

14
И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 77-109

Д.Янссен

ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД ХАРТРИ -
-ФОКА - БОГОЛЮБОВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ
ЯДЕРНЫХ ПОЛОС

Новосибирск

1977

ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД ХАРТРИ-ФОКА-БОГОЛКЕОВА

ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЯДЕРНЫХ ПОЛОС

Д. Янссен ^{ж)}

А Н Н О Т А Ц И Я

Найдено обобщение уравнения ХФБ для совокупности состояний, однозначно характеризующихся спином и проекцией.

Исследовано решение этого уравнения в случае малых деформаций и простых квадрупольных сил. Установлена связь этого метода с моделью принудительного вращения.

^{ж)} Работает в ИЯФ СО АН СССР в порядке сотрудничества между АН ГДР и АН СССР.

A GENERALIZED HARTREE-FOCK-BOGOLIUBOV APPROACH
FOR DESCRIBING NUCLEAR BANDS

D. Janssen

A b s t r a c t

A generalized HFB equation is found for a set of states unambiguously characterized by spin and its projection.

A solution of this equation is considered in the case of small deformations and simple quadrupole forces. The relationship between this method and self consistent cranking model is discussed.

I. В в е д е н и е

Низкоэнергетические спектры возбужденных ядер интерпретируются обычно с помощью представлений о вибрациях или вращении ядра в предположении об определенной коллективной или одночастичной структуре этих состояний. Но с ростом потока экспериментальных данных все эти наглядные понятия оказались весьма условными, они могут служить только предельными случаями, которые при возбуждении реальных ядер, строго говоря, не наблюдаются. Однако почти во всех ядрах известны полосы, т.е. группы состояний, которые связаны друг с другом большими $B(E2)$ -переходами. В четно-четных ядрах все состояния с четным спином, которые имеют при заданном спине минимальную энергию (так называемая γ -раст-линия), могут служить примером такой полосы. Целью данной работы является вывод микроскопического описания полосы без использования предположений о вибрационной или вращательной структуре этих состояний. Полученные уравнения можно понимать как обобщение уравнений ХФБ.

2. Вывод уравнений ХФБ из вариационного принципа

Приведем вывод уравнений ХФБ в таком виде, как они нам в дальнейшем потребуются.

Если $|0\rangle$ есть основное состояние ядра и

$$H = \sum_1 e_1 a_1^+ a_1 + \sum_{1234} V_{1234} a_1^+ a_2^+ a_4 a_3 \quad (2.1)$$

гамильтониан, описывающий систему сильно взаимодействующих нуклонов, то энергию основного состояния можно приближенно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \sum_1 e_1 \langle 0 | a_1^+ a_1 | 0 \rangle + \sum_{1234} V_{1234} (\langle 0 | a_1^+ a_2^+ | 0 \rangle \langle 0 | a_4 a_3 | 0 \rangle \\ + 2 \langle 0 | a_1^+ a_4 | 0 \rangle \langle 0 | a_2^+ a_3 | 0 \rangle) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь метка 1 обозначает одночастичное состояние в сферическом базисе с квантовыми числами $j_1, m_1, l_1, n_1, \tau_1$.

Матрица плотности

$$S_{12} = \langle 0 | a_1^+ a_2 | 0 \rangle \quad (2.3)$$

и тензор спаривания

$$K_{12} = \langle 0 | a_2 a_1 | 0 \rangle \quad (2.4)$$

входящие в выражение для энергии (2.2), очевидно, не являются независимыми друг от друга. Разлагая совокупность функций $a_1^+ | 0 \rangle$ и $a_1 | 0 \rangle$ по ортогональному набору состояний $| i \rangle$, получим:

$$a_1^+ | 0 \rangle = \sum_i A_{i1}^* | i \rangle ; \quad a_1 | 0 \rangle = \sum_i B_{i1}^* | i \rangle \quad (2.5)$$

и, следовательно,

$$S_{12} = \sum_i B_{i1} B_{i2}^* ; \quad K_{12} = \sum_i B_{i1}^* A_{i2}$$

Из коммутационных соотношений фермионных операторов мы получаем условия нормировки амплитуд A_{i1} и B_{i1} , которые и нормируют матрицу плотности S_{12} и тензор спаривания K_{12} :

$$\sum_i B_{i1} B_{i2}^* + A_{i1}^* A_{i2} = \delta_{12} ; \quad \sum_i B_{i1}^* A_{i2} + B_{i2}^* A_{i1} = 0 \quad (2.6)$$

Теперь вариационный принцип

$$\delta \left[\mathcal{E} - \lambda \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle + \sum_{i1} \frac{1}{2} E_i (B_{i1} B_{i1}^* + A_{i1}^* A_{i1}) \right] = 0 \quad (2.7)$$

дает уравнение ХФБ для определения амплитуд A_{i1}, B_{i1} .

$$\begin{bmatrix} h & \Delta \\ -\Delta^* & -h^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Здесь

$$h_{12} = (e_1 - \lambda) \delta_{12} - 4 \sum_{34} V_{1324} S_{34} \quad (2.9)$$

$$\Delta_{12} = 2 \sum_{34} V_{1234} K_{34}$$

Выражение (2.7) просто означает, что минимизируется энергия (2.2) основного состояния ядра (относительной вариации матрицы плотности тензора спаривания K), причем лагранжевы множители E_i обеспечивают выполнение нормировочного условия (2.6), а лагранжево-множитель λ определяет среднее число частиц в состоянии $| 0 \rangle$.

Заметим еще, что перед вариацией матрицу плотности надо написать согласно (2.6) в симметризованном виде, т.е.

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left[\sum_i (B_{i1} B_{i2}^* - A_{i1}^* A_{i2}) + \delta_{12} \right] \quad (2.10)$$

3. Обобщенное приближение ХФБ для энергий состояний и переход к внутренней системе координат

Если нас интересует не только основное состояние, но и совокупность ядерных состояний с четным спином, которые связаны большими электромагнитными переходами друг с другом, то можно написать энергии этих состояний как прямое обобщение (2.2) следующим образом

$$\mathcal{E}_{\Gamma M} = \sum_1 e_1 \langle \Gamma M | a_1^+ a_1 | \Gamma M \rangle + \sum_{1234} V_{1234} \left(\langle \Gamma M | a_1^+ a_2^+ | \Gamma' M' \rangle \langle \Gamma' M' | a_4 a_3 | \Gamma M \rangle + 2 \langle \Gamma M | a_1^+ a_4 | \Gamma' M' \rangle \langle \Gamma' M' | a_2^+ a_3 | \Gamma M \rangle \right) \quad (3.1)$$

Отличие от выражения (2.2) состоит в том, что при вычислении энергии взаимодействия мы не только прокладываем одним состоянием, как в приближении ХФБ, но учитываем и переходы между всеми состояниями рассмотренной полосы, вызванные взаимодействием нуклонов. Вместо матрицы плотности и тензора спаривания здесь придется рассматривать соответствующие обобщенные величины

$$S_{12}(\Gamma M, \Gamma' M') = \langle \Gamma M | a_1^+ a_2 | \Gamma' M' \rangle ; \quad K_{12}(\Gamma M, \Gamma' M') = \langle \Gamma M | a_2 a_1 | \Gamma' M' \rangle \quad (3.2)$$

которые определяют энергии (3.1) и вероятности переходов между

состояниями $|I, M\rangle$.

Рассмотрим теперь "внутреннее" состояние $|I\rangle$, которое является суперпозицией всех состояний рассматриваемой полосы

$$|I\rangle = \sum_I C_I |I, 0\rangle \quad (3.3)$$

Если коэффициенты $C_I = \sqrt{2I+1}$, то это состояние является собственным состоянием оператора угла $P_2(\cos\theta)$, а если $|C_I|^2 = (2I+1) \int_0^\pi \sin\theta d\theta P_2(\cos\theta) e^{a P_2(\cos\theta)}$, то интеграл перекрытия $\langle I | \hat{R}(\omega) | I \rangle$ (\hat{R} - оператор поворота на угол ω) имеет гауссов вид, что характерно для деформированных многочастичных состояний.

Мы в дальнейшем увидим, что введение матрицы плотности во внутренней системе с помощью функций (3.3) является очень удобным.

Определим

$$S_{12}(I) = \frac{\langle I | \hat{P}_z^+ a_1^+ a_2 | I \rangle}{\langle I | \hat{P}_z^+ | I \rangle}; \quad K_{12}(I) = \frac{\langle I | \hat{P}_z^+ a_2 a_1 | I \rangle}{\langle I | \hat{P}_z^+ | I \rangle} \quad (3.4)$$

\hat{P}_z здесь оператор проектирования углового момента

$$\hat{P}_z = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \sum_M \int d\omega D_{M0}^I(\omega) \hat{R}(\omega) \quad (3.5)$$

С помощью уравнений (3.2) - (3.5) можно легко найти связь между матрицей плотности и тензором спаривания в лабораторной системе (3.2) и во внутренней системе (3.5)

$$S_{12}(I) = \frac{1}{C_I} \sum_{I', M'} C_{I'} S_{12}(I', I', 0); \quad K_{12}(I) = \frac{1}{C_I} \sum_{I', M'} C_{I'} K_{12}(I', I', 0) \quad (3.6)$$

$$S_{12}(I, I', I'') = \frac{C_I(2I'+1)}{C_{I'}(2I'+1)} \sum_{JK} \langle j_1 m_1 j_2 -m_2 | JK \rangle S_2 \langle I' I' J K | I I \rangle + \sum_{K' M' M''} \langle I' 0 J K' | I I K' \rangle \langle j_1 m_1 j_2 -m_2 | J K' \rangle S_2 S_{1'2'}(I) \quad (3.7)$$

$$K_{12}(I, I', I'') = \frac{C_I(2I'+1)}{C_{I'}(2I'+1)} \sum_{JK} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JK \rangle \langle I' I' J -K | I I \rangle + \sum_{K' M' M''} \langle I' 0 J -K' | I I -K' \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J K' \rangle K_{1'2'}(I)$$

$$(S_{1'} = (-1)^{j_1 - m_1})$$

Видно, что согласно определению (3.4), переход во внутреннюю систему представляет собой линейное, но не унитарное преобразование величин S и K , причем коэффициенты C_I - пока свободные параметры, которые определяются затем динамикой задачи. Поскольку трансформация (3.6), (3.7) не унитарна, то нужно рассмотреть соотношения между величинами

$$\bar{K}_{12}(I, I', I'') = \langle I I | a_1^+ a_2^+ | I' I'' \rangle; \quad \bar{S}_{12}(I, I', I'') = \langle I I | a_2 a_1^+ | I' I'' \rangle \quad (3.8)$$

$$\mu \bar{K}_{12}(I) = \frac{\langle I | \hat{P}_z^+ a_1^+ a_2^+ | I \rangle}{\langle I | \hat{P}_z^+ | I \rangle}; \quad \bar{S}_{12}(I) = \frac{\langle I | \hat{P}_z^+ a_2 a_1^+ | I \rangle}{\langle I | \hat{P}_z^+ | I \rangle}$$

отдельно. После простых преобразований аналогично (3.6), (3.7) получим:

$$\bar{S}_{12}(I) = \frac{1}{C_I} \sum_{I', M'} C_{I'} \bar{S}_{12}(I', I', 0); \quad \bar{K}_{12}(I) = \frac{1}{C_I} \sum_{I', M'} C_{I'} \bar{K}_{12}(I', I', 0) \quad (3.9)$$

$$\bar{S}_{12}(I, I', I'') = \frac{C_I(2I'+1)}{C_{I'}(2I'+1)} \sum_{JK} \langle j_2 -m_2 j_1 m_1 | JK \rangle S_2 \langle I' I' J K | I I \rangle + \sum_{K' M' M''} \langle I' 0 J K' | I I K' \rangle \langle j_2 -m_2 j_1 m_1 | J K' \rangle S_2 \bar{S}_{1'2'}(I)$$

$$\bar{K}_{12}(I, I', I'') = \frac{C_I(2I'+1)}{C_{I'}(2I'+1)} \sum_{JK} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JK \rangle \langle I' I' J K | I I \rangle + \sum_{K' M' M''} \langle I' 0 J K' | I I K' \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J K' \rangle \bar{K}_{1'2'}(I) \quad (3.10)$$

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства во внутренней системе, определенной уравнениями (3.3)-(3.10). Если \hat{T} - одночастичный оператор

$$\hat{T} = \sum_{12} t_{12} a_1^+ a_2$$

то величину $t = \sum_{12} t_{12} S_{12}(I)$ мы будем называть его средним значением во внутренней системе. Вычисляя матричные элементы оператора углового момента, в силу свойств состояния $|I, M\rangle$ имеем

$$\langle I M | \hat{J}_\mu | I' M' \rangle = \delta_{II'} \langle I' M' | \mu | I M \rangle \sqrt{I(I+1)} = \sum_{\lambda} f_{\lambda}(\mu) \langle j_{\lambda} m_{\lambda} j_{\lambda} - m_{\lambda} | \mu \rangle S_{\lambda} S_{\lambda'}(I M, I' M') \quad (3.11)$$

$$f_{\lambda}(\mu) = \sqrt{\frac{2\lambda(\lambda+1)(2\lambda+1)}{3}}; \quad \hat{J}_0 = \hat{J}_z; \quad \hat{J}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{J}_x \pm i \hat{J}_y) \quad (3.11)$$

После перехода во внутреннюю систему с помощью уравнения (3.7) получим:

$$\sum_{K' \lambda \lambda'} \langle I' 0 \lambda K' | I K \rangle \langle j_{\lambda} m_{\lambda} j_{\lambda} - m_{\lambda} | \lambda K' \rangle \epsilon^{h-m_{\lambda}} f_{\lambda}(\mu) S_{\lambda}(\lambda) = \delta_{II'} \sqrt{I(I+1)} \quad (3.12)$$

Используя свойства ортогональности коэффициентов Клебша-Гордона, найдем решение ур. (3.12):

$$\sum_{\lambda \lambda'} f_{\lambda}(\mu) \langle j_{\lambda} m_{\lambda} j_{\lambda} - m_{\lambda} | \lambda K' \rangle \epsilon^{h-m_{\lambda}} S_{\lambda}(\lambda) = \sqrt{I(I+1)} \langle I 0 \lambda K | I K \rangle \quad (3.13)$$

что эквивалентно уравнениям

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_{\lambda} J_{x\lambda} S_{\lambda}(\lambda) = \sqrt{I(I+1)} \\ J_y &= \sum_{\lambda} J_{y\lambda} S_{\lambda}(\lambda) = 0 \\ J_z &= \sum_{\lambda} J_{z\lambda} S_{\lambda}(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

т.е. оператор углового момента "расположен" во внутренней системе вдоль X-оси.

В общем случае можно показать, что если оператор $\hat{T}_{\lambda\mu}$ является сферическим тензорным оператором, то во внутренней системе его компоненты имеют следующую симметрию

$$t_{\lambda\mu} = \epsilon^{\lambda} t_{\lambda-\mu} \quad (3.15)$$

Эта симметрия — прямое следствие того, что в рассмотренной системе существуют только состояния с четным спином.

Обобщенная матрица плотности (3.2) и выражение для энергии состояний (3.1) использовались и в работах Беляева и Зелевинского¹⁾. Для низко спиновых состояний сильно деформированных ядер был получен ряд интересных результатов²⁾.

Но использованная там теория возмущений не позволяет выйти за рамки адиабатического предела. Чтобы выяснить связь с этими работами, мы здесь приводим переход во внутреннюю систему другим способом эквивалентным (3.6-3.10).

Поскольку состояния ядра однозначно определены спином I и проекцией M, мы можем их написать в виде D-функций:

$$|I M\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{M0}^I(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.16)$$

Тензорный оператор $\hat{T}_{\lambda\mu}$, действующий в пространстве этих функций, можно тогда представить в следующем виде:

$$\hat{T}_{\lambda\mu} = \sum_{\kappa} t_{\lambda\kappa}(\hat{Q}) D_{\mu\kappa}^{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.17)$$

где \hat{Q} — оператор углового момента во внутренней системе координат (смотри нп.3), действующий на углы Эйлера α, β, γ . Вычисляя матричные элементы этого оператора по состояниям (3.16), мы получим:

$$\begin{aligned} \langle I M | T_{\lambda\mu} | I' M' \rangle &= \sqrt{\frac{(2I+1)(2I'+1)}{8\pi^2}} \int d\omega D_{M0}^{*I}(\omega) \sum_{\kappa} t_{\lambda\kappa}(\hat{Q}) D_{\mu\kappa}^{\lambda}(\omega) D_{M'0}^{I'}(\omega) \\ &= \sqrt{\frac{(2I+1)(2I'+1)}{8\pi^2}} \langle I' M' \lambda \mu | I M \rangle \sum_{\kappa} \langle I' 0 \lambda \kappa | I \kappa \rangle * \\ & * \int d\omega D_{M0}^{*I}(\omega) t_{\lambda\kappa}(\hat{Q}) D_{\mu\kappa}^I(\omega) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Если обозначить матричный элемент оператора во внутренней системе $t_{\lambda\mu}(I)$, то из (3.18) следует

$$\begin{aligned} \langle I M | T_{\lambda\mu} | I' M' \rangle &= \sqrt{\frac{2I'+1}{2I+1}} \langle I' M' \lambda \mu | I M \rangle \sum_{\kappa} \langle I' 0 \lambda \kappa | I \kappa \rangle t_{\lambda\kappa}(I) \quad (3.19) \\ t_{\lambda\kappa}(I) &= \frac{2I+1}{8\pi^2} \int d\omega D_{M0}^{*I}(\omega) t_{\lambda\kappa}(\hat{Q}) D_{\mu\kappa}^I(\omega) \end{aligned}$$

Здесь W^{P-P} и W^{P-L} — эффективные взаимодействия во внутренней системе в каналах частица-частица и, соответственно, частица-дырка, которые зависят лишь от геометрических факторов и от матричных элементов взаимодействия V .

$$W_{1234}^{P-P}(I, I') = \sum_{\substack{1'2'3'4' \\ JK'R'}} \delta_{1'2'3'4'} \delta_{1'2'3'4'} \delta_{1'2'3'4'} \delta_{1'2'3'4'} V_{1'2'3'4'} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JK \rangle \langle I' N' JK | I N \rangle \langle I' 0 JK' | I K' \rangle + \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JK \rangle \langle j_3 m_3 j_4 m_4 | LR \rangle \langle I N L R | I' N' \rangle \langle I' 0 L R' | I' R' \rangle + (-)^{J+R+R'} \langle j_3 m_3 j_4 m_4 | LR \rangle \quad (4.7)$$

$$W_{1234}^{P-L}(I, I') = \sum_{\substack{1'2'3'4' \\ JK'R'}} \delta_{1'2'3'4'} \delta_{1'2'3'4'} \delta_{1'2'3'4'} \delta_{1'2'3'4'} V_{1'2'3'4'} \langle j_1 m_1 j_4 -m_4 | JK \rangle \langle I' N' JK | I N \rangle \langle I' 0 JK' | I K' \rangle + \langle j_1 m_1 j_4 -m_4 | JK \rangle S_4 S_4' \langle j_2 m_2 j_3 -m_3 | LR \rangle \langle I N L R | I' N' \rangle + \langle I' 0 L R' | I' R' \rangle \langle j_2 m_2 j_3 -m_3 | L' R' \rangle S_3 S_3'$$

Теперь можно попробовать минимизировать выражение

$$\mathcal{E}_{I N} - \lambda_I \sum_n S_n(I) + \sum_n \frac{1}{2} E_n (B_{in}(I) \tilde{B}_{in}(I) + A_{in}(I) \tilde{A}_{in}(I)) - \Omega_I \sum_{12} j_{12} S_{12}(I) \quad (4.8)$$

Эта процедура соответствовала бы ур. (2.7) в теории ХФБ. Лагранжев множитель λ_I обеспечивает правильное среднее число частиц в состоянии $|I N\rangle$, присутствие параметров E_i гарантирует выполнение нормировочного условия (4.5) и величину Ω_I можно выбрать так, чтобы оператор углового момента \hat{J}_μ имел правильные матричные элементы в состояниях $|I N\rangle$, согласно формулам (3.II) — (3.I4). Условие $j_1 = j_2 = 0$ здесь из-за симметрии задачи автоматически выполняется и не требует введения дополнительных лагранжевых множителей.

Можно легко убедиться, что выражение (4.8) как функция от I содержит и амплитуды B, \tilde{B}, A и \tilde{A} , зависящие от других

спинов. Поэтому его отдельная минимизация для каждого спина приводит к системе переопределенных уравнений для B, \tilde{B}, A и \tilde{A} и является не очень разумной.

Обобщение уравнения ХФБ для вычисления возбужденных состояний ядер было получено и в группе Кермана и Клейна⁴⁾. В работах⁵⁾ было показано, что вместо энергий основного состояния в теории ХФБ нужно минимизировать сумму энергий всех состояний рассматриваемой полосы относительно амплитуд типа A, \tilde{A}, B и \tilde{B} , обеспечивая выполнение всех дополнительных условий лагранжевыми множителями. К сожалению, сложность этой схемы позволяет изучение только модельных задач. Но для нашей цели мы можем использовать вариационный подход, найденный в работах⁵⁾. Следовательно, мы должны получить уравнения, определяющие амплитуды A, B, \tilde{A} и \tilde{B} из условия, что

$$\delta \mathcal{E} = 0, \quad (4.9)$$

где

$$\mathcal{E} = \sum_{I N} \left\{ \mathcal{E}_{I N} - \lambda_I \sum_n S_n(I) + \frac{1}{2} \sum_{iA} E_i(I) (B_{iA}(I) \tilde{B}_{iA}(I) + A_{iA}(I) \tilde{A}_{iA}(I)) - \Omega_I \sum_{12} j_{12} S_{12}(I) \right\} \quad (4.10)$$

Эти уравнения являются правильным обобщением уравнений ХФБ (2.7), (2.8).

Подставляя $S_{12}(I)$ и $\tilde{S}_{12}(I)$ в симметризованном виде, т.е.

$$S_{12}(I) = \frac{1}{2} \left[\sum_i (B_{i1}(I) \tilde{B}_{i2}(I) - \tilde{A}_{i1}(I) A_{i2}(I)) + d_{12} \right] \\ \tilde{S}_{12}(I) = \frac{1}{2} \left[\sum_i (\tilde{A}_{i1}(I) A_{i2}(I) - B_{i1}(I) \tilde{B}_{i2}(I)) + d_{12} \right] \quad (4.11)$$

придем согласно (4.2), (4.6), (4.9), (4.10) и (4.11) к уравнениям

$$\begin{bmatrix} h & \Delta \\ -\bar{\Delta} & -h^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} h^+ & \bar{\Delta} \\ -\Delta & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

12.

причем

$$h_{12} = (e_1 - \lambda) \delta_{12} - \Omega \chi_{12} + 4 \sum_{34\Gamma'} W_{1342}^{P\bar{P}}(\Gamma, \Gamma') S_{34}(\Gamma') \quad (4.14)$$

$$\bar{\Delta}_{12} = -\Delta_{21} = 2 \sum_{34\Gamma'} W_{1234}^{P\bar{P}}(\Gamma, \Gamma') K_{34}(\Gamma')$$

Уравнения (4.12), (4.13) вместе с условием нормировки (4.5) и дополнительными условиями

$$\sum_{12} \chi_{12} S_{12}(\Gamma) = \sqrt{I(\Gamma)} ; \sum_{12} S_{12}(\Gamma) = N \quad (4.15)$$

определяют набор амплитуд $A_{i1}, \tilde{A}_{i1}, B_{i1}$ и \tilde{B}_{i1} . Более подробно мы обсудим решение этой системы в разделе 6; Здесь мы отметим только некоторые общие свойства.

а) Условия (4.5) не нормирует величины (A_{i1}, B_{i1}) и $(\tilde{A}_{i1}, \tilde{B}_{i1})$ отдельно, а только их произведение, но оставшийся произвол не меняет матрицу плотности и тензор спаривания, т.е. физические результаты.

б) Хотя гамильтониан (4.14), определяющий среднее поле, не эрмитов; его собственные значения E_i волновые функции (A, B) ; (\tilde{A}, \tilde{B}) остаются вещественными, причем, если (A, B) и (\tilde{A}, \tilde{B}) дают собственное состояние с энергией E ; то (B, A) и (\tilde{B}, \tilde{A}) являются состояниями с энергией $-E$.

в) Условие самосогласования (4.14) представляет собой разностное уравнение относительно углового момента. Его решение тре-

13.

бует дополнительных начальных условий.

д) Вследствие симметрии уравнений (4.12), (4.13) и нормировки (4.5) имеет место соотношение

$$S = S^2 - \bar{K} \cdot K \quad (4.16)$$

которое справедливо и в теории ХФБ для функций (2.3), (2.4).

5. Обсуждение решения в случае простых спаривательных и квадрупольных сил

Предположим, что гамильтониан (2.1) можно аппроксимировать сепарабельным взаимодействием

$$H = \sum_i e_i a_i^+ a_i - \frac{G}{4} P^+ P - \frac{\chi}{2} \sum_{\mu} Q_{2\mu} Q_{2\mu} \epsilon^{\mu} \quad (5.1)$$

где

$$P^+ = \sum_1 a_1^+ a_{-1}^+ S_1 ; \hat{Q}_{2\mu} = \sum_{12} q_{2\mu 12} a_1^+ a_2 \quad (5.2)$$

Подставим взаимодействие (5.2), (5.1) в формулы (4.12), (4.13). Тогда получим

$$\sum_2 \begin{bmatrix} (e_1 - \lambda) \delta_{12} - \epsilon_0 q_{12}^0 - \epsilon_1 q_{12}^1 - \epsilon_2 q_{12}^2 - \Omega \chi_{12} & \Delta \delta_{1-2} S_2 \\ -\Delta \delta_{1-2} S_2 & -(e_1 - \lambda) \delta_{12} + \epsilon_0 q_{12}^0 - \epsilon_1 q_{12}^1 - \epsilon_2 q_{12}^2 - \Omega \chi_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i2} \\ B_{i2} \end{bmatrix} = E_i \begin{bmatrix} A_{i1} \\ B_{i1} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Здесь

$$q_{12}^0 = \langle 11^+ Y_{20} | 2 \rangle ; q_{12}^2 = \langle 11^+ (Y_{22} + Y_{2-2}) \frac{1}{\sqrt{2}} | 2 \rangle ; q_{12}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 11^+ (Y_{21} + Y_{2-1}) | 2 \rangle \quad (5.4)$$

Условия самосогласования, которые определяют параметры деформации и щели, имеет следующий вид:

$$E_k(\Gamma) = \chi (\sqrt{2} + \delta_{k0} (1 - \sqrt{2})) \sum_{\Gamma'} \langle \Gamma k 2 - k | \Gamma' 0 \rangle (\sqrt{2} + \delta_{k0} (1 - \sqrt{2})) + \chi \langle \Gamma 0 2 k' | \Gamma' k' \rangle Q_{k'}(\Gamma') \quad (5.5a)$$

(k=0,1,2)

$$Q_{\kappa}(\Gamma) = \sum_{i_1 i_2} q_{i_1 i_2}^{\kappa} B_{i_1}(\Gamma) \tilde{B}_{i_2}(\Gamma) ; N = \sum_{i_1} B_{i_1}(\Gamma) \tilde{B}_{i_1}(\Gamma)$$

$$\Delta(\Gamma) = \frac{C}{2} \sum_{i_1} A_{i_1}(\Gamma) \tilde{B}_{i_1}(\Gamma) S_1 ; \overline{\Gamma(\Gamma+1)} = \sum_{i_2} j_{\kappa i_2} B_{i_1}(\Gamma) \tilde{B}_{i_2}(\Gamma) \quad (5.56)$$

Видно, что неэрмитовость гамильтониана в уравнениях (5.3) возникает из-за присутствия члена $\varepsilon_1 q_{i_1 i_2}^1$ в потенциальной энергии. Оператор $\frac{1}{12} r^2 (Y_{21} + Y_{2-1}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5}} Y_{2z}$ антиэрмитов и его матричные элементы антисимметричны, но вещественны³⁾. Появление здесь оператора $q_{i_1 i_2}^1$ является естественным следствием выбора осей внутренней координатной системы в уравнении (3.14). Поскольку x -ось этой системы уже направлена вдоль оператора углового момента, то тензор квадрупольного момента не приводится к диагональному виду. Параметры щели Δ в верхней и нижней строках уравнения (5.3) не отличаются; поскольку трансформация (3.6)-(3-10) для скалярных операторов P и P^+ является унитарной. Уравнение для \tilde{B}_{i_1} и \tilde{B}_{i_2} просто получается заменой в (5.3) ε_1 на $-\varepsilon_1$.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести оператор

$$\hat{S}_{\Gamma\mu} = r^2 Y_{\Gamma\mu}(\theta, \varphi) = r^2 \sqrt{\frac{2\Gamma+1}{\pi}} \sum_{\kappa} \langle I+2\mu, 0, 2\kappa | I, \mu \rangle Y_{2\kappa}(\theta, \varphi) \quad (\mu=0, \pm 1) \quad (5.6)$$

Вычисляя матричный элемент $\frac{\langle I \hat{P}_z^+ \hat{S}_{\Gamma\mu} |}{\langle I \hat{P}_z^+ |}$, с помощью (3.3), (3.5) получим:

$$A_{\mu}(\Gamma) = \frac{\langle I \hat{P}_z^+ \hat{S}_{\Gamma\mu} |}{\langle I \hat{P}_z^+ |} = \frac{C_{\Gamma+2\mu}}{C_{\Gamma}} \cdot \langle I || r^2 Y_2 || I+2\mu \rangle \frac{(2\Gamma+1)}{(2\Gamma+4\mu+1)} \quad (5.7)$$

т.е. матричный элемент этого оператора во внутренней системе пропорционален амплитуде квадрупольного перехода между состояниями со спинами I и $I+2\mu$. Используя это свойство, мы можем

записать (5.3) следующим образом:

$$\sum_2 \begin{bmatrix} \delta_{12}(e_1 - \lambda) - \sum_{\mu} \eta_{\mu}(\Gamma) (\hat{S}_{\Gamma\mu})_{12} \frac{1}{(2\Gamma+1)} & \Delta \delta_{1-2} S_2 \\ -\Omega j_{\kappa 12} & -\delta_{12}(e_1 - \lambda) + \frac{1}{2\Gamma+1} \sum_{\mu} \eta_{\mu}(\Gamma) (\hat{S}_{\Gamma\mu}^+)_{12} \\ -\Delta \delta_{1-2} S_2 & -\Omega j_{\kappa 12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i_2} \\ B_{i_2} \end{bmatrix} = E_i \begin{bmatrix} A_{i_1} \\ B_{i_1} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Условие самосогласования для параметров деформации $\eta_{\mu}(\Gamma)$ имеет теперь очень простой вид:

$$\eta_{\mu}(\Gamma) = \chi A_{-\mu}(\Gamma+2\mu) \quad (5.9)$$

$$A_{\mu}(\Gamma) = \sum_{i_1 i_2} (\hat{S}_{\Gamma\mu})_{i_1 i_2} B_{i_1}(\Gamma) \tilde{B}_{i_2}(\Gamma)$$

Как уже отмечалось, это уравнение представляет собой разностное уравнение относительно спина I . Допустим, мы знаем параметры деформации η_{μ} и матричные элементы A_{μ} для спина $I-2$ и хотим решить уравнения (5.8) для состояния со спином I . Тогда мы можем вычислить деформации $\eta_{\mu}(\Gamma)$ следующим образом: $\eta_{-1}(\Gamma)$ мы получаем просто из (5.9); поскольку мы знаем

$$\eta_{-1}(\Gamma) = \chi A_1(\Gamma-2) \quad (5.10)$$

для $\eta_0(\Gamma)$ есть "стандартное" условие самосогласования

$$\eta_0(\Gamma) = \chi A_0(\Gamma) \quad (5.11)$$

параметр $\eta_1(\Gamma)$ нужно определить из требования, чтобы соответствующая (5.9) величина $A_{-1}(\Gamma)$ имела нужное значение,

$$A_{-1}(\Gamma) = \eta_1(\Gamma-2) \cdot \frac{1}{\chi} \quad (5.12)$$

Таким образом, уравнение (5.8) для заданного значения I однозначно решается, если только известны свойства ядра для предыдущего

спина. Остается решить задачу для спина $\Gamma=0$, поскольку там нет предыдущего спина и схема, предположенная нами, не применима.

Из определений (3.4), (4.2), (5.2) видно, что

$$\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = \sigma \quad (5.13)$$

т.е. основное состояние нашей полосы является аксиально-симметричным. Но деформация $\varepsilon_0(0)$ остается в рамках этого подхода не определенной и играет роль начального условия разностного уравнения. Естественно предполагать, что энергия основного состояния отдельно минимизируется и, что для определения свойств этого состояния годятся стандартные уравнения ХФБ, описанные в разделе 2. Здесь нам хочется еще заметить, что решение (5.8), (5.9) требует выполнения пяти условий самосогласования $(\Omega, \lambda, \Delta, \eta_0, \eta_1)$. Такое же число условий возникает и в модели принудительного движения⁵⁾ (там $\beta, \gamma, \Delta, \lambda, \Omega$), так что численное решение нашей задачи не сложнее, чем в названной модели.

6. Модель принудительного движения как предельный случай общей теории

Предположим в уравнениях (5.5), что спин $\Gamma \gg 2$ и, что квадрупольный момент $Q_k(\Gamma)$ слабо зависит от спина, т.е.

$Q_k(\Gamma) \approx Q_k(\Gamma+2)$. Тогда, используя асимптотические свойства коэффициентов Клебша-Гордона, найдем из (5.5):

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\Gamma) &= \chi Q_0(\Gamma) \\ \varepsilon_2(\Gamma) &= \chi Q_2(\Gamma) \end{aligned} \quad \text{и} \quad \varepsilon_1(\Gamma) = -\chi Q_1(\Gamma) \quad (6.10)$$

Поскольку в таком приближении вклад квадрупольного оператора $Q_1(\Gamma)$ в полную энергию E_Γ положителен, а именно равен

$\frac{\chi}{2} Q_1^2(\Gamma)$; ($\chi > 0$), то ε_1 — деформация является не выгодной и итерационное решение (5.3) с условиями согласования (6.10) дает $\varepsilon_1(\Gamma) = 0$.

Таким образом, в рассмотренном выше приближении

$$\Gamma \gg 2 \quad \text{и} \quad Q_k(\Gamma) \approx Q_k(\Gamma+2) \quad (6.2)$$

решение нашей системы просто эквивалентно самосогласованной модели принудительного движения⁵⁾. Представляют интерес те случаи, где отклонение от этой модели является существенным, т.е. где эта модель не работает. Это можно ожидать:

- а) в области малых спинов, где асимптотическое выражение для коэффициентов Клебша-Гордона несправедливо;
- б) в переходной области, где деформация сильно меняется с ростом спина;
- в) в области фазового перехода, где все величины, характеризующие состояние ядра, меняются скачком.

7. Решение задачи для простых сил

Чтобы почувствовать количественное отличие предлагаемого метода от модели принудительного вращения, рассмотрим решение задачи для квадрупольных сил, предполагая в качестве сферического одночастичного потенциала осцилляторную яму. Гамильтониан среднего поля, который нужно привести к диагональному виду, имеет тогда вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_m^2}{2m} + \omega_0^2 r^2 + \varepsilon_0(x) q_0 - \varepsilon_1(x) q_1 - \varepsilon_2(x) q_2 - \Omega x \hat{L}_x \quad (7.1)$$

$$q_0 = 2z^2 - x^2 - y^2; \quad q_1 = -2iyz; \quad q_2 = \sqrt{3}(x^2 - y^2); \quad L_x = -i\left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Диагонализация в представлении осцилляторных квантов легко производится и в результате получим два разных собственных значения ω_+ и ω_-

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_y^2 + \omega_z^2}{2} + \Omega_I^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_z^2)^2 + 8\Omega_I^2(\omega_y^2 + \omega_z^2) - 16\epsilon^2}$$

$$\omega_x^2 = \omega_0^2 + \frac{2}{m} (\epsilon_0(I) - \sqrt{3} \epsilon_2(I)); \quad \omega_y^2 = \omega_0^2 + \frac{2}{m} (\epsilon_0(I) + \sqrt{3} \epsilon_2(I)) \quad (7.2)$$

$$\omega_z^2 = \omega_0^2 - \frac{4}{m} \epsilon_0(I); \quad \epsilon = \frac{\epsilon_1(I)}{m}$$

Зная собственные векторы гамильтониана (7.1) можно вычислить средние значения квадрупольных операторов и углового момента ядра.

$$Q_0 = \langle \sum_{i=1}^A 2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2 \rangle = \frac{1}{m(\omega_+^2 - \omega_-^2)} \left\{ \frac{2(n_+ + \frac{1}{2})}{\omega_+} (\omega_+^2 - \omega_y^2 + \Omega_I^2) - \frac{2(n_- + \frac{1}{2})}{\omega_-} (\omega_-^2 - \omega_y^2 + \Omega_I^2) - \frac{(n_+ + \frac{1}{2})}{\omega_+} (\omega_+^2 - \omega_z^2 + \Omega_I^2) + \frac{(n_- + \frac{1}{2})}{\omega_-} (\omega_-^2 - \omega_z^2 + \Omega_I^2) \right\} - \frac{(n_x + \frac{1}{2})}{m\omega_x} + \Omega_I^2 \quad (7.3)$$

$$Q_2 = \sqrt{3} \langle \sum_{i=1}^A x_i^2 - y_i^2 \rangle = \sqrt{3} \frac{(n_x + \frac{1}{2})}{m\omega_x} - \sqrt{3} \frac{(n_+ + \frac{1}{2})}{m(\omega_+^2 - \omega_-^2)} \left\{ \frac{(n_+ + \frac{1}{2})}{\omega_+} (\omega_+^2 - \omega_z^2 + \Omega_I^2) - \frac{(n_- + \frac{1}{2})}{\omega_-} (\omega_-^2 - \omega_z^2 + \Omega_I^2) \right\} \quad (7.4)$$

$$Q_1 = -2i \langle \sum_{i=1}^A z_i y_i \rangle = \frac{4\epsilon}{m(\omega_+^2 - \omega_-^2)} \left(\frac{(n_+ + \frac{1}{2})}{\omega_+} - \frac{(n_- + \frac{1}{2})}{\omega_-} \right) \quad (7.5)$$

$$L_x = \langle \sum_{i=1}^A y_i p_{zi} - z_i p_{yi} \rangle = \Omega_I \left\{ \frac{(2\omega_+^2 + \omega_z^2 + \omega_y^2 - 2\Omega_I^2)(n_+ + \frac{1}{2}) - (2\omega_-^2 + \omega_z^2 + \omega_y^2 - 2\Omega_I^2)(n_- + \frac{1}{2})}{(\omega_+^2 - \omega_-^2) \cdot \omega_-} - \frac{(2\omega_+^2 + \omega_z^2 + \omega_y^2 - 2\Omega_I^2)(n_+ + \frac{1}{2}) - (2\omega_-^2 + \omega_z^2 + \omega_y^2 - 2\Omega_I^2)(n_- + \frac{1}{2})}{(\omega_+^2 - \omega_-^2) \cdot \omega_+} \right\} \quad (7.6)$$

Здесь n_+ (n_- , n_x) — сумма чисел осцилляторных квантов всех A частиц с энергией ω_+ (ω_- , ω_x). Технические подробности можно найти в работе Зелевинского⁶⁾. Там показано, что с квазиклассической точностью числа осцилляторных квантов системы частиц в основном состоянии обратно пропорциональны энергиям этих квантов, т.е.:

$$n_+ + \frac{1}{2} = \frac{C}{\omega_+}; \quad n_- + \frac{1}{2} = \frac{C}{\omega_-}; \quad n_x + \frac{1}{2} = \frac{C}{\omega_x} \quad (7.7)$$

и формулы (7.3)–(7.6) можно записать в следующем виде:

$$Q_0 = \frac{C}{m} \left\{ \frac{2\omega_+^2 - \omega_z^2 - \Omega_I^2}{\omega_+^2 \omega_-^2} + \frac{1}{\omega_x^2} \right\} \quad (7.8)$$

$$Q_2 = \sqrt{3} \frac{C}{m} \left\{ \frac{1}{\omega_x^2} - \frac{(\omega_z^2 - \Omega_I^2)}{\omega_+^2 \omega_-^2} \right\} \quad (7.9)$$

$$Q_1 = -\frac{4\epsilon C}{m\omega_+^2 \omega_-^2} \quad (7.10)$$

$$L_x = \Omega_I \frac{C}{\omega_+^2 \omega_-^2} (\omega_+^2 + \omega_z^2 - 2\Omega_I^2) \equiv \Omega_I \mathcal{J}_x \quad (7.11)$$

Поскольку момент инерции \mathcal{J}_x в случае, когда $I = \Omega_I = 0$ и деформация $\epsilon_k(0) = 0$, должен быть равен $\frac{2}{5} m A R^2$ (R — радиус ядра), с помощью (7.11) для C получаем:

$$C = \frac{2}{5} A m \omega_0^2 R^2 \quad (7.12)$$

Формулы (7.8)–(7.11) дают в аналитическом виде зависимости средних значений квадрупольных операторов и оператора углового момента от параметров деформаций $\epsilon_0(I)$, $\epsilon_1(I)$ и $\epsilon_2(I)$. Подставляя эти величины в уравнение (5.5а), получим вместе с условием $L_x = \sqrt{I(I+1)}$ замкнутое разностное уравнение, которое для каждого спина определяет деформацию ядра. Решение этого уравнения можно получить только численно. При этом требуется еще как начальное условие задавать деформацию $\epsilon_0(0)$. Таким образом, решение определяется величинами ω_0 , ϵ , A , R и $\epsilon_0(0)$, которые мы выбрали следующим образом:

$$A=154; \omega_0=41 A^{-1/3} \text{ MeV}; R=1.2 \cdot A^{1/3} \text{ fm} \quad (7.13)$$

$$\chi=0.333 \frac{m \omega_0^2}{R^2}; \epsilon_0(0)=0.077 m \omega_0^2$$

$\epsilon_0(0)$ выбрано так, что решение задачи для основного состояния совпадает с решением модели принудительного движения. Значение χ гарантирует для низкоспиновых состояний величины деформаций, типичные для редкоземельных ядер.

На рис. I показаны значения деформаций ϵ_0 , ϵ_1 и ϵ_2 как функции углового момента. Видно, что абсолютное значение деформаций $\epsilon_1(I)$, которая в модели принудительного вращения равна нулю, составляет примерно половину деформации $\epsilon_2(I)$ и плавно растет с ростом спина. На рисунке 2 показаны параметры деформаций β и γ в модели принудительного вращения и в нашем подходе. Здесь γ и β определены следующим образом:

$$\frac{Q_0}{r^2} = \beta \cos \gamma; \quad \frac{Q_2}{r^2} = \beta \sin \gamma; \quad r^2 \equiv \left\langle \sum_{i=1}^A (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \right\rangle \quad (7.14)$$

В модели принудительного вращения для малых спинов ядро имеет вытянутый вид, и ось вращения перпендикулярна оси симметрии. Затем γ растет и при спине около 110 \hbar происходит фазовый переход, т.е. становится выгодным другое решение задачи⁶⁾. Ядро приобретает сплюснутый вид, ось вращения совпадает с осью симметрии и далее γ остается равным 60° . Для малых спинов β и γ , вычисленные в нашей модели, совпадут с соответствующими величинами модели принудительного вращения, но в области фазового перехода разница становится существенной. Поскольку здесь производная $\frac{d\gamma}{dI}$ очень велика, то структура разностного уравнения (5.5a) сильно влияет на равновесное значение деформации и

и с ростом спина γ "колеблется" вокруг 60° . Момент инерции и полная энергия в нашей модели мало отличаются от модели принудительного вращения. Энергия и момент инерции получаются на 0,5%–2% выше, чем соответствующие величины в квазиклассическом подходе.

Нам хотелось бы еще заметить, что эти результаты, конечно, справедливы лишь для простой модели (7.1) и, что спаривание и оболочечные эффекты, особенно в низко спиновой области, могут привести к существенным изменениям.

8. Решение задачи в пределе малых деформаций

Весьма интересным является применение этого подхода к вычислению характеристик слабо деформированных ядер, где наблюдались так называемые квазиротационные полосы. Здесь мы обсудим предел общего решения, когда параметры деформации ϵ_k (смотри (5.5)) малы и применима теория возмущений относительно этих величин.

Предполагая простое взаимодействие (5.1), после унитарного преобразования

$$H_{i1} = \sum_i W_{i1} U_a H_{i2} + W_{-12} V_a S_1 B_{i2}; \quad \tilde{H}_{i1} = \sum_i W_{i1} U_a \tilde{H}_{i2} + W_{-12} V_a S_1 \tilde{B}_{i2} \quad (8.1)$$

$$B_{i1} = \sum_i S_1 W_{-12} V_a H_{i2} + W_{i1} U_a B_{i2}; \quad \tilde{B}_{i1} = \sum_i W_{-12} S_1 V_a \tilde{H}_{i2} + W_{i1} U_a \tilde{B}_{i2}$$

Найдем, что матрица плотности $S_{ab} = \sum_i B_{i2} \tilde{B}_{i1}$ в низшем порядке пропорциональна ϵ^2 , а для тензора спаривания имеем:

$$K_{2\mu}(a,b) = \sum_{i_1, i_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | 2\mu \rangle B_{i_1} \tilde{H}_{i_2} \sim \epsilon \quad (8.2)$$

$$\bar{K}_{2\mu}(a,b) = \sum_{i_1, i_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | 2\mu \rangle \tilde{B}_{i_1} H_{i_2} \sim \epsilon$$

в то время как $K_{J\mu}(a,b)$ для $J+2$ пропорционален ϵ^3 .
Здесь u_a, v_a — коэффициенты преобразования Боголюбова, определенные стандартным образом: ($e_a = e_1, f_a = f_1$)

$$2u_a v_a = \frac{\Delta}{E_a}; \quad (u_a^2 - v_a^2) = \frac{e_a - \lambda}{E_a}; \quad u_a^2 + v_a^2 = 1 \quad (8.3)$$

$$E_a = \sqrt{(e_a - \lambda)^2 + \Delta^2}; \quad 1 = \frac{G}{4} \sum_a \frac{2j_a + 1}{E_a}; \quad \sum_a (2j_a + 1) v_a^2 = N$$

(N — число частиц)

Матрица $W_{1\mu}$ диагонализует оператор J_x и имеет следующие свойства симметрии:

$$W_{1\mu} \equiv d_{m_1 m_2}^{j_1 j_2}(\frac{\pi}{2}); \quad \sum_2 j_{x12} W_{2\mu} = m_2 W_{1\mu}; \quad W_{-1\mu} S_1 = -W_{1\mu} S_2 \quad (8.4)$$

После преобразования (8.1) энергии состояния $\epsilon_{I\mu}$ (4.6) можно записать с точностью до второго порядка по параметру ϵ следующим образом

$$\begin{aligned} \epsilon_{I\mu} = E_0 + \sum_I E_a S_{2+}(I) - \frac{\epsilon}{40} \frac{1}{\sqrt{2I+1}} \sum_I \sqrt{2I+1} \{ \langle I'020|I0 \rangle (\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{Q}_2(I) - \frac{1}{2} \bar{Q}_0(I)) \\ + \langle I'022|I2 \rangle (\frac{1}{2} \bar{Q}_2(I) + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{Q}_0(I)) + \sqrt{2} \langle I'021|I1 \rangle \bar{Q}_{-2}(I) \} \{ \langle I020|I'0 \rangle (\frac{\sqrt{3}}{2} \\ + \bar{Q}_2(I) - \frac{1}{2} \bar{Q}_0(I)) + \langle I022|I'2 \rangle (\frac{1}{2} \bar{Q}_2(I) + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{Q}_0(I)) + \sqrt{2} \langle I021|I'1 \rangle \bar{Q}_{-2}(I) \} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_0 = \sum_a (2j_a + 1) v_a^2 e_a - \frac{\Delta^2}{G} \\ \bar{Q}_2(I) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{ab} Q_{ab} (K_{22}(a,b) + K_{2-2}(a,b) + \bar{K}_{22}(a,b) + \bar{K}_{2-2}(a,b)) \\ \bar{Q}_0(I) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{ab} Q_{ab} (K_{20}(a,b) + \bar{K}_{20}(a,b)) \\ \bar{Q}_{-2}(I) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{ab} Q_{ab} (K_{22}(a,b) - K_{2-2}(a,b) - \bar{K}_{22}(a,b) + \bar{K}_{2-2}(a,b)) \\ \mu Q_{ab} \equiv (u_a v_b + v_a u_b) \langle a || r^2 Y_2 || b \rangle \end{aligned} \quad (8.6)$$

При вычислении энергий (8.5) мы использовали спаривательное и квадрупольное взаимодействия (5.1), а также свойства (8.3), (8.4) амплитуд преобразования (8.1).

В силу нормировочного условия (4.16) имеет место следующее соотношение между S и K , справедливое также с точностью до второго порядка относительно ϵ ,

$$\sum_{m\mu} m_\mu S_{2\mu} = \sum_{a,b,\mu} \mu K_{2\mu}(a,b) \bar{K}_{2\mu}(a,b) \quad (8.7)$$

$$\sum_{m\mu} S_{2\mu} = \sum_{b,\mu} K_{2\mu}(a,b) \bar{K}_{2\mu}(a,b)$$

Следуя общей схеме, нужно теперь проводить минимизацию функционала

$$\mathcal{E} = \sum_{I\mu} \epsilon_{I\mu} - \Omega_I \sum_I m_\mu S_{2\mu} - \lambda_I \sum_I S_{2\mu} \quad (8.8)$$

относительно величин $S_{2\mu}$, $K_{2\mu}$ и $\bar{K}_{2\mu}$. Можно легко убедиться, что с помощью (8.5), (8.6), (8.7) получаются следующие уравнения для K и \bar{K}

$$\begin{aligned} K_{20}(a,b) = \bar{K}_{20}(a,b) = \frac{Q_{ab}}{E_{ab}} \epsilon_0(I) \quad (E_{ab} \equiv E_a + E_b) \\ K_{22}(a,b) = \frac{Q_{ab}}{E_{ab} - 2\Omega_I} \epsilon_-(I); \quad K_{2-2}(a,b) = \frac{Q_{ab}}{E_{ab} + 2\Omega_I} \epsilon_+(I) \\ \bar{K}_{22}(a,b) = \frac{Q_{ab}}{E_{ab} - 2\Omega_I} \epsilon_+(I); \quad \bar{K}_{2-2}(a,b) = \frac{Q_{ab}}{E_{ab} + 2\Omega_I} \epsilon_-(I) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Используя эти уравнения, нетрудно вычислить средние значения оператора \hat{J}_x , квадрупольных операторов и полной энергии состояния

$$\begin{aligned} \bar{Q}_0(I) = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_0(I) R(0); \quad \bar{Q}_2(I) = \frac{1}{\sqrt{10}} (\epsilon_+(I) + \epsilon_-(I)) R(\Omega_I) \\ \bar{Q}_{-2}(I) = \frac{1}{\sqrt{10}} (\epsilon_-(I) - \epsilon_+(I)) R(\Omega_I); \quad \langle \hat{J}_x \rangle = \sum_I m_\mu S_{2\mu} = 8\Omega_I N(\Omega_I) \epsilon_+(I) \epsilon_-(I) \\ \epsilon_{I\mu} = E_0 + \Omega_I \langle \hat{J}_x \rangle = E_0 + \Omega_I \sqrt{I(I+1)}; \\ R(\Omega) = \sum_{ab} \frac{E_{ab} Q_{ab}^2}{E_{ab}^2 - 4\Omega^2}; \quad N(\Omega) = \sum_{ab} \frac{E_{ab} Q_{ab}^2}{(E_{ab}^2 - 4\Omega^2)^2} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Рекуррентную формулу для вычисления параметра деформаций мы получаем одновременно с выражениями для тензора спаривания (8.9) из вариаций функционала (8.8). Подставив туда выражения для средних значений квадрупольных операторов (8.10) и используя свойства ортогональности коэффициентов Клебша-Гордона, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_+(I)(1-F_I) + \sqrt{3} \eta_0(I)(1-C)) \langle I 2 2 - 2 | I 0 \rangle + (\sqrt{3} \eta_+(I)(1-F_I) - \eta_0(I)(1-C)) * \langle I 0 2 0 | I 0 \rangle + \sqrt{2} \eta_-(I)(1+F_I) \langle I 1 2 - 1 | I 0 \rangle = 0 \quad (8.11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_+(I) + \sqrt{3} \eta_0(I)) \langle I 2 2 - 2 | I - 2 \rangle + (\sqrt{3} \eta_+(I) - \eta_0(I)) \langle I 0 2 0 | I - 2 \rangle + \sqrt{2} \eta_-(I) \langle I 1 2 - 1 | I - 2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_+(I-2) F_{I-2} + \sqrt{3} \eta_0(I-2) C) \langle I - 2 2 2 - 2 | I 0 \rangle + (\eta_+(I-2) F_{I-2} \sqrt{3} - \eta_0(I-2) C) \langle I - 2 0 2 0 | I 0 \rangle - \sqrt{2} \eta_-(I-2) F_{I-2} \langle I - 2 1 2 - 1 | I 0 \rangle \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_+(I) F_I + \sqrt{3} \eta_0(I) C) \langle I 2 2 - 2 | I - 2 \rangle + (\sqrt{3} \eta_+(I) F_I - \eta_0(I) C) \langle I 0 2 0 | I - 2 \rangle - \eta_-(I) \langle I 1 2 - 1 | I - 2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_+(I-2) + \sqrt{3} \eta_0(I-2)) \langle I - 2 2 2 - 2 | I 0 \rangle + \langle I - 2 0 2 0 | I 0 \rangle + (\eta_+(I-2) \sqrt{3} - \eta_0(I-2)) + \sqrt{2} \eta_-(I-2) \langle I - 2 1 2 - 1 | I 0 \rangle \quad (8.13)$$

Здесь $\eta_+(I) = \frac{1}{\sqrt{2IM}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_+(I) - \epsilon_-(I))$; $\eta_-(I) = \frac{1}{\sqrt{2IM}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_-(I) - \epsilon_+(I))$ (8.14)

$$\eta_0(I) = \frac{\epsilon_0(I)}{\sqrt{2IM}}; \quad F_I = \frac{\kappa}{5} R(\Omega_I); \quad C = \frac{\kappa}{5} R(0)$$

Вместе с условием сохранения углового момента

$$\langle \hat{J}_x \rangle = \sqrt{I(I+1)} = 8 \Omega_{\pm} N(\Omega_{\pm}) \epsilon_+(I) \epsilon_-(I) \quad (8.15)$$

уравнения (8.11)–(8.14) определяют параметры деформаций и частоту вращения Ω_{\pm} . Исследуем решения этой системы.

Если спин $I \gg 1$, то можно использовать асимптотические выражения для коэффициентов Клебша-Гордона, в результате чего

система (8.11)–(8.15) легко решается. С точностью $\frac{1}{I}$ находим

$$\epsilon_+(I) = \epsilon_-(I) = \frac{1}{8 \Omega N(\Omega)} \sqrt{I}; \quad \epsilon_0(I) = 0; \quad F_I = 1 = \frac{\kappa}{5} R(\Omega) \quad (8.16)$$

$$E_I = I \Omega$$

а вероятности переходов равны

$$B(E2, I \rightarrow I-2) = \frac{I}{80} \frac{R^2(\Omega)}{2 \Omega N(\Omega)}; \quad \langle I M | Q_{2\mu} | I M \rangle = 0 \quad (8.17)$$

В этом пределе энергетический спектр является эквидистантным, а частота вращения равна разности энергий. Она не зависит от спина и определяется из дисперсионного соотношения метода случайных фаз. Таким образом энергии и вероятности переходов (8.17) соответствуют модели гармонического вибратора в приближении РРА, причем при заданном числе фононов реализуются только состояния с максимальным спином и с максимальным сеньорити.

Если мы рассмотрим уравнения (8.11)–(8.15) для малых спинов, то для нахождения решения при спине I нужно знать параметры деформации при спине $I-2$. Поэтому деформация $\epsilon_0(0)$ остается свободным параметром, который в рамках этого подхода принципиально не определен. Мы можем выбрать его так, что и для малых спинов получается приблизительно картина гармонического вибратора. Как можно истолковать полученный результат? Ясно, что сделанные в начале статьи предположения, что вероятности переходов внутри полосы велики по сравнению с переходами в другие полосы, в пределе малых деформаций и малых спинов несправедливо. Рассматривая состояния пятимерного квадрупольного вибратора $|N, \nu=N, I=2\nu\rangle$; мы учитываем только переходы в состояния $|N+1, \nu+1, I+2, M\rangle$ и $|N-1, \nu-1, I-2, M\rangle$

но переходами в состояния $|N+1, \nu+1, I, M\rangle$, $|N+1, \nu+1, I-1, M\rangle$
 $|N+1, \nu+1, I-2, M\rangle$ пренебрегаем. Для однофононного состояния
 $|N+1, \nu+1, I, M\rangle$ эта ошибка велика, и её можно исправить только с помо-
 щью соответствующего выбора начального условия. Если же $I-2N \gg 1$,
 то учтенные переходы остаются главными, поскольку геометрические
 факторы, возникающие при вычислении переходов в остальные состоя-
 ния пропорциональны $\frac{1}{I}$ (7). Таким образом, результаты этого под-
 хода и в случае малых деформаций остаются разумными.

9. З а к л ю ч е н и е

Автор выражает глубокую благодарность С.Т.Беляеву и В.Г.Зеле-
 винскому за обсуждение полученных результатов и многочисленные
 полезные замечания. Автор также признателен дирекции и сотруд-
 никам теоретического отдела Института ядерной физики Сибирского
 отделения АН СССР за гостеприимство.

Л и т е р а т у р а

1. С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский. ЯФ, 16, (1972) 1195;
 ЯФ, 11 (1970) 741;
 S.T.Belyaev. Developments and Borderlines of Nuclear Physics C
 (1972) LIII.
2. В.Г.Зелевинский, М.И.Штокман. Препринт ИЯФ 88-73 Новосибирск
 1973, Изв. АН СССР, сер. физ. 36, (1972) 2577.
3. Д.А.Варшалович, А.Н.Москалев, В.К.Херсонокий. "Квантовая
 теория углового момента", "Мир" (1975).
4. А.К.Кертман, А.Кlein. Phys.Lett., 1, (1962) 185;
 Phys.Rev., 132 (1963) 1326.
5. G.Do Dang, G.J.Dreiss, R.M.Dreizler, A.Klein, Chi-Shiang WU.
 N.P. A114 (1968) 501.
6. В.Г.Зелевинский ЯФ 22, (1975) 1085.
7. Е.В.Гай ЯФ 19, (1974) 83.

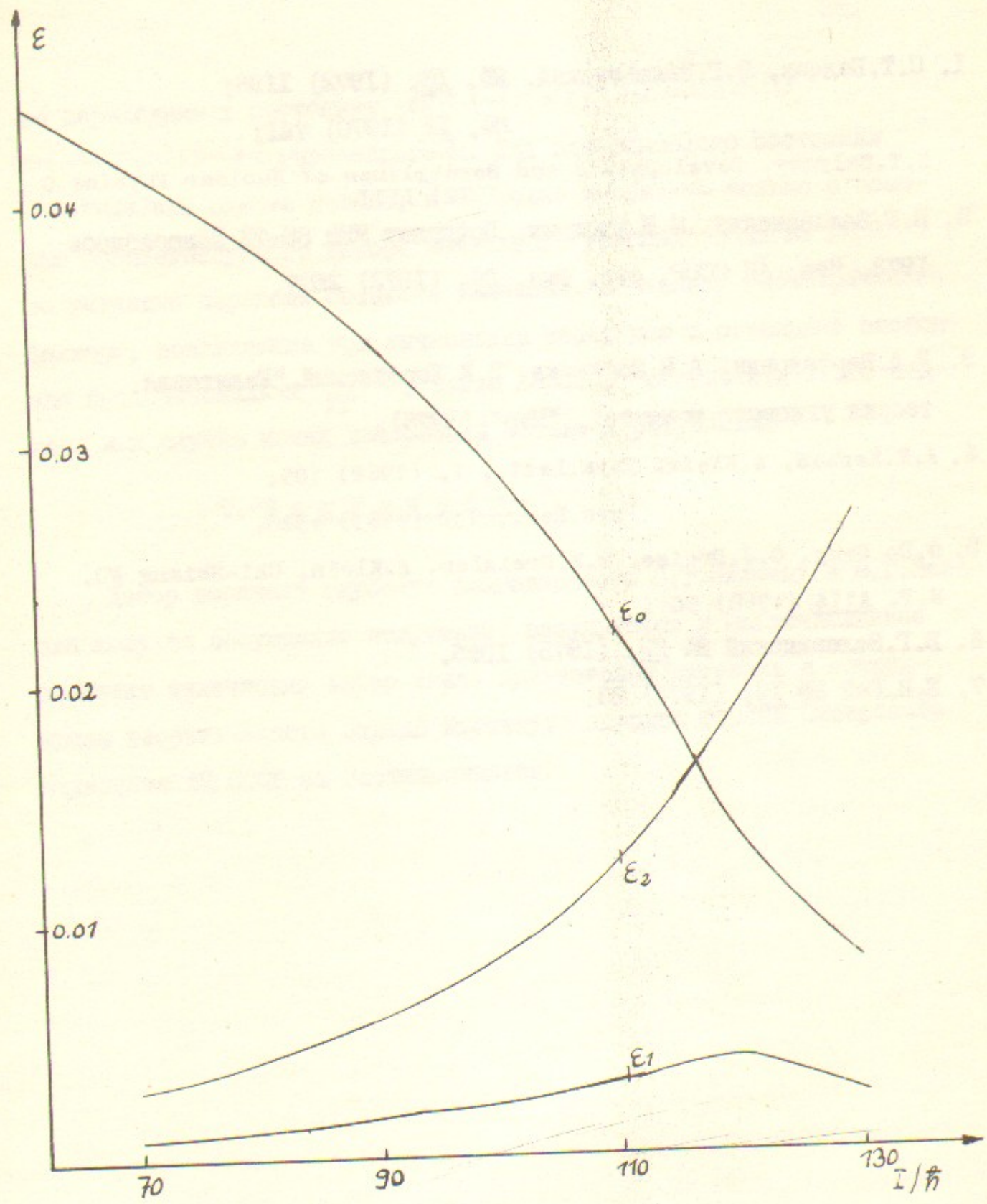


рис. 1

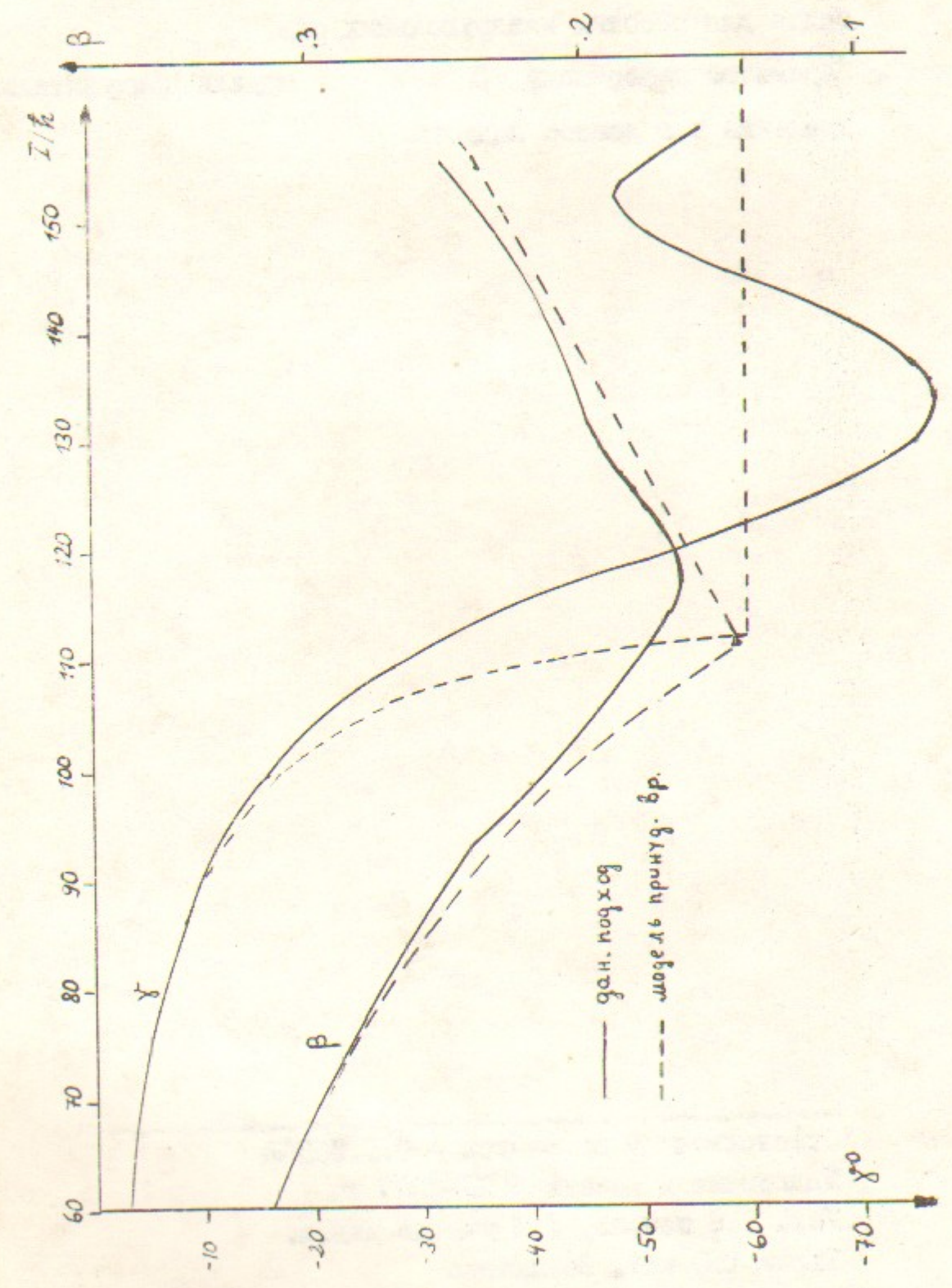


рис. 2

Подписи к рисункам

Рис.1. Параметры деформаций ϵ_0 , ϵ_1 и ϵ_2 как функции
спина для простых квадрупольных сил.

Рис.2. Параметры деформаций β и γ в модели принудительного
вращения и в данном подходе.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 9.XI-1977 г.
Усл. 1,8 печ.л., 1,5 учетно-изд.л.
Тираж 150 экз. Бесплатно
Заказ № 109.

Отпечатано на ротационной ИЯФ СО АН СССР