

2

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 77 - 88

Я.С.Дербенёв, С.А.Хейфец

К ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО
ОХЛАЖДЕНИЯ

Новосибирск

1977

Введение

В 1972 году Ван-дер-Меер [1] предложил простой способ демпфирования некогерентных колебаний частиц в накопителе.

Простейшая система, реализующая этот способ, состоит из двух пикапов. На одном из них (следающем) пучок наводит сигнал, пропорциональный поперечному отклонению частиц. Усиленный сигнал передается на управляющий пикап (*kicker*), расположенный так, чтобы частица, создавшая сигнал, испытала демпфирующее воздействие (например, уменьшающее её поперечную скорость в точке орбиты, где она максимальна). Время задержки сигнала выбирается равным времени движения частицы между пикапами.

В настоящее время осуществлены эксперименты [2], в которых был реализован способ охлаждения Ван-дер-Меера и наблюдалось затухание амплитуды колебаний (порядка 1-2% в час).

В этой работе мы попытаемся изучить возможности описанного механизма охлаждения.

Не вызывает сомнения, что сигнал, наведенной частицей, при правильно выбранной следящей системе будет демпфировать её колебания. Вместе с тем, усиленный сигнал будет раскачивать другие частицы, проходящие через управляющий пикап. При выполнении критерия стохастичности [3], это приводит к диффузионному росту их амплитуды. В результате, величина максимально достижимых в данном методе декрементов оказывается ограниченной. Нам кажется, что название "стохастическое охлаждение" следует поэтому признать неудачным, поскольку стохастичность приводит к диффузии, в то время как демпфирование является единичным эффектом.

Мы постараемся выяснить принципиальные ограничения, присущие методу, независимо от конкретной конструкции следящей системы. Для получения конкретных формул мы будем считать оба пикапа согласованными линиями. Кроме того, мы ограничимся случаем небунчирующего пучка и не будем рассматривать эффекты, связанные с работой усилительной системы (с шумами, формой пелесей пропускания и т.п.), поскольку эти эффекты хотя и важны, но могут быть учтены независимо.

В § 1 описывается эффективное взаимодействие частиц в системе. Мы будем считать усиления достаточно большим и учитывать лишь взаимодействие, возникающее через усилительную систему, пренебрегая эффектами взаимодействия частиц с каждым из пикапов. Последние рассмотрены, например, в [4] и не имеют отношения к стохастическому охлаждению.

В § 2 получены одночастичные декременты. В § 3 выводится кинетическое уравнение. На его основе в § 4 рассмотрена устойчивость когерентных колебаний, а в § 5 — диффузия. В заключении обсуждаются основные результаты работы.

§ 1. Эффективное взаимодействие

Будем описывать движение частицы I в переменном действии $\vec{I}_1 (I_{1r}; I_{1z}; R\Delta p_1)$ — фазы $\vec{\varphi}_1 (\varphi_{1r}; \varphi_{1z}; \varphi_1)$. Из-за быстрой релаксации в следящей системе, зависимость от времени поля $V(I; t)$, действующего в управляющем пикапе на частицу I, сводится к зависимости поля от параметров частиц, возбуждающих поле в следящем пикапе. В результате, потенциал $V(I, t) = \sum_2 V(I, 2)$ выражается через эффективное взаимодействие $V(I, 2)$ частиц 2, создающих поле, и частицы I, испытывающей воздействие. Уравнения движения I имеют вид:

$$\dot{\vec{I}}_1 = \vec{\omega}_1 + \sum_2 \frac{\partial V(I, 2)}{\partial \vec{I}_1}, \quad \dot{\vec{I}}_2 = - \sum_2 \frac{\partial V(I, 2)}{\partial \vec{I}_2} \quad (I.1)$$

Введем гармоники взаимодействия

$$V(I, 2) = \sum_{\vec{n}_1, \vec{n}_2} V_{\vec{n}_1, \vec{n}_2}(\vec{I}_1, \vec{I}_2) e^{i(\vec{n}_1 \vec{\varphi}_1 - \vec{n}_2 \vec{\varphi}_2)} \quad (I.2)$$

где \vec{n} означает совокупность $(n_r; n_z; \ell)$. Гармоники $V_{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ могут быть выражены также через гармоники функции Грина, определяющей электромагнитный потенциал через создающий его ток частиц. Поскольку разброс частот $\Delta\omega \ll \omega$ мал, в разложении (I.2) можно провести усреднение быстро осциллирующих членов, после чего $V(I, 2)$ будет лишь функцией разности фаз:

$$V(I, 2) = \sum_{\vec{n}} V_{\vec{n}}(\vec{I}_1, \vec{I}_2) \exp i\vec{n}(\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_2) \quad (I.3)$$

Гармоника потенциала $V_{\vec{n}}(\vec{I}_1; \vec{I}_2)$ явно не зависит от времени и является степенной функцией от амплитуд бетатронных колебаний $a = |f|_{\max} \sqrt{2IR/p_s}$

$$V_{\vec{n}}(\vec{I}_1, \vec{I}_2) = -2x_n e^2 C_n(I_1) C_n(I_2) U_n(\Delta p) U_n(\Delta p_2) J_n$$

Здесь x_n — коэффициент усиления n -ой гармоники поля в следящей системе. Для простоты дальше мы будем считать его постоянным $x_n = x$. Зависимость от амплитуд входит в множитель

$$C_m^2(I) = C_{|m_r|, |m_z|}^2 = \left(\frac{R}{2p_s}\right)^{|m_r|+|m_z|} \frac{(I_r)^{|m_r|} (I_z)^{|m_z|}}{\nu_r^{|m_r|} \nu_z^{|m_z|} [|m_r|! |m_z|!]^2} \quad (I.5)$$

$R = r/2\pi$ — средний радиус машины; p_s — равновесный импульс; $\nu_{r,z}$ — число бетатронных колебаний за оборот.

Коэффициенты $U_m(\Delta p)$ определяются структурой полей в пикапах. Для простоты мы считаем оба пикапа одинаковыми, их поперечные размеры ℓ_1 малыми по сравнению с длиной пикапов ℓ_n $\ell_1 \ll \ell_n$, так что для низкочастотных колебаний $k\ell_1 \ll 1$ поля в пикапах по поперечным координатам являются потенциальными и могут быть описаны некоторым (безразмерным) потенциалом $U(z, z, \Delta p)$. Коэффициенты $U_m(\Delta p) = U_{m_r, m_z}(\Delta p)$ выражаются через его производные:

$$U_m(\Delta p) = \left[\frac{\partial^{|m_r|+|m_z|} U(z, z, \Delta p)}{\partial z^{|m_r|} \partial z^{|m_z|}} \right]_{z_1=0} \quad (I.6)$$

Зависимость U_m от отклонения по импульсу $\Delta p = p - p_s$ возникает через зависимость от импульса радиального отношения частицы

$$z = f(\theta) R \frac{\Delta p}{p_s} + z_s(t); \quad z_s(t) = \frac{a_r}{|f_r|_{\max}} [f_r e^{i\varphi_r + \dots}] \quad (I.7)$$

или, вообще говоря, может входить явно.

Наконец, коэффициент

$$J_{\vec{n}} = J'_{\vec{n}} + i J''_{\vec{n}}; \quad J_{-\vec{n}} = J_{\vec{n}}^* = J'_{\vec{n}} - i J''_{\vec{n}} \quad (I.8)$$

зависит от явной структуры следящей системы. Для получения конкретных формул мы будем считать оба пикапа согласованными линиями.

Такой выбор определяется следующими соображениями: а) длина пикапа ℓ_n не может быть слишком малой, иначе из-за разброса частот обращения часть частиц не испытает воздействия в

управляющем пикапе 2) поля в пикапах не должны существенно меняться за время пролета частицы сквозь пикап 3) поля в пикапах должны затухать достаточно быстро, чтобы уменьшить влияние сигнала на другие частицы. Тем более не должно быть многооборотных эффектов. Поэтому реализация пикапов в виде согласованных линий кажется нам оптимальной.

Как можно показать, следуя работе [4] (см. приложение), коэффициент J_{π} в этом случае имеет вид:

$$J_{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk \varphi^2(l+kR) [\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2^* + (l+kR)\omega_s^2]^2}{c^2 k^2 - [\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2^* + l\omega_s^2 - i\gamma]^2} e^{i\chi_m} \quad (I.9)$$

Здесь ω_s^2 ; ω_s — равновесные частоты поперечных колебаний и частота обращения;

$$\varphi(l) = \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta} \varphi(\theta)$$

— Фурье-гармоники функции $\varphi(\theta)$, описывающей структуру полей в пикапах по азимуту. Мы будем считать поля в пикапах примерно постоянными внутри пикапов ($\varphi(\theta) \approx 1$) и быстро ~~спадать~~ ^{спадать} вне пикапов, аппроксимируя

$$\varphi(l) = \frac{1}{2l_m} \Theta(l - |l|), \quad l_m = \frac{\pi R}{l_n} = \frac{\pi}{\alpha}, \quad (I.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(l) dl = \int_{-l_m/2}^{l_m/2} \frac{d\theta}{2\pi} = l_m/2\pi; \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

Фаза χ_m в (I.9) определяется величиной

$$\chi_m = \frac{L}{R} \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 + \frac{L}{R\omega_s} \left\{ I \left(\frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{\omega_s} \right) + \Delta p \left(\frac{\partial(l\omega_s + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2)}{\partial p} \right) \right\} \quad (I.12)$$

L — путь, проходимый частицей между пикапами.

Чтобы была зависимость фазы χ_m от разброса частот несущественной, нужно выполнение условий:

$$\frac{L}{R} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right) l \ll 1; \quad \frac{L}{R} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right) m_1 \ll 1 \quad (I.13)$$

Особенно важно первое из них. Поскольку существенны гармоники вплоть до $l \sim l_m \sim \frac{R}{l_n}$, то должно быть:

$$l_n \gg L \Delta\omega/\omega \quad (I.14)$$

что определяет минимальную длину пикапов. Это условие обеспечивает воздействие системы на частицы, несмотря на разброс во

времени их обращения.

Второе условие (I.13) означает, что размешивание по фазам происходит за много оборотов (при $m_1 \sim 1$). Величина L может быть выбрана из следующих соображений.

Используя (I.10) легко показать, что

$$J_m = \frac{S_m' + i S_m''}{(2l_m)^2 R} e^{i\chi_m}; \quad \chi_m = \frac{L}{R} \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \quad (I.15)$$

определяется выражениями:

$$S_{2m}' = 2l_m - 2(l + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2) l_m \left| \frac{l_m + 2l + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{l_m - 2l - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2} \right| \approx 2l_m \Theta[l_m - |2l + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2|] \quad (I.16a)$$

$$S_{2m}'' = -2\pi(l + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2) \Theta[l_m - |2l + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2|]. \quad (I.16b)$$

Отсюда и (I.4) следует, что сила, действующая между частицами 1, 2 при $|\theta_1 - \theta_2| \ll 2l_n/R$ пропорциональна:

$$\dot{I}_{1r} = - \frac{\partial V(1,2)}{\partial \varphi_{1r}} \approx \sum_m \left\{ J_m(m\alpha) + \frac{\pi V_r m}{2l_m} \cos(m\alpha) \right\};$$

$$\alpha = \frac{L V_r}{R} + \frac{V_r}{2} (\theta_1 - \theta_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Следовательно, чтобы эффект самодействия (I=2) не был мал по сравнению с взаимным влияющим частиц по крайней мере для дипольных колебаний ($m_1 = 1; \omega_2 = 0$ или $m_1 = 0; m_2 = 1$) нужно выбрать:

$$\frac{L V_r}{R} = (2k+1) \pi/2; \quad k = 0, 1, \dots \quad (I.17)$$

т.е. путь между пикапами должен быть кратен четверти длины волны бетатронных колебаний. Изменение χ_m по сравнению с (I.17) изменяет соотношение между действительной и мнимой частью взаимодействия V_{π} . Могут представиться случаи, когда это приводит к полезному эффекту.

§ 2. Одночастичные декременты

Уравнения (I.1) имеют вид гамильтоновых уравнений, однако существенно, что рассмотренная система не замкнута, вследствие чего эффективное взаимодействие не эрмитово $V_{12} \neq V_{21}^*$, а в уравнениях (I.1) даёт вклад и член с самодействием:

$$\dot{I}_1 = - \left(\frac{\partial V(1,2)}{\partial \varphi_1} \right)_{1=2} - \sum_{1 \neq 2} \frac{\partial V(1,2)}{\partial \varphi_1} \quad (2.1)$$

Первый член в (2.1) (самодействие) определяет одночастичные декременты затухания ($\lambda = \tau, z, \theta$):

$$\dot{I}_i^{\lambda} = -d_{\lambda} I_i^{\lambda}; \quad d_{\lambda} = \left[\frac{\partial}{\partial I_i^{\lambda}} \left(\frac{\partial V(i, z)}{\partial \psi_i^{\lambda}} \right) \right]_{I=0,1,2} \quad (2.2)$$

черта означает усреднение по фазам (времени). Определенный в (2.2) декремент и является полезным эффектом от введения следящей системы. Остальные члены в (2.2) описывают влияние данной частицы через следящую систему на движение всех остальных частиц. В этом параграфе мы этими членами пренебрежем и изучим эффект самодействия, используя явный вид взаимодействия (1.3), (1.4).

Из свойств симметрии (1.8) следует, что при $x_n = x_{-n} = x$ действительная часть J_n' не даёт вклада в декремент (2.2). Для поперечных колебаний декремент имеет вид:

$$d_r = - \sum_e \frac{2\pi e^2 R}{r_p p_s} U_{10}^2(0) J_{e1}'' \quad (2.3)$$

В системе из согласованных линий мнимая часть J_n'' определяется из выражения (1.15). В такой системе при выполнении (1.17)

$$d_r = - \frac{\pi e^2}{p_s v_r} U_{10}^2(0) J_{10} \left(\frac{v_r L}{R} \right) \quad (2.4)$$

Для декремента вертикальных колебаний получится аналогичная формула с заменой $v_r \rightarrow v_z$; $U_{10} \rightarrow U_{0z}$.

Более аккуратное рассмотрение, учитывающее модуляцию продольного движения $\theta(t)$ радиальными колебаниями, приводит к тому, что в формуле (2.4) следует заменить U_{10} на $U_{10} - \frac{L}{2Rv_r} U_{00}$ т.е. к малым поправкам порядка $(l_{\perp}/l_{\parallel} v_r) \ll 1$, если только градиент $U_{10} \neq 0$.

При рассмотрении продольного движения также можно пренебречь влиянием на него поперечных колебаний, считая $\theta = \omega_0(\Delta p)$ и пару $(\theta, R\Delta p)$ — каноническими переменными. Тогда первый член в (2.1) даст

$$\dot{\Delta p}_z = \frac{2\pi e^2}{R} U_{00}^2(\Delta p_z) \sum_e l J_{e0}'' \quad (2.5)$$

Здесь мы пренебрегли поправками порядка $(a/l_{\perp})^{2m}$, положив $\omega_z = \omega_z = 0$. При этом $\Delta p \neq 0$ за счёт того, что поле

на краях пикапа имеет продольную составляющую, благодаря чему возможно его возбуждение продольным движением.

Если разложить $U_{00}(\Delta p)$ по Δp , то первый член разложения определяет средние потери частицы

$$\dot{\Delta p} = \frac{2\pi e^2}{R} U_{00}^2(0) \sum_e l J_{e0}'' \quad (2.6)$$

а следующий — оргочастичный декремент:

$$\frac{d}{dt} (\Delta p_z)^2 = -d_p (\Delta p_z)^2; \quad d_p = - \frac{4\pi e^2}{R} \left(\frac{\partial U_{00}^2(\Delta p)}{\partial \Delta p} \right) \sum_e l J_{e0}'' \quad (2.7)$$

Если зависимость $U_{00}(\Delta p)$ от импульса определяется зависимостью от Δp радиального отклонения (1.7), то

$$d_p = - \frac{8\pi e^2}{p_s v_r^2} U_{00}(0) U_{10}(0) \sum_e l J_{e0}''$$

В модели согласованных линий (1.15)

$$d_p = \frac{16\pi \pi e^2}{R p_s v_r^2} U_{00}(0) U_{10}(0) \sum_e l^2 \varphi^2(2l) \quad (2.8)$$

Последняя сумма порядка $l_{\perp}/48$.

Более аккуратное рассмотрение, учитывающее влияние поперечного движения на продольное, приводит к формуле вида (2.8), в которой следует заменить $U_{00} U_{10}$ на $U_{00} U_{10} - \frac{L v_r^2}{R} U_{00}^2(0)$; $\alpha = v_r^{-2}$. Если градиент поля в пикапе $U_{10} \neq 0$, то эти поправки порядка $l_{\perp}/R \ll 1$.

Отношение декрементов в модели согласованных линий

$$d_p/d_r = \frac{\pi}{3} \frac{l_{\perp}}{v_r} \frac{U_{00}}{R U_{10}} \sim \frac{l_{\perp}}{v_r l_{\parallel}} \quad (2.9)$$

Ниже мы увидим, что затухание определяется одночастичными декрементами (2.3), (2.7), в то время как многочастичное взаимодействие может приводить лишь к диффузии.

§ 3. Кинетическое уравнение

Частицы в накопителе эквивалентны системе связанных (за счёт следящей системы) нелинейных осцилляторов. При достаточной спектральной плотности движение таких осцилляторов становится стохастическим и может описываться кинетическим уравнением. Критерий этого был сформулирован Б.В.Чириковым [3] и

состоит в том, что для перехода к стохастичности нелинейный сдвиг частоты $\delta\omega$ должен стать больше среднего расстояния между резонансами $\Delta\omega/N$, N — число осцилляторов, $\Delta\omega$ — ширина их спектра:

$$K = \delta\omega \cdot N / \Delta\omega \gg 1 \quad (3.1)$$

(см. также ниже формулу (5.6) и следующее за ней обсуждение).

Если описывать движение частицы с помощью осредненной (крупноструктурной) функции распределения, то можно показать без всяких дополнительных предположений [6], что и для системы с дискретным спектром функция распределения при выполнении критерия Чирикова удовлетворяет кинетическому уравнению.

В частности, при $\delta\omega \cdot t \gg 1$ оказывается справедливым предположение о иерархии корреляторов и кинетическое уравнение может быть получено с помощью обычной процедуры обрыва цепочки БКГИ [7] и наложения дополнительного условия задуления двухчастичного коррелятора при $t \rightarrow -\infty$. Явный вид кинетического уравнения, однако, не имеет стандартного вида в силу неэрмитовости взаимодействия (1.4), поэтому мы выпишем его заново.

Одночастичная функция распределения $F(1) = F(\bar{x}_1, \bar{p}_1, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1\right) F(1) = St \equiv N \int d\Gamma_2 \{R_{12}, V_{12}\}_1 \quad (3.2)$$

где
$$\hat{L}_1 F(1) = \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} \{V_1, F(1)\} - \{F(1), \int d\Gamma_2 V_{12} F(2)\}_1 \quad (3.3)$$

\bar{x}_1, \bar{p}_1 — совокупность канонических переменных по трём степеням свободы частицы с номером 1; функция распределения нормирована условием: $\int d\Gamma_1 F(1) = 1$; $d\Gamma_1 = d\bar{x}_1, d\bar{p}_1$; скобка Пуассона определена как

$$\{V, R\}_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(V \frac{\partial R}{\partial \bar{p}_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} \left(V \frac{\partial R}{\partial \bar{x}_1} \right)$$

Столкновительный интеграл в (3.2) выражается через двухчастичный коррелятор R_{12} и взаимодействие V_{12} частиц 1, 2.

Будем считать, как обычно, что можно пренебречь влиянием на столкновение самосогласованного поля и прямого взаимодействия между частицами, а также пренебречь влиянием экраниро-

вания.

В уравнении для коррелятора функцию распределения можно считать равномерной по фазам, поскольку её ненулевые гармоники быстро падают со временем. В дальнейшем нам понадобится лишь нулевая гармоника столкновительного интеграла. При сделанных предположениях она принимает вид:

$$St = iN \sum_{\bar{n}} \left(\bar{n} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \right) \int d\Gamma_2 \left\{ \frac{|V_{\bar{n}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)|^2}{\bar{n}(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) + i\gamma} \left(\bar{n} \frac{\partial F(1)}{\partial \bar{x}_1} \right) F(2) - \frac{V_{\bar{n}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) V_{\bar{n}}(\bar{x}_2, \bar{x}_1)}{\bar{n}(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) + i\gamma} \left(\bar{n} \frac{\partial F(2)}{\partial \bar{x}_2} \right) F(1) \right\} \quad (3.4)$$

Здесь $\bar{\omega}_1 = \{\bar{\omega}_{11}, \omega_{01}\}$ — частоты невозмущающего движения частицы 1; $V_{\bar{n}}$ определена в (1.4).

Ниже мы займемся исследованием уравнения (3.2); (3.4).

§ 4. Когерентные колебания

Прежде всего должна быть обеспечена устойчивость когерентных колебаний. Поскольку характерные декременты когерентных колебаний велики ($\delta_{\text{ког}} \sim N$), то при их определении можно пренебречь столкновительным интегралом (правая часть (3.2)), а также одночастичным взаимодействием $\{F(1), V_{11}\}$ в (3.3). Получающееся уравнение Власова

$$\frac{\partial F(1)}{\partial t} + \bar{\omega}_1 \frac{\partial F(1)}{\partial \bar{p}_1} - N \{F(1), \int d\Gamma_2 V_{12} F(2)\}_1 = 0$$

линеаризуем около стационарной функции распределения $F^0(\bar{x})$, которую будем считать равномерной по фазам:

$$F(\bar{x}, \bar{p}, t) = F^0(\bar{x}) + \delta F(\bar{x}, \bar{p}, t);$$

$$\delta F(\bar{x}, \bar{p}, t) = \sum_{\bar{n}} \int d\Omega F_{\bar{n}}^{\delta}(\bar{x}) e^{-i\bar{n}\bar{p} + i\Omega t} \quad (4.1)$$

Здесь $\bar{n}\bar{p} = \bar{\omega}_1 \bar{p}_1(t) + \theta(t)$

Стационарное распределение $F^0(\bar{x})$ определено с учётом самосогласованного поля

$$V(1|F) \equiv \int d\Gamma_2 F(2) V(1,2)$$

так что при $F = \bar{F}$: $\frac{\partial}{\partial F} \psi(1/\bar{F}) = 0$.

В линеаризованном уравнении

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta F + [\bar{\omega}_1 + N \frac{\partial}{\partial \bar{F}} \psi(1/\bar{F})] \frac{\partial}{\partial \bar{F}} \delta F = N \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial}{\partial \bar{F}} \psi(1/\bar{F})$$

член $N \frac{\partial \psi}{\partial \bar{F}}$ определяет сдвиг частоты за счёт введения следящей системы. Далее мы будем считать его включенным в частоту $\bar{\omega}_1$.

Для Фурье-гармоники $F \frac{\partial}{\partial t}$ (4.1) получим уравнение:

$$(\bar{\omega} - \Omega) F \frac{\partial}{\partial \bar{I}}(\bar{I}) = N(\bar{\omega} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}}) \int dI_2 F \frac{\partial}{\partial \bar{I}}(\bar{I}_2) V_{\bar{I}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \quad (4.2)$$

Используем для $V_{\bar{I}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$ выражение (I.4) и преобразуем (4.2), введя функцию $f \frac{\partial}{\partial \bar{I}}$ соотношением

$$F \frac{\partial}{\partial \bar{I}}(\bar{I}) = N(\bar{\omega} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}}) [\bar{\omega} - \Omega]^{-1} C_m(\bar{I}) U_m(\alpha r) f \frac{\partial}{\partial \bar{I}} \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) имеет решение $f \frac{\partial}{\partial \bar{I}} = \text{const}$ и определяет вид дисперсионного уравнения для частоты Ω :

$$1 = -2\pi e^2 N J_n \int \frac{dI_2 C_m^2(I_2) U_m^2(\alpha r)}{\bar{\omega} - \Omega + i\gamma} \left[\bar{\omega} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}_2} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}_2} \right] \quad (4.4)$$

Если пренебречь зависимостью частот от импульсов, то

$$\bar{\Omega}_m = \Omega - (\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_1^* + \omega_s^2) = -2\pi e^2 N J_{em} \left\langle \bar{\omega}_1 \frac{\partial C_m^2(I)}{\partial \bar{I}_1} U_m^2(\alpha r) + \frac{\partial C_m^2(I)}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial U_m^2(\alpha r)}{\partial r} \right\rangle \quad (4.5)$$

Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение со стационарной функцией распределения $\bar{F}(I)$. Соотношением (4.5) определяются декремент моды (l, m) : $\delta_{em}^{kol} = \text{Im} \bar{\Omega}_m$ и когерентный сдвиг частоты $\text{Re} \bar{\Omega}_m$.

В модели согласованных линий

$$\delta_{em}^{kol} = -\frac{2N\pi e^2}{R(2l\omega)^2} [S_{em}' \sin \chi_m + S_{em}'' \cos \chi_m] \cdot \left\langle \bar{\omega}_1 \frac{\partial C_m^2}{\partial \bar{I}_1} U_m^2(\alpha r) + \frac{\partial C_m^2(I)}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial U_m^2(\alpha r)}{\partial r} \right\rangle \quad (4.6)$$

Если зависимость $U_m(\alpha r)$ определяется зависимостью от импульса радиального отклонения (I.7), то

$$\delta_{eo}^{kol} = \frac{8\pi e^2 \pi N}{R f_s v_r^2} l^2 \varphi^2(2e) U_{10}(0) U_{20}(0) \quad (4.7)$$

При $\bar{m}_1 \neq 0$ вторым членом можно пренебречь (малость порядка $a_1^2/l_0 l_1 v_r$, a_1 - амплитуда колебаний) и

$$\delta_{em}^{kol} = -\frac{2N\pi e^2}{R(2l\omega)} \left\langle \omega_r \frac{\partial C_m^2(I_r)}{\partial I_r} U_m^2(\alpha r) \right\rangle \left[J_n \left(\frac{2l\omega}{R} m_r \right) - \frac{J_n}{R} (l + m_r v_r) \cos \left(\frac{2l\omega}{R} m_r \right) \right] \quad (4.8)$$

Полученные когерентные декременты просто связаны с одночастичными декрементами (2.3), (2.7):

$$\delta_r = \frac{1}{N} \sum_e \sum_{m_r \neq 0} (\delta_{em}^{kol})_{m_r=0}; \quad \delta_p = \frac{1}{N} \sum_e \delta_{eo}^{kol}$$

так что характерные $\delta_{el}^{kol} \sim \frac{N}{l_{max}} \delta_r$, что естественно, поскольку N/l_{max} при $l_{max} \sim R/l_0$ есть число частиц на длине пикапа.

Отношение когерентного сдвига частоты к когерентному декременту, как видно из (4.5), определяется отношением действительной и мнимой части J_{em} . В модели согласованных линий они одного порядка.

Для мод $\bar{m}_1 = 0$ при правильном выборе знака градиента U_{10} , декремент положителен при всех l . При $m_r = 1$ и L из (I.17) устойчивость сохраняется. Однако при $m_1 \neq 0, 1$ декремент, вообще говоря, может менять знак, т.е. есть неустойчивые моды. Рассмотрим, как сказывается в этом случае разброс частот $\bar{\omega}(I, r)$. Зависимость $U_m(\alpha r)$ при $m_1 \neq 0$ по-прежнему не существенна и уравнение (4.4) можно записать в виде:

$$1 = \bar{\Omega}_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon \rho_m(\varepsilon)}{\varepsilon - \Omega + \bar{\omega} \bar{\omega}^* + i\gamma}; \quad (4.9)$$

где спектральная плотность равна

$$\rho_m(\varepsilon) = -\frac{2\pi e^2 N J_n}{\bar{\Omega}_m} \int dI_2 \delta[\varepsilon - \bar{\omega}(I_2 - \bar{\omega}^*)] C_m^2(I_2) U_m^2(\alpha r) \cdot \left[\bar{\omega}_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}_1} \right]$$

Нормируем $\int \rho_m(\varepsilon) d\varepsilon = 1$, тогда введенная частота $\bar{\Omega}_m$ равна поправке к частоте (4.5), определенной без учёта разброса частот. Уравнение (4.9) определяет через $\bar{\Omega}_m$ истинную частоту Ω .

Если когерентный сдвиг частоты $\text{Re} \bar{\Omega}_m$ велик по сравнению с шириной $\Delta\varepsilon$, на которой спектральная функция $\rho_m(\varepsilon) \neq 0$,

то из (4.9) следует, что декремент совпадает с (4.6) с точностью $\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle / |\bar{\epsilon}_0|^2$; $\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle$ - среднеквадратичная ширина $\rho_n(\epsilon)$.

В обратном случае влияние разброса частот велико - работает механизм затухания Ландау, стабилизирующий когерентные колебания. Таким образом, условие устойчивости когерентных колебаний сведется к требованию малости когерентного сдвига частот по сравнению с разбросом частот колебаний.

§ 5. Диффузия

Будем считать, что условие устойчивости когерентных колебаний выполнено. Изучим форму равновесного распределения. Рассмотрим уравнение (3.2) для нулевой гармоники функции распределения

$$\frac{\partial F(\bar{I}, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \bar{I}} \left(F(\bar{I}) \frac{\partial V_{12}}{\partial \bar{I}} \right) = \delta t \quad (5.1)$$

В левой части второй член выражается через одночастичные декременты (2.2). Столкновительный интеграл определен в (3.4). Преобразуем его, разбив взаимодействие на эрмитовую и антиэрмитову части (ниже $V_{12} = V_{12}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$):

$$V_{12} = V_{12}^{(h)} + V_{12}^{(a)}; \quad V_{21}^* = V_{12}^{(h)} - V_{12}^{(a)}; \quad V_{12}^{(h)} = V_{21}^{(h)}; \quad V_{12}^{(a)} = -V_{21}^{(a)}$$

Отметим свойства симметрии: при замене $\bar{I}_1 \leftrightarrow \bar{I}_2$ $|V_{12}^{(h)}|^2$, $|V_{12}^{(a)}|^2$; $\int_{\bar{I}} V_{12}^{(h)} V_{12}^{(a)}$ - не меняют знака, а $\text{Re} V_{12}^{(h)} V_{12}^{(a)}$ - меняет знак. При замене $\bar{n} \leftrightarrow -\bar{n}$: $|V_{12}^{(h)}|^2$, $|V_{12}^{(a)}|^2$, $\text{Re}(V_{12}^{(h)} V_{12}^{(a)})$ - не меняют знака, $\int_{\bar{I}} (V_{12}^{(h)} V_{12}^{(a)})$ - меняет знак.

Уравнение (5.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \bar{I}_1} \left(F^{(1)} \frac{\partial V_{11}}{\partial \bar{I}_1} \right) &= \quad (5.2) \\ &= \sum_{\bar{n}} \pi N \int dI_2 \left(\bar{n} \frac{\partial}{\partial \bar{I}_1} \right) \delta(\bar{n} \omega_1 - \bar{n} \omega_2) \left\{ |V_{12}^{(h)}|^2 \left(\bar{n} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \bar{I}_1} F^{(2)} - (1 \leftrightarrow 2) \right) + \right. \\ &+ |V_{12}^{(a)}|^2 \left(\bar{n} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \bar{I}_1} F^{(2)} + (1 \leftrightarrow 2) \right) + 2 \text{Re} (V_{12}^{(h)} V_{12}^{(a)}) \left(\bar{n} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \bar{I}_1} \right) F^{(2)} \left. \right\} - \\ &- \sum_{\bar{n}} 2N \int dI_2 \left(\bar{n} \frac{\partial}{\partial \bar{I}_1} \right) \left(\bar{n} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \bar{I}_2} \right) F_1 \int_{\bar{I}} (V_{12}^{(h)} V_{12}^{(a)}) [\bar{n}(\omega_1 - \omega_2)]^{-1}. \end{aligned}$$

Последний интеграл понимается в смысле главного значения. Как и раньше, $\bar{n} = (\bar{n}_1, \ell)$. В случае эрмитового взаимодействия в правой части (5.2) остается только первый член и уравнение принимает стандартную форму.

Уравнение (5.2) достаточно сложно и мы изучим его в двух предельных случаях - когда существенна зависимость частот или только от импульсов или только от амплитуд (что, вообще говоря, не противоречит связям вида $\partial \omega / \partial I_r = \partial \omega / \partial p$).

Итак, предположим, что частоты зависят лишь от импульсов. Найдём уравнение для $F(p) = \int d\bar{I}_1 F(\bar{I}, p)$. Интегрируем (5.2) по \bar{I}_1, \bar{I}_2 , оставляем в сумме члены лишь $m_1 = m_2 = 0$, пренебрегая поправками $o(\bar{I})$ и подставим V_{12} из (1.4), пренебрегая зависимостью U_m от импульсов в столкновительном интеграле. Уравнение для $F(p)$ примет вид

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{d_p}{2} p F(p) \right) = \quad (5.3)$$

$$= \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial p^2} F^2(p) - \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial p} F(p) \int \frac{dp_2}{p-p_2} \frac{\partial F(p_2)}{\partial p_2};$$

$$\Lambda_1 = \frac{\pi N}{R \omega_0'} \sum_{\ell} |J_{\ell 0}''|^2 (2 \pi e^2 U_{00}^2(\omega))^2; \quad \omega_0' = \partial \omega_0 / \partial p;$$

$$\Lambda_2 = \frac{N}{R \omega_0'} \sum_{\ell} \ell J_{\ell 0}' J_{\ell 0}'' (2 \pi e^2 U_{00}^2(\omega))^2$$

В левой части второй член (5.2) мы выразили через одночастичный декремент (2.7) и простоты ради считаем средние потери (2.6) компенсированными. Отметим, что член $|V^{(h)}|^2 \sim (J')^2$ в (5.3) выпал; т.е. при чисто эрмитовом взаимодействии $J'' = 0$ правая часть (5.3) обратилась бы в нуль. Антиэрмитовое взаимодействие, которое переделало величину декремента затухания δ_p , приведет одновременно и к диффузии.

Уравнение (5.3) имеет стационарное решение: При $\Lambda_2 = 0$ оно имеет вид:

$$F(p) = \frac{d_p}{8 \Lambda_1} (p_0^2 - p^2), \quad |p| < p_0 \quad (5.4)$$

$$F(p) = 0, \quad |p| > p_0$$

Здесь $p_0 = (6\Lambda_1 / \delta_p R)^{1/3}$

так что ширина функции распределения определяется отношением коэффициента диффузии к декременту.

При $\Lambda_2 \neq 0$ ($J_{ec} \neq 0$) стационарное решение определится сингулярным интегральным уравнением, которое удастся решить до конца методом Карлемана [8]. Вне интервала $(-p_1 < p < p_2) F(p)$ обращается в нуль. Решение асимметрично: $p_2 - p_1 = f(p_1, p_2)$ и имеет ширину:

$$\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^3 = \left(\frac{6\Lambda_1}{\delta_p R}\right) \cdot f_2 \pi^{1/2} [f_1 (1 - f_1^2)]^{-1} \quad (5.5)$$

где $f_2 \pi^{1/2} = \pi \Lambda_2 / 2 \Lambda_1^2$, $-1/2 < f_1 < 1/2$; Отсюда видно, что с увеличением отношения Λ_2 / Λ_1 , т.е. J_{ec}' / J_{ec} ширина распределения растёт. Наименьший разброс по импульсам имеет система с чисто антиэрмитовым взаимодействием, где $J_{ec}' = 0$. Она оптимальна и в смысле устойчивости негерентных колебаний, т.к. даёт минимальный негерентный сдвиг частоты. Для такой системы стационарное распределение по импульсам определяется (5.4). Это распределение устойчиво: малые отклонения от него затухают с декрементом δ_p .

Подчеркнем ещё раз, что кинетическое уравнение (5.3) и следствия из него справедливы при выполнении критерия стохастичности $K \sim \delta \omega \cdot N / \Delta \omega \gg 1$, который в данном случае принимает вид:

$$K^2 = \left(\frac{\Delta \omega}{\delta \omega}\right)^2 \cdot \left|\frac{\partial \omega}{\partial p}\right| \cdot \frac{2\pi e^2 U_{10}^2(0)}{R} \left[\pi \sum_i |J_{ei}''|^2\right]^{1/2} > 1$$

или для J_{ec} из (1.9)

$$K^2 = \left(\frac{N}{\Delta \omega}\right)^2 \left|\frac{\partial \omega}{\partial p}\right| \cdot \frac{2\pi e^2 U_{00}^2(0)}{R^2} > 1; \quad \Delta \omega = \left|\frac{\partial \omega}{\partial p}\right| p \quad (5.6)$$

Уменьшение $\partial \omega / \partial p$ соответствует переходу к линейной системе. В линейном случае $\omega_s' = 0$ кинетическое уравнение, строго говоря, неприменимо, что видно из возможности описания системы в терминах нормальных колебаний; тем не менее, на временах $t < N / \Delta \omega$, меньших обратного расстояния между частицами по частоте, кинетическое уравнение применимо, если только сдвиг частоты за счёт взаимодействия (здесь он порядка одночастичного декремента $\delta \omega \sim \delta$) больше $\Delta \omega / N$ - условие, заменяющее (5.6).

Если же $K \sim \delta \omega \cdot N / \Delta \omega \ll 1$, то взаимодействие между частицами можно представить, пользуясь обычной картиной двух-частичного резонансного взаимодействия.

Перейдём к распределению по амплитудам бетатронных колебаний в том же случае $\omega = \omega(p)$. Распределение будем характеризовать моментом

$$\langle I_1 \rangle = \int dI F(I, p) \cdot I_1$$

Уравнение для $\langle I \rangle$ можно получить из (5.2), если предположить факторизованность функции распределения $F(I, p) = F(I) A(p)$; $\int dp A(p) = 1$, а также пренебречь последним членом в (5.2), считая J_{ei}' достаточно малым. При этих предположениях:

$$\langle \dot{I}_r \rangle + \delta_r \langle I_r \rangle = \Lambda_r \langle I_r \rangle$$

и $\langle I_r \rangle$ затухает неограниченно с эффективным декрементом

$$\delta_{эф} = \delta_r - \Lambda_r \quad \text{при } \delta_r > \Lambda_r. \quad \text{Здесь}$$

$$\Lambda_r = 4\pi N \left(\frac{2\pi e^2 U_{10}^2(0)}{2p_s v_r l_m^2}\right)^2 \int dp p^2 A(p) \sum_i \frac{(J_{ei}'' \chi_{i1} + J_{ei}' \chi_{i2})^2}{|e \frac{\partial \omega}{\partial p} + \frac{\partial \omega_r}{\partial p}|} \quad (5.8)$$

$$\Lambda_r \approx \frac{\pi N \delta_r^2}{l_m^2} \sum_i \frac{1}{|e \omega_i + \omega_r|} \approx \frac{\pi N \delta_r^2}{l_m^2 \Delta \omega} l_m(l_m) \quad (5.9)$$

и квадратично растёт с ростом декремента δ_r . Здесь $\Delta \omega_r = \frac{\partial \omega_r}{\partial p} \Delta p$, $\Delta \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right) \Delta p$; Δp - ширина распределения $f(p)$ по импульсу.

Учет последнего члена в /5.2/ мало меняет этот результат, если $\Lambda_r \langle I(0) \rangle \ll \delta_r I_s$; $I_s = R \Delta p / 4 v_r l_m^2$.

Аналогично рассматривается случай, когда можно пренебречь зависимостью частот от импульсов, но учитывается их зависимость от амплитуд. При этом из (5.2) легко получить уравнение для $F(I_r) = \int R dp dI_2 F(I, p)$. Оно, как и (5.3) нелинейное и имеет стационарное решение. Без учёта последнего члена в (5.2) оно имеет вид:

$$F(I) = (\delta_r / 2 \Lambda) l_m(I_0 / I); \quad 0 < I \leq I_0 \quad (5.10)$$

$$F(I) = 0 \quad I \geq I_0$$

где

$$\Lambda = 2\pi N \left(\frac{2\pi e^2 R U_{10}^2(0)}{p_s v_r}\right)^2 \sum_i (J_{ei}'')^2 \left|\frac{\partial \omega_r}{\partial I_r} + l \frac{\partial \omega_i}{\partial I_r}\right|^{-1}$$

и ширина распределения $I_0 = 2\Lambda_1/\delta_r$. Распределение по импульсу в рассматриваемом случае затухает, если $\delta_p > 2\Lambda_p$, где $\Lambda_p \sim \delta_p^2$.

Таким образом, рассмотренные предельные случаи приводят к одинаковому по характеру распределению: по той степени свободы, от амплитуд которой зависят частоты, устанавливается стационарное распределение, а по другой степени свободы распределение сжимается с некоторым эффективным декрементом. Выбор между этими двумя предельными случаями должен быть проведен с учетом конкретных параметров машины. При этом разброс частот должен быть достаточен для устойчивости когерентных колебаний. Если $\delta_p/\delta_r \ll 1$ (см. (2.9)), естественно ослабить зависимость частот от амплитуд, обеспечив сначала затухание радиальных колебаний.

Заключение. Обсуждение результатов

Для работы системы необходимо удовлетворить целому ряду условий. Прежде всего — это условия на конструкцию системы — условие на длину пластины (I.I4), условие на расстояние между пикапами (I.I7), правильный выбор времени задержки. Более сложный вопрос о выборе коэффициента усиления κ и достижимых декрементов. Рассмотрение этого вопроса зависит от соотношения декрементов δ_p и δ_r (2.9). Если $\delta_p \ll \delta_r$, то можно разброс по импульсам на временах порядка затухания бетатронных колебаний считать заданным. Если при этом сделать параметр стохастичности $K < 1$, то взаимного влияния частиц можно не учитывать и бетатронные колебания будут затухать с декрементом

(2.3) $\delta_r \sim \kappa$, который можно увеличивать, увеличивая одновременно κ и разброс частот $\Delta\omega$. Однако реально достижимый декремент на этом пути мал. Действительно, всюду выше предполагалась возможность разложения $U_m(\Delta p)$ по Δp , т.е.

$(\Delta p/U_m) \frac{\partial U_m(\Delta p)}{\partial \Delta p} \ll 1$. Если при максимально допустимом этим условием $|\Delta p|$ найти параметр K , то это определит максимально допустимый коэффициент усиления κ , при котором еще $K < 1$. При этом κ декремент δ_r порядка

$$\delta_r \sim \omega_c (\nu_r / N^2)$$

Такой декремент слишком мал, поэтому надо выйти за область $K < 1$.

При $K > 1$ эффективным радиальным декрементом $\delta_{эф}$ становится разность $(\delta_r - \Lambda_r)$, где Λ_r определено в /5.8/.

Поскольку $\Lambda_r \sim \delta_r^2/\Delta\omega$, то максимально возможные коэффициенты усиления сигнала оказываются ограниченными и величина декремента определяется разбросом частот:

$$\delta_r \leq \left[\frac{\pi N}{\ell_m^2} \sum \frac{1}{|\ell \omega_0 + i \omega_{-1}|} \right]^{-1} \sim \frac{\Delta\omega_c \cdot \ell_m^2}{\pi N \cdot \ln(\ell_m)} \quad /6.2/$$

При этом предполагалось, что $\Delta\omega_c \neq 0$. Иначе диффузия за счет члена с $\ell=0$ будет всегда превосходить одночастичное затухание.

С учетом /1.15/ ограничение /6.2/ сводится к оптимистическому ограничению:

$$(\delta_r/\omega_0)_{\max} < \frac{(R/L)}{N_{эф} \cdot \ln(\ell_m)} \quad /6.3/$$

и определяется числом частиц на длине пикапа $N_{эф} = \frac{N}{\ell_m}$.

Если условие $\delta_p \ll \delta_r$ не выполнено, то в соотношении /6.2/ в качестве разброса Δp надо взять равновесное значение P_0 из /5.4/. Таким образом получим ограничение:

$$(P_0/P_s) \sim \nu_r (\ell_1/R)^{3/2} (R/\ell_1); \quad (\delta_r/\omega_r) \leq \frac{\ell_m}{\pi N} \left(\frac{\ell_1}{R}\right)^{1/2} \quad /6.4/$$

При $\delta_r > \Lambda_r$ затухание бетатронных колебаний идет неограниченно: $I_r(t) \rightarrow 0$. Это верно, если справедливо проведенное ранее усреднение взаимодействия, после которого оно стало функцией разности фаз. Такое усреднение допустимо при достаточно малом разбросе частоты обращения $\Delta\omega_c$, при котором можно пренебречь разностными резонансами вида $\omega_{r-1} = \ell_1 \omega_{c1} - \ell_2 \omega_{c2}$. Вопрос требует дальнейшего уточнения.

Выше мы пренебрегали экранированием взаимодействия между частицами. Можно показать, что такое пренебрежение справедливо, если когерентный сдвиг частоты мал по сравнению с полным разбросом частот, что совпадает с условием устойчивости когерентных колебаний.

В реальной системе, вообще говоря, может одновременно работать несколько пар следящих и управляющих пикапов. Полученные выше формулы остаются справедливыми и в этом случае, ес-

ли под \mathcal{K} понимать суммарный коэффициент усиления всех пар пикапов, поскольку фазовые корреляции в рассматриваемой системе исчезают за много оборотов. Как можно показать, для рассматриваемой системы диффузионный сдвиг фазы $\delta\varphi$ за оборот будет мал, если

$$\frac{N}{\Delta\omega} \omega_s v_r^2 (l_0/l_s)^4 \gg 1 \quad /6.5/$$

что заведомо выполняется. Поэтому несколько пар пикапов эквивалентны одной паре с суммарным коэффициентом усиления.

Основной вывод работы состоит в том, что предложенный Ван-дер-Меером метод действительно дает охлаждение пучка. Затухание является следствием дискретности спектра и неэрмитовости взаимодействия. Однако, полезный эффект оказывается одночастичным. Взаимное влияние частиц приводит к диффузии, коэффициент которой растет квадратично с ростом коэффициента усиления, в то время как декремент увеличивается лишь линейно. В результате, достижимые декременты оказываются ограниченными соотношениями /6.2/, /6.4/ и характерное время затухания превосходит период обращения более, чем в N_{sp} раз. Отметим, что предельно допустимый декремент /6.2/ зависит от разброса частот $\Delta\omega$ в системе, что, кажется, не отмечалось ранее. В частности, разброс бетатронных частот должен быть отличен от нуля.

Авторы благодарны А.Н. Скринскому за ценные советы и интерес к работе, а также М.М. Карлинера за обсуждение работ пикапов.

Приложение

Воздействие на частицу I в управляющем пикапе описывается потенциалом

$$V_1(t) = -\frac{e}{c} \vec{v}_1 \vec{A}(\vec{r}_1, t) \quad (\text{П.1})$$

Для низкочастотных колебаний поле \vec{A} имеет в согласованной линии структуру, аналогичную полю в бесконечном волноводе, т.е. представимо в виде суперпозиции бегущих волн [4]:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}_\perp) \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int d\kappa \tilde{\varphi}_\kappa(t) e^{i\kappa y} \quad (\text{П.2})$$

Здесь \vec{A}_0 — электростатическое поле, отличное от нуля внутри пикапа и быстро спадающее вдоль камеры вне пикапа на расстояниях порядка поперечного размера камеры l_\perp :

$$A_\perp \vec{A}_0 = 0; \quad \int d\vec{r}_\perp |\vec{A}_0|^2 = 1$$

С учётом потенциальности поля $\vec{A}_0 = -\nabla U$ удобно записать взаимодействие (П.1) в виде:

$$V(t) = \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\tilde{U}(\vec{r}_1)}{dt} \int d\kappa \tilde{\varphi}_\kappa(t) e^{i\kappa y_1(t)} \quad (\text{П.3})$$

Здесь \tilde{U} , $\tilde{\varphi}_\kappa$ — потенциал и амплитуда в управляющем пикапе. Аналогичные величины в следящем пикапе обозначены так же, но без тильды. В (П.3) $y_1(t) = R\theta_1(t)$.

Будем считать в согласии с идеей Ван-дер-Меера, что амплитуда поля $\tilde{\varphi}_\kappa(t)$, возбуждаемого в управляющем пикапе, определяется амплитудой поля $\varphi_\kappa(t)$, наведенного в следящем пикапе:

$$\tilde{\varphi}_\kappa(t) = \alpha(\kappa) \varphi_\kappa(t - \tau) \quad (\text{П.4})$$

$\alpha(\kappa)$ — коэффициент усиления, τ — время задержки.

Амплитуды поля $\varphi_\kappa(t)$ в следящем пикапе при калибровке $\text{div} \vec{A} = 0$ определяется из уравнения:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \nabla \dot{\varphi} \quad (\text{П.5})$$

Здесь

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_z e \vec{v}_z \delta(\vec{r} - \vec{r}_z(t))$$

так что поле в управляющем пикапе является линейной суперпозицией полей, наводимых отдельными частицами.

Из (П.2), (П.5) и потенциальности $\vec{A}_0 = -\nabla U$ получим уравнение для $Q_k(t)$:

$$\ddot{Q}_k + c^2 k^2 Q_k = -\frac{4\pi e}{\sqrt{2\pi}} \sum_2 \frac{dV(z_2(t), \theta)}{dt} e^{-ikR\theta(t)} \quad (\text{П.6})$$

Уравнение (П.3), (П.4), (П.6) определяют явный вид эффективного взаимодействия.

Правая часть (П.3), (П.6) зависит от радиального отклонения частицы $z(t) = z_1 + z_2$, $z_2 = f(t)R \frac{dp}{p_s}$ и его вертикального отклонения $z(0)$, где

$$(z; z_1) = \frac{A_{z,z}}{z} [f_{z,z}(\theta) e^{i f_{z,z}(t)} + \text{к.с.}]$$

$\Delta p = p - p_s$ - отклонение импульса от равновесного, $f(t)$ - функция Флоке: $f = H e^{i\gamma}$; $A_{z,z}$ связан с амплитудой $a_{z,z}$ и переменной $I_{z,z}$ (действие):

$$A_z = a_z / H_z |_{\omega_{ch}} = (2 I_z R / p_s)^{1/2}$$

В уравнениях (П.3), (П.6) можно разложить потенциалы U, \tilde{U} в ряд по амплитудам бетатронных колебаний и представить азимутальную зависимость в виде ряда по гармоникам.

$$\frac{dU(z)}{dt} e^{i k R \theta(t)} = -i \sum_{\ell, m} \Phi_{\ell m}^k(I; dp) e^{-i(\omega_\pm I_\pm + \ell \theta)} \quad (\text{П.7})$$

где $\dot{I}_\pm = \omega_\pm \left(\frac{dp}{p_s}; I_\pm\right)$; $\dot{\theta} = \omega_0 \left(\frac{dp}{p_s}; I_\pm\right)$

частоты бетатронных колебаний и обращения;

$$\Phi_{\ell m}^k = C_m(I) \left\{ U_{|m_r|: |m_z|}^{\ell + k R} (dp) [\vec{\omega}_\pm \vec{\omega}_\pm + (\ell + k R) \omega_\pm^2] - \frac{\ell}{R V_r} U_{|m_r|-1: |m_z|}^{\ell + k R} (dp) [|\vec{\omega}_\pm| \vec{\omega}_\pm^2 \pm (\ell + k R) \omega_\pm^2 + \frac{k R}{\ell} (\omega_\pm^2 \mp k R \omega_\pm^2)] \right\} \quad (\text{П.8})$$

Знаки (+) берутся для $m_r \geq 0$ соответственно. Члены стоящие во второй строке, возникли за счёт модуляции продольного движения поперечным. При $m_r = 0$ они должны быть опущены с точностью $O(a^2 / l_y l_z v^2)$. Множитель $C_m(I)$ определен в (I.5), а гармоники $U_{\ell m}^k$ связаны с потенциалом U :

$$U_{m_r m_z}^{\ell} (dp) = \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i \ell \theta} (\sqrt{V_z} |f_r|)^{|m_r|} (\sqrt{V_z} |f_z|)^{|m_z|} e^{i \vec{m} \vec{z}} \left(\frac{\int_{z=0}^{z=z_2} V(z, z) e^{i \vec{m} \vec{z}} dz}{\int_{z=0}^{z=z_2} V(z, z) dz} \right) \quad (\text{П.9})$$

Разложение по гармоникам в (П.3) имеет вид, аналогичный (П.7) с заменой $\Phi_{\ell m}^k$ на $\tilde{\Phi}_{\ell m}^k$.

Если пикапы одинаковы, то $\tilde{\Phi}_{\ell m}^k = \Phi_{\ell m}^k e^{-i \ell \theta_0}$, где θ_0 - расстояние между центрами пикапов по азимуту.

Используя приведенные соотношения для гармоник эффективного взаимодействия (I.2), получим

$$V_n(I_1, I_2) = -2e^2 \int \frac{dk x(k) \Phi_{\ell m}^k(I_1, dp_1) \Phi_{\ell m}^k(I_2, dp_2)}{c^2 k^2 - [\vec{m}_1 \vec{\omega}_1(z) + \ell \omega_0(z) - i\gamma]^2} e^{-i k x} \quad (\text{П.10})$$

Обход полюса введен в согласии с принципом причинности,

$$V_n = V_n^*$$

Выражение (П.10) совпадает с (I.4); (I.10) текста.

Литература

1. S. van der Meer CERN Internal Report CERN/ISR-PO/72-31 (1972)
2. P. Bramham, et al. Nuclear Instruments and Methods 125 (1975), 201-202
3. Б.В.Чириков. Докторская диссертация, Новосибирск, 1969 г. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН, 105, 1971 г. (3)
4. Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. Препринт ИЯФ 7-72; Новосибирск, 1972.
5. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей, Физматгиз, Москва (1962).
6. Я.С.Дербенёв, С.А.Хейфец. Препринт ИЯФ 76-57, Новосибирск, 1976.
7. К.П.Гуров. Основы кинетической теории. Наука, Москва, 1966.
8. Интегральные преобразования. СМБ. Наука, Москва, 1968г.

Работа поступила 29 марта 1977г.

Ответственный за выпуск С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 28.IX-1977г. МН 03005

Усл.1,3 печ.л., 1,0 учетно-изд.л.

Тираж 150 экз. Бесплатно.

Заказ № 88.

Отпечатано на ротапринтере ИЯФ СО АН СССР