

Государственный научный центр  
Российской Федерации  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера СО РАН

Г.А. Артин, Н.С. Бучельникова

ВОЛНА БЕРНШТЕЙНА–ГРИНА–КРУСКАЛА.  
МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ. II.

ИЯФ 96-31

НОВОСИБИРСК

1996

**Волна Бернштейна–Грина–Крускала.  
Модуляционная неустойчивость. II.**

it Г.А. Артин, Н.С. Бучельникова

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН

**Аннотация**

Проведены численные эксперименты (метод частиц в ячейках) по сравнению развития волны БГК типа сгустков в плазме с неподвижными и подвижными ( $M/m = 10^2$ ) ионами. Параметры волны ( $\lambda^B/r_d = 100$ ;  $N^B = L/\lambda^B = 1$ ;  $V_{\phi}^B/V_T = 15$ ;  $E_0^B/(mr_d/eT_{oe}^2) = 28.8$ ;  $V_s^B/V_T = 6.8$ ) выбраны так, чтобы в системе длиной  $L/r_d = 100$  была возможна неустойчивость сателлитов.

Показано, что неустойчивость сателлитов развивается в обоих случаях. Возбуждение гармоник-сателлитов приводит к модуляции поля волны БГК. В плазме с неподвижными ионами развитие неустойчивости сателлитов приводит к формированию долгоживущей структуры БГК – типа на фазовой плоскости. В плазме с подвижными ионами модуляция поля приводит к модуляционной неустойчивости, развитие которой приводит к коллапсу, поглощению энергии поля электронами плазмы и разрушению волны БГК.

**The Bernstein–Green–Kruskal Wave.  
The Modulational Instability. II.**

*G.A. Artin, N.S. Buchelnikova*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090 Novosibirsk, Russia

**Abstract**

The evolution of the bunch-type BGK wave in the plasma with the ions fixed or mobile ( $M/m = 10^2$ ) is studied in the numerical experiments (PIC-method). The parameters of the wave ( $\lambda^B/r_d = 100$ ;  $N^B = L/\lambda^B = 1$ ;  $V_{ph}^B/V_T = 15$ ;  $E_0^B/(mr_d/eT_{oe}^2) = 28.8$ ;  $V_{tr}^B/V_T = 6.8$ ) permit the excitation of the sideband instability in the system with the length  $L/r_d = 100$ .

It is shown that the sideband instability is excited in the both cases. The excitation of the sideband modes leads to the modulation of the wave field.

In the plasma with the fixed ions the sideband instability leads to the formation of the quasistationary BGK-type structure on the phase plane. In the plasma with the mobile ions the modulation of the field leads to the modulational instability. The evolution of the modulational instability leads to the collapse and to the absorption of the field energy by the plasma electrons which destroys the BGK wave.

В настоящей работе описаны численные эксперименты (метод частиц в ячейках) по исследованию устойчивости волны БГК типа сгустков захваченных электронов ( $b$ -электронов) в плазме с подвижными ионами. Работа является продолжением работы [1].

Ранее [2] было показано, что волна БГК такого типа неустойчива относительно возбуждения сателлитов – ленгмюровских волн с фазовыми скоростями меньше фазовой скорости волны БГК  $V_{\phi}^N < V_{\phi}^B$ . Неустойчивость сателлитов имеет заметный инкремент  $\gamma/\omega_{oe} \sim 1 \cdot 10^{-3}$ , если параметр  $\alpha = \frac{V_{\phi}^B + V_{\phi}^N}{V_{\phi}^B - V_{\phi}^N} > 0.8$  ( $V_{\phi} = 2\sqrt{\frac{e\varphi}{m}}$ ). Если  $\alpha < 0.8$ , волна БГК в плазме с неподвижными ионами практически устойчива в течение длительного времени порядка сотен плазменных периодов [2].

В работе [1] исследовались случаи волн БГК с такими параметрами, что  $\alpha < 0.8$ , так что волна практически устойчива относительно сателлитной неустойчивости. В работе [1] показано, что в плазме с подвижными ионами такая волна устойчива и относительно модуляционной неустойчивости даже при наличии ионно-звуковых шумов и возмущений плотности небольшой амплитуды  $\tilde{n}/n_0 \lesssim 0.05 - 0.1$ .

В настоящей работе исследуется волна БГК с такими параметрами, что  $\alpha > 0.8$ , и волна неустойчива относительно возбуждения сателлитов. Сравняется развитие такой волны в плазме с неподвижными и подвижными ионами. Рассматривается волна с параметрами  $\lambda^B/r_d = 100$ ;  $V_{\phi}^B/V_T = 15$ ;  $E_0^B = 28.8$  ( $E$  нормировано на  $mr_d/eT_{oe}^2$ );  $V_{\phi}^B/V_T = 6.8$  в короткой системе  $L = \lambda^B$ , так что для волны БГК  $N^B = 1$  и для ближней по фазовой скорости гармоники  $N = 2 \alpha^{1-\Pi} \sim 1.0$ .

Найдено, что в плазме с неподвижными ионами в этом случае действительно развивается сателлитная неустойчивость. На начальной стадии возбуждается сателлит  $N = 2$ . В районе областей захвата волны БГК  $N^B = 1$  и сателлита  $N = 2$  развивается сильная стохастическая неустойчивость движения  $b$ -электронов, которая приводит к формированию на фазовой плоскости медленно развивающейся структуры БГК – типа подобно тому, что наблюдалось в работе [2].

Сателлитная неустойчивость развивается и в плазме с подвижными ионами. Возбуждение сателлитов приводит к модуляции поля волны БГК. При наличии затравочных возмущений плотности или ионно-звуковых шумов модуляция поля приводит к развитию модуляционной неустойчивости. В случае волны с рассматриваемыми

параметрами модуляционная неустойчивость приводит к коллапсу, затуханию поля и разрушению волны БГК.

Численный эксперимент выполняется методом частиц в ячейках. Рассматривается одномерная система длиной  $L = 100r_d$  с периодическими граничными условиями. Для электронов и ионов плазмы задается максвелловское распределение по скоростям с  $T_e/T_i = 30$ , обрезанное на  $V \sim \pm 2V_T$  из-за ограниченности числа счетных частиц ( $N^e \sim 10^4$ ).

Рассматривается волна БГК с  $\lambda^B = L$  в плазме с неподвижными ионами ( $M/m = 10^{10}$ ) – случай 2–1 и в плазме с подвижными ионами ( $M/m = 10^2$ ) – случаи 2–2 и 2–2К. Метод задания волны БГК описан в работе [1] и более подробно – в работе [3]. При задании волны БГК в рассматриваемых случаях задается ленгмюровская волна с параметрами случая 2–0 (таблица 1) и ее область захвата на фазовой плоскости заполняется  $b$ -электронами. Амплитуда волны БГК в этих случаях  $E_0^B = 28.8$  (здесь и далее  $E$  нормировано на  $mr_d/eT_{oe}^2$ ) несколько отличается от случая 2–0 ( $E_0^B = 31.0$ ) из-за поля объемного заряда. Немного различаются и фазовые скорости. Параметры волны в разных случаях приведены в таблице 1.

**Таблица 1. Начальные параметры волны БГК**

Случай	$M/m$	$L/r_d$	$\lambda^B/r_d$	$N_b^0$	$N_b'$	$N^B$	$V_\phi^B/V_T$	$E_0^B$	$V_a^B/V_T$	$N$	$V_\phi^N/V_T$	$\alpha^{B-N}$
2–0	$10^2$	100	100	—	—	1	16.09	31.0	7.08			
2–1	$10^{10}$	100	100	100	$1.35 \cdot 10^4$	1	14.99	28.8	6.82	2	8.14	1.0
2–2	$10^2$	100	100	100	$1.35 \cdot 10^4$	1	15.06	28.8	6.82	2	8.14	0.99
2–2К*	$10^2$	100	100	100	$1.35 \cdot 10^4$	1	15.06	28.8	6.82	2	8.14	0.99

\* В случае 2–2К начальное возмущение ионов скомпенсировано.

$M, m$  – масса электронов и ионов;  $L$  – длина системы;  $\lambda^B$  – длина волны;  $N_b^0, N_b'$  – число электронов и число “взвешенных”  $b$ -электронов [1] на длине  $\lambda^B$ ;  $N^B = L/\lambda^B$  – номер гармоники;  $V_\phi^B$  – фазовая скорость;  $E_0^B$  – амплитуда ( $E$  нормировано на  $mr_d/eT_{oe}^2$ );  $V_a = 2\sqrt{e\varphi/m}$ ;  $N$  – номер гармоники с фазовой скоростью  $V_\phi^N$ , ближайшей к  $V_\phi^B$ ;  $\alpha^{B-N} = \frac{V_a^B}{V_\phi^B - V_\phi^N}$ .

В случаях 2–1 и 2–2 расчеты производились на вычислительной машине ЕС-61 и частично повторялись на машине Чэллендж фирмы Силикон Графикс, в случае 2–2К – на машине Челлендж. Отметим, что расчеты, проведенные на разных машинах, отличаются только незначительными деталями.

Для снижения начального уровня шумов используется метод спокойного старта [4], позволяющий снизить уровень шумов на несколько порядков. Однако, этот метод не обеспечивает постоянного снижения уровня шумов – с течением времени уровень шумов (электронных и ионно-звуковых) нарастает. Ионно-звуковые шумы ( $i$ -шумы) могут играть роль затравочных возмущений плотности.

Другой тип затравочного возмущения может возникнуть при задании волны БГК в плазме с подвижными ионами. В этом случае на стадии установления волны БГК в течение одного-двух плазменных периодов возникает небольшое возмущение скорости ионов, что приводит к возбуждению стоячей ионного-звуковой волны, которая и может играть роль затравочного возмущения плотности. Такое возмущение существенно в случае 2–2. В случае 2–2К начальное возмущение скорости ионов компенсируется заданием возмущения с противоположной фазой. В этом случае роль затравочных возмущений плотности играют  $i$ -шумы.

Рассмотрим случай 2–1 ( $\frac{\lambda^B}{r_d} = 100$ ;  $N^B = 1$ ;  $V_{\phi}^B/V_T = 14.99$ ;  $E_0^B = 28.8$  (здесь и далее  $E$  нормируется на  $mr_d/eT_{oe}^2$ );  $V_s^B/V_T = 6.82$  ( $V_s = 2\sqrt{\frac{e\varphi}{m}}$ )  $\frac{M}{m} = 10^{10}$ ;  $\alpha^{I-II} = \frac{V_s^B}{V_{\phi}^B - V_{\phi}^{II}} \sim 1.0$ ) и сравним его со случаем 2–2 ( $\frac{\lambda^B}{r_d} = 100$ ;  $N^B = 1$ ;  $V_{\phi}^B/V_T = 15.06$ ;  $E_0^B = 28.8$   $V_s^B/V_T = 6.82$ ;  $\frac{M}{m} = 10^2$ ;  $\alpha^{I-II} = 0.99$ ). На рис.1,2 показаны кривые  $E^N(t)$  для случаев 2–1 (рис.1) и 2–2 (рис.2), на рис.3а-г – сравнительные кривые  $E^N(t)$  для волны БГК  $N = 1$  и гармоник  $N = 2-4$  в случаях 2–1 и 2–2. На рис.4,5 показана зависимость от времени энергии электрического поля  $W_E$ , энергии электронов плазмы  $\Delta W_e = W_e - W_e^0$  ( $W_e^0$  – тепловая энергия электронов плазмы) и потерь энергии  $b$ -электронов  $\Delta W_b = -(W_b - W_b^0)$ . Отметим, что на рис.1–5 приведены усредненные кривые, построенные по средним точкам, а мелкомасштабные колебания и колебания с периодом  $\Delta t \sim T_{oe}/2$ , свидетельствующие о возбуждении обратных волн, не показаны.

На рис.6,7 показаны фазовые плоскости электронов в случаях 2–1 (рис.6) и 2–2 (рис.7). Отметим, что в обоих случаях задаются пробные частицы ( $e = m = 0$ ,  $e/m$  то же, что у электрона), которые используются для анализа траекторий на фазовой плоскости. Начальные координаты пробных частиц показаны на рис.6 в  $t = 0$  и одинаковы в обоих случаях.

На рис.8 показано распределение поля  $E(x)$  в случае 2–1, на рис.9 – распределение поля  $E(x)$  и возмущения плотности плазмы  $\tilde{n}(x)$  в случае 2–2 в разные моменты времени. Отметим, что распределение поля меняется в течение плазменного периода  $T_{oe}$ . На рис.8,9 приведены  $E(x)$  в фазе максимальной модуляции. Зависимость плотности энергии от времени  $E_m^2/E_0^2(t)$  приведена на рис.10 ( $E_m$  – максимальное значение  $E(x)$  в данный момент времени), а на рис.11 приведена зависимость от времени глубины впадины плотности  $\tilde{n}_m/n_0(t)$ .

На рис.12 (случай 2–1) и рис.13 (случай 2–2) показано распределение плотности  $b$ -электронов  $n_b(x)$  (рис.12а,13а), функция распределения по скорости электронов плазмы  $f_e(V)$  (рис.12б,13б) и функция распределения по скорости  $b$ -электронов  $f_b(V)$  (рис.12в,13в) в  $t/T_{oe} = 100$ . Пунктиром на этих рисунках показаны начальные  $n_b(x)$ ,  $f_e(V)$ ,  $f_b(V)$ .

В случаях 2–1 и 2–2 параметр  $\alpha = \frac{V_s^B}{V_{\phi}^B - V_{\phi}^{II}}$  для волны БГК  $N^B = 1$  и гармоники  $N = 2$  имеет величину  $\alpha^{I-II} \sim 1.0$  Ранее [2] было показано, что при  $\alpha > 0.8$  волна БГК неустойчива относительно сателлитной неустойчивости. Эта неустойчи-

вость приводит к возбуждению гармоник – ленгмюровских волн с фазовыми скоростями меньше фазовой скорости волны БГК. Развитие сателлитной неустойчивости подробно рассмотрено в работе [2]. Показано, что на начальной стадии возбуждаются гармоники, для которых выполнено условие  $\alpha > 0.8$ . Далее в районе области захвата волны БГК и гармоник-сателлитов развивается сильная стохастическая неустойчивость движения  $b$ -электронов, которая приводит к формированию на фазовой плоскости структуры БГК-типа.

Такая же картина наблюдается и в случае 2–1. В этом случае условие  $\alpha > 0.8$  выполнено только для гармоники  $N = 2$ . Сателлитная неустойчивость приводит к росту амплитуды этой гармоники, что видно из рис.1,3б. Развитие сателлита приводит к сильной стохастической неустойчивости движения  $b$ -электронов. На начальной стадии она проявляется в захвате  $b$ -электронов гармоникой  $N = 2$ . Развитие захвата видно по фазовым плоскостям (рис.6) в  $t/T_{oe} \sim 20 - 40$ . При захвате  $b$ -электроны теряют энергию (из рис.4 видно, что  $\Delta W_b$  растет), передавая ее сателлиту  $N = 2$ . Несколько возрастает и амплитуда исходной волны БГК (рис.1,3а) за счет нарушения баланса ускоряющихся и тормозящихся  $b$ -электронов. В результате растет энергия поля и энергия возмущения электронов плазмы (рис.4).

Дальнейшее развитие сильной стохастической неустойчивости приводит к размещению  $b$ -электронов на фазовой плоскости и заполнению области захвата  $N = 2$  (рис.6  $t/T_{oe} = 60$ ), так что эта гармоника также становится волной БГК. В результате на фазовой плоскости образуется долгоживущая структура БГК-типа (рис.6  $t/T_{oe} \sim 60 - 100$ ), образованная волнами БГК  $N = 1$  и  $N = 2$ , в районе областей захвата которых движение  $b$ -электронов является стохастическим. При этом амплитуда волн  $N = 1$  и  $2$  (рис.1), энергия поля и энергия  $b$ -электронов (рис.4) остаются практически постоянными. К  $t/T_{oe} \sim 100$  распределение плотности  $b$ -электронов  $n_b(x)$  сохраняет вид сгустка, хотя и отличается от начального (рис.12а). Функция распределения  $b$ -электронов по скорости приближается к плато в районе областей захвата гармоник  $N = 1$  ( $V_\phi/V_T \sim 15$ ) и  $N = 2$  ( $V_\phi/V_T \sim 8$ ) (рис.12в). Дальнейшее развитие этой структуры в настоящей работе не рассматривалось. Можно ожидать, что оно будет иметь такой же характер, как в случае волны БГК с другими параметрами, рассмотренном в работе [2].

В случае 2–2 также наблюдается развитие сателлитной неустойчивости, причем развитие неустойчивости до  $t/T_{oe} \sim 40$  практически не отличается от случая 2–1. Действительно, в случае 2–2 с самого начала растет амплитуда гармоники  $N = 2$  (рис.2,3б). В  $t/T_{oe} \sim 20$  начинается захват  $b$ -электронов гармоникой  $N = 2$  (рис.7), что свидетельствует о начале сильной стохастической неустойчивости. Сравнение рис.6 и 7 показывает, что ее развитие до  $t/T_{oe} \sim 40$  практически одинаково. В  $t/T_{oe} \sim 0 - 40$  практически совпадают или незначительно различаются кривые  $E^N(t)$  волны БГК  $N = 1$  (рис.3а) и гармоники  $N = 2$  (рис.3б), а также кривые  $\Delta W_b(t)$ ,  $W_E(t)$  и  $\Delta W_e(t)$  (рис.4 и 5) в случаях 2–2 и 2–1. Практически не различается и модуляция поля, которая становится значительной к  $t/T_{oe} \sim 40$  (рис.8 и 9).

Дальнейшее развитие в случаях 2-1 и 2-2 различается кардинально, так как в плазме с подвижными ионами (случай 2-2) модуляция поля является затравкой для модуляционной неустойчивости. Действительно, из рис.9 видно, что в  $t/T_{oe} > 40$  развивается впадина плотности, в которой концентрируется поле. Отметим, что в случае 2-2 развитие модуляционной неустойчивости облегчается наличием затравочного возмущения плотности  $N_b = 1$  (это возмущение развивается в результате возмущения скорости ионов на стадии установления волны БГК в  $t/T_{oe} \sim 0 - 1$ ).

В спектральном описании модуляционная неустойчивость проявляется в росте амплитуды гармоник  $N = 3 - 4 - \dots$ , что существенно отличается от случая 2-1, где эти гармоники не выходят за пределы уровня шумов (рис.3в,г). В динамическом описании модуляционная неустойчивость проявляется в росте глубины впадины плотности и росте плотности энергии поля (рис.9,10,11). Из рис.10 видно, что плотность энергии достигает максимума  $E_{\max}^2/E_0^2 = 8.4$  в  $t_{\max}/T_{oe} \sim 45$ , после чего быстро падает. В это же время  $t/T_{oe} > 45$  затухают все гармоники.

По фазовым плоскостям (рис.7) видно, что в  $t/T_{oe} \sim 45$  начинается захват электронов плазмы. Это свидетельствует о развитии сильной стохастической неустойчивости движения электронов плазмы [5]. Неустойчивость развивается в районе областей захвата гармоник модуляционной неустойчивости  $N = 6 - 5 \dots - 2$ ,  $V/V_T \sim 3 - 10$ . Появление "хвостов" в области  $V < 0$  показывает, что модуляционная неустойчивость сопровождается конверсией, которая приводит к генерации коротковолновых гармоник и обратных волн с номерами гармоник  $N = N_e \pm \beta N_i$ ;  $\beta = 1, 2, 3 \dots$  [6]. Из рис.7 видно, что область сильной стохастической неустойчивости включает и области захвата гармоник конверсии  $N = -(6 - 5 - \dots - 3)$ ,  $V/V_T \sim -(3 - 7, 5)$ . Такая картина типична для модуляционной неустойчивости и в случае ленгмюровской волны [7,8].

Ускорение электронов плазмы при сильной стохастической неустойчивости приводит к затуханию поля гармоник и основной волны БГК (рис.2,3а-г) и к поглощению энергии поля электронами плазмы (рис.5).

В результате волна БГК разрушается. К  $t/T_{oe} \sim 100$   $b$ -электроны выходят из захвата и превращаются в пучок с равномерным распределением плотности  $n_b(x)$  (рис.13а). Основная часть функции распределения  $b$ -электронов не очень сильно отличается от начальной (рис.13в), так как размешивание  $b$ -электронов на фазовой плоскости не успевает произойти до начала затухания.  $b$ -электроны, участвовавшие в сильной стохастической неустойчивости на стадии сателлитов и модуляционной неустойчивости, образуют "хвост" в области  $V/V_T \sim 10 - 0$  (рис.13в). Предельные скорости  $b$ -электронов в  $t/T_{oe} \sim 100$   $\frac{V_{\max}}{V_T} \sim 20.7$ ;  $\frac{V_{\min}}{V_T} \sim -3.5$ . "Хвосты" образуются и на функции распределения электронов плазмы (рис.13б), причем предельные скорости этих электронов к  $t/T_{oe} \sim 100$  достигают величины  $V_{\max}/V_T \sim 8.8$  и  $V_{\min}/V_T \sim -8$ .

Ранее [7-10,5] подробно исследовалось развитие модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн. В частности, исследовалась роль конверсии, механизм затухания и т.д. Поскольку при сателлитной неустойчивости [2] и конверсии [11] волны БГК и при модуляционной неустойчивости гармоники являются ленгмюровскими

волнами, можно ожидать, что в рассматриваемых случаях и в случае ленгмюровских волн механизм модуляционной неустойчивости и затухания будет одинаковым. Поэтому в настоящей работе эти механизмы детально не исследуются.

Возникает вопрос, не является ли причиной модуляционной неустойчивости в случае 2–2 возмущение плотности плазмы, обусловленное начальным возмущением скорости ионов. Для ответа на этот вопрос рассмотрен случай 2–2К с теми же параметрами, что и случай 2–2

( $\lambda^B/r_d = 100$ ;  $N^B = 1$ ;  $V_{\phi}^B/V_T = 15.06$ ;  $E_0^B = 28.8$ ;  $V_s^B/V_T = 6.82$ ;  $M/m = 10^2$ ;  $\alpha^{I-II} = 0.99$ ). Начальное возмущение скорости ионов в этом случае компенсируется заданием возмущения в противоположной фазе, так что выделенное возмущение плотности не развивается. Затравочные возмущения плотности возникают в результате роста ионно-звуковых шумов. В случае 2–2К амплитуда шумовых колебаний плотности (максимальное значение  $\tilde{n}(x)$ ) достигает величины  $\tilde{n}/n_0 \sim 0.1$  к  $t/T_{oe} \sim 50$ . При этом спектр шума  $\tilde{n}^N(N)$  близок к равномерному.

Начальная стадия развития волны БГК в случае 2–2К, так же как и в случае 2–2, определяется сателлитной неустойчивостью и до  $t/T_{oe} \sim 40 - 45$  практически не отличается от случаев 2–2 и 2–1. Из рис.14, где показаны кривые  $E^N(t)$  для  $N = 1 - 4$ , видно, что с самого начала растет амплитуда гармоники – сателлита  $N = 2$ . Из рис.15,16, где показано распределение поля в случае 2–1 (рис.15) и распределение поля и возмущения плотности в случае 2–2 (рис.16) видно, что в обоих случаях  $E(x)$  модулируется. До  $t/T_{oe} \sim 40 - 45$  кривые  $E^{II}(t)$ , распределение поля  $E(x)$ , вид фазовых плоскостей в разные моменты времени практически не отличаются от случаев 2–2 и 2–1.

Модуляционная неустойчивость в случае 2–2К также развивается, хотя и начинается несколько позже (на  $\sim 10 - 15T_{oe}$ ), чем в случае 2–2. Это видно из рис.16 и из рис.17, где показана зависимость от времени амплитуды гармоник возмущения плотности  $\tilde{n}^N(t)$ . Действительно, до  $t/T_{oe} \sim 40 - 45$  впадин плотности не образуется (рис.16) и выделенных гармоник  $\tilde{n}^N$  нет (рис.17). Амплитуда шумов растет с течением времени и к  $t/T_{oe} \sim 40$  достигает величины  $\tilde{n}/n_0 \sim 6 \cdot 10^{-2}$  (рис.16),  $\tilde{n}^N/n_0 \sim 1.5 \cdot 10^{-2}$  (рис.17). В  $t/T_{oe} \gtrsim 45$  начинается рост впадин плотности (рис.16) и соответственно рост гармоник  $N_i = 2 - 3 - 4$  (рис.17). Это свидетельствует о развитии модуляционной неустойчивости. Действительно, по кривым  $E^N(t)$  (рис.14) видно, что в это время начинается рост гармоник  $N = 3 - 4 - \dots$ . Отметим, что в  $t/T_{oe} > 45$  на кривых  $E^N(t)$ , включая  $N = 1$  и 2, появляются мелкомасштабные колебания. Период этих колебаний  $\Delta t \sim T_{oe}/2$  показывает, что они вызваны обратными волнами, задающими компоненту стоячей волны. Это свидетельствует о развитии конверсии, сопровождающей модуляционную неустойчивость.

Развитие модуляционной неустойчивости приводит к концентрации поля во впадине плотности (рис.16). Амплитуда поля  $E_m$  достигает максимума (плотность энергии  $E_{\max}^2/E_0^2 \sim 5,4$ ) в  $t/T_{oe} \sim 64 - 65$  после чего начинается затухание. Анализ фазовых плоскостей показывает, что затухание, как и в случае 2–2, обусловлено



захватом электронов плазмы гармониками модуляционной неустойчивости и конверсии, то есть сильной стохастической неустойчивостью движения электронов плазмы. Ускорение электронов при этой неустойчивости приводит к затуханию поля гармоник и основной волны БГК (рис.14). Из рис.18, где показаны кривые  $W_E(t)$ ,  $\Delta W_e(t)$ ,  $\Delta W_b(t)$  видно, что энергия поля поглощается электронами плазмы. Предельные скорости электронов плазмы в этом случае к  $t/T_{oe} \sim 100$  достигает величины  $V_{\max}/V_T \sim 10$  и  $V_{\min}/V_T \sim -9.9$ , а предельные скорости  $b$ -электронов –  $V_{\max}/V_T \sim 21.5$  и  $V_{\min}/V_T \sim 0.5$ .

Таким образом, анализ случая 2–2К показывает, что модуляционная неустойчивость волны БГК с параметрами случая 2–2 развивается и в отсутствие выделенного возмущения плотности.

В работе [1] было показано, что волна БГК с параметрами, при которых не развивается неустойчивость сателлитов и не возникает модуляции поля  $E(x)$ , устойчива относительно модуляционной неустойчивости. В случаях 2–2, 2–2К, рассмотренных в настоящей работе, когда сателлитная неустойчивость приводит к модуляции поля  $E(x)$ , модуляционная неустойчивость развивается и приводит к коллапсу, поглощению поля электронами плазмы и развитию волны БГК.

Ранее [7,8] исследовалось развитие ленгмюровской волны с параметрами случая 2–0, близкими к случаю 2–2 ( $\lambda/r_d = 100$ ;  $N = 1$ ;  $V_{\phi}/V_T = 16.1$ ;  $E_0 = 31$ ;  $M/m = 10^2$ ) и с начальным возмущением скорости ионов, возникающим при установлении волны (случай 1–1 в [76], случай 3 в [8]). Было найдено, что ленгмюровская волна неустойчива относительно модуляционной неустойчивости.

Сравнение случаев 2–2 и 2–0 показывает, что развитие модуляционной неустойчивости волны БГК (случай 2–2) и ленгмюровской волны (случай 2–0) имеет одинаковый характер. Неустойчивость приводит к концентрации поля во впадинах плотности, росту плотности энергии поля и глубины впадины до тех пор пока не начнется затухание, которое приводит к поглощению энергии поля электронами плазмы. Таким образом, в обоих случаях наблюдается коллапс.

Небольшое различие случаев 2–2 и 2–0 сводится к различию времени развития модуляционной неустойчивости и коллапса. Поскольку конверсия на малом ( $\tilde{n}/n_0 < 0.1$ ) возмущении плотности у волны БГК значительно меньше, чем у ленгмюровской волны [11], в случае 2–2 в начальный период времени она не играет роли. Модуляционная неустойчивость начинает развиваться только в  $t/T_{oe} > 35$  после того как поле промодулируется гармоникой-сателлитом, плотность энергии достигает максимума  $E_{\max}^2/E_0^2 \sim 8,4$  в  $t_{\max}/T_{oe} \sim 45$ , а поле затухает к  $t/T_{oe} \sim 60$  (рис.10). В случае 2–0, конверсия и модуляционная неустойчивость, к которой она приводит, развивается с самого начала, плотность энергии достигает максимума  $E_{\max}^2/E_0^2 \sim 5,3$  в  $t_{\max}/T_{oe} \sim 36$ , а поле затухает к  $t/T_{oe} \sim 50$  (рис.9 в [76], рис.4 в [8]). Предельные скорости электронов плазмы в случае 2–0  $V_{\max}/V_T \sim 9$  и  $V_{\min}/V_T \sim -9$  близки к случаям 2–2 ( $V_{\max}/V_T \sim 8.8$  и  $V_{\min}/V_T \sim -8.0$ ) и 2–2К ( $V_{\max}/V_T \sim 10$ ;  $V_{\min}/V_T \sim -9.9$ ).

## Литература

- 1 Г.А. Артин, Н.С. Бучельникова. Волна Бернштейна–Грина–Крускала. Модуляционная неустойчивость. I. Препринт ИЯФ 96-30, 1996.
- 2 Г.А. Артин, Н.С. Бучельникова, Б.Н. Лазеев. Волна Бернштейна–Грина–Крускала в длинной системе. I, II. Неустойчивость спутников. Препринты ИЯФ 95-23, 95-24, 1995.
- 3 Н.С. Бучельникова, Б.Н. Лазеев. Волна Бернштейна–Грина–Крускала. I. Препринт ИЯФ 93-97, 1993.
- 4 J.A. Byers, M.S. Grewal. Phys. Fluids, 13, 1819, 1970.
- 5 N.S. Buchelnikova, E.P. Matochkin. Phys. Lett. 112A, 330, 1985.
- 6 N.S. Buchelnikova, E.P. Matochkin. Physica Scripta, 24, 566, 1981.
- 7 Н.С. Бучельникова, Е.П. Маточкин. а) Неустойчивость ленгмюровской волны большой амплитуды. Препринт ИЯФ 77-15, 1977; б) Неустойчивость одномерной ленгмюровской волны. Солитоны и коллапс. Препринт ИЯФ 78-76, 1978.
- 8 Н.С. Бучельникова, Е.П. Маточкин. Физика плазмы, 7, 383, 1981.
- 9 N.S. Buchelnikova, E.P. Matochkin. Comments on Plasma. Phys. Contr. Fusion, 6, 21, 1980; Plasma Phys. 23, 35, 1981.
- 10 Н.С. Бучельникова, Е.П. Маточкин. Препринты ИЯФ, 77-39, 1977; 78-17, 78-19, 1978; 79-115, 1979; 81-04, 81-43, 81-88, 81-89, 1981; 82-53, 1982; 84-149, 84-150, 1984; 88-139, 88-163, 1988; 89-36, 89-106, 89-155, 1989;
- 11 Н.С. Бучельникова, Б.Н. Лазеев. Конверсия волны Бернштейна–Грина–Крускала на возмущении плотности. I, II, III. Препринты ИЯФ 94-48, 94-49, 94-50, 1994.

*Г.А. Артин, Н.С. Бучельникова*

**Волна Бернштейна–Грина–Крускала.  
Модуляционная неустойчивость. II.**

*G.A. Artin, N.S. Buchelnikova*

**The Bernstein–Green–Kruskal Wave.  
The Modulational Instability. II.**

ИЯФ 96-31

Ответственный за выпуск С.Г. Попов

Работа поступила 6.05.1996 г.

---

Сдано в набор 12.05.1996 г.

Подписано в печать 12.05.1996 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.0 печ.л., 1.6 уч.-изд.л.

Тираж 250 экз. Бесплатно. Заказ № 31

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
ротапринтере ГНЦ РФ "ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН",  
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.

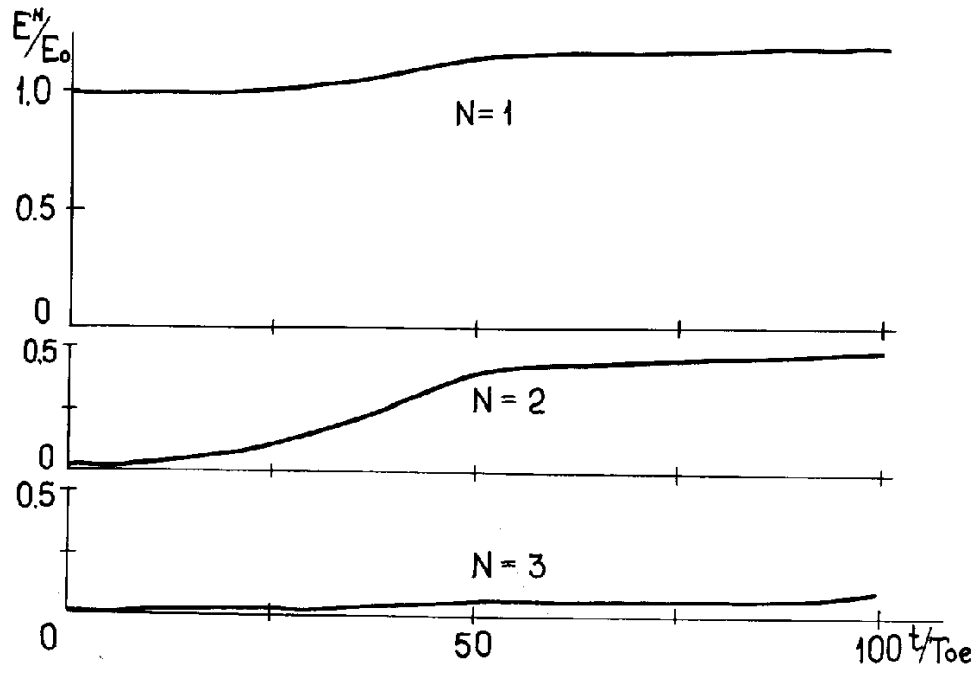


Рис. 1: Зависимость от времени амплитуды волны БГК  $N = 1$  и гармоник  $N = 2$  и 3. Случай 2-1.  $E_0 = 28.8$  (здесь и далее  $E$  нормировано на  $mr_d/eT_{oe}^2$ ).

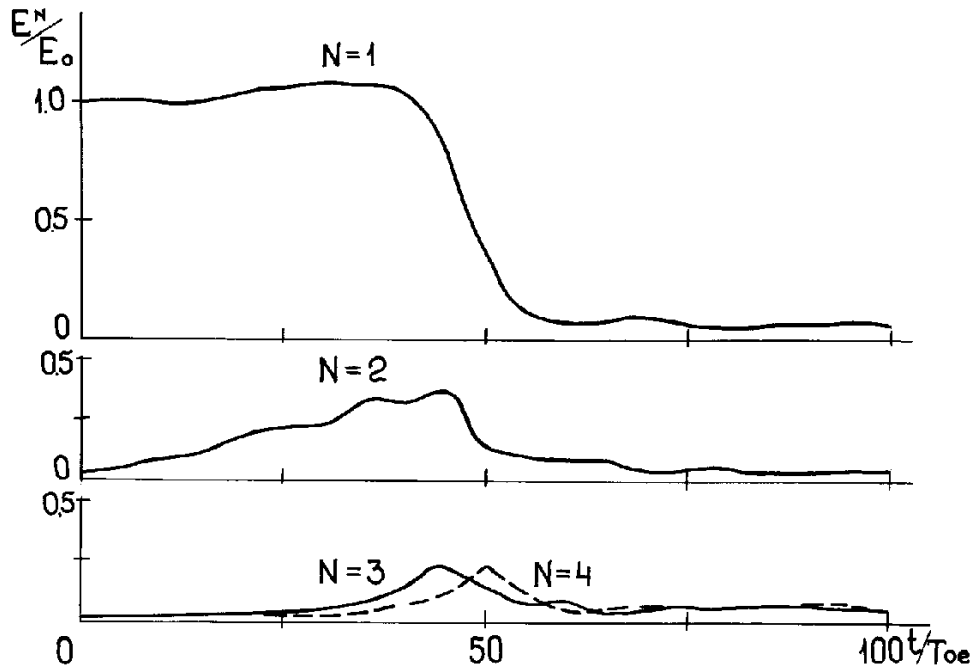


Рис. 2: Зависимость от времени амплитуды волны БГК  $N = 1$  и гармоник  $N = 2, 3$  и 4. Случай 2-2.  $E_0 = 28.8$ .

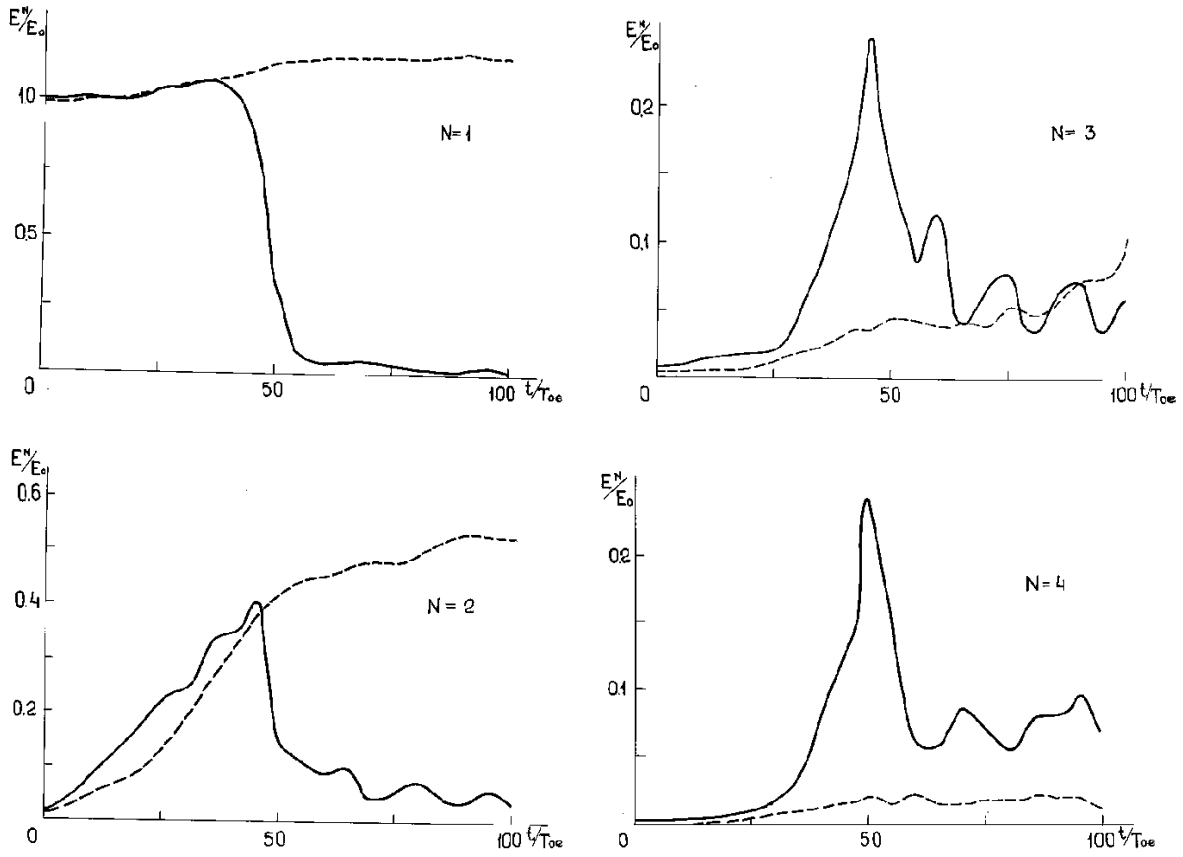


Рис. 3: Зависимость от времени амплитуды волны БГК  $N = 1$  (рис.3а) и гармоник  $N = 2$  (рис.3б),  $N = 3$  (рис.3в) и  $N = 4$  (рис.3г). Сплошная линия – случай 2–2, пунктир – случай 2–1,  $E_0 = 28.8$ .

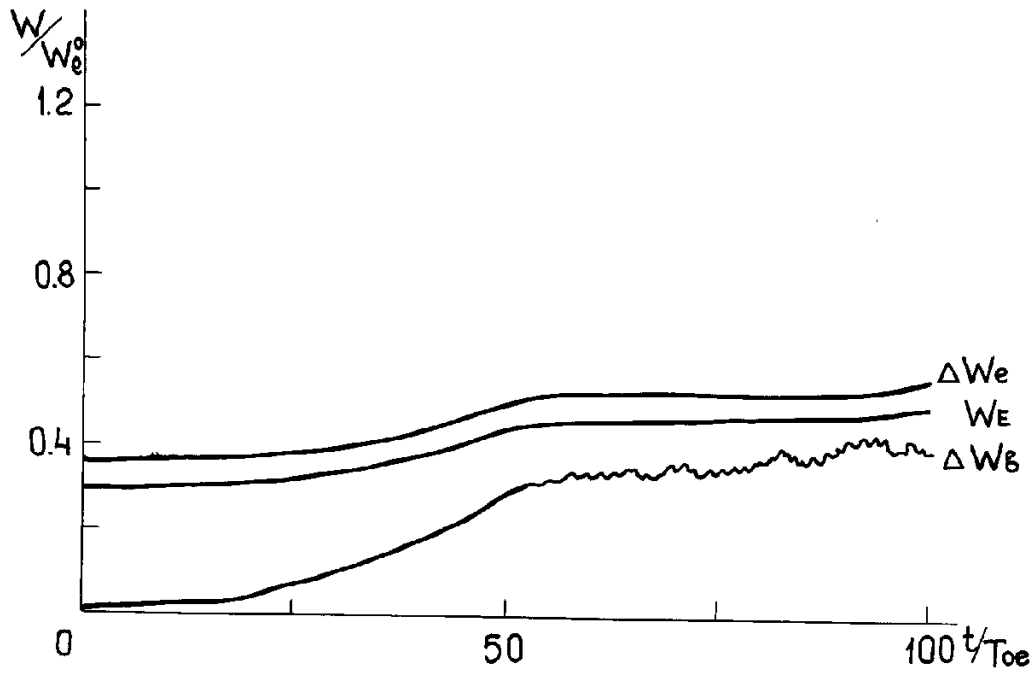


Рис. 4: Зависимость от времени энергии поля  $W_E$ , энергии электронов плазмы  $\Delta W_e = W_e - W_e^0$  и потерь энергии  $b$ -электронов  $\Delta W_b = -(W_b - W_b^0)$ . Случай 2-1.

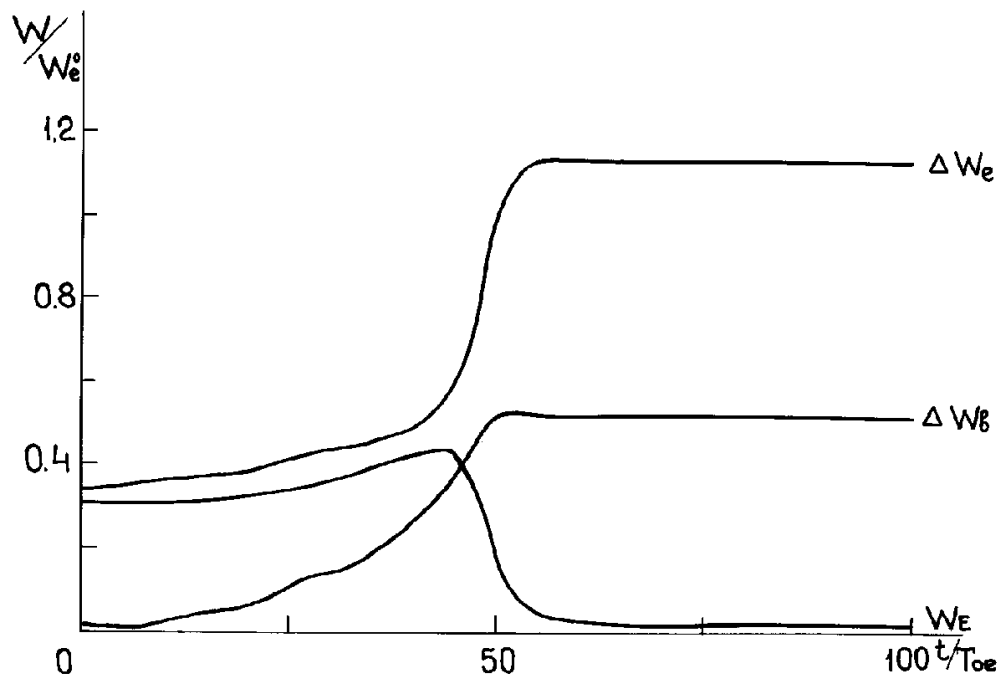


Рис. 5: Зависимость от времени энергии поля  $W_E$ , энергии электронов плазмы  $\Delta W_e$  и потерь энергии  $b$ -электронов  $\Delta W_b$ . Случай 2-2.

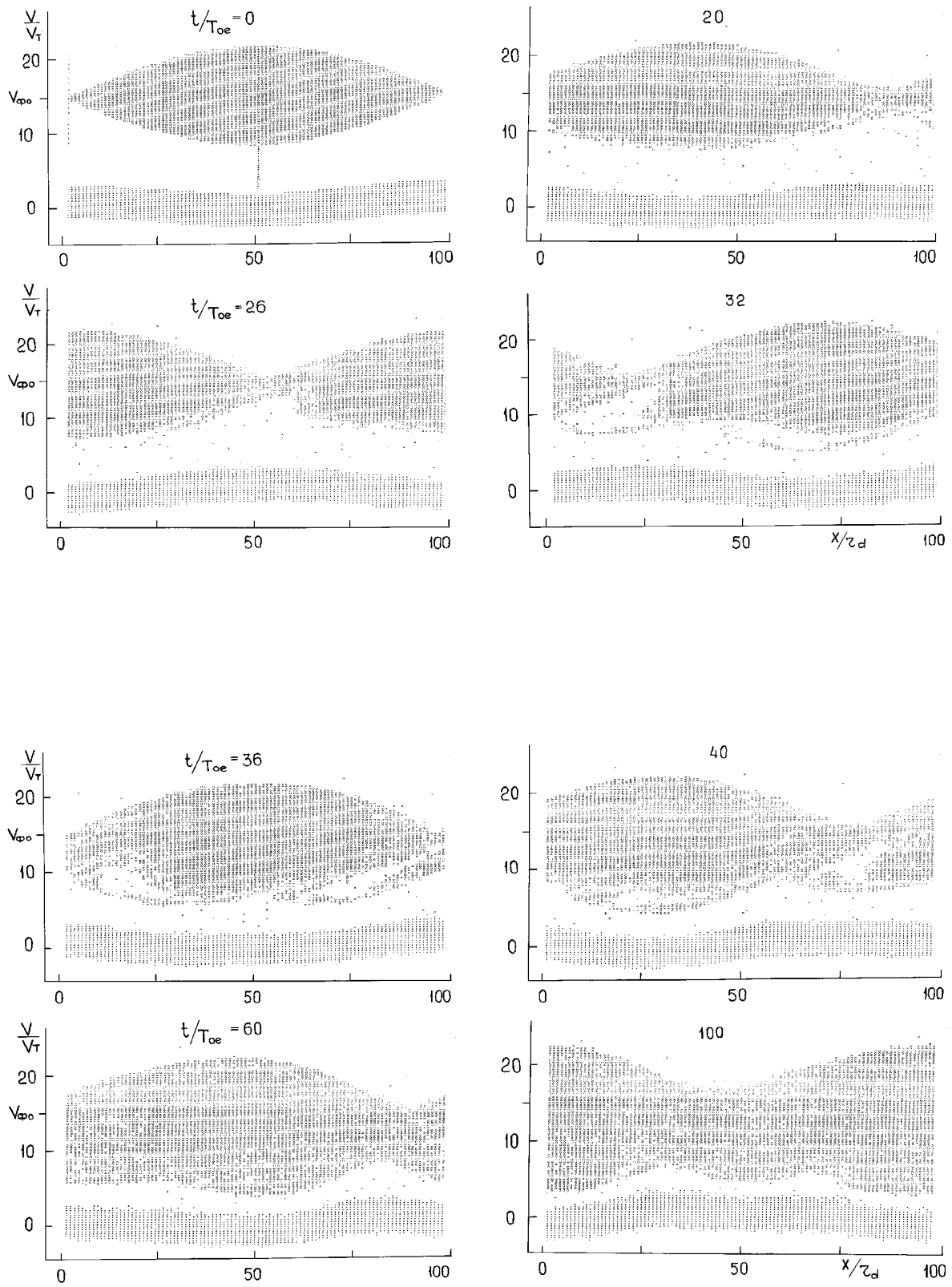


Рис. 6: Фазовые плоскости электронов. Случай 2-1.

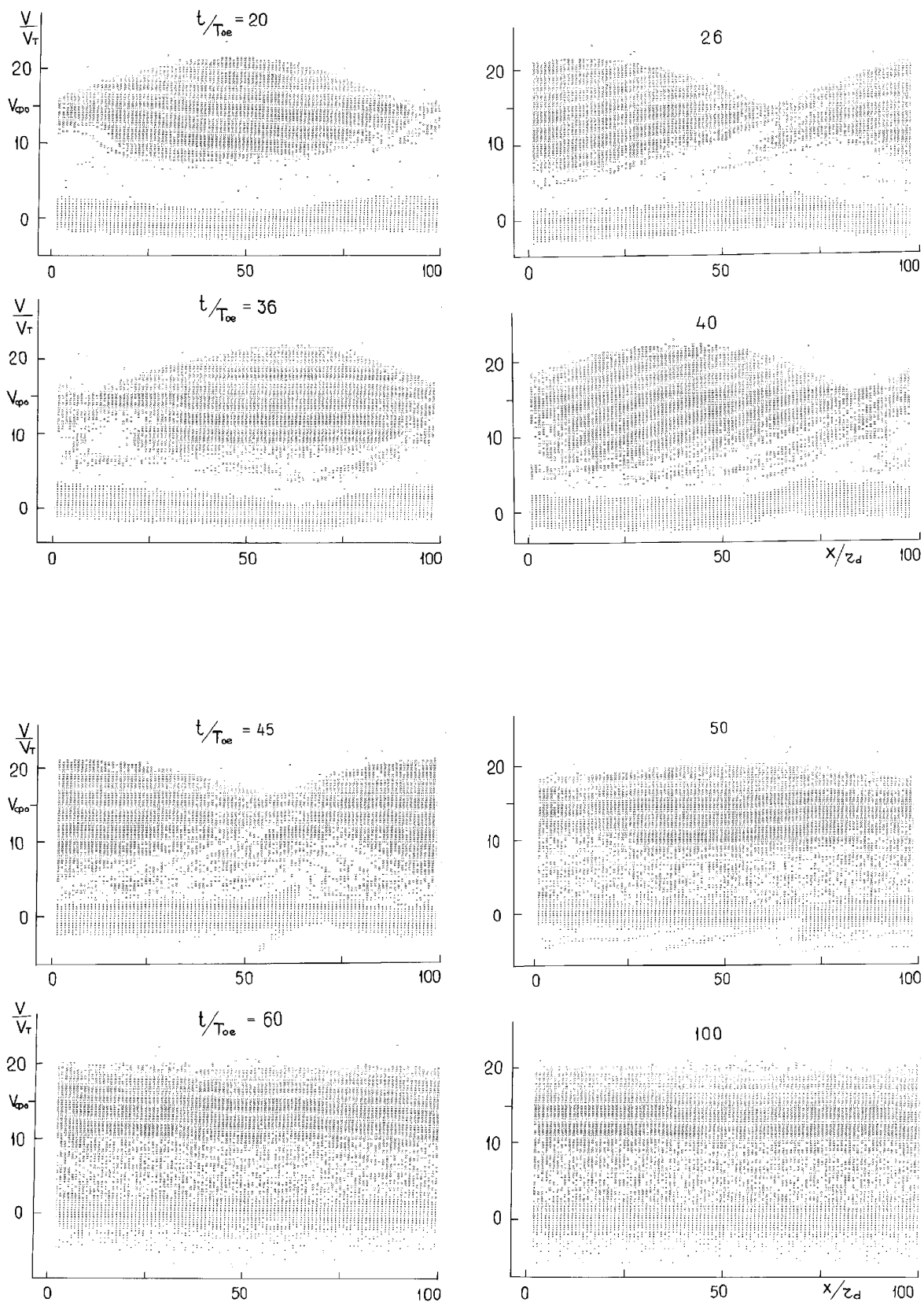


Рис. 7: Фазовые плоскости электронов. Случай 2-2.



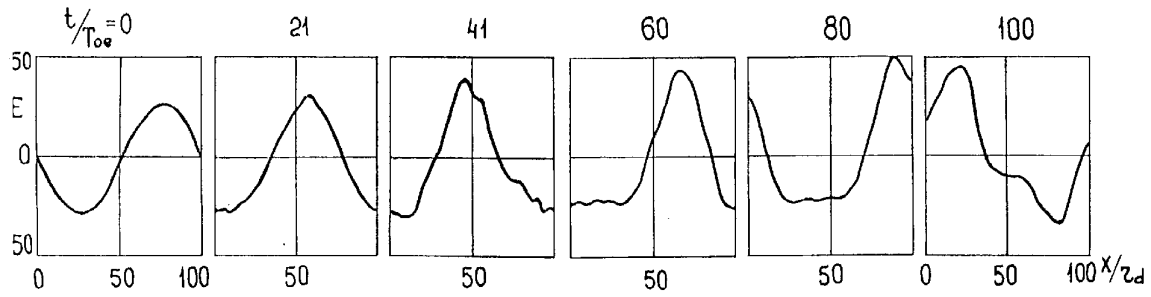


Рис. 8: Распределение поля  $E(x)$  в разные моменты времени. Случай 2-1.  $E$  нормировано на  $mr_d/eT_{oe}^2$ .

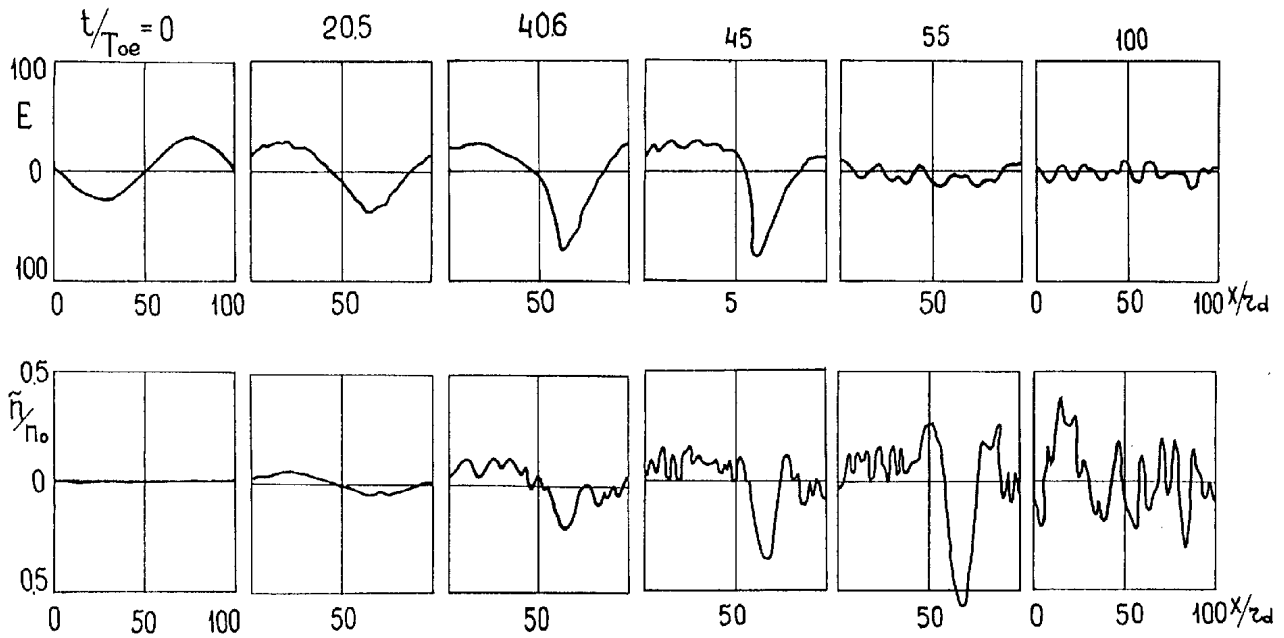


Рис. 9: Распределение поля  $E(x)$  и возмущения плотности плазмы  $\tilde{n}(x)$  в разные моменты времени. Случай 2-2.  $E$  нормировано на  $mr_d/eT_{oe}^2$ .

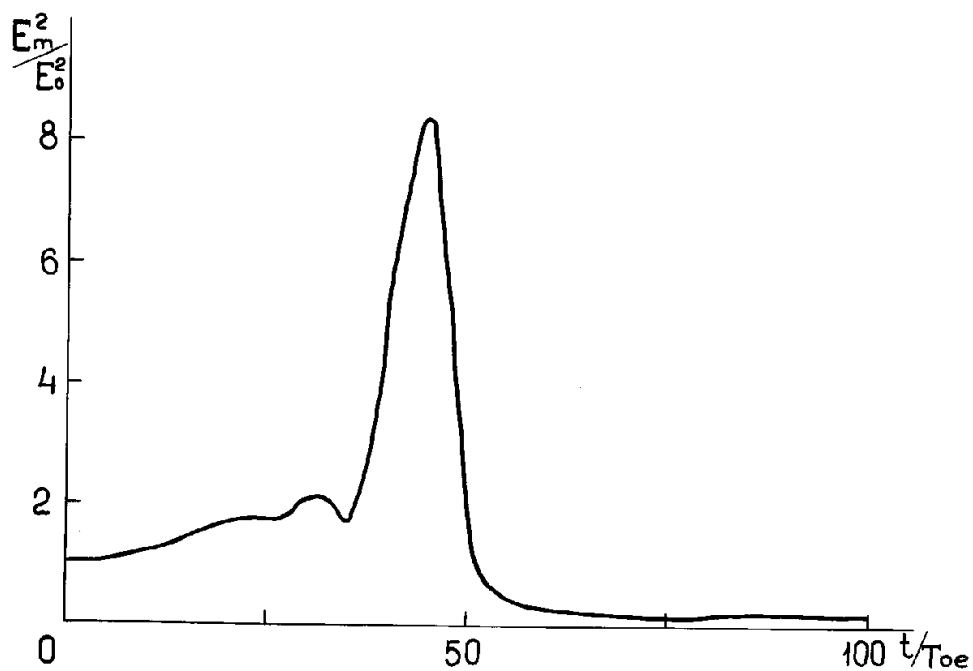


Рис. 10: Зависимость от времени плотности энергии поля. Случай 2-2.  $E_0 = 28.8$ .  $E_m$  – максимальное значение  $E(x)$  в данный момент времени.

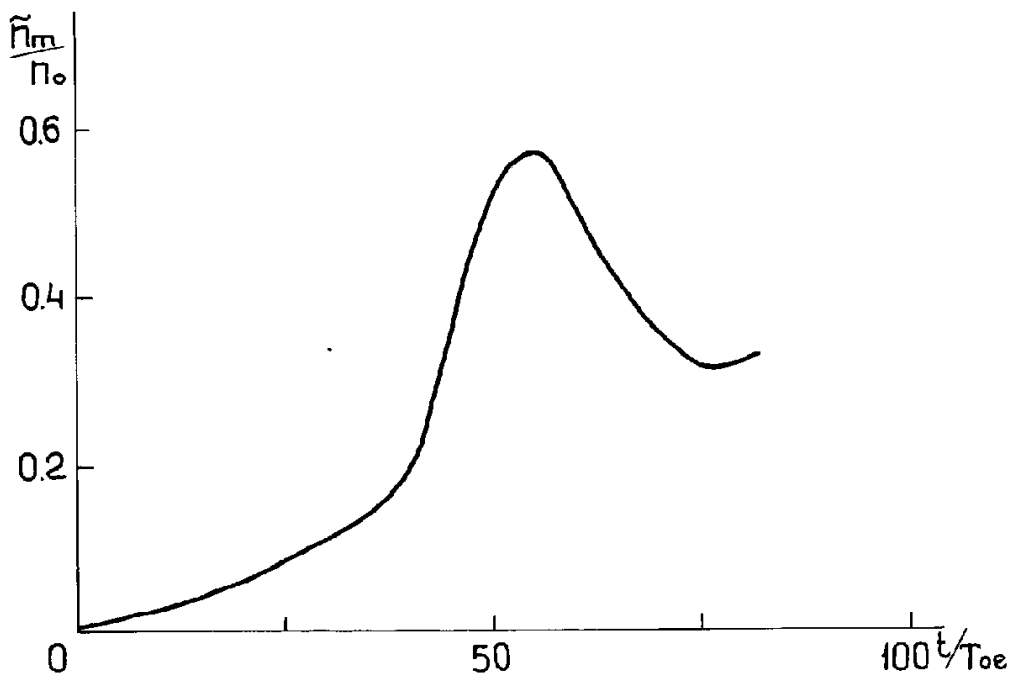


Рис. 11: Зависимость от времени глубины впадины плотности. Случай 2-2.  $\tilde{n}_m$  – глубина впадины в данный момент времени.

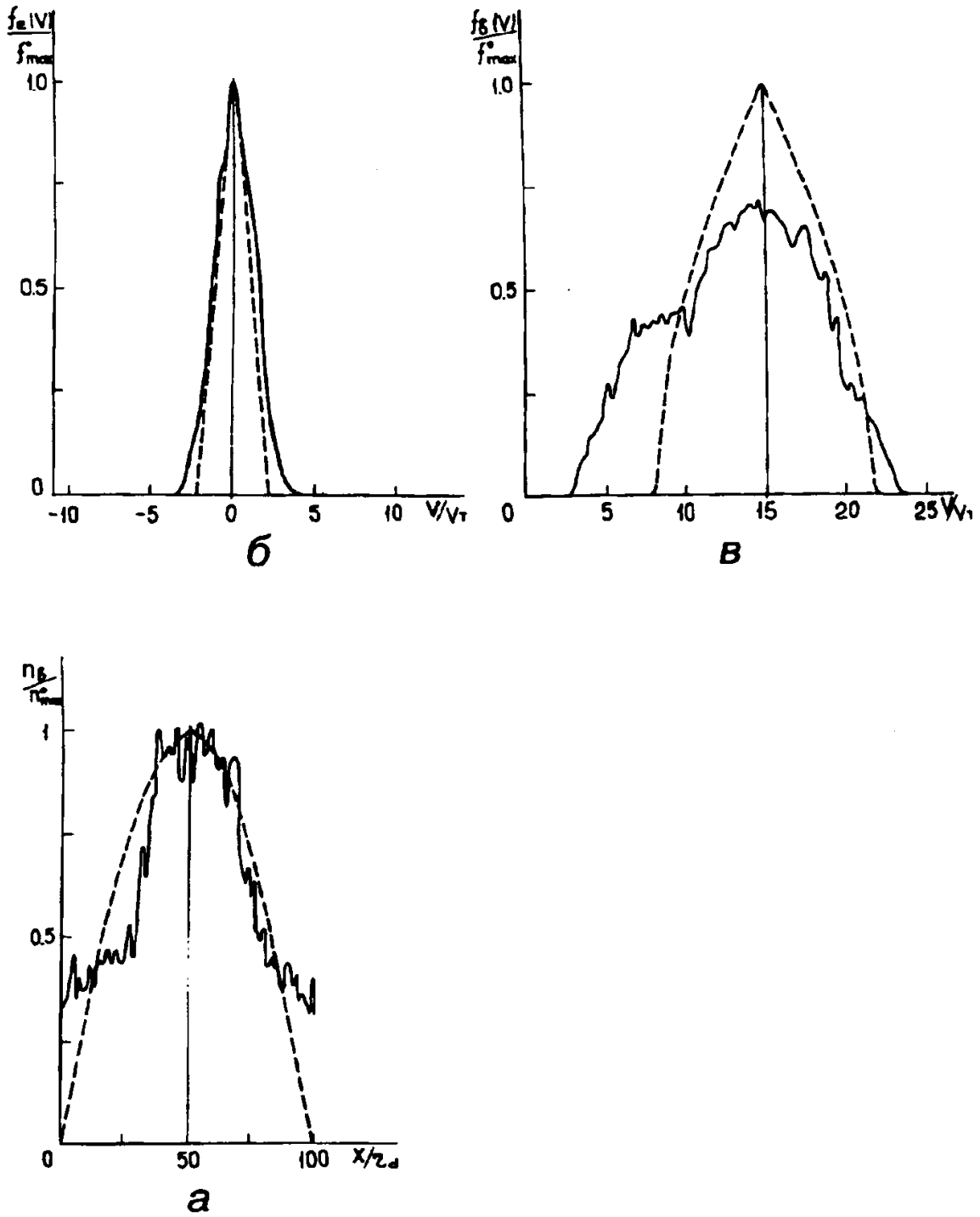


Рис. 12: Распределение плотности  $b$ -электронов (рис.12а), функции распределения по скорости электронов плазмы (рис.12б) и  $b$ -электронов (рис.12в) в  $t = 0$  (пунктир) и  $t/T_{oe} = 100$ . Случай 2-1.

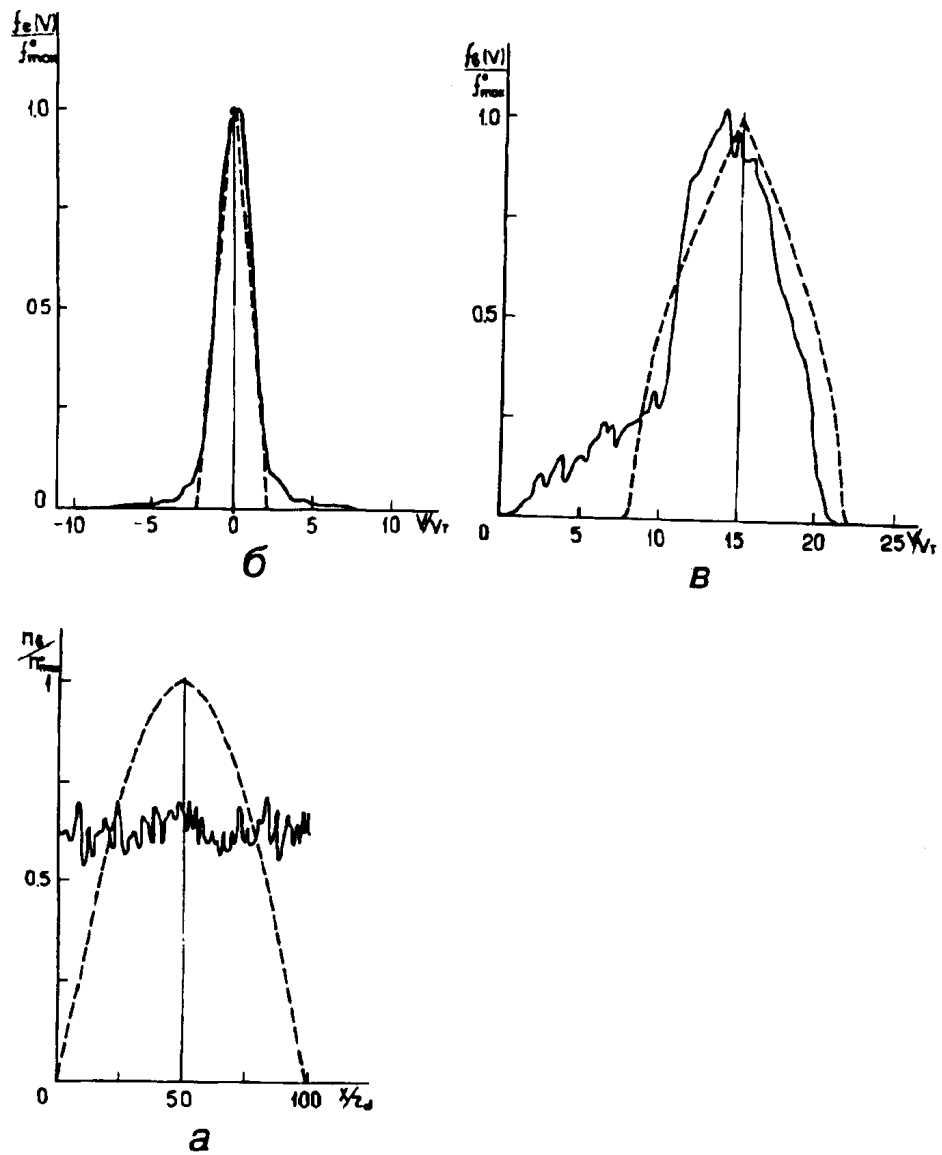


Рис. 13: Распределение плотности  $b$ -электронов (рис.13а), функции распределения по скорости электронов плазмы (рис.13б) и  $b$ -электронов (рис.13в) в  $t = 0$  (пунктир) и  $t/T_{oe} = 100$ . Случай 2-2.

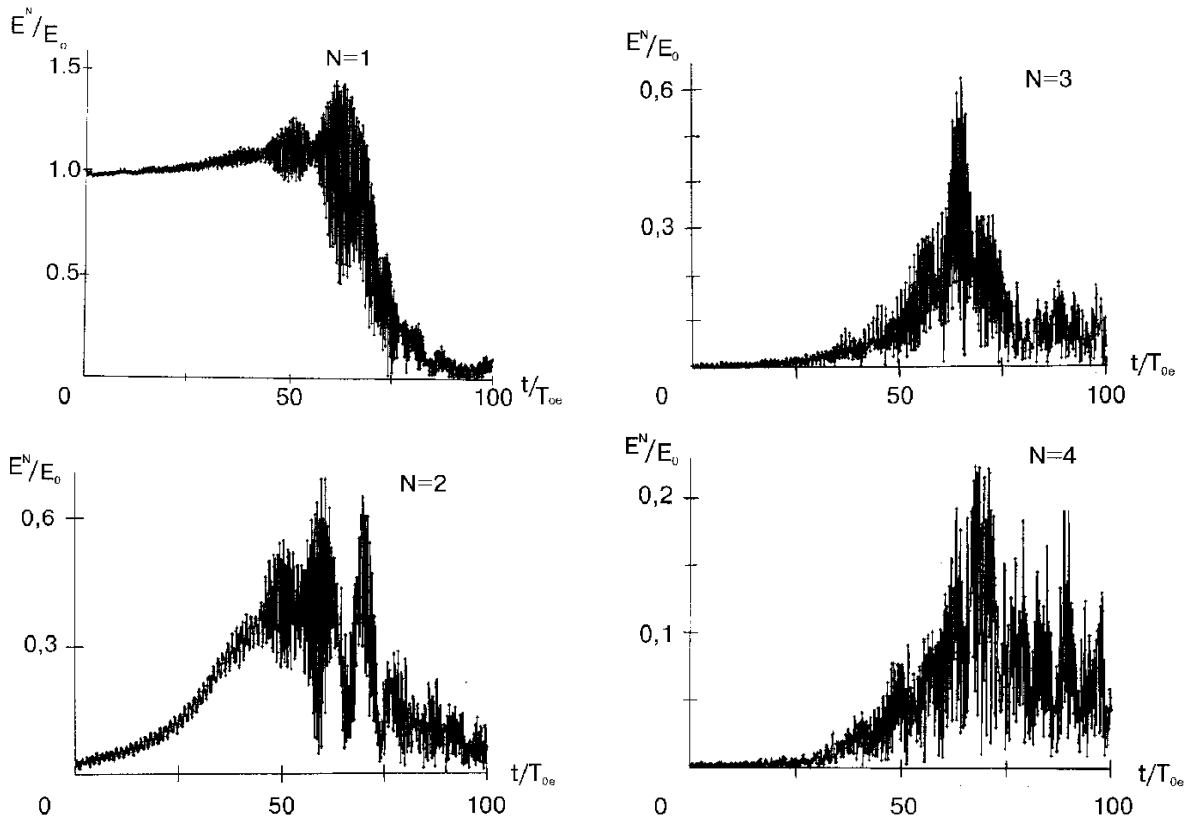


Рис. 14: Зависимость от времени амплитуды волны БГК  $N = 1$  и гармоник  $N = 2, 3$  и  $4$ . Случай 2-2К.  $E_0 = 28.8$ .

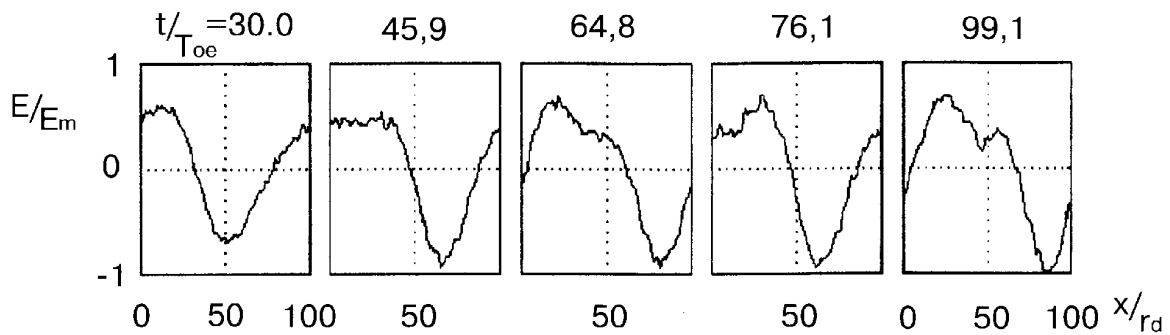


Рис. 15: Распределение поля  $E(x)$  в разные моменты времени. Случай 2-1.  $E_m/E_0 = 1.75$ ;  $E_0 = 28.8$ .  $E_m$  – максимальное значение  $|E(x)|$ .

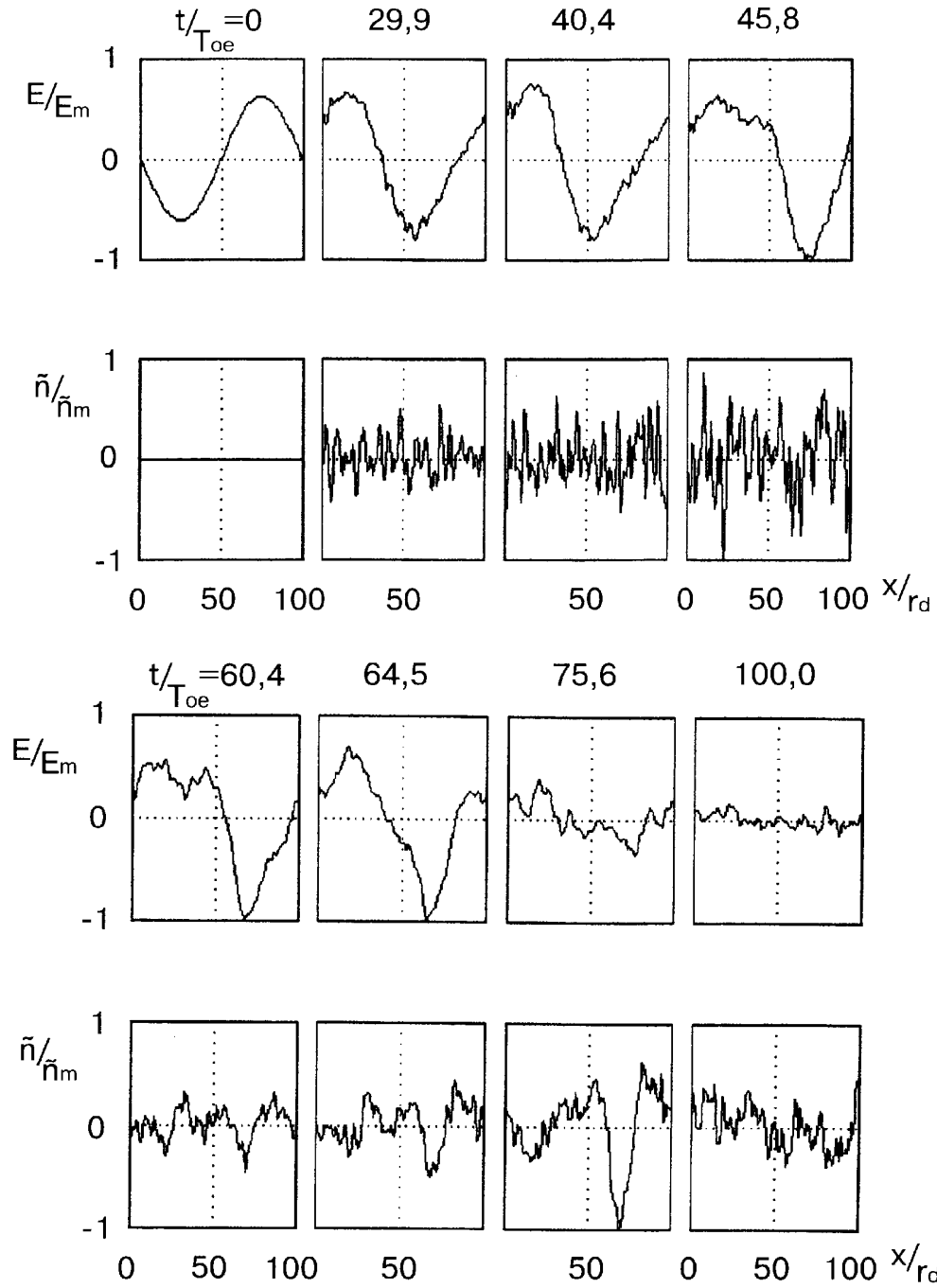


Рис. 16: Распределение поля  $E(x)$  и возмущения плотности плазмы  $\tilde{n}(x)$  в разные моменты времени. Случай 2-2К.  $t/T_{oe} \sim 0 - 50$ :  $E_m/E_0 = 1.64$ ;  $\tilde{n}_m/n_0 = 0.1$ ;  $t/T_{oe} \sim 60 - 100$ :  $E_m/E_0 = 2.32$ ;  $\tilde{n}_m/n_0 = 0.53$ ;  $E_0 = 28.8$ .  $E_m$ ,  $\tilde{n}_m$  – максимальные значения  $|E(x)|$ ,  $|\tilde{n}(x)|$ .

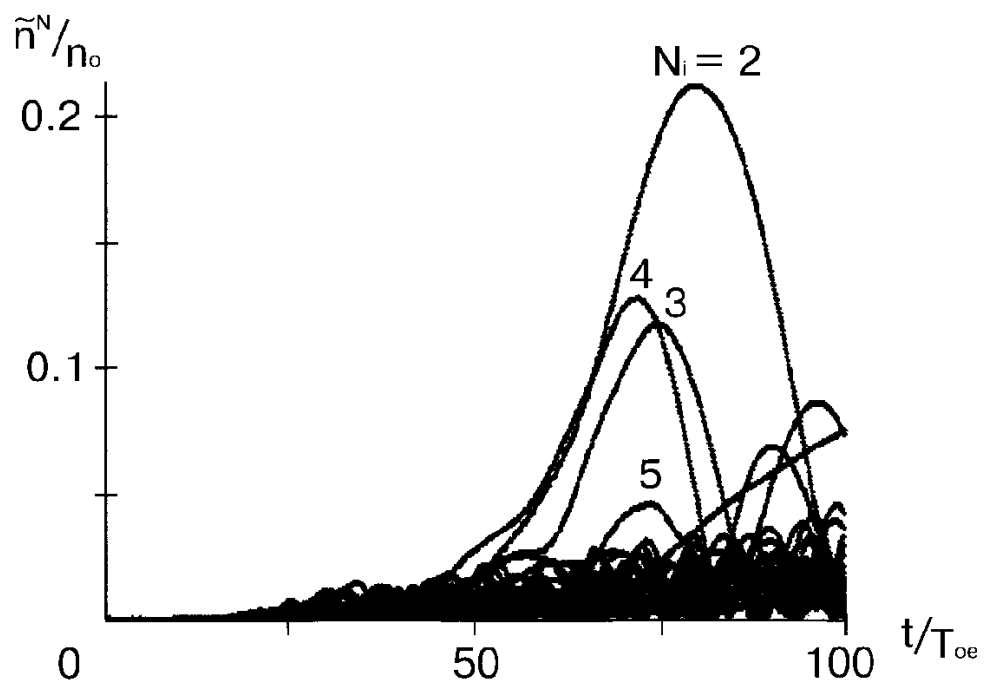


Рис. 17: Зависимость от времени амплитуды гармоник плотности  $\tilde{n}^N(t)$ .  $N_i = 1 - 30$ .  
Случай 2-2К.

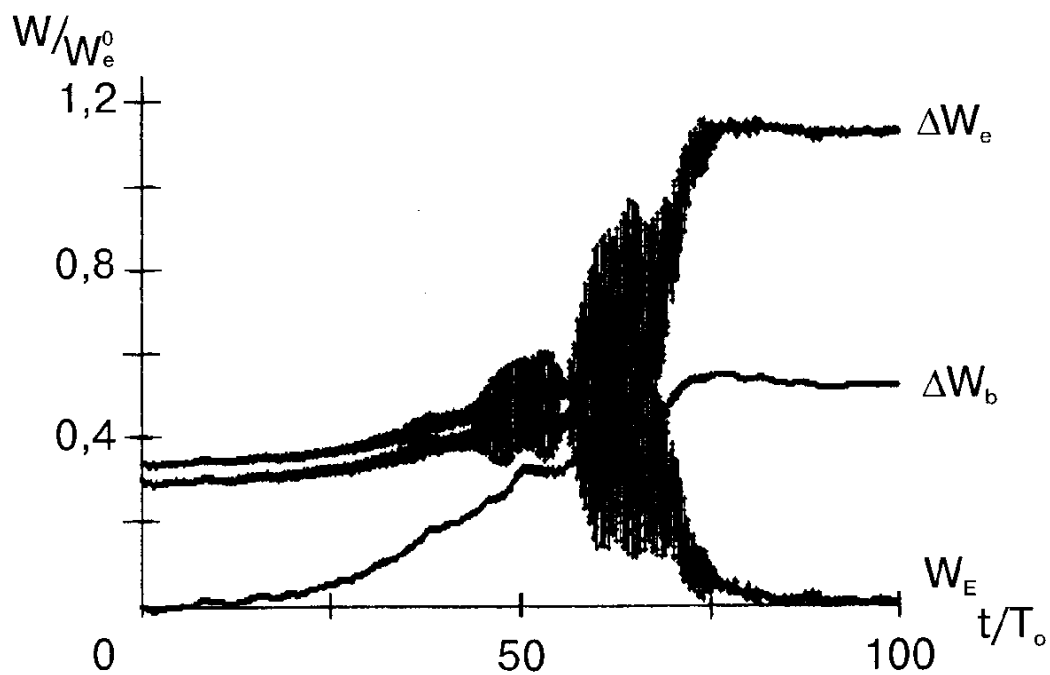


Рис. 18: Зависимость от времени энергии поля  $W_E$ , энергии электронов плазмы  $\Delta W_e$  и потерь энергии  $b$ -электронов  $\Delta W_b$ . Случай 2-2К.