И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 53

Б.Г.Конопельченко

ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Новосибирск
1977

Б.Г.Конопельченко

ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

АННОТАЦИЯ

Показано, что динамическая группа любого вполне интегрируемого полевого уравнения содержит в качестве подгрупп а) бесконечную группу симметрии (типа $G_{n\infty}$), б) бесконечную абелеву группу Бэклунд-преобразований. Продемонстрировано, что вполне интегрируемые уравнения обладают различными типами элементарных Бэклунд-преобразований. Обсуждается соотношение между двумя способами описания вполне интегрируемых систем; на языке полевого уравнения и на языке динамической группы.

I. Введение

Нелинейные уравнения, описывающие классические поля, привлекают в настоящее время значительный интерес. Наиболее детально удается исследовать так называемые вполне интегрируемые уравнения. Широкий класс вполне интегрируемых уравнений, исследованных методом обратной задачи рассеяния (см. обзоры [1 -3]) обладает целым рядом интересных свойств (солитоны, бесконечные наборы интегралов движения и т.д.).

Существование таких специфических свойств у вполне интегрируемых уравнений представляется связанным со специальными свойствами симметрии этих уравнений. В работе [4] , например, продемонстрировано, что вполне интегрируемые уравнения обладают бесконечными группами симметрии типа $G_{n\infty}$.

В настоящей работе мы рассмотрим динамические группы вполне интегрируемых уравнений. Динамическая группа - это группа преобразований, переводящих решения данного уравнения в решения того же уравнения. Мы покажем, что динамическая группа любого вполне интегрируемого уравнения содержит в качестве подгруппы бесконечную группу симметрии (типа $G_{n\infty}$), а также бесконечную абелеву группу общих Бэклунд-преобразований. Бэклунд-преобразования для различных нелинейных уравнений интенсивно изучаются (см., например, работы [5-10]) и мы убедимся, что эти преобразования естественным образом входят в динамическую группу. Мы увидим, что вполне интегрируемые уравнения обладают различными типами Бэклунд-преобразований. В работе также показано, что свойство полной интегрируемости тесно связано с существованием у уравнения абелевой группы Бэклунд-преобразований.

Во втором разделе рассмотрены динамические группы линейных уравнений. Третий раздел посвящен нелинейным вполне интегрируемым уравнениям. Исследована структура бесконечных групп Бэклунд-преобразований и бесконечных динамических групп. В заключение обсуждается эквивалентность двух способов описания вполне интегрируемой системы-с помощью полевого уравнения и с помощью динамической группы.

2. Линейные уравнения

Начнем с простейших вполне интегрируемых уравнений. Рассмотрим полевое уравнение

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)=0 \tag{2.I}$$

где $X=\{x_\mu\}$ - координаты пространства-времени ($\mu=0,1,\dots,N$), $F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ - произвольный дифференциальный оператор, $\psi(x)$ - полевые переменные. Размерность $N+1$ пространства-времени и число компонент поля произвольны.

Динамической группой полевого уравнения (2.I) мы будем называть, по аналогии с задачами квантовой механики (см., например, [II, I2]), группу $\mathcal{D}_F$ преобразований $\psi\to\psi'$ переводящих решение ψ уравнения (2.I) в решения ψ' этого же уравнения. Рассмотрим для простоты инфинитезимальные преобразования $\psi\to\psi'=\psi+\delta\psi$. Тогда по определению динамической группы

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\psi(x)=0 \tag{2.2}$$

Учитывая (2.I) находим, что $\delta\psi(x)$ имеет вид

$$\delta\psi(x)=\sum_\alpha a_\alpha \mathcal{D}_\alpha(x)\,\omega(x) \tag{2.3}$$

где a_α - параметры преобразований, $\mathcal{D}_\alpha(x)$ - дифференциальные операторы, коммутирующие с F ($[F(\frac{\partial}{\partial x}),\mathcal{D}_\alpha(x)]=0$), $\omega(x)$ - произвольное решение уравнения (2.I). Преобразование вида (2.3) можно представить в виде комбинации двух типов преобразований

а) $$\delta\psi(x)=\sum_\alpha a_\alpha\mathcal{D}_\alpha(x)\psi(x) \tag{2.4}$$

б) $$\delta\psi(x)=\omega(x) \tag{2.5}$$

Преобразования (2.4) - это преобразования группы симметрии уравнения (2.I), записанные в инфинитезимальной форме. В работе [4] было показано, что группа симметрии уравнения (2.I) является бесконечной и принадлежит к типу $G_{n\infty}$. Произвольный элемент группы симметрии $G_{n\infty}$ равен

$$g=\exp\left(i\sum_\alpha a_\alpha L_\alpha\right),$$

где $\{L_\alpha,\psi(x)\}=\mathcal{D}_\alpha(x)\psi(x)$, ($\{\ ,\ \}$ - скобка Пуассона). Генераторы L_α группы $G_{n\infty}$ можно записать в виде

$$L_\alpha=-\int d^N x\ \Pi(x)\mathcal{D}_\alpha(x)\psi(x) \tag{2.6}$$

где $\Pi(x)$-Канонические импульсы ($\{\psi(\vec{x},t),\Pi(\vec{y},t)\}=\delta(\vec{x}-\vec{y})$).

Преобразования (2.5) также образуют бесконечную группу, т.к. $\omega(x)$ - произвольное решение уравнения (2.I), а число независимых решений такого уравнения бесконечно. Произвольный элемент этой группы имеет вид*)

$$g=\exp iB_\omega$$

где

$$B_\omega=-\int d^N x\ \omega(x)\Pi(x) \tag{2.7}$$

и

$$\delta\psi(x)=\{B_\omega,\psi(x)\}=\omega(x) \tag{2.8}$$

Оператор B_ω является генератором преобразований (2.5), образующих в силу $\{B_\omega,B_{\omega'}\}=0$ бесконечную абелеву группу, которую мы будем называть группой Бэклунд-преобразований. Инвариантность уравнения (2.I) относительно группы Бэклунд-преобразований является, очевидным образом, следствием линейности уравнения по полю $\psi(x)$, а абелевость этой группы (и соответствующей алгебры) - математической формулировкой линейного принципа суперпозиции.

Покажем, что группу Бэклунд-преобразований можно рассматривать как бесконечно-параметрическую абелеву группу. Разложим для этого $\omega(x)$ (произвольное решение уравнения (2.I)) по полному набору решений этого уравнения. В качестве базиса в пространстве решений выберем собственные функции некоторого полного набора операторов Λ_i

$$\Lambda_i\,\xi_i(x)=\zeta_i\,\xi_i(x) \tag{2.9}$$

---

*) Отметим, что калибровочная группа, если уравнение (2.I) обладает таковой, является подгруппой этой группы. Например, для векторного поля A_μ уравнение (*) $\Box A_\mu-\partial_\mu\partial_\nu A_\nu=0$ инвариантно относительно преобразований $A_\mu\to A'_\mu=A_\mu+\omega_\mu$ где ω_μ - произвольное решение уравнения (*) . Калибровочной группе соответствует подгруппа преобразований с $\omega_\mu=\partial_\mu\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - произвольная функция координат.

Записывая $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = \sum_i \omega_i \xi_i(x)$$

находим

$$B_\omega = \sum_i \omega_i B_i , \qquad (2.10)$$

где

$$B_i = \int d^N x \; \xi_i(x) \Pi(x) = \Pi_i . \qquad (2.11)$$

Таким образом, общее Бэклунд-преобразование является в силу (2.10) линейной суперпозицией "элементарных" Бэклунд-преобразований с генераторами B_i и параметрами преобразований ω_i $(-\infty < \omega_i < \infty)$. Поскольку $\{ B_i , B_k \} = 0$, то эта группа абелева.

Для "элементарного" Бэклунд-преобразования $\delta_k \psi(x) = \omega_k \{ B_k , \psi(x) \} = \omega_k \xi_k(x)$, т.е. действие "элементарного" Бэклунд-преобразования сводится к добавлению к первоначальному решению $\psi(x)$ элемента базиса $\xi_k(x)$ с амплитудой ω_k, играющей роль параметра преобразования $(-\infty < \omega_k < \infty)$. Учитывая (2.9), действие элементарного Бэклунд-преобразования $\psi(x) \to \psi'(x)$ можно задать также в виде

$$\Lambda_i(x) \left(\psi'(x) - \psi(x) \right) = \zeta_i \left(\psi'(x) - \psi(x) \right) \qquad (2.12)$$

Именно в такой форме Бэклунд-преобразования рассматривались в работах [5-10].

Подчеркнем, что переходя от одного базиса $\xi_i(x)$ в пространстве решений к другому мы соответственно переходим к другому виду "элементарного" Бэклунд-преобразования. другому. Очевидно, что генераторы "элементарных" Бэклунд-преобразований в различных базисах связаны между собой линейным преобразованием.

Для трансляционно-инвариантных уравнений удобным является базис из собственных функций оператора импульса, т.е. плоских волн

$$i \frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{-ipx} = p_\mu e^{-ipx}$$

В этом базисе

$$B_\omega = \int d^{N+1} p \, \delta(\det \mathcal{F}(ip)) \cdot \omega_p B_p , \qquad (2.13)$$

где

$$B_p = \int d^N x \; e^{-ipx} \, \Pi(x)$$

Соответственно, для "элементарного" Бэклунд-преобразования

$$\delta_p \psi(x) = \omega_p \{ B_p , \psi(x) \} = \omega_p e^{-ipx} \qquad (2.14)$$

или

$$i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\psi'(x) - \psi(x) \right) = p_\mu \left(\psi'(x) - \psi(x) \right) \qquad (2.15)$$

где $\det \mathcal{F}(ip) = 0$.

Таким образом, действие элементарного Бэклунд-преобразования в импульсном базисе сводится к добавлению к решению плоской волны с импульсом p и амплитудой, являющейся при фиксированном импульсе параметром преобразования $(-\infty < \omega_p < \infty)$.

Генераторы B_i элементарных Бэклунд-преобразований вместе с генераторами L_α группы симметрии образуют алгебру динамической группы. Перестановочные соотношения генераторов этой алгебры нетрудно найти, исходя из (2.6) и (2.11). Перестановочные соотношения генераторов группы симметрии между собой приведены в работе [4]. Генераторы элементарных Бэклунд-преобразований коммутируют – $\{ B_i , B_k \} = 0$. Остальные перестановочные соотношения имеют вид

$$\{ B_i , L_\alpha \} = \mathcal{D}_\alpha(\zeta) B_i \qquad (2.16)$$

Здесь $\mathcal{D}_\alpha(\zeta)$ – инфинитезимальные операторы группы симметрии в ζ – представлении. В частности, в импульсном представлении

$$\{ B_q , P_\mu \} = q_\mu B_q$$

Итак, мы видим, что динамическая группа линейного уравнения содержит преобразования двух различных типов: преобразования группы симметрии и группу Бэклунд-преобразований. Динамическая группа действует на пространстве решений транзитивно и более того она является минимальной группой, для которой пространство решений уравнения является однородным пространством. Для свободного квантового поля все пространство состояний (пространство Фока) соответственно является пространством неприводимого бесконечномерного представления бесконечной динамической группы.

3. Нелинейные уравнения

Нелинейное уравнение является по определению вполне интегрируемым, если оно допускает такое каноническое преобразование от исходных канонических переменных $\psi(x),\ \pi(x)$ к каноническим переменным $S(\lambda),\ \Omega(\lambda,t)$, в которых рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\frac{dS(\lambda)}{dt}=0,\quad \frac{d\Omega(\lambda,t)}{dt}=\frac{\delta H\{S(\lambda')\}}{\delta S(\lambda)}=\mathcal{Y}_\lambda\{S(\lambda')\} \qquad (3.1)$$

Индекс λ нумерует бесконечную совокупность переменных S и Ω и может принимать как непрерывные, так и дискретные значения; H - гамильтониан.

Поскольку исходное нелинейное уравнение и уравнения (3.I) связаны каноническим преобразованием, то информация, содержащаяся в одном из них, совпадает с информацией в другом. В частности, совпадают группы симметрии и динамические группы этих уравнений. Исходя из этого, в работе [4], исследованы группы симметрии вполне интегрируемых уравнений.

Было показано, что группами симметрий таких уравнений являются бесконечные группы типа $G_{n\infty}$.

Здесь мы рассмотрим структуру динамических групп вполне интегрируемых уравнений, и более подробно структуру группы Бэклунд-преобразований.

Ограничимся для простоты вполне интегрируемыми уравнениями, для которых $\mathcal{Y}_\lambda\{S\}=\mathcal{Y}_\lambda\{S(\lambda)\}$. Тогда как нетрудно убедиться существуют канонические переменные, в которых уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial a(\lambda,t)}{\partial t}+i f(\lambda)\, a(\lambda,t)=0 \qquad (3.2)$$

где $f(\lambda)$ - некоторая функция индекса λ.

Уравнения (3.2) являются линейными и, повторяя рассуждения предыдущего раздела, мы заключаем, что они допускают бесконечную группу Бэклунд-преобразований

$$a(\lambda,t)\to a'(\lambda,t)=a(\lambda,t)+\omega(\lambda,t) \qquad (3.3а)$$

или

$$\delta a(\lambda,t)=\{B_\omega, a(\lambda,t)\}=\omega(\lambda,t) \qquad (3.3б)$$

где

$$B_\omega=-\int d\lambda\, \omega(\lambda,t)\, a^*(\lambda,t) \qquad (3.4)$$

Здесь $\omega(\lambda,t)$ - произвольное решение уравнения (3.2), $a^*(\lambda,t)$ - величина, канонически сопряженная $a(\lambda,t)$. Т.к. общее решение уравнения (3.2) имеет вид $g(\lambda)\, e^{-if(\lambda)t}$ где $g(\lambda)$ - произвольная функция λ, то для B_ω получаем

$$B_\omega=\int d\lambda\, g(\lambda)\, B_\lambda, \qquad (3.5)$$

где

$$B_\lambda=-e^{-if(\lambda)t}\, a^*(\lambda,t)=-a^*(\lambda,0).$$

Таким образом, общее Бэклунд-преобразование является суперпозицией элементарных Бэклунд-преобразований с генераторами B_λ и параметрами, которые суть функции $g(\lambda)$ при фиксированном λ. Поскольку $\{B_\lambda, B_{\lambda'}\}=0$ бесконечная группа Бэклунд-преобразований является абелевой. Для элементарного Бэклунд-преобразования

$$\delta_\lambda a(\lambda,t)=\{g(\lambda')B_{\lambda'}, a(\lambda,t)\}=\delta_{\lambda\lambda'}\, g(\lambda)\, e^{-if(\lambda)t} \qquad (3.6)$$

и его можно задать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(a'(\lambda,t)-a(\lambda,t)\big)=i f(\lambda)\big(a'(\lambda,t)-a(\lambda,t)\big) \qquad (3.7)$$

Предположим теперь, что среди переменных $a(\lambda,t)$ есть переменные различных типов, нумеруемые соответственно различными типами индексов (непрерывными, дискретными). Так для уравнений, решаемых методом обратной задачи рассеяния [I-3], имеется, как правило, два типа переменных a ; переменные непрерывного спектра (непрерывный индекс λ) и переменные дискретного спектра (солитонные переменные). Для уравнения синус-гордон дискретные переменные распадаются на два типа: один тип переменных соответствует n - солитонным решениям, второй - двойным солитонам.

Каждому типу переменных соответствует свой тип "элементарного" Бэклунд-преобразования. Бэклунд-преобразование, со -

ответствующее непрерывному спектру, добавляет к исходному решению решение $\rho(\lambda) e^{-if(\lambda)t}$. Солитонное Бэклунд-преобразование добавляет к решению один солитон ($\rho_i e^{-if_i t}$). Аналогично существует и Бэклунд-преобразование для двойных солитонов. Для каждого типа элементарного Бэклунд-преобразования мы можем написать аналоги формул (3.6), (3.7). Генераторы различных элементарных Бэклунд-преобразований коммутируют. Общее же Бэклунд-преобразование является суперпозицией элементарных Бэклунд-преобразований различных типов

$$B_\omega = \int d\lambda\, \rho(\lambda) B_\lambda + \sum_i \rho_i B_i + \dots \qquad (3.8)$$

Поскольку исходное нелинейное вполне интегрируемое уравнение связано с уравнением типа (3.2) каноническим преобразованием, то и оно обладает бесконечной абелевой группой Бэклунд-преобразований. Существование линейного принципа суперпозиции для переменных типа $a(\lambda,t)$ приводит к существованию нелинейного принципа суперпозиции для исходных полевых переменных $\psi(x)$ [5-7], абелевость группы Бэклунд-преобразований отражается в коммутативности соответствующих диаграмм Лэмба [5,7].

Элементарные Бэклунд-преобразования различных типов выглядят просто в переменных $a(\lambda,t)$ (формулы (3.6), (3.7)). В исходных полевых переменных $\psi(x)$ они задаются сложными нелинейными преобразованиями, явный вид которых удается, как правило, найти только для переменных дискретного спектра. Это связано с тем, что уравнения метода обратной задачи удается точно решать только для дискретного спектра (солитонных переменных). Например, для уравнения синус-гордон $(N=1)$

$$\Box \varphi(x) + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\varphi\right) = 0$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\mu}$$

элементарное Бэклунд-преобразование $\varphi \to \varphi'$, соответствующее добавлению к решению одного солитона, имеет в лоренц-инвариантной форме вид

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x^\mu} + \epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} = \frac{2m^2}{\sqrt{\lambda}\, M} p_\mu \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\frac{\varphi'}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\frac{\varphi}{2}\right) - \qquad (3.9)$$

$$-\frac{m^3}{\sqrt{\lambda}\cdot M}\epsilon_{\mu\nu} p_\nu \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\frac{\varphi'}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\frac{\varphi}{2}\right),$$

где $p_\mu p_\mu = M^2$, М - масса солитона, $\epsilon_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор ($\epsilon_{01} = 1$). Для других уравнений, проинтегрированных методом обратной задачи рассеяния, также найдены только солитонные элементарные Бэклунд-преобразования [5-IO]. Однако для этих уравнений существуют Бэклунд-преобразования, соответствующие и другим частям спектра, например, непрерывному и двойным солитонам.

4. Заключение

Итак, мы видим, что любое нелинейное вполне интегрируемое уравнение обладает бесконечной абелевой группой Бэклунд-преобразований. Подчеркнем, что абелевость группы Бэклунд-преобразований является прямым следствием полной интегрируемости уравнений. Справедливо, по-видимому, и обратное утверждение.

Бесконечная группа Бэклунд-преобразований вместе с бесконечной группой симметрии образуют бесконечную динамическую группу вполне интегрируемого уравнения. Пространство решений вполне интегрируемого уравнения является однородным пространством динамической группы.

Отметим, что симметрия вполне интегрируемого уравнения относительно Бэклунд-преобразований реализована спонтанно нарушенным образом. Связь между нелинейными уравнениями и теориями спонтанного нарушения бесконечных динамических групп симметрии будет рассмотрена в отдельной работе. Информация, содержащаяся во вполне интегрируемом уравнении совпадает с информацией, содержащейся в его динамической группе.

Таким образом, вполне интегрируемую полевую систему можно формулировать либо на языке нелинейного уравнения, либо на языке динамической группы. Эти две формулировки дают два различных, но эквивалентных способа исследования вполне интегрируемых систем.

В этом отношении полевые вполне интегрируемые системы являются бесконечными (по числу степеней свободы) аналогами таких систем с конечным числом степеней свободы, как атом водорода, гармонический осциллятор и т.д. [II, I2]. И те, и другие обладают, кроме "явной" группы симметрии, еще скрытыми группами симметрии и динамическими группами. Для систем с конечным числом степеней свободы - это конечные группы Ли (для атома водорода - $SO(4)$ и $SO(2,4)$, для осциллятора - $SU(3)$ и $SU(1,3)$) для вполне интегрируемых систем с бесконечным числом степеней свободы - бесконечные группы Ли ("скрытые" группы симметрии типа $G_{n\infty}$, бесконечные динамические группы). Для систем с конечным числом степеней свободы развиты методы их исследования, основанные на использовании алгебраической структуры динамических групп [II, I2]. Аналогичные методы могут быть развиты и для систем с бесконечным числом степеней свободы, в частности, для вполне интегрируемых полевых уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

I. В.Е.Захаров, Метод обратной задачи рассеяния, гл. в книге И.А.Кунина "Теория упругих сред с микроструктурой", "Наука", I975.

2. M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, H.Segur, Stud.Appl. Math., 53, 249 (1974).

3. H.Flaschka, A.Newell, Lecture Notes in Physics, 38, 355 (1975).

4. Б.Г.Конопельченко, ЯФ, 26, вып. 3 (I977), препринт ИЯФ СО АН СССР, 77-5 (I977).

5. G.J.Lamb Jr., Rev.Mod.Phys., 43, 99 (1971).

6. H.D.Wahlquist, F.B.Estabrook, Phys.Rev.Lett., 31, 1386 (1973).

7. D.W.McLaughlin, A.C.Scott, J.Math.Phys., 14, 1817 (1973).

8. G.L.Lamb Jr., J.Math.Phys., 15, 2157 (1974).

9. M.Wadati, H.Sanuki, K.Konno, Prog.Theor.Phys., 53, 419 (1975).

IO. K.Konno, M.Wadati, ibid, 53, 1652 (1975).

II. H.Kleinert, Fort.Phys. 16, 1 (1968).

I2. Э.Б.Аронсон, И.А.Малкин, В.И.Манько, ЭЧАЯ, 5, I22 (I974).

Работа поступила - 9 июня 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 22.VI-1977 г. МН 02878
Усл. 0,8 печ.л., 0,6 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 53.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР