проходит области с ненулевым поперечным импедансом между пикапом и кикером, как это и было на LEP [15]. Они предложили ввести в цепь ОС искусственный осциллятор, который бы моделировал поведение пучка между пикапом и кикером и таким образом вычислял бы правильный удар. Подобная ОС является видом резистивной обратной связи. После подробного моделирования [16] и некоторых улучшений обратная связь была испробована на LEP [17]. В итоге было получено небольшое увеличение тока пучка (порядка 5% вместо расчетных 10%), которое сопровождалось гораздо более стабильным поведением пучка.

В данной статье сделана попытка разработать углубленную теорию обратной связи, способную пролить свет на условия, при которых резистивная, реактивная или смешанная обратная связь может использоваться для подавления НПСМ.

В разделе 2 статьи получены уравнения мод с учетом хроматизма.

Раздел 3 содержит вывод уравнений, описывающих обратную связь.

В разделе 4 анализ устойчивости доводится до конца. Как оказалось, применение резистивной обратной связи при наличии отрицательного

хроматизма позволяет добиться устойчивости в широких пределах величины обратной связи и ее фазы [18].

В разделе 5 произведен расчет параметров оборудования системы обратной связи коллайдера ВЭПП-4.

## 2 Уравнения мод

В этой части наша цель – получить уравнения, описывающие поведение связанных мод во времени с учетом хроматизма.

Мы начнем с уравнений для поперечного и продольного движения частицы, движущейся под действием силы Лоренца [19]:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_x &= \Omega_x(p_z) - e \cdot \frac{\partial x}{\partial J_x} \cdot (E_x - vB_y); \\ \dot{J}_x &= e \cdot \frac{\partial x}{\partial \psi_x} \cdot (E_x - vB_y); \\ \dot{\psi}_z &= \Omega_z; \\ \dot{J}_z &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где точки над  $\psi_x$ ,  $J_x$ ,  $\psi_z$ ,  $J_z$  означают производные по быстрому времени. В (1)  $x$  и  $z$  – вертикальное и продольное отклонения частицы от положения равновесия в сопутствующей системе координат,  $\psi_x$ ,  $J_x$ ,  $\psi_z$ ,  $J_z$  – вертикальная и продольная переменные действие-угол,  $\Omega_x$  и  $\Omega_z$  – поперечная и продольная угловые частоты колебаний. Сила Лоренца  $e(E_x - vB_y)$  в этих уравнениях должна быть записана в сопутствующей системе координат, переход к которой осуществляется путем формального преобразования  $l = z + \omega_0 \cdot R \cdot t$ , где  $l$  – продольная координата в лабораторной системе координат,  $z$  – продольная координата в сопутствующей системе,  $\omega_0$  – угловая частота обращения равновесной частицы,  $R$  – средний радиус кольца.

Отклонения  $x$ ,  $z$  в декартовых координатах могут быть выражены в переменных действие-угол следующим образом:

$$x = \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \cdot \sin \psi_x; \quad z = \sqrt{\frac{2J_z}{M \Omega_z}} \cdot \sin \psi_z.\tag{2}$$

Здесь  $m_s$  и  $M$  означают массы бетатронного и синхротронного движения соответственно.

Угловая поперечная частота  $\Omega_x$  вследствие наличия хроматизма зависит от  $p_z$ , где  $p_z$  – мгновенное отклонение импульса от равновесного

значения:  $p_z = p - p_0$ . Частота поперечных колебаний может быть приближенно представлена как

$$\Omega_x(p_z) \cong \Omega_0 + \frac{\partial \Omega_x}{\partial p_z} \cdot p_z, \quad (3)$$

где  $\Omega_0$  – бетатронная частота равновесной частицы ( $p_z = 0$ ). Так как  $\Omega_x = \nu \cdot \omega$ , где  $\omega$  – мгновенная частота обращения, то

$$\Omega_x(p_z) \cong \Omega_0 + \frac{\omega_0 \cdot \alpha}{p_0} \cdot \left( \frac{p_0}{\alpha} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial p_z} - \nu \right) \cdot p_z.$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент уплотнения орбит.

Обозначим

$$\kappa = \frac{p_0}{\alpha} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial p_z}.$$

Этот параметр в  $1/\alpha$  больше, чем обычно используемый  $\nu$ -штрих:

$$\nu' = p_0 \cdot \frac{\partial \nu}{\partial p_z}.$$

Принимая во внимание, что

$$p_z = -\frac{m_s}{\alpha} \cdot \dot{z}$$

( $m_s$  – масса равновесной частицы), выражение, полученное выше, может быть сведено к

$$\Omega_x(p_z) = \Omega_0 + \frac{\nu - \kappa}{R} \cdot \dot{z}, \quad (4)$$

Для дальнейших вычислений удобно перейти к новой угловой переменной поперечных колебаний:

$$\varphi_x = \psi_x - \frac{\nu - \kappa}{R} \cdot z. \quad (5)$$

Для этой переменной

$$\frac{\partial}{\partial \psi_x} = \frac{\partial}{\partial \varphi_x}.$$

Уравнения движения в новых переменных принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_x &= \Omega_0 - e \cdot \frac{\partial x}{\partial J_x} \cdot (E_x - vB_y), \\ \dot{J}_x &= e \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi_x} \cdot (E_x - vB_y). \end{aligned} \quad (6)$$

В этой форме уравнения движения канонические с Гамильтонианом

$$H = H_0(J_x, J_z) + V(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z) = \Omega_0 \cdot J_x + \Omega_z \cdot J_z - e \cdot \int (E_x - vB_y) dx,$$

в то время как уравнения (1) не являются каноническими вследствие наличия хроматизма.

Заметим, что в новых переменных

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \cdot \sin \psi_x = \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \cdot \sin\left(\varphi_x + \frac{\nu - \kappa}{R} \cdot z\right) \\ &= \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\left(\varphi_x + \frac{\nu - \kappa}{R} \cdot z\right)} - e^{-j\left(\varphi_x + \frac{\nu - \kappa}{R} \cdot z\right)}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi_x} &= \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \cdot \cos\left(\varphi_x + \frac{\nu - \kappa}{R} \cdot z\right) \\ &= \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j\left(\varphi_x + \frac{\nu - \kappa}{R} \cdot z\right)} + e^{-j\left(\varphi_x + \frac{\nu - \kappa}{R} \cdot z\right)}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Функция распределения в поперечном и продольном фазовом пространстве может быть записана как сумма невозмущенной и возмущенной частей:

$$f(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; t) = f_0(J_x, J_z) + \tilde{f}(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; t).$$

Линеаризованное по отношению к малому возмущению уравнение Власова в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \Omega_0 \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi_x} + \Omega_z \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi_z} + e \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi_x} \cdot (E_x - vB_y) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J_x} = 0 \quad (9)$$

Согласно [19], сила Лоренца  $f$  в электродинамической системе с нулевым поперечным электрическим полем на оси может быть записана в сопутствующей системе координат как

$$\begin{aligned} -evB_y &= \frac{e^2 Nc}{(2\pi R)^2} \sum_m e^{j \frac{mz}{R}} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ Z_T(s - jm\omega_0) \right. \\ &\quad \left. \times \int x' \cdot F(\varphi'_x, J'_x; \psi'_z, J'_z; s) \cdot e^{-j \frac{mz'}{R}} \cdot d\varphi'_x \cdot d\psi'_z \cdot dJ'_x \cdot dJ'_z \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\mathcal{L}^{-1}$  – обратное преобразование Лапласа с переменной  $s$ ,  $Z_T(s - jm\omega_0)$  – поперечный импеданс,  $F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s) =$

$\mathcal{L}\{\tilde{f}(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; t)\}$  – преобразование Лапласа возмущенной функции по времени  $t$ . Интегрирование должно вестись в пределах  $-\pi \dots + \pi$  для  $\varphi'_x, \psi'_z$  и в пределах  $0 \dots \infty$  для  $J'_x, J'_z$ . Заметим, что переменная  $z$  в преобразовании Лапласа считается постоянной, т.к. она изменяется медленно по сравнению с поперечной переменной  $x$ .

Функция  $F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s)$  периодична по угловым переменным с периодом  $2\pi$  и может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s) = \sum_{r,n} F_{r,n}(J_x, J_z; s) \cdot e^{j(r\varphi_x + n\psi_z)}. \quad (11)$$

Подвергнем теперь уравнение Власова (9) преобразованию Лапласа по времени  $t$  с комплексной переменной  $s$ :

$$s \cdot F + \Omega_0 \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} + \Omega_z \cdot \frac{\partial F}{\partial \psi_z} - e \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi_x} \cdot \mathcal{L}(v \cdot B_y) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J_x} = 0. \quad (12)$$

Подставим (8), (10), (11) в это уравнение. Учитывая, что для целых  $r, q$  имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(r\pm 1)\varphi'_x} \cdot d\varphi'_x &= \begin{cases} 0 & \text{если } r \neq \pm 1, \\ 2\pi & \text{если } r = \pm 1, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\pm j \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot z) \cdot e^{\mp j q \psi_z} \cdot d\psi_z &= 2\pi \cdot J_q\left(\frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}}\right), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\pm j \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot z) \cdot e^{\mp j q \psi_z} \cdot d\psi_z &= 2\pi \cdot J_q\left(\frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}}\right), \end{aligned}$$

где  $J_q$  – функция Бесселя  $q$ -го порядка, можно получить двойную систему интегральных уравнений [19] для функций  $F_{1,n}(J_x, J_z, s)$  и



$F_{-1,n}(J_x, J_z, s)$ :

$$\begin{aligned}
& F_{1,n}(J_x, J_z, s) + \frac{\pi^2 e^2 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J_x} \cdot \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}}}{s + j\Omega_x + jn\Omega_z} \cdot \frac{c}{(2\pi R)^2} \\
& \times \left\{ \sum_{m,n'} J_n \left( \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot Z_T(s - jm\omega_0) \right. \\
& \times \int F_{1,n'}(J'_x, J'_z, s) \cdot \sqrt{\frac{2J'_x}{m_s \Omega_x}} \cdot J_n \left( \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_x \cdot dJ'_z \\
& - \sum_{m,n'} J_{n'} \left( \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot Z_T(s - jm\omega_0) \\
& \left. \times \int F_{-1,n'}(J'_x, J'_z, s) \cdot \sqrt{\frac{2J'_x}{m_s \Omega_x}} \cdot J_{n'} \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_x \cdot dJ'_z \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& F_{-1,n}(J_x, J_z, s) + \frac{\pi^2 e^2 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J_x} \cdot \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}}}{s - j\Omega_x + jn\Omega_z} \cdot \frac{c}{(2\pi R)^2} \\
& \times \left\{ \sum_{m,n'} J_n \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot Z_T(s - jm\omega_0) \right. \\
& \times \int F_{-1,n'}(J'_x, J'_z, s) \cdot \sqrt{\frac{2J'_x}{m_s \Omega_x}} \cdot J_n \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_x \cdot dJ'_z \\
& \times - \sum_{m,n'} J_{n'} \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot Z_T(s - jm\omega_0) \\
& \left. \times \int F_{1,n'}(J'_x, J'_z, s) \cdot \sqrt{\frac{2J'_x}{m_s \Omega_x}} \cdot J_{n'} \left( \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_x \cdot dJ'_z \right\} = 0, \\
& n, n', m = -\infty \dots \infty.
\end{aligned} \tag{14}$$

В дальнейшем при решении этой системы интегральных уравнений мы будем применять методику, использованную в [3], к нашему решению с учетом хроматизма и обратной связи.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
& \int F_{1,n}(J_x, J_z, s) \cdot \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \cdot dJ_x = D_{1,n}(J_z; s), \\
& \int F_{-1,n}(J_x, J_z, s) \cdot \sqrt{\frac{2J_x}{m_s \Omega_x}} \cdot dJ_x = D_{-1,n}(J_z; s),
\end{aligned} \tag{15}$$

$D_{1,n}(J_z; s)$  и  $D_{-1,n}(J_z; s)$  – дипольные моменты. Тогда можно получить интегральные уравнения для дипольных моментов:

$$\begin{aligned}
D_{1,n}(J_z, s) + \frac{\pi^2 e^2 \cdot \int \frac{\partial f_0}{\partial J_x} \cdot \frac{2J_x}{m_s \Omega_x} dJ_x}{s + j\Omega_x + jn\Omega_z} \cdot \frac{c}{(2\pi R)^2} \\
\times \left\{ \sum_{m,n'} J_n \left( \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot Z_T(s - jm\omega_0) \right. \\
\times \int D_{1,n'}(J'_z, s) \cdot J_{n'} \left( \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_z \\
- \sum_{m,n'} J_n \left( \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot Z_T(s - jm\omega_0) \\
\left. \times \int D_{-1,n'}(J'_z, s) \cdot J_{n'} \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_z \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
D_{-1,n}(J_z, s) + \frac{\pi^2 e^2 \cdot \int \frac{\partial f_0}{\partial J_x} \cdot \frac{2J_x}{m_s \Omega_x} dJ_x}{s - j\Omega_x + jn\Omega_z} \cdot \frac{c}{(2\pi R)^2} \\
\times \left\{ \sum_{m,n'} J_n \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot Z_T(s - jm\omega_0) \right. \\
\times \int D_{-1,n'}(J'_z, s) \cdot J_{n'} \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_z \\
- \sum_{m,n'} J_n \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot Z_T(s - jm\omega_0) \\
\left. \times \int D_{1,n'}(J'_z, s) \cdot J_{n'} \left( \frac{m - \kappa + \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_z \right\} = 0, \\
n, n', m = -\infty, \dots, +\infty
\end{aligned} \tag{17}$$

Если принять, что временная зависимость решений этих уравнений может быть выражена в виде  $e^{j\Omega t}$ , то переменная Лапласа  $s$  должна быть заменена на  $j\Omega$ .

Мы получили двойные интегральные уравнения, т.к. мы рассматриваем как положительные, так и отрицательные бетатронные частоты (возникающие из  $\sin \psi_x$ ). Но для анализа устойчивости достаточно рассмотреть только, например, положительные частоты. В этом случае числитель в первом из уравнений (16) становится примерно равным  $2\Omega_x$ , в то

время как такой же числитель во втором уравнении (17) будет порядка  $\Omega_z$ . Принимая во внимание, что  $\Omega_x \gg \Omega_z$ , можно получить уравнения:

$$\begin{aligned}
& D_{1,n}(J_z, s) \cong 0, \\
& (j\Omega - j\Omega_x + jn\Omega_z) \cdot D_{-1,n}(J_z, s) \\
& = -\pi^2 e^2 \cdot \int \frac{\partial f_0}{\partial J_x} \cdot \frac{2J_x}{m_s \Omega_x} \cdot dJ_x \cdot \frac{c}{(2\pi R)^2} \cdot \sum_{m,n'} J_n \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot \\
& \times Z_T(s - jm\omega_0) \cdot \int D_{-1,n'}(J'_z, s) \cdot J_{n'} \left( \frac{m + \kappa - \nu}{R} \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}} \right) \cdot dJ'_z,
\end{aligned} \tag{18}$$

т.е., уравнения для  $D_{\pm 1,n}(J_z, s)$  разделяются.

Для вычисления первого интеграла в (18) представим функцию распределения в форме произведения

$$f_0(J_x, J_z) = g(J_z) \cdot h(J_x). \tag{19}$$

Тогда

$$\int \frac{\partial f_0}{\partial J_x} \cdot J_x \cdot dJ_x = g(J_z) \cdot \int_0^\infty \frac{\partial h(J_x)}{\partial J_x} \cdot J_x \cdot dJ_x = -\frac{N}{2\pi} \cdot g(J_z),$$

функция  $h(J_x)$  нормирована следующим образом:

$$\int_0^\infty dJ_x \int_{-\pi}^\pi d\psi_x \cdot h(J_x) = N,$$

и  $N$  – количество частиц в сгустке.

Принимая во внимание, что

$$\frac{e}{m_s} = \frac{c^2}{\gamma U_0} = \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{\gamma U_0}; \quad \frac{\Omega_x}{\omega_0} = \nu; \quad e \cdot N \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} = I_0; \quad \frac{R}{\nu} = \beta_{av},$$

где  $U_0$  – энергия покоя частиц (в вольтах),  $I_0$  – средний циркулирующий ток в накопителе,  $\nu$  – отношение частоты вертикальных поперечных колебаний к частоте обращения,  $\gamma$  – релятивистский фактор, система интегральных уравнений может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
& (j\Omega - j\Omega_x + jn\Omega_z) \cdot D_{-1,n}(J_z, j\Omega) + \frac{\omega_0 \cdot I_0 \cdot \beta_{av}}{2\gamma \cdot U_0} \\
& \times \sum_{n'} \int K_{n,n'}(J_z, J'_z; j\Omega) \cdot D_{-1,n}(J'_z, j\Omega) \cdot dJ'_z = 0, \\
& n, n' = -\infty, \dots, 0, \dots, +\infty
\end{aligned} \tag{20}$$

где ядро равно

$$K_{n,n'}(J_z, J'_z; j\Omega) = \sum_m Z_T(j\Omega - jm\omega_0) \cdot g(J_z) \quad (21)$$

$$\times J_n\left(\frac{m + \kappa - \nu}{R}\right) \cdot \sqrt{\frac{2J_z}{M \cdot \Omega_z}} \cdot J_{n'}\left(\frac{m + \kappa - \nu}{R}\right) \cdot \sqrt{\frac{2J'_z}{M \cdot \Omega_z}}.$$

Здесь значения частот колебаний мод должно быть найдено как набор собственных значений системы интегральных уравнений (20). Если разделить обе части уравнения (20) на  $\Omega_z$  и обозначить относительный частотный сдвиг как

$$\lambda = \frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_z},$$

то система уравнений принимает вид:

$$(j\lambda + jn) \cdot D_{-1,n}(J_z, j\Omega) + \frac{\omega_0 \cdot I_0 \cdot \beta_{av}}{2\gamma \cdot U_0 \cdot \Omega_z} \cdot \sum_{n'} \int K_{n,n'}(J_z, J'_z; j\Omega) \quad (22)$$

$$\times D_{-1,n'}(J'_z, j\Omega) \cdot dJ'_z = 0, \quad n, n' = -\infty, \dots, 0, \dots, +\infty.$$

Для решения системы интегральных уравнений (22) мы последуем [3]. Неизвестные дипольные моменты должны быть разложены в ряды ортогональных многочленов с некоторой весовой функцией  $W(J_z)$ :

$$D_{-1,n}(J_z, j\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n \cdot W(J_z) \cdot f_k^{|n|}(J_z), \quad (23)$$

где  $a_k^n$  – неизвестные пока коэффициенты,  $f_k^{|n|}(J_z)$  – функции, удовлетворяющие ортогональным соотношениям с весовой функцией  $W(J_z)$ :

$$\int_0^{\infty} W(J_z) \cdot f_k^{|n|}(J_z) \cdot f_m^{|n|}(J_z) \cdot dJ_z = \delta_{km}, \quad (24)$$

$\delta_{km}$  – символы Кронекера. Заметим, что в  $a_k^n$   $n$  – это азимутальные индексы, а  $k$  – радиальные ( $-\infty < n < \infty; 0 \leq k < \infty$ ).

Следуя [3], мы примем, что продольная функция распределения Гауссова:

$$g(J_z) = \frac{1}{4\pi J_{z0}} \cdot e^{-\frac{J_z}{2J_{z0}}}. \quad (25)$$

Если взять  $g(J_z)$  в качестве весовой функции, то ортогональные функции должны быть

$$f_k^{|n|}(u) = \left(\frac{k!}{(k + |n|)!}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{|n|}{2}} \cdot L_k^{|n|}(u), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (26)$$

где  $u = \frac{J_z}{2J_{z0}}$ ,  $L_k^{[n]}(u)$  – обобщенные полиномы Лагерра:

$$L_k^{(n)}(u) = \frac{e^u \cdot u^{-n}}{k!} \cdot \frac{d^k}{du^k}(e^{-u} \cdot u^{n+k}).$$

Система интегральных уравнений в этом случае переходит в систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными  $a_k^n$ :

$$(j\lambda + jn) \cdot a_k^n + \frac{\omega_0 \cdot I_0 \cdot \beta_{av}}{4\pi\gamma \cdot U_0\Omega_z} \cdot \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} M_{n',k'}^{n,k} \cdot a_{k'}^{n'} = 0; \quad (27)$$

$$n = -\infty, \dots, \infty; k = 0, \dots, \infty.$$

Элементы матрицы  $M_{n',k'}^{n,k}$  равны

$$M_{n',k'}^{n,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_T(j\Omega - jm\omega_0) \cdot I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m), \quad (28)$$

где

$$I_{m,n}^k = \frac{\varepsilon(n)}{\sqrt{(k+|n|)! \cdot k!}} \cdot e^{-a_m} \cdot \left\{ \frac{m - \kappa + \nu}{R\sqrt{2}} \sigma_z \right\}^{2k+|n|},$$

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{если } n \geq 0 \\ (-1)^{|n|} & \text{если } n < 0 \end{cases}, \quad a_m = \left( \frac{m - \nu + \kappa}{R\sqrt{2}} \sigma_z \right)^2, \quad (29)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{2J_{z0}}{M\Omega_z}} - \text{длина сгустка.}$$

Заметим, что матрица содержит неизвестную частоту колебаний  $\Omega$ . Для широкополосного импеданса  $Z(j\Omega - jm\omega_0)$  эта частота  $\Omega$  может быть заменена близкой к ней частотой свободных бетатронных колебаний  $\Omega_0$ :

$$M_{n',k'}^{n,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_T[-j(m - \nu)\omega_0] \cdot I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m) \quad (30)$$

Теперь все входящие в сумму по  $m$  функции зависят от  $m$  через  $m - \nu$ . Если вычесть из  $\nu$  ее целую часть  $[\nu]$ , то можно заменить индекс суммирования  $m - [\nu]$  на новое  $m$ . В этом случае в выражении (30) остается  $m - \nu$ , где  $\nu$  далее будет считаться дробной частью  $\nu$ . Функции  $I_{n,k}^m(a_m)$  слабо зависят от  $\nu$ , поэтому последней можно пренебречь.

В случае широкополосного импеданса величиной  $\nu$  можно пренебречь, но в узкополосном случае ее нужно учитывать.

Импеданс широкополосного резонатора может быть записан в виде:

$$Z_T[-j(m-\nu)\omega_0] = \frac{R_T}{-\frac{m-\nu}{m_c+\Delta m} + j \cdot Q \cdot \left( \frac{(m-\nu)^2}{(m_c+\Delta m)^2} - 1 \right)}. \quad (31)$$

Здесь  $m_c$  – целая часть относительной резонансной частоты  $\frac{\omega_c}{\omega_0}$ ,  $R_T$  – шунтовой импеданс,  $Q$  – добротность,  $\Delta m$  – расстройка по отношению к  $m_c$ ,  $\nu$  – дробная часть исходной  $\nu$ . В случае широкополосного импеданса величинами  $\nu$ ,  $\Delta m < 1$  можно пренебречь. Импеданс широкополосного резонатора в этом случае равен

$$Z_T(-jm\omega_0) = \frac{R_T}{-\frac{m}{m_c} + j \cdot Q \cdot \left( \frac{m^2}{m_c^2} - 1 \right)}. \quad (32)$$

Элементы матрицы  $M_{n',k'}^{n,k}$  для широкополосного импеданса с отброшенной  $\nu$  могут быть записаны в виде

$$M_{n',k'}^{n,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_T(-jm\omega_0) \cdot I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m). \quad (33)$$

Система алгебраических уравнений, определяющая коэффициенты  $a_k^n$  теперь приняла вид:

$$\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} (N_{n',k'}^{n,k} + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,k'}) \cdot a_{k'}^{n'} + j\lambda \cdot a_k^n = 0; \quad (34)$$

$$n = -\infty, \dots, \infty; \quad k = 0, \dots, \infty;$$

где  $\delta_{n,n'}$ ,  $\delta_{k,k'}$  – символы Кронекера, и

$$N_{n',k'}^{n,k} = \frac{\omega_0 I_0 \beta_{av}}{4\pi\gamma \cdot U_0 \Omega_z} \cdot M_{n',k'}^{n,k}$$

$$= \frac{\omega_0 I_0 \beta_{av}}{4\pi\gamma \cdot U_0 \Omega_z} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z_T(-jm\omega_0) \cdot I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m). \quad (35)$$

Суммирование в (33) в случае широкополосного импеданса может быть заменено интегрированием по  $m$ :

$$M_{n',k'}^{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} Z_T(-jm\omega_0) \cdot I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m) \cdot dm. \quad (36)$$

Для удобства анализа сделаем замену переменных:

$$\frac{R}{\sigma_z} = m_0; \quad \frac{m}{m_0} = x; \quad \frac{\kappa}{m_0} = y; \quad dm = m_0 dx.$$

Тогда получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} (I \cdot A_{n',k'}^{n,k} + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,k'}) \cdot a_{k'}^{n'} + j\lambda \cdot a_k^n = 0, \quad (37)$$

$$n = -\infty, \dots, \infty; \quad k = 0, \dots, \infty;$$

где

$$A_{n',k'}^{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} z_T(-jx \cdot m_0 \omega_0) \cdot I_{n',k'}(x+y) \cdot I_{n,k}(x+y) \cdot dx. \quad (38)$$

В (38)

$$z_T(-jx \cdot m_0 \omega_0) = \frac{1}{R_T} \cdot Z_T(-jx \cdot m_0 \omega_0) = \frac{1}{-\frac{x}{p} + j \cdot Q \cdot \left(\frac{x^2}{p^2} - 1\right)}; \quad (39)$$

$$p = \frac{m_c}{m_0};$$

$$I_{n,k}(x+y) = \frac{\varepsilon(n)}{\sqrt{(k+|n|)! \cdot k!}} \cdot e^{-a(x+y)} \cdot \left\{ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right\}^{2k+|n|} \quad (40)$$

и

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0 \\ (-1)^{|n|} & \text{при } n < 0. \end{cases}, \quad a(x+y) = \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

В (37)

$$I = \frac{I_0}{I_b}; \quad I_b = \frac{4\pi\gamma \cdot U_0 \cdot \nu_z \cdot \sigma_z}{\beta_a v \cdot R \cdot R_T}. \quad (40a)$$

Система уравнений (37) имеет нетривиальное решение, если  $(-j\lambda)$  является собственным значением матрицы  $D(I)$ :

$$D_{n',k'}^{n,k} = I \cdot A_{n',k'}^{n,k} + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,k'} \quad (41)$$

Если  $d_i$  – собственное значение матрицы  $D$ , то соответствующее  $\lambda_i = j \cdot d_i$ . Мнимая часть  $\lambda_i$  определяет устойчивость движения: если  $Im \lambda < 0$  для по крайней мере одного  $\lambda_i$ , то движение неустойчиво.

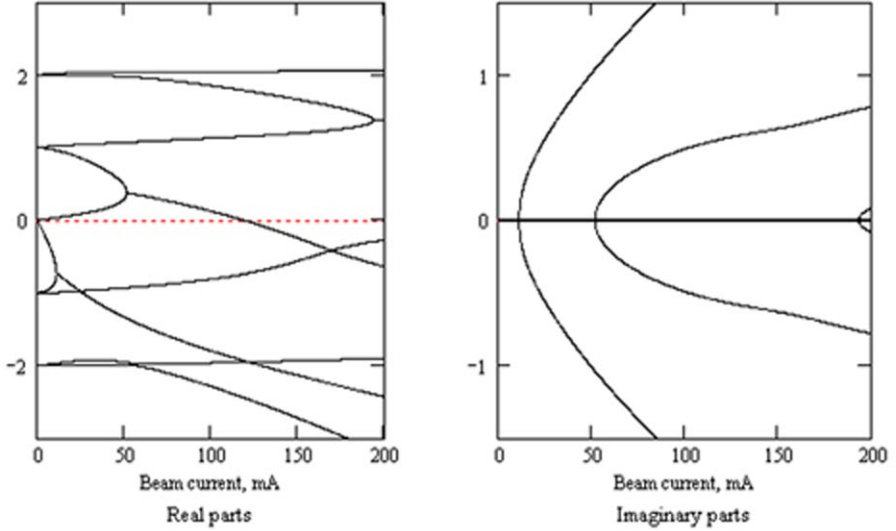


Рис. 1: Зависимости действительных и мнимых частей  $\lambda$  от тока  $I_0$  при нулевом хроматизме.

На Рис.1 в качестве иллюстрации даны графики зависимости  $Re \lambda$  и  $Im \lambda$  от тока  $I_0$  для типичных параметров накопителя ВЭПП-4 (Новосибирск) с нулевым хроматизмом. Нетрудно заметить, что имеет место порог устойчивости по току  $I_0$ . Это и есть хорошо известная НПСМ.

Переменная  $y$  в подынтегральном выражении в (38) появляется вследствие хроматизма

$$y = \frac{\sigma_z}{R} \cdot \frac{\nu'}{\alpha}. \quad (42)$$

Здесь  $y$  – так называемая хроматическая фаза. Это прирост бетатронной фазы вследствие хроматизма в течение половины периода синхротронных колебаний (от головы к хвосту).

Если  $y \neq 0$ , то спектр колебаний моды существенно изменяется. Он превращается в спектр обычного head-tail эффекта, в котором некоторые из мод неустойчивы без порога по току. Порог появляется только вследствие радиационного затухания.



### 3 Уравнения мод с обратной связью

Здесь мы получим одногустковые уравнения поведения мод в присутствии обратной связи.

Структурная схема обсуждаемой обратной связи представлена на Рис.2. На нем показан пикап в форме полосковой линии, длина которого равна  $L_1$ . Кикер, также в виде полосковой линии, имеет длину  $L_2$ . Расстояние между выходом пикапа и входом кикера в направлении движения пучка равно  $L_0$ .

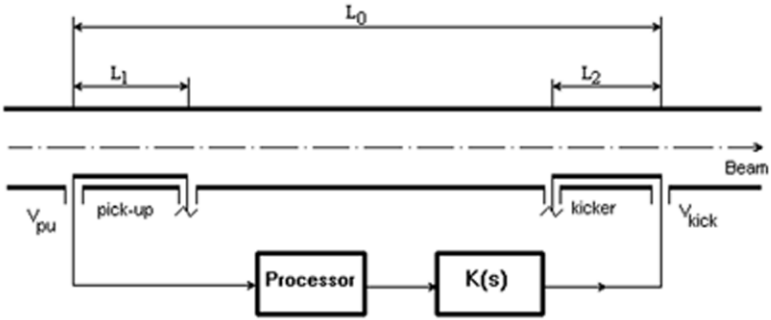


Рис. 2: Структурная схема обратной связи.

Электромагнитное поле кикера действует на ступок в вертикальном направлении. Поле в кикере определяется напряжением на выходе усилителя в цепи обратной связи. На входе этого усилителя присутствует сигнал с пикапа (после процессорной обработки), который пропорционален отклонению пучка от его равновесной орбиты.

Движение ступка под действием обратной связи описывается, как и раньше, уравнением Власова (9). Но теперь сила Лоренца должна включать составляющую обратной связи.

Ниже мы рассчитаем силу Лоренца обратной связи. Поле в кикере равно

$$E_x = \frac{V_{kick}}{a} \cdot e^{\gamma(l-L_0)}, \quad vB_y = -\frac{v\mu_0 E_x}{Z_k} = -\frac{v\mu_0 \cdot V_{kick}}{a \cdot Z_k} \cdot e^{\gamma(l-L_0)},$$

где  $V_{kick}$  – напряжение на входе кикера (выходе усилителя),  $g = s/c$ ,  $s$  – Лапласова переменная,  $a$  – расстояние между пластинами кикера,  $Z_k = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  (120π Ohm),  $l$  – продольная координата, отсчитываемая от пикапа вдоль кольца в направлении вращения пучка.

После суммирования можно получить

$$e \cdot (E_x - vB_y) = F(l, s) = e \cdot \frac{V_{kick}}{a} \cdot \left(1 + \frac{v \cdot \mu_0}{Z_k}\right) \cdot e^{\gamma(l-L_0)}. \quad (43)$$

Здесь

$$\frac{v \cdot \mu_0}{Z_k} = \frac{v}{c} = \beta_p.$$

Будем считать, что частицы релятивистские, т.е.  $\beta_p = 1$ :

$$e \cdot (E_x - vB_y) = F(l, s) = e \cdot \frac{2V_{kick}(s)}{a} \cdot e^{\gamma(l-L_0)}. \quad (44)$$

В уравнении (9) сила Лоренца должна быть выражена во временной области в сопутствующей системе координат равновесной частицы. Для этого сначала разложим  $F(l, s)$ , которая периодична по  $l$ , в ряд Фурье

$$F(l, s) = \sum_m F_m(s) \cdot \exp(j \frac{ml}{R}),$$

где

$$F_m(s) = \frac{1}{2\pi R} \int_{L_0-L_2}^{L_0} F(l, s) \cdot \exp(-j \frac{ml}{R}) \cdot dl,$$

а  $L_2$  – длина кикера.

Подстановка  $F(l, s)$  дает

$$F_m(s) = e \cdot \frac{V_{kick}(s)}{a \cdot \pi R} \cdot \frac{\exp(-j \frac{mL_0}{R})}{\gamma - jm/R} \cdot \left(1 - \exp\left[-(\gamma - j \frac{m}{R})L_2\right]\right),$$

и ряд Фурье принимает вид:

$$F(l, s) = e \cdot \frac{V_{kick}(s)}{a \cdot \pi R} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(j \frac{ml}{R}) \cdot \frac{\exp(-j \frac{mL_0}{R})}{\gamma - jm/R} \times \left(1 - \exp\left[-(\gamma - j \frac{m}{R})L_2\right]\right) \quad (45)$$

Чтобы перейти в сопутствующую систему координат, нужно сначала перейти во временную область путем обратного преобразования Лапласа и затем замены переменных  $l = z + \omega Rt$  ( $z$  – продольная координата в этой системе):

$$F(l, t) = \frac{e}{a \cdot \pi R} \cdot \sum_m \exp\left(j \frac{m(l-L_0)}{R}\right) \mathcal{L}^{-1}\left\{V_{kick}(s) \times \frac{1 - \exp[-(\gamma - j \frac{m}{R})L_2]}{\gamma - jm/R}\right\}.$$

Заменим теперь  $l$  на  $z + \omega_0 Rt$ :

$$F(z, t) = \frac{e}{a \cdot \pi R} \cdot \sum_m \exp(j \frac{mz}{R}) \cdot \exp(-j \frac{mL_0}{R}) \quad (46)$$

$$\times \mathcal{L}^{-1} \left\{ V_{kick}(s - jm\omega_0) \cdot \frac{1 - \exp[-(\gamma_m - j \frac{m}{R})L_2]}{\gamma_m - jm/R} \right\}.$$

Здесь

$$\gamma_m = \frac{s - jm\omega_0}{c}. \quad (47)$$

Заметим, что прямое и обратное преобразования Лапласа выполняются по быстрому времени, т.е. по времени бетатронных колебаний. Медленно изменяющаяся координата  $z$  при таких преобразованиях принимается постоянной.

После преобразования Лапласа можно получить

$$F(z, s) = \frac{e}{a \cdot \pi R} \cdot \sum_m \exp(j \frac{mz}{R}) \cdot \exp(-j \frac{mL_0}{R}) \quad (48)$$

$$\times V_{kick}(s - jm\omega_0) \cdot \frac{1 - \exp[-(\gamma_m - j \frac{m}{R})L_2]}{\gamma_m - jm/R}$$

Напряжение на входе кикера

$$V_{kick}(s) = K(s) \cdot e^{-s\tau} \cdot V_{pu}(s), \quad (49)$$

где  $V_{pu}(s)$  – напряжение на выходе пикапа,  $K(s)$  – коэффициент усиления усилителя,  $\tau$  – задержка сигнала в кабеле между пикапом и кикером.

Далее мы рассчитаем напряжение на выходе пикапа  $V_{pu}(s)$ . Для полосковой линии это напряжение равно [20]:

$$V_{pu}(s) = -\frac{Z_0}{2}(I_{1b} + e^{-\gamma L_1} \cdot I_{2b}), \quad (50)$$

где  $Z_0$  – характеристический импеданс полосковой линии,  $L_1$  – длина пикапа, а индуцированные токи равны

$$I_{1b}(s) = \int_{A_1} \vec{j}(x, y, l; s) \cdot \vec{e}_1(x, y, l) \cdot dx \cdot dy \cdot dl, \quad (51)$$

$$I_{2b}(s) = - \int_{A_2} \vec{j}(x, y, l; s) \cdot \vec{e}_2(x, y, l) \cdot dx \cdot dy \cdot dl. \quad (52)$$

Здесь  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  – поля на концах полосковой линии,  $\vec{j}$  – плотность тока пучка,  $A_1$  и  $A_2$  – концевые области полосковой линии.

Наведенный ток  $I_{1b}(t)$  во временном представлении равен

$$I_{1b}(t) = \int_{A_1} \vec{j}(x, y, z; t) \cdot \vec{e}_1(x, y, l) \cdot dx \cdot dy \cdot dl, \quad (53)$$

где  $z = l - \omega_0 R t$ .

Плотность тока  $\vec{j}(x, y, z; t)$  периодична по  $z$  и может быть разложена в ряд Фурье:

$$\vec{j}(x, y, z; t) = \sum_m \vec{j}_m(x, y; t) \cdot e^{jmz/R} = \sum_m \vec{j}_m(x, y; t) \cdot e^{jml/R} \cdot e^{-jm\omega_0 t}. \quad (54)$$

Здесь

$$\vec{j}_m(x, y; t) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} \vec{j}(x, y, z; t) \cdot e^{-jmz/R} dz.$$

Подставляя это выражение в (54), а затем в (53), получим:

$$I_{1b}(t) = \sum_m \frac{1}{2\pi R} \int_{A_1} \vec{j}(x, y, z; t) \cdot e^{-jmz/R} \cdot \vec{e}_1(x, y, l) \times e^{jml/R} dz \cdot e^{-jm\omega_0 t} dx dy dl dz. \quad (55)$$

Заметим, что

$$\int_{-\pi R}^{\pi R} \vec{e}_1(x, y, l) \cdot e^{jml/R} dl = 2\pi R \cdot \vec{e}_{1,-m}(x, y),$$

т.е. минус- $m$ -й Фурье-гармонике в разложении  $\vec{e}_1(x, y, l)$  вдоль периметра кольца.

Таким образом,

$$I_{1b}(t) = \sum_m \int_{A_1} \vec{j}(x, y, z; t) \cdot e^{-jmz/R} \cdot \vec{e}_{1,-m}(x, y) \cdot e^{-jm\omega_0 t} dx dy dz. \quad (56)$$

Аналогично,

$$I_{2b}(t) = \sum_m \int_{A_2} \vec{j}(x, y, z; t) \cdot e^{-jmz/R} \cdot \vec{e}_{2,-m}(x, y) \cdot e^{-jm\omega_0 t} dx dy dz. \quad (57)$$

Плотность тока может быть выражена через функцию распределения:

$$\vec{j}(x, y, z; t) = e \cdot N \int \vec{v} \cdot f(x, y, z; p_x, p_y, p_z; t) dp_x dp_y dp_z, \quad (58)$$

где  $N$  – число частиц в сгустке,  $p_x, p_y, p_z$  – импульс частицы,  $\vec{v}$  – вектор скорости с компонентами  $\frac{p_x}{m_s}, \frac{p_y}{m_s}, \frac{p_0}{m_s}$ .

Подставляя (58) в выражение (56) для  $I_{1b}$ , можно получить:

$$I_{1b}(t) = \sum_m \int e \cdot N \cdot \vec{v} \cdot f(x, y, z; p_x, p_y, p_z; t) \cdot e^{-jmz/R} \cdot \vec{e}_{1,-m}(x, y) \times e^{-jm\omega_0 t} \cdot dx dy dz dp_x dp_y dp_z.$$

Т.к. мы рассматриваем вертикальные колебания, то координата  $y$  может быть исключена, если представить зависимость от функции распределения в виде дельта-функции от  $y$ :

$$I_{1b}(t) = \sum_m \int e \cdot N \cdot \vec{v} \cdot f(x, z; p_x, p_z; t) \cdot e^{-jmz/R} \cdot \vec{e}_{1,-m}(x) \times e^{-jm\omega_0 t} \cdot dx dz dp_x dp_z. \quad (59)$$

Перейдем теперь к переменным действие-угол. Так как это преобразование каноническое, то его Якобиан равен единице:

$$I_{1b}(t) = \sum_m \int e \cdot N \cdot \vec{v} \cdot f(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; t) \cdot e^{-jmz/R} \cdot \vec{e}_{1,-m}(x) \times e^{-jm\omega_0 t} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z. \quad (60)$$

Здесь  $x$  и  $z$  должны быть выражены через переменные действие-угол при помощи (2) и (7).

Если пренебречь поперечными токами, то у скорости останется только продольная координата, которая равна скорости света для релятивистского пучка.

Нас интересуют когерентные колебания, поэтому в выражениях для тока должно быть оставлено только возмущение функции распределения:

$$I_{1b}(t) = \sum_m \int e \cdot N \cdot c \cdot \tilde{f}(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; t) \cdot e^{-jmz/R} \cdot e_{1z,-m}(x) \times e^{-jm\omega_0 t} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z. \quad (61)$$

Аналогично, для  $I_{2b}(t)$  можно получить

$$I_{2b}(t) = \sum_m \int e \cdot N \cdot c \cdot \tilde{f}(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; t) \cdot e^{-jmz/R} \cdot e_{2z,-m}(x) \times e^{-jm\omega_0 t} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z. \quad (62)$$

Подвергнем токи (61) и (62) преобразованию Лапласа:

$$I_{1b}(s) = \sum_m \int e \cdot N \cdot c \cdot F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s + jm\omega_0) \cdot e^{-jms/R} \quad (63)$$

$$\times e_{1z,-m}(x) \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z,$$

$$I_{2b}(s) = \sum_m \int e \cdot N \cdot c \cdot F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s + jm\omega_0) \cdot e^{-jms/R} \quad (64)$$

$$\times e_{2z,-m}(x) \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z.$$

Далее необходимо найти функции  $e_{1z,-m}(x)$  и  $e_{2z,-m}(x)$ . Мы должны начать с исходных функций  $e_{1z}(x, l)$  и  $e_{2z}(x, l)$ . В простейшем случае можно представить эти функции в виде  $\delta$ -функций:

$$e_{1z}(x, l) = V(x) \cdot \delta(l); \quad e_{2z}(x, l) = -V(x) \cdot \delta(l - L_1). \quad (65)$$

Нормировка должна быть такой, чтобы  $e_{1z}$  и  $e_{2z}$  были значениями полей при единичной разности потенциалов между пластинами полосковой линии. Тогда

$$e_{1z,m} = \frac{V(x)}{2\pi R}; \quad e_{2z,m} = -\frac{V(x)}{2\pi R} \cdot e^{-jmL_1/R}. \quad (65a)$$

В некоторой окрестности  $x = 0$  функция  $V(x)$  может быть приближенно представлена в виде

$$V(x) \cong V'(0) \cdot x.$$

Физический смысл  $V(x)$  в том, что это потенциал на расстоянии  $x$  от оси полосковой линии. Тогда  $V'(0)$  – это напряженность поперечного электрического поля на этой оси при единичной разности потенциалов между пластинами линии.

Подставляя результат в выражения для  $I_{1b}(s)$  и  $I_{2b}(s)$ , можно получить

$$I_{1b}(s) = \frac{eNc \cdot V'(0)}{2\pi R} \cdot \sum_m \int x \cdot F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s + jm\omega_0) \quad (66)$$

$$\times e^{-jms/R} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z,$$

$$I_{2b}(s) = -\frac{eNc \cdot V'(0)}{2\pi R} \cdot \sum_m e^{jmL_1/R} \int x \cdot F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s \quad (67)$$

$$+ jm\omega_0) \cdot e^{-jms/R} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z.$$

Теперь  $V_{pu}(s)$  может быть записан в следующем виде:

$$V_{pu}(s) = -\frac{Z_0 eNc \cdot V'(0)}{2 \cdot 2\pi R} \sum_n (1 - e^{-\gamma L_1} \cdot e^{jnL_1/R}) \times \int x \cdot F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s + jn\omega_0) \cdot e^{-jnz/R} \cdot d\varphi_x \cdot dJ_x d\psi_z dJ_z. \quad (68)$$

Заметим, что здесь индекс суммирования  $m$  заменен на  $n$  чтобы отличить его от индекса в сумме для  $F(z, t)$  (46).

Нас интересует

$$V_{kick}(s - jm\omega_0) = K(s - jm\omega_0) \cdot e^{-(s - jm\omega_0)\tau} \cdot V_{pu}(s - jm\omega_0).$$

Подставляя  $s - jm\omega_0$  вместо  $s$  в (68), получим

$$V_{pu}(s - jm\omega_0) = -\frac{Z_0 eNc \cdot V'(0)}{2 \cdot 2\pi R} \sum_n (1 - e^{-\gamma_m L_1} \cdot e^{jnL_1/R}) \times \int x \cdot F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s + jn\omega_0 - jm\omega_0) \cdot e^{-jnz/R} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z,$$

где опять  $\gamma_m = \frac{s - jm\omega_0}{c}$ .

Окончательно, получаем:

$$\begin{aligned} F(z, t) &= -\frac{e}{a \cdot \pi R} \cdot \sum_m \exp(j \frac{mz}{R}) \cdot \exp(-j \frac{mL_0}{R}) \\ &\times V_{kick}(s - jm\omega_0) \cdot \frac{1 - \exp[-(\gamma_m - j \frac{m}{R})L_2]}{\gamma_m - jm/R} \\ &= \frac{e}{a \cdot \pi R} \cdot \sum_m \exp(j \frac{mz}{R}) \cdot \exp(-j \frac{mL_0}{R}) \cdot \frac{1 - \exp[-(\gamma_m - j \frac{m}{R})L_2]}{\gamma_m - jm/R} \\ &\times K(s - jm\omega_0) \cdot e^{-(s - jm\omega_0)\tau} \cdot \frac{Z_0 eNc \cdot V'(0)}{2 \cdot 2\pi R} \sum_n (1 - e^{-\gamma_m L_1} \cdot e^{jnL_1/R}) \\ &\times \int x \cdot F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s + jn\omega_0 - jm\omega_0) \cdot e^{-jnz/R} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z. \end{aligned} \quad (69)$$

Вследствие присутствия  $s + jn\omega_0 - jm\omega_0$  после усреднения в (69) по быст-

рому времени ненулевыми остаются только члены с  $n = m$ :

$$\begin{aligned}
F(z, s) = & -\frac{Z_0}{2} \frac{eNc \cdot V'(0)}{2\pi R} \cdot \frac{e}{a \cdot \pi R} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(j \frac{mz}{R}) \exp(-j \frac{mL_0}{R}) \\
& \times K(s - jm\omega_0) \cdot e^{-(s-jm\omega_0)\tau} \\
& \times \frac{\left(1 - \exp[-(\gamma_m - j \frac{m}{R})L_1]\right) \cdot \left(1 - \exp[-(\gamma_m - j \frac{m}{R})L_2]\right)}{\gamma_m - jm/R} \\
& \times \int x \cdot F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s) \cdot e^{-jmz/R} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z.
\end{aligned} \tag{70}$$

Сравнивая (70) с (10), можно видеть, что эти выражения совпадают, если обозначить как поперечный импеданс обратной связи следующее выражение:

$$\begin{aligned}
Z_F(s - jm\omega_0) = & \frac{Z_0 \cdot V'(0)}{a} \cdot K(s - jm\omega_0) \cdot e^{-j \frac{mL_0}{R}} \\
& \times e^{-(s-jm\omega_0)\tau} \cdot \frac{\left(1 - \exp[-(\gamma_m - j \frac{m}{R})L_1]\right) \cdot \left(1 - \exp[-(\gamma_m - j \frac{m}{R})L_2]\right)}{\gamma_m - jm/R}
\end{aligned} \tag{71}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
F(z, s) = & \frac{e^2 Nc}{(2\pi R)^2} \cdot \sum_m e^{jmz/R} \cdot Z_F(s - jm\omega_0) \cdot \int x \\
& \times F(\varphi_x, J_x; \psi_z, J_z; s) \cdot e^{-jmz/R} \cdot d\varphi_x dJ_x d\psi_z dJ_z.
\end{aligned} \tag{72}$$

Это выражение сходно с (10). Поэтому если последовать той же процедуре, что и в предыдущей части, система уравнений может быть получена аналогично (34)

$$\begin{aligned}
& \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{+\infty} (F_{n',k'}^{n,k} + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,k'}) \cdot a_{k'}^{n'} + j\lambda \cdot a_k^n = 0; \\
& n = -\infty, \dots, +\infty; \quad k = 0, \dots, +\infty
\end{aligned} \tag{73}$$



где

$$\begin{aligned}
F_{n',k'}^{n,k} &= \frac{\omega_0 \cdot I_0 \cdot \beta_{av}}{4\pi\gamma U_0 \Omega_z} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_F[-j(m-\nu)\omega_0] \cdot I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m) \\
&= \frac{\omega_0 \cdot I_0 \cdot \beta_{av}}{4\pi\gamma U_0 \Omega_z} \cdot \frac{Z_0 \cdot V'(0)}{a} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} K[-j(m-\nu)\omega_0] \cdot e^{-jmL_0/R} \\
&\quad \times e^{j(m-\nu)\omega_0\tau} \cdot \frac{\left(1 - \exp[-(\gamma_m - j\frac{m}{R})L_1]\right) \cdot \left(1 - \exp[-(\gamma_m - j\frac{m}{R})L_2]\right)}{\gamma_m - jm/R} \\
&\quad \times I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m), \quad \gamma_m = -j\frac{m-\nu}{R}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Заметим, что здесь  $\nu$  – не дробная часть, а вся исходная  $\nu$ .

Проанализируем выражение (74) для  $F_{n',k'}^{n,k}$ . В  $F_{n',k'}^{n,k}$  присутствуют быстроосциллирующие члены под символом суммы, а именно экспоненты с индексом  $m$  в показателе:

$$e^{jm\omega_0\tau} e^{-jmL_0/R} = e^{jm(\omega_0\tau - L_0/R)}.$$

Но эти экспоненты исчезают, если удовлетворяется соотношение:

$$\omega_0\tau - L_0/R = 0. \tag{75}$$

Это соотношение определяет необходимую временную задержку в кабеле обратной связи:

$$\tau = \frac{L_0}{\omega_0 R} = \frac{L_0}{c}. \tag{76}$$

Эта задержка, как и надо было ожидать, равна времени пролета частицы от пикапа к кикеру. При этих условиях сгусток и сигнал обратной связи приходят к кикеру одновременно.

Строго говоря, (75) – это условие одновременного прибытия частицы и сигнала обратной связи ко входу кикера (см. Рис.2). Однако для эффективного взаимодействия необходимо, чтобы сигнал обратной связи пришел немного раньше, чтобы он успел заполнить кикер полностью до того как в него влетит частица. Это означает, что вместо (76) правильное выражение имеет вид:

$$\tau = \frac{L_0 - 2L_2}{c},$$

Характер обратной связи (реактивная или резистивная) определяется остающейся в  $F_{n',k'}^{n,k}$  экспонентой:

$$e^{-j\nu L_0/R},$$

другими словами, расстоянием между пикапом и кикером. Но это расстояние не может изменяться в процессе работы. Способ контроля характера обратной связи, как известно, – это использование двух пикапов, отделенных друг от друга четвертью длины бетатронной волны.

Сигналы с пикапов должны быть суммированы (с некоторыми регулируемые калибровочными коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$ )

$$e^{-j\nu L_0/R} \cdot (k_1 + jk_2). \quad (77)$$

Задание коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  позволяет получить реактивную, резистивную или некоторую смешанную обратную связь. Для простоты мы будем в дальнейшем считать, что  $\sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 1$ .

Объединение уравнений (34) и (73) в уравнения, описывающие поля как окружающей среды, так и обратной связи дает

$$\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{+\infty} (N_{n',k'}^{n,k} + F_{n',k'}^{n,k} + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,k'}) \cdot a_{k'}^{n'} + j\lambda \cdot a_k^n = 0; \quad (78)$$

$$n = -\infty, \dots, +\infty; \quad k = 0, \dots, +\infty$$

Заметим, что вследствие различных причин сигнал пикапа пропорционален координате центра масс сгустка и не зависит от его высших моментов. Поэтому ненулевыми остаются только члены  $F_{n',k'}^{n,k}$  с  $n = 0$  и  $n' = 0$ . Система уравнений принимает вид:

$$\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{+\infty} (N_{n',k'}^{n,k} + F_{n',k'}^{n,k} \cdot \delta_{n,0} \cdot \delta_{n',0} + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,n'}) \cdot a_{k'}^{n'} + j\lambda \cdot a_k^n = 0; \quad (79)$$

$$n = -\infty, \dots, +\infty; \quad k = 0, \dots, +\infty.$$

В (74) удобно выразить средний ток пучка  $I_0$  через безразмерный ток  $I$  и характеристический ток  $I_b$  как это было сделано во втором разделе препринта:

$$I_0 = I_b \cdot I,$$

где  $I_b$  дан в формуле (40a). Тогда

$$F_{n',k'}^{n,k} = I \cdot B_{n',k'}^{n,k},$$

и

$$B_{n',k'}^{n,k} = \frac{\sigma_z}{R} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_T} \cdot Z_F[-j(m - \nu)\omega_0] \cdot I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m), \quad (80)$$

где  $I_{n,k}^m(a_m)$  дается выражением (29).

Система уравнений (79) теперь принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{+\infty} \left[ I \cdot (A_{n',k'}^{n,k} + B_{n',k'}^{n,k} \cdot \delta_{n,0} \cdot \delta_{n',0}) + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,k'} \right] \cdot a_k^{n'} \\ + j\lambda \cdot a_k^n = 0; \\ n = -\infty, \dots, +\infty; \quad k = 0, \dots, +\infty \end{aligned} \quad (81)$$

Заметим, что в вычислениях  $Z_F$  в (80) должны быть приняты во внимание соотношения (75) и (76).

## 4 Анализ устойчивости с обратной связью

Анализ устойчивости теперь сведен к задаче на собственные значения системы алгебраических уравнений (81). Эта система может быть записана в форме

$$C \cdot \hat{a} = -j \cdot \lambda \cdot \hat{a}, \quad (82)$$

где  $C$  – матрица с элементами

$$C_{n',k'}^{n,k} = I \cdot (A_{n',k'}^{n,k} + B_{n',k'}^{n,k} \cdot \delta_{n,0} \cdot \delta_{n',0}) + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,k'} \quad (83)$$

и  $\hat{a}$  – матрица с неизвестными элементами  $a_k^n$ .

Напомним, что  $a_k^n$  – коэффициенты в разложении решения уравнения Власова (см. (11) и (23)). Здесь  $n$  – азимутальные индексы, а  $k$  – радиальные. Каждая из матриц  $(a_k^n)_i$  определяет  $i$ -е колебательное решение.

Нетривиальные решения (82) существуют только для  $(-j \cdot \lambda)$ , являющихся собственными значениями  $c_i$  матрицы  $C$ . Частотные сдвиги связаны с собственными значениями  $c_i$  формулой

$$\lambda_i = \frac{\Omega_i - \Omega_0}{\Omega_z} = j \cdot c_i, \quad (84)$$

$c_i$  –  $i$ -е собственное значение  $C$ , соответствующее решению  $(a_k^n)_i$ . Устойчивость определяется знаком мнимой части  $\lambda_i$ : положительный знак соответствует устойчивому решению и, наоборот, отрицательный знак соответствует неустойчивому решению.

Матрица  $C$  бесконечна по всем индексам:  $n, n' = -\infty, \dots, +\infty$  и  $k, k' = 0, \dots, +\infty$ . Прежде чем искать ее собственные значения, нужно ее ограничить. Если ограничить индексы значениями  $n, n' = -N, \dots, +N$  и  $k, k' = 0, \dots, K$ , то остаточная матрица  $C$  будет порядка  $(2N+1) \cdot (K+1) \times (2N+1) \cdot (K+1)$  и обладать  $(2N+1) \cdot (K+1)$  собственными значениями. Необходимое условие устойчивости – это положительность мнимой части всех частотных сдвигов  $\lambda_i$ . Ответ на вопрос, являются ли остальные решения исходной системы устойчивыми, может быть получен "экспериментально" путем увеличения порядка урезанной матрицы  $C$  и вычисления ее дополнительных собственных значений. Устойчивость низших мод обычно более важна, т.к. они, как правило, обладают более низкими порогами.

Элементы матриц  $A_{n',k'}^{n,k}$  и  $B_{n',k'}^{n,k}$  могут быть вычислены при помощи формул (38), (40), (80) и (29). Обратите внимание, что хроматизм входит в эти формулы через

$$y = \kappa \cdot \frac{\sigma_z}{R} \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{\nu'}{\alpha} \quad (\nu' = p_0 \cdot \frac{\partial \nu}{\partial p_z}).$$

Отдельный вопрос о частотной характеристике цепи обратной связи. Она определяется в основном коэффициентом усиления усилителя  $K(s)$  (см. (49)). Чтобы сумма по  $m$  в (74) не расходилась, частотный диапазон  $K(j\omega)$  должен быть ограничен. Простейший способ добиться этого – ограничить частотный диапазон при помощи интегрирующей цепочки с частотной характеристикой  $1/(1 + j\omega\tau_F)$ . Здесь  $\tau_F$  должно быть в несколько раз больше, чем время присутствия сигнала в полосковой линии пикапа  $2L_1/c$ . При этих условиях сумма по  $m$  в (74) сходится, и  $B_{n',k'}$  могут быть рассчитаны.

Заметим, что если лишь  $B_{0,0}^{0,0} \neq 0$ , то вклад обратной связи в частотный сдвиг (выраженный в единицах синхротронной частоты) равен  $j \cdot I \cdot B_{0,0}^{0,0}$ . Для резистивной обратной связи это декремент, введенный при помощи ОС в движение жесткого ступка с током пучка  $I$ . Таким образом, это значение может быть использовано для параметризации величины обратной связи. Остальные элементы с  $k \neq 0, k' \neq 0$  должны быть нормированы на  $B_{0,0}^{0,0}$ . Для простоты в дальнейшем мы обозначим  $B_{0,0}^{0,0} = f$ . Таким образом,  $f$  – это декремент жесткого ступка с единичным током  $I$ .

Итак, мы пришли к системе алгебраических уравнений (82) с матрицей  $C$  в форме

$$C_{n',k'}^{n,k} = I \cdot (A_{n',k'}^{n,k} + f \cdot B_{n',k'}^{n,k} \cdot \delta_{n,0} \cdot \delta_{n',0}) + jn \cdot \delta_{n,n'} \cdot \delta_{k,k'}, \quad (85)$$

где

$$B_{n',k'}^{n,k} = j \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_F \left[ -j(m-\nu)\omega_0 \right] \cdot I_{n',k'}^m(a_m) \cdot I_{n,k}^m(a_m)}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_F \left[ -j(m-\nu)\omega_0 \right] \cdot I_{0,0}^m(a_m) \cdot I_{0,0}^m(a_m)} \quad (86)$$

и  $f$  – данный параметр обратной связи.

В (86) перед знаком дроби поставлена мнимая единица. Это сделано для того чтобы обратная связь была чисто резистивной когда параметр  $f$  действителен.

В (86) импеданс обратной связи равен

$$Z_F \left[ -j(m-\nu)\omega_0 \right] = \frac{Z_0 \cdot V'(0)}{a} \cdot K \left[ -j(m-\nu)\omega_0 \right] \times e^{-j\nu\omega_0\tau} \cdot \frac{\left(1 - \exp \left[ -(\gamma_m - j\frac{m}{R})L_1 \right] \right) \cdot \left(1 - \exp \left[ -(\gamma_m - j\frac{m}{R})L_2 \right] \right)}{\gamma_m - jm/R}. \quad (87)$$

Если частотный диапазон ограничен при помощи интегрирующей цепочки (как в простейшем случае), то коэффициент усиления усилителя может быть записан в форме

$$K \left[ -j(m-\nu)\omega_0 \right] = \frac{K_0}{1 - j(m-\nu)\omega_0 \cdot \tau_F}.$$

Дальнейший анализ показывает, что устойчивость всех мод может быть гарантирована при наличии отрицательного хроматизма. В этом случае, как известно, нулевая мода неустойчива, а остальные моды, наоборот, устойчивы. Вводя резистивную обратную связь, мы можем добиться устойчивости нулевой моды, не затрагивая при этом высшие моды. В анализе ниже мы ограничимся, для простоты, пятью азимутальными модами и двумя радиальными, т.е. всего будет рассматриваться десять мод.

Возьмем для иллюстрации данные кольца ВЭПП-4 при инъекции:  $E = 1.8\text{ГэВ}$ ,  $R = 57\text{м}$ ,  $f_0 = 8.377 \cdot 10^5\text{Гц}$ ,  $\nu_s = 0.025$ ,  $\sigma_z = 7.5 \cdot 10^{-2}\text{м}$ ,  $\alpha = 0.01645$ ,  $\nu_x = 7.62$ . Импеданс широкополосного резонатора кольца ВЭПП-4 был измерен ранее [21] и характеризуется параметрами:  $Q = 1.0$ ,  $f_c = 530\text{МГц}$ ,  $R_T = 2.5 \cdot 10^6\text{Ом/м}$ ,  $\beta_{av} = 15\text{м}$ .

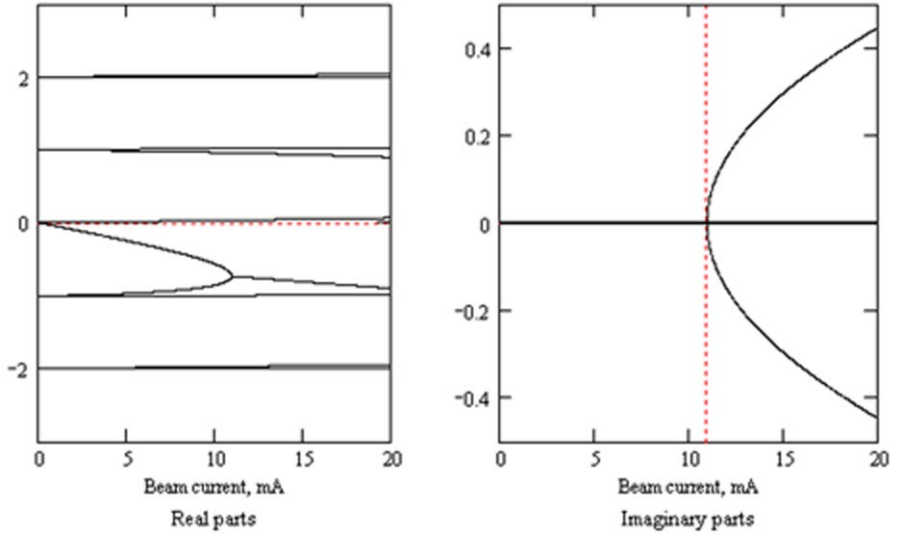


Рис. 3: Зависимости действительной и мнимой частей  $\lambda$  от тока  $I_0$  с нулевым хроматизмом и при отсутствии обратной связи для ВЭПП-4.

Для этих данных расчет дает

$$p = \frac{\sigma_z}{R} \cdot \frac{f_c}{f_0} = 0.795$$

На рис. 3 – 5 помещены графики зависимости действительной и мнимой частей  $\lambda_i$  от тока  $I_0$  при  $p = 0.795$  и  $Q_c = 1.0$  и различных значениях хроматизма и параметра обратной связи  $f$ .

На рис.3 представлены зависимости  $Re \lambda_i$  и  $Im \lambda_i$  от  $I_0$  при нулевом хроматизме и отсутствии обратной связи ( $f = 0$ ). Это соответствует НП-СМ с порогом по току  $I_0$  для нижней моды, равным приблизительно 11 мА. Этот расчетный порог находится в хорошем согласии с реально измеренным порогом НПСМ на ВЭПП-4.

На рис.4 дан график зависимости  $Re \lambda_i$  и  $Im \lambda_i$  от  $I_0$  при наличии обратной связи с параметром  $f = 2.5$  и при отсутствии хроматизма. Видно, что нулевая мода устойчива, но высшие моды неустойчивы без порога. Последний появляется только при наличии радиационного затухания или разброса бетатронных частот.

И, окончательно, на рис.5 представлен график зависимости  $Re \lambda_i$

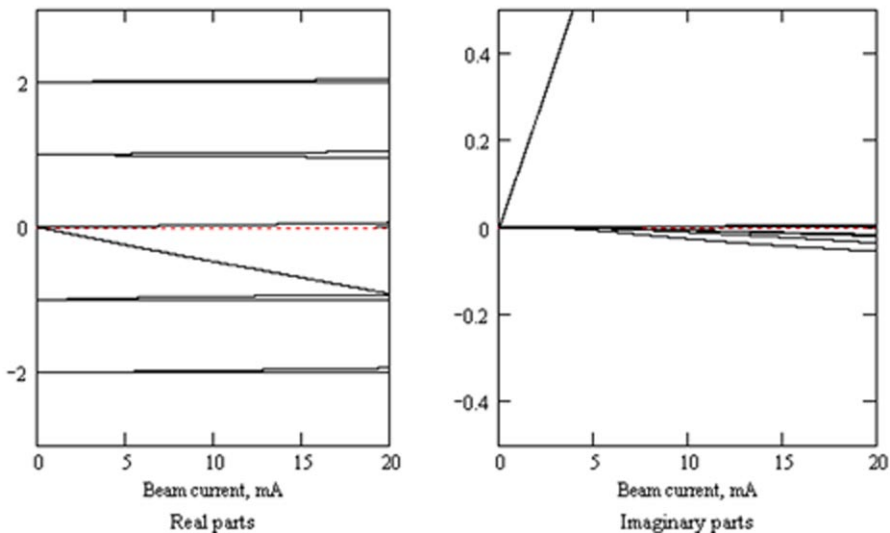


Рис. 4: График зависимости действительной и мнимой частей  $\lambda$  от тока  $I_0$  с нулевым хроматизмом и обратной связью с параметром  $f$ , равным 2.5, для ВЭПП-4.

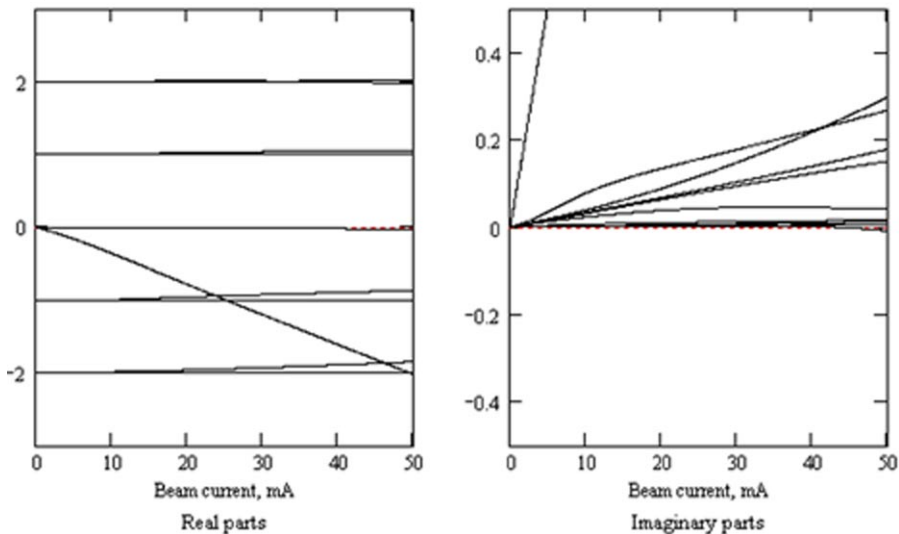


Рис. 5: График зависимости действительной и мнимой частей  $\lambda$  от тока  $I_0$  с хроматизмом  $\nu' = -7.5$  и обратной связью с параметром  $f$ , равным 2.5, для ВЭПП-4.

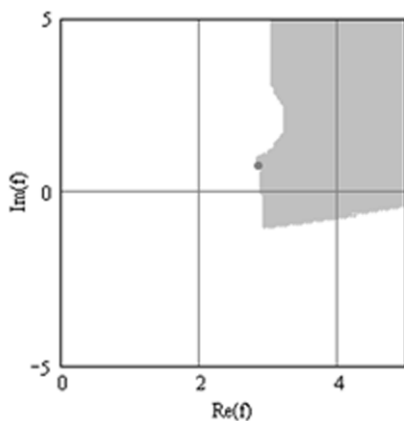


Рис. 6: Область допустимых значений параметра обратной связи для ВЭПП-4.

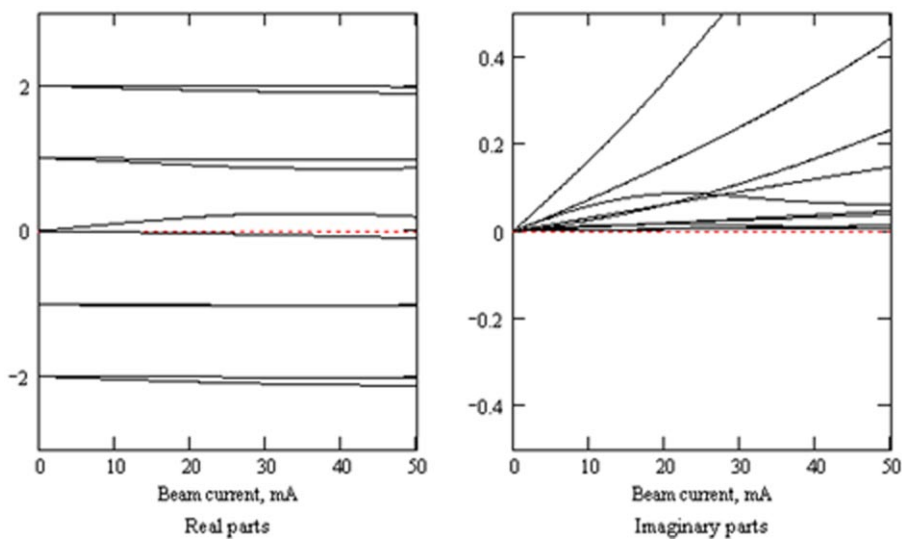


Рис. 7: График зависимости действительной и мнимой частей  $\lambda$  от тока  $I_0$  с хроматизмом  $\nu' = +25$  и при отсутствии обратной связи для ВЭПП-4.



и  $Im \lambda_i$  от  $I_0$  при наличии отрицательного хроматизма  $y = -0.6$  ( $\nu' = -7.5$ ) и с резистивной обратной связью  $f = 2.5$ . Здесь уже все моды устойчивы до нового порога, который в 3-4 раза выше, чем порог НПСМ без хроматизма и обратной связи.

Для надежной работы обратной связи важно, чтобы допуски на ее фазу и амплитуду были достаточно большими. На рис.6 представлена область значений параметра обратной связи, в которой порог устойчивости по току составляет величину не менее 95% от максимального порога для данного хроматизма. Как видно из рис.6, параметр обратной связи может изменяться в достаточно широких пределах как по фазе, так и по амплитуде, и при этом пучок будет оставаться устойчивым.

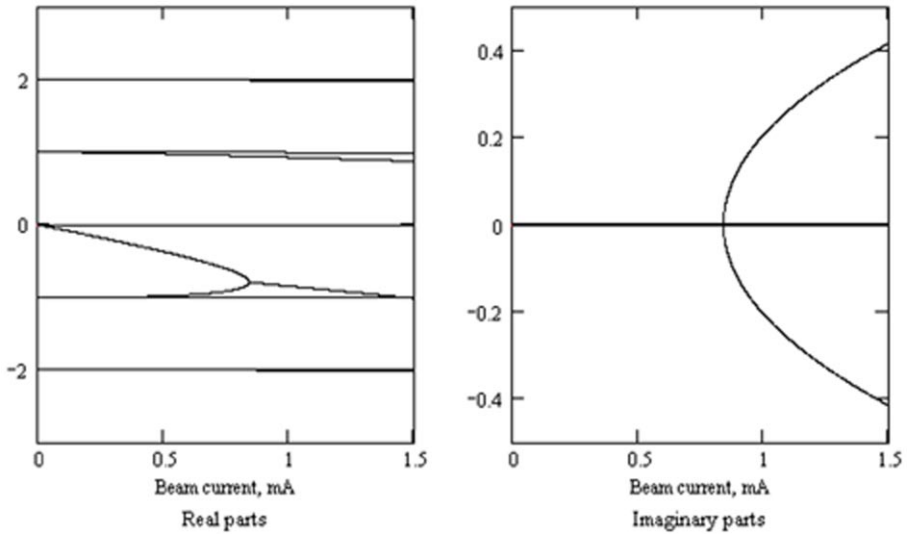


Рис. 8: График зависимости действительной и мнимой частей  $\lambda$  от тока  $I_0$  с нулевым хроматизмом и при отсутствии обратной связи для LEP.

Любопытно, что при очень большом положительном хроматизме в кольце НПСМ может быть подавлена и без обратной связи. Это достижимо при хроматической фазе  $(\frac{\nu' \sigma_z}{\alpha R})$  порядка 1.5 - 2.0 (см. рис.7). Для ВЭПП-4 это соответствует хроматизму порядка  $\nu' = 20 - 25$ . К сожалению, такой высокий хроматизм недостижим на этом кольце, в частности, для высоких энергий.

Было бы поучительно обсудить также результаты аналогичных вычислений для данных бывшего накопителя LEP. Эти данные относятся к оптике 90/60, которая использовалась в 1995-96 гг. Для этой оптики были характерны следующие параметры (при инжекции) [22]:  $E = 22$  ГэВ,  $R = 4245$  м,  $f_0 = 11.245$  кГц,  $Q_s = 0.108$ ,  $Q_x = 76.194$ ,  $\sigma_z = 1.834$  см,  $\alpha = 1.855 \cdot 10^{-4}$ . Информация о поперечном импедансе кольца, взята из [23]. Он может быть представлен в виде суммы импедансов двух широкополосных резонаторов аналогичных (39) с параметрами:  $Q_1 = 1$ ,  $p_1 = 0.536$ ,  $R_{T1} = 1.51 \cdot 10^6$  Ом/м,  $Q_2 = 1$ ,  $p_2 = 3.22$ ,  $R_{T2} = 0.322 \cdot 10^6$  Ом/м. Бэта-функции в местах этих резонаторов также были получены из [23]:  $\beta_1 = \beta_2 \cong 40.6$  м.

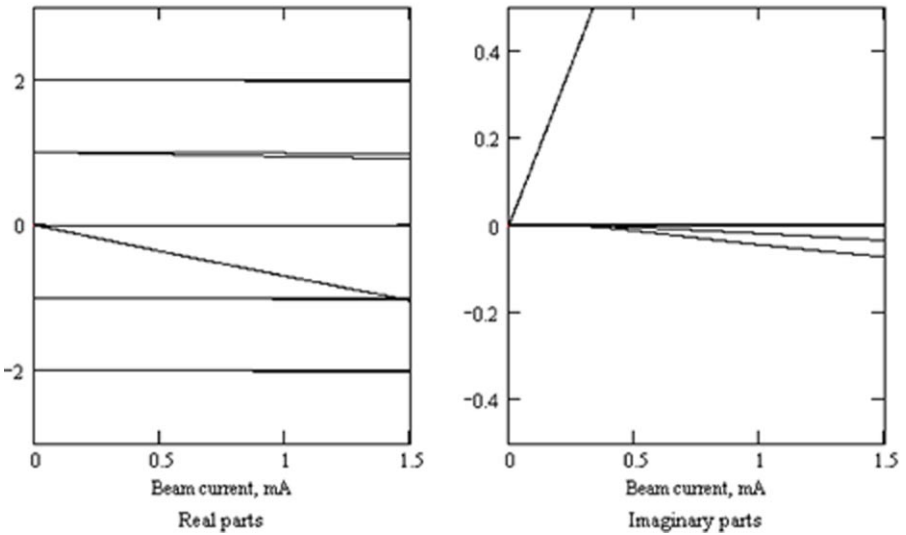


Рис. 9: График зависимости действительной и мнимой частей  $\lambda$  от тока  $I_0$  с нулевым хроматизмом и обратной связью с параметром  $f$ , равным 2, для LEP.

На рис.8 показан график зависимости действительной и мнимой частей частотного сдвига от тока пучка при нулевом хроматизме и отсутствии обратной связи. Пороговый ток НПСМ оказывается при этом примерно равным 0.84 мА. На рис.9 этот график показан для резистивной обратной связи с параметром  $f = 2.0$ . Здесь нулевая мода устойчива, но высшие моды неустойчивы с порогом ниже 0.5 мА.

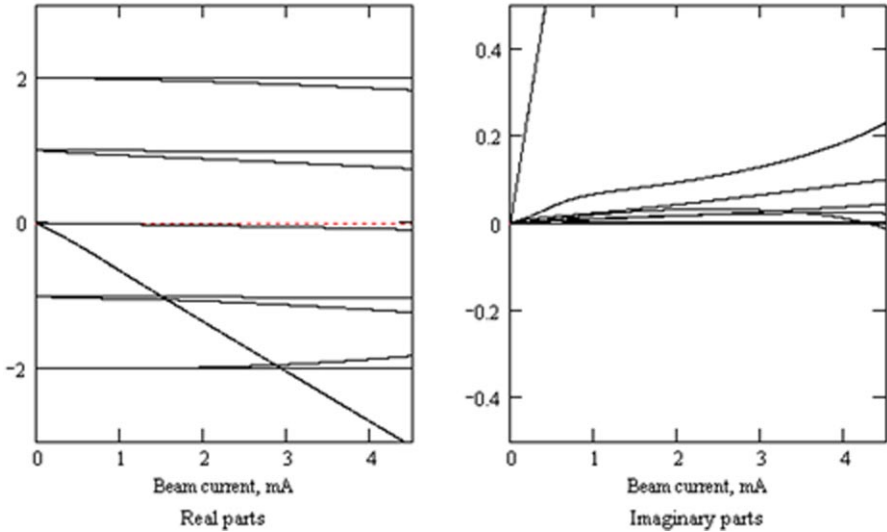


Рис. 10: График зависимости действительной и мнимой частей  $\lambda$  от тока  $I_0$  с хроматизмом, равным  $\nu' = -22$  и обратной связью с параметром  $f$ , равным 2, для LEP.

А на рис.10 дан аналогичный график для резистивной обратной связи ( $f = 2.0$ ) и отрицательного хроматизма с хроматической фазой порядка  $-0.5$ , что для LEP соответствует хроматизму  $\nu' = -22$ . Это не так много, если принять во внимание, что естественный (нескорректированный) хроматизм на LEP составлял величину порядка  $-200$  [24].

Как видно из рис.10, совместное применение отрицательного хроматизма и резистивной обратной связи позволяет увеличить порог неустойчивости по току для LEP до величину  $\sim 4$  мА, т.е., примерно в 4.8 раз.

## 5 Расчет параметров оборудования системы обратной связи коллайдера ВЭПП-4

Цель этой главы – рассчитать требования, предъявляемые к коэффициенту усиления и мощности усилителя в цепи обратной связи коллайдера ВЭПП-4. Ограничения на коэффициент усиления накладываются условием устойчивости пучка, а на мощность – требованием к динамическому диапазону системы обратной связи.

Для определенности мы будем рассматривать в этой главе уже ранее обсуждавшуюся схему обратной связи: пикап нагружен на  $RC$ -цепочку с постоянной времени  $\tau_F$ , сигнал с цепочки после необходимой задержки подается на усилитель, нагруженный на кикер. Учитывая, что (см. (80), (85), (86))

$$f = B_{0,0}^{0,0} = \frac{\sigma_z}{R \cdot R_T} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_F[-j(m-\nu)\omega_0] \cdot (I_{0,0}^m(a_m))^2, \quad (88)$$

где  $Z_F[-j(m-\nu)\omega_0]$  дается выражением (87),  $\sigma_z$  – продольный размер пучка,  $R$  – радиус коллайдера,  $R_T$  – шунтовое сопротивление резонатора, являющегося источником импеданса, можно записать для коэффициента усиления  $K_0$ :

$$K_0 = \frac{f}{\Sigma}, \quad (89)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma = & \sum_m \frac{Z_0 \cdot V'(0)\sigma_z}{a \cdot R \cdot R_T \cdot (1 - j(m-\nu)\omega_0\tau_F)} \cdot e^{-j\nu\omega_0\tau - j \cdot 2m \frac{L_2}{R}} \\ & \times \frac{(1 - \exp[-(\gamma_m - j\frac{m}{R})L_1]) \cdot (1 - \exp[-(\gamma_m - j\frac{m}{R})L_2])}{\gamma_m - j\frac{m}{R}} \cdot (I_{0,0}^m(a_m))^2. \end{aligned} \quad (90)$$

Заметим, что  $f$  и  $\Sigma$  имеют одну и ту же фазу, поэтому  $K_0$  – всегда вещественная величина.

Мощность усилителя можно вычислить по формуле:

$$P = \frac{V_{kick}^2}{Z_{kick}}. \quad (91)$$

Здесь  $V_{kick}$  – максимальное напряжение на кикере,  $Z_{kick}$  – импеданс кикера. Очевидно,  $V_{kick} = V_F \cdot K_0$ , где  $V_F$  – напряжение на выходе  $RC$ -цепочки. Напряжение  $V_F$  зависит от напряжения на выходе пикапа  $V_{pu}$ .

Для расчета  $V_{pu}$  воспользуемся выражением (50):

$$V_{pu}(s) = -\frac{Z_0}{2}(I_{1b} + e^{-\gamma L_1} \cdot I_{2b}),$$

где возбужденные токи  $I_{1b,2b}$  могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} I_{1b}(t) &= \int_{A_1} \vec{j}(x, y, z; t) \cdot \vec{e}_1(x, y, l) \cdot dx \cdot dy \cdot dl, \\ I_{2b}(t) &= - \int_{A_2} \vec{j}(x, y, z; t) \cdot \vec{e}_2(x, y, l) \cdot dx \cdot dy \cdot dl. \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее,  $\vec{e}_{1,2}$  – поле единичного потенциала на соответствующем конце полосковой линии,  $\vec{j}$  – плотность тока пучка,  $A_{1,2}$  – концевые области полосковой линии.

Представим, как это было сделано в (65),  $e_{1z}$  в виде  $\delta$ - функции:

$$e_{1z}(x, y, l) = V(x)\delta(l).$$

Если пренебречь вертикальным движением пучка внутри пикапа, то  $\vec{j} \cdot \vec{e}_1 = j_z \cdot e_{1z}$ . Нетрудно видеть, что для достаточно длинной и широкой линии  $V(x) = \frac{x}{a}$ , где  $a$  – расстояние между пластинами линии. Также легко показать, что для точечного тока

$$j_z(x, y, z; t) = 2\pi R I_{av} \cdot \delta(x - x_0)\delta(y)\delta(z - z_0), \quad (92)$$

где  $I_{av}$  – средний ток в накопителе,  $x_0(t)$ ,  $z_0(t)$  – координаты пучка.

Подставляя (65) и (92) в (53), можно получить ток, возбуждаемый пучком на концевой области пикапа:

$$I_{1b} = 2\pi R I_{av} \frac{x_0}{a} \delta(l_0(t)). \quad (93)$$

Здесь  $l_0(t)$  – продольная координата пучка в лабораторной системе координат. Заметим, что  $l_0(t) = \omega_0 R t + \Delta l(t)$ , где  $\Delta l(t)$  – медленная функция времени. За время оборота  $\Delta l(t)$  остается практически неизменной, поэтому можно положить  $\Delta l(t) \simeq \text{const}$ . Тогда без ограничения общности можно считать  $\Delta l(t) = 0$ , т.к. этого можно добиться простым изменением начала координат. Поэтому можно записать:

$$I_{1b}(t) = 2\pi R I_{av} \frac{x_0(t)}{a} \delta(\omega_0 R t). \quad (94)$$

Согласно (50),

$$V_{pu1}(t) = 2\pi R I_{av} \frac{x_0(t)}{a} \delta(\omega_0 R t) \frac{Z_0}{2}, \quad (95)$$

где  $Z_0$  – импеданс пикапа.

Очевидно, напряжение на кикере максимально при максимальном отклонении пучка от положения равновесия, т.е., при инжекции. Обозначим

$$x_0 = \max_t(x_0(t)).$$

$x_0$  определяется ошибкой инжекции. Напряжение, соответствующее максимальному отклонению пучка от равновесной орбиты, определяется выражением:

$$V_{pmax}(t) = 2\pi R I_{av} \frac{x_0}{a} \delta(\omega_0 R t) \frac{Z_0}{2}. \quad (96)$$

Подадим теперь это напряжение на  $RC$ -цепочку с характерным временем  $\tau_F$ . Пусть сопротивление резистора  $RC$ -цепочки значительно превышает импеданс пикапа:  $R_F \gg Z_0$ . Тогда за время пролета пучка мимо концевой области пикапа на конденсаторе цепочки  $C_F$  накопится заряд  $Q_F = \frac{1}{R_F} \int V_{pmax}(t) dt = \pi \frac{I_{av} Z_0}{\omega_0} \frac{x_0}{a} \frac{1}{R_F}$ . После пролета пучка напряжение на конденсаторе будет изменяться по закону  $V_F(t) = \frac{Q_F}{c} e^{-\frac{t}{\tau_F}} = \pi \frac{I_{av} Z_0}{\omega_0} \frac{x_0}{a} \frac{1}{\tau_F} e^{-\frac{t}{\tau_F}}$ .

Если сигнал снимать с первого конца пикапа, то в момент пролета пучка можно будет наблюдать два  $\delta$ -образных выброса величины, определяемой выражением (96), разного знака, разнесенных по времени друг от друга на  $\delta t = 2\frac{L_1}{c}$ .

Тогда если  $t_0$  – момент пролета пучка около первого конца пикапа, то

$$V_F(t) = \pi \frac{I_{av} Z_0}{\omega_0} \frac{x_0}{a} \frac{1}{\tau_F} \times \left( e^{-\frac{t-t_0}{\tau_{RC}}} \cdot H(t-t_0) - e^{-\frac{t-t_0-2\frac{L_1}{c}}{\tau_{RC}}} \cdot H(t-t_0-2\frac{L_1}{c}) \right), \quad (97)$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда.

Проиллюстрируем эти результаты на примере параметров коллайдера, пучка и ориентировочных параметров системы обратной связи, приведенных в таблице 1. Для этих параметров результат численных расчетов зависимости минимума модуля параметра обратной связи от хроматизма для ВЭПП-4 с пучком 40 мА показан на рис.11. Зависимость  $\Sigma(\nu')$  для параметров из таблицы 1 показана на рис. 12. Зависимость соответствующего пикового напряжения на кикере от хроматизма показана на рис. 13.

Из рис.13 видно, что минимальное напряжение на кикера, которое должен обеспечивать усилитель, достигается при хроматизме примерно -9.5, и равно 205 В. Требуемая мощность усилителя при работе на кикер с импедансом 50 Ом при этом равна 840 Вт. Заметим, что т.к. декремент,

Таблица 1: Ориентировочные параметры системы обратной связи

$R$	57 м	Радиус коллайдера
$\omega_0$	$5.15 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$	Угловая частота обращения пучка
$\sigma_z$	7.5 мм	Продольный размер пучка
$R_T$	$2.5 \cdot 10^6 \text{ Ом/м}$	Шунтовое сопротивление
$I_{av}$	40 мА	Средний ток сгустка
$x_0$	0.5 мм	Поперечная ошибка инжекции
$a$	30 мм	Расстояние между пластинами пикапа
$Z_0$	50 $\Omega$	Импеданс пикапа
$Z_{kick}$	50 $\Omega$	Импеданс кикера
$L_1$	8 м	Длина пикапа
$L_2$	8 м	Длина кикера
$\tau_F$	$1.3 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ ( $=20 \cdot \frac{2L_1}{c}$ )	Характерное время $RC$ -цепочки

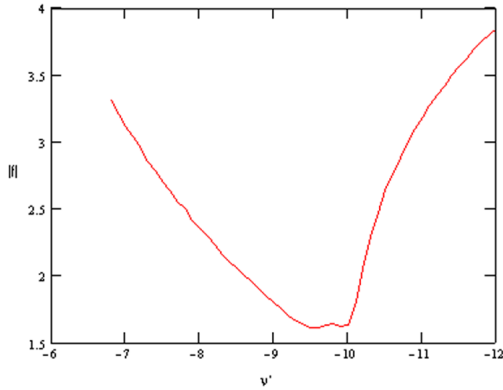


Рис. 11: Зависимость минимума модуля параметра обратной связи от хроматизма для ВЭПП-4 с пучком 40 мА.

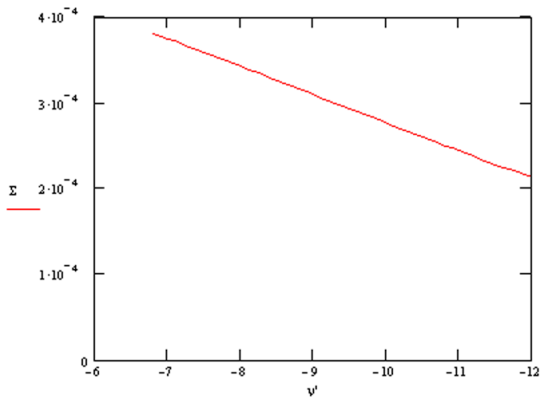


Рис. 12: Зависимость  $\Sigma(\nu')$ .

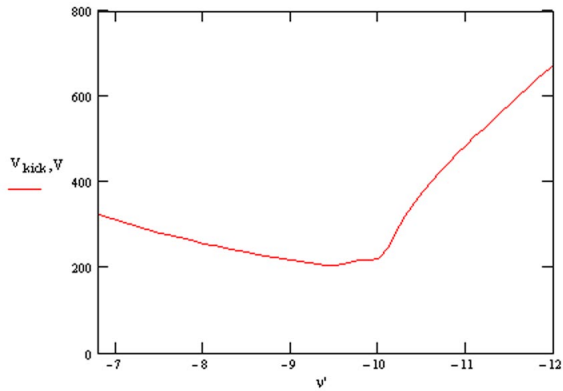


Рис. 13: Зависимость максимального пикового напряжения на кикере, требуемого для устойчивости пучка со средним током 40 мА и максимальным отклонением от положения равновесия 0.5 мм.



вносимый в поперечные колебания пучка, должен быть примерно прямо пропорционален току пучка, то зависимость требуемой мощности от тока является квадратичной.

Заметим, что был рассмотрен также альтернативный способ расчета параметров усилителя, основанный на моделировании элементарных ударов системы обратной связи по пучку. Сила ударов в этом методе подбирается такой, чтобы центру масс пучка сообщался заранее заданный декремент. Декремент при этом выбирается равным инкременту центра масс пучка при включенном отрицательном хроматизме и выключенной обратной связи. Расчеты этим методом дают с хорошей точностью те же численные результаты, что и способ, подробно описанный выше.

## 6 Заключение

В работе было проведено теоретическое исследование неустойчивости поперечных связанных мод при наличии хроматизма, и разработана теория обратной связи. На примерах ВЭПП-4 и LEP было продемонстрировано, что сочетание резистивной обратной связи и отрицательного хроматизма может привести к многократному увеличению порогового тока без слишком жестких требований к фазу и глубине обратной связи. Были проведены также расчеты параметров оборудования коллайдера ВЭПП-4, требуемых для подавления указанной неустойчивости.

Мы выражаем благодарность А.М. Батракову, В.А. Киселеву, Е.Б. Левичеву, А.С. Медведко, В.М. Петрову, В.В. Смалюку, Д.П. Суханову, В.П. Черепанову за полезные обсуждения в процессе работы.

## Список литературы

- [1] G.Besnier, D.Brandt and B.Zotter. CERN LEP-TH/84-11, 1984.
- [2] Y.H.Chin, CERN SPS/85-2 (DI-MST),1985.
- [3] Y.H.Chin, SPS/85-9 (DI-MCT), 1985.
- [4] F.Ruggiero, Part.Acc., 20, 45 (1986).
- [5] Артамонов, Иноземцев, ИЯФ, 83-83, Новосибирск, 1983.
- [6] K.Ohmi and Zimmerman, CERN SL-2000-015, 2000.

- [7] E.Perevedentsev. E-CLOUD-02 Workshop, CERN 15-18 April 2002. Proceedings, CERN-2002-001.
- [8] S.Myers, LEP Note 436, 1983.
- [9] R.Ruth, CERN LEP - TH/83 - 22, 1983
- [10] R.Ruth, Proc.12-th Int.Conf. on High Energy Acc., Fermilab, Batavia, August 11-16, 1983, p.389.
- [11] S.Myers and J.Van Craeynest, CERN LEP - RF/84-13, 1984.
- [12] S.Myers, CERN LEP - RF/85-22, 1985.
- [13] S.Myers, Proc. of the IEEE Part. Acc. Conf., Washington D.C. March 16 - 1987, p.503-507.
- [14] M.M.Karliner, V.A.Kiselev, A.S.Medvedko, V.V.Smaluk, A.M.Zelenin, N.I.Zinevich, Proc. of the EPAC 96, Sitges (Barcelona), June 10-14, 1996, p.1009-1011.
- [15] V.Danilov and E.Perevedentsev, CERN SL/93 - 38 (AP), 1993.
- [16] G.Sabbi, CERN SL-96-02 (AP), 1996.
- [17] D.Brandt, Proc.of the Fifth Workshop on LEP Performances, Chamonix, January 1995, p.59-62.
- [18] M.Karliner. Preprint BINP 2001-37, Novosibirsk, 2001.
- [19] М.М.Карлинер. Когерентные неустойчивости пучка в электронных накопителях вследствие электромагнитного взаимодействия с окружающей структурой. ИЯФ 74-105, ИЯФ 74-106, ИЯФ 74-107, Новосибирск, 1974.
- [20] A.Kalinin, M.Karliner. Proc. of HEACC-92, Int. J. Mod. Phys., 2A (1993).
- [21] V.Kiselev, V.Smaluk. EPAC-98, Stockholm, 22-26 June 1998.
- [22] J.M.Jowett. LEP parameters.
- [23] G.Sabbi. CERN SL/95-25 (AP), Geneva 1995.
- [24] A.Verdier. Chromaticity. CERN 95-06, CAS: 5th Advanced Acc. Physics Course. Rhode, Greece, 20 Sep. - 1 Oct. 1993. Proc., v.1, CERN, 22 Nov., 1995, p.77-100.

*М.М. Карлинер, К.И. Попов*

**Использование обратной связи  
для подавления неустойчивости  
поперечных связанных мод  
на коллайдере ВЭПП-4**

*М.М. Karliner, K.I. Popov*

**Suppression of the transverse  
mode coupling instability in VEPP-4 collider  
with the help of a feedback**

ИЯФ 2004-41

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев  
Работа поступила 16.06.2004 г.

---

Сдано в набор 17.06.2004 г.

Подписано в печать 18.06.2004 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.6 печ.л., 2.0 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 41

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН  
*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*