23

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 31

Ю.Б.Румер, В.Я.Крейнович

СЛАБЫЕ ВОЛНЫ КРИВИЗНЫ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙШТЕЙНА. I

Новосибирск
1977

СЛАБЫЕ ВОЛНЫ КРИВИЗНЫ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА. I.

Ю.Б.Румер, В.Я.Крейнович

А Н Н О Т А Ц И Я

Слабые волны кривизны описываются двумя бесследными симметричными пространственными тензорами $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, уравнения для которых аналогичны уравнениям электромагнитных волн. В теории существует два выражения для энергии: в терминах напряженностей поля $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ и в терминах потенциалов (построенное по типу псевдотензора Ландау и Лифшица $t_{ij}^{\text{ЛЛ}}$) Предпочтение оказывается не $t_{ij}^{\text{ЛЛ}}$, а псевдотензору Меллера-Мицкевича. Исследуются свойства энергии-импульса поля, приводится выражение для лагранжиана поля, проводится сравнение с другими подходами. Библ. I5 назв.

СЛАБЫЕ ВОЛНЫ КРИВИЗНЫ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА.1

Ю.Б.Румер, В.Я.Крейнович

Слабые волны кривизны в теории тяготения Эйнштейна можно описать двумя бесследными симметричными пространственными тензорами $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$. В линейном приближении (случай слабого поля) уравнение приобретает вид, аналогичный уравнениям для электромагнитных волн. Исследуются различные определения энергии и импульса волн.

WEAK WAVES OF CURVATURE IN EINSTEIN'S THEORY OF GRAVITATION.1

Yu.B.Rumer, V.Ya.Kreinovich.

Weak waves of curvature in Einstein's theory of gravitation can be described by two traceless symmetric space tensors $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ & $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$. In the linear approximation (weak field) the equations obtain a form, very similiar to those of electromagnetic waves. Different definitions of energy and momentum of waves are investigated.

I. Введение

В Эйнштейновской теории тяготения гравитационными волнами называются решения уравнения[x)]

$$R_{ik} = 0 \qquad \text{(I)}$$

где R_{ik} – тензор Риччи. Необходимо, как известно (см., например обзор [I]).различать два типа волн: фиктивные (R_{ik}=0, R_{iklm} =0), которые могут быть оттрансформированы подходящим преобразованием координат и истинные (R_{ik} =0, $R_{iklm} \neq 0$), которые мы будем называть волнами кривизны.

В настоящей работе мы будем, следуя [2], характеризовать волны кривизны компонентами тензора кривизны R_{iklm}, который для гравитвционных волн совпадает с тензором конформной кривизны C_{iklm} (тензором Вейля) тем самым автоматически отсеиваются фиктивные волны.[xx)] Мы ограничимся слабыми волнами кривизны. В этом случае метрика g_{ij} мало отличается от плоской η_{ij} и в результате слабые волны кривизны описываются линейными уравнениями в плоском пространстве.

Цель данной работы – предложить такую формулировку теории слабых волн кривизны, в которой бы наиболее прозрачно проявлялось родство гравитационных волн с другими типами волн, а именно с электромагнитными волнами. В работе также

---

x) Индексы i, j, k пробегают 0, I, 2, 3, $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ – I, 2, 3; $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t}$; трехмерные тензоры мы будем обозначать жирными буквами (например, $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$), чтобы отличить их от четырехмерных.

xx) А.Эйнштейн, Н.Розен [3], найдя решение уравнений (I) должны убеждаться, что $R_{iklm} \neq 0$.

подробно обсуждается проблема тензора энергии-импульса для волн кривизны. Сравнение предлагаемого подхода с имеющими общековариантными определениями гравитационных волн приведено в приложении I.

2. Уравнение волн кривизны

Тензоры, удовлетворяющие всем алгебраическим соотношениям, которым удовлетворяет тензор Вейля, образуют неприводимое представление полной (т.е.содержащей дискретные симметрии) группы Лоренца. Если фиксировать ось x^0 (т.е. выделить в группе Лоренца подгруппу вращений $O(3)$ (не обязательно собственных)), то это представление распадается на два: представление трехмерными симметричными бесследными тензорами $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и симметричными бесследными псевдотензорами $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ (псевдотензорами в том смысле, что при $x^\alpha \to -x^\alpha$ будет $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \to -\mathbb{H}_{\alpha\beta}$). Относительно собственных вращений (т.е. группы $SO(3)$) $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ преобразуются, как обычные тензоры и, таким образом, слабые волны кривизны можно описывать (если фиксировать временную ось) двумя бесследными симметричными трехмерными тензорами, которые, как можно показать, связаны с компонентами C_{ijkl} соотношением [2]

$$\mathbb{E}_{\alpha\beta} = -C_{0\alpha 0\beta}, \quad \mathbb{H}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma\delta} C_{0\alpha\gamma\delta} \tag{2}$$

(в 2 эти же формулы выводятся из элементарных расчётов).

Эти два вещественных тензора можно заменить на один бесследный комплексный $\mathbb{F}_{\alpha\beta} = \mathbb{E}_{\alpha\beta} + i\,\mathbb{H}_{\alpha\beta}$. При этом инварианты A, B, C, D тензора кривизны в пустом пространстве ([1] § 4 гл.5) записываются в виде $Sp\,\mathbb{F}^2 = A + iB$, $Sp\,\mathbb{F}^3 = C + iD$.x)

---

x) $Sp\,\mathbb{F} = 0$, так как $\mathbb{F}_{\alpha\beta}$ – бесследный тензор, а $Sp\,\mathbb{F}^n$ при $n \geq 4$ является в силу теоремы Гамильтона – Кэли функцией от $Sp\,\mathbb{F}$, $Sp\,\mathbb{F}^2$ и $Sp\,\mathbb{F}^3$ и, следовательно, не даёт независимых инвариантов.

Для слабых волн кривизны мы можем пренебречь слагаемыми квадратичными по C_{iklm} или пропорциональными произведению C_{iklm} на $h_{ij} = g_{ij} - \eta_{ij}$. Поэтому тождества Бианки

$$C_{ijkl;m} + C_{ijlm;k} + C_{ijmk;l} = 0 \tag{3}$$

(где $;m$ обозначает ковариантное дифференцирование) для слабых волн кривизны принимает вид

$$\varepsilon_{\beta\gamma\delta}\frac{\partial \mathbb{H}_{\alpha\delta}}{\partial x^\gamma} - \dot{\mathbb{E}}_{\alpha\beta} = 0, \quad \varepsilon_{\beta\gamma\delta}\frac{\partial \mathbb{E}_{\alpha\delta}}{\partial x^\gamma} + \dot{\mathbb{H}}_{\alpha\beta} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbb{H}_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbb{E}_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{5}$$

Эти уравнения мы будем рассматривать как уравнения для слабых волн кривизны, описываемых тензорами $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$.

В терминах $\mathbb{F}_{\alpha\beta}$ они принимают вид

$$\dot{\mathbb{F}}_{\alpha\beta} = -i\,\varepsilon_{\beta\gamma\delta}\frac{\partial \mathbb{F}_{\alpha\delta}}{\partial x^\gamma} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbb{F}_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \tag{7}$$

и, следовательно, инвариантны относительно дуального вращения [4]

$$\mathbb{F}'_{\alpha\beta} = e^{i\varphi}\,\mathbb{F}_{\alpha\beta} \tag{8}$$

Уравнения (5) следуют из (4) и, следовательно, мы имеем 10 независимых уравнений для определения 10 величин $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$.

Идея максвеллизации уравнений слабых волн кривизны была впервые предложена (в частном случае синхронных координат) в [5] , а в общем случае (независимо от [5]) – в работе [2] одного из авторов (Ю.Б.Р.) в выпуске " Zeitschrift f. Phys. ", посвященной 80-летию Макса Борна.

2. Плоские волны

Для случая монохроматической плоской волны, распространяющейся в направлении x ,

$$
\begin{aligned}
H_{\alpha\beta} &= H^{(0)}_{\alpha\beta} \exp[i(kx-\omega t)] \\
E_{\alpha\beta} &= E^{(0)}_{\alpha\beta} \exp[i(kx-\omega t)]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

уравнения (4-5) приводят к

$$
E^{(0)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}, \quad H^{(0)}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -a \\ 0 & -a & -b \end{pmatrix}
\tag{10}
$$

Таким образом, волны кривизны чисто поперечные и имеют две независимые поляризации ($a=0, b\neq 0$ и $a\neq 0, b=0$). Подсчет числа компонент поля показывает, что уравнения (4-5) описывают частицы со спиральностью два, в то время как соответствующие уравнения Максвелла описывают частицы со спиральностью единица.

3. Энергия и импульс волн кривизны

В рассматриваемой теории слабые волны кривизны соответствуют частицам со спином 2 (гравитонам) и то, что они до сих пор еще не наблюдались экспериментально, по-видимому связано со слабостью соответствующего взаимодействия.

Если предположить, что действительно существуют такие волны, то естественно возникает вопрос о переносимой ими энергии или, более широко, о тензоре энергии-импульса, связанном с этими волнами. Как показал М.Я.Пальчик [6] (при

помощи спинорного анализа), невозможно лоренц-ковариантное выражение для этого тензора, квадратичное по компонентам поля, дивергенция которого обращалась бы в нуль в силу (4-5). Можно показать, что существует единственное (с точностью до константы) квадратичное по $E_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ выражение с равной нулю дивергенцией

$$
\begin{aligned}
U_{\alpha\beta} &= -(E_{\delta\alpha} E_{\delta\beta} + H_{\delta\alpha} H_{\delta\beta}) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(E_{\gamma\delta} E^{\gamma\delta} + H_{\gamma\delta} H^{\gamma\delta})\,\delta_{\alpha\beta} \\
U_{0\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E_{\delta\beta} H_{\delta\gamma} \\
U_{00} &= \frac{1}{2}(E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta})
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Можно убедиться, что эти величины не образуют тензора, а являются компонентами T_{00ij} введенного Белем ([1], § I гл.5, [7]) четырехвалентного тензора.[x] По аналогии с [7] U_{ij} естественно назвать суперэнергией. Отношение $U_{0\alpha}/U_{00}$ можно интерпретировать, как скорость v^α переноса энергии; при этом (в единицах, где $c=1$) всегда $|v^\alpha|\leq c$ и $|v^\alpha|=c$ тогда и только тогда, когда поворотом координат можно в рассматриваемой точке привести $E_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ к типу монохроматической плоской волны (§ 2). След тензора U_{ij} равен нулю.

Восстановление $E_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ по U_{ij}

По аналогии с электродинамикой можно поставить вопрос о том, насколько однозначно энергетические характеристики

---

x) Таким образом, проясняется вышеупомянутый результат из [6]: всякая сохраняющаяся величина, которая может быть построена из $E_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$, имеет вид (II), но (II) не является тензором ранга 2.

волн кривизны позволяют восстановить поля $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$. Дуальный поворот (8) не меняет u_{ij}. С учетом $u^i_i=0$ матрица u_{ij} определяется девятью параметрами $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ (с учетом дуального поворота) – также девятью, поэтому естественно заключить, что в общем случае при положении определённых условий (типа неравенств $|u_{0\alpha}|\le u_{00}$) по всякому u_{ij} можно восстановить $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$, и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ однозначно с точностью до дуального поворота и, возможно, дискретной неопределённости. Соответствующие условия и анализ степени неопределённости приведены в приложении 2.

4. Лагранжиан для волн кривизны

Можно попытаться описать тензор энергии-импульсов более стандартным способом, найдя лагранжиан, при варьировании которого получаются уравнения (4). В рассматриваемой теории есть два таких лагранжиана: (а) выраженный через напряженности поля и их первые производные и (б) выраженный через потенциалы поля (см. ниже).

Поскольку уравнения (4) линейны, то лагранжиан L должен быть квадратичным. Если рассмотреть все инвариантные относительно $SO(3)$ выражения, квадратичные по $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ и их первым производным, и потребовать, чтобы соответствующие вариационные уравнения были эквивалентны (4), то мы приходим к следующему выражению для L (с точностью до полной дивергенции и постоянного множителя):

$$L=(\mathbb{E}_{\alpha\beta}\dot{\mathbb{H}}_{\alpha\beta}-\mathbb{H}_{\alpha\beta}\dot{\mathbb{E}}_{\alpha\beta})+$$

$$+\left(\mathbb{E}_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\beta\gamma\delta}\frac{\partial \mathbb{E}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\delta}-\mathbb{H}_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\beta\gamma\delta}\frac{\partial \mathbb{H}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\delta}\right) \tag{12}$$

Он не лоренц-ковариантен и приводит после симметризации тензора энергии-импульса к некоторому выражению $\overset{\circ}{W}_{ij}$. Можно показать, что существует единственное с точностью до константы нечетное (относительно операции отражения) выражение, которое линейно зависит от напряженностей поля и их первых производных дивергенции которого обращается в нуль в силу

уравнений поля; оно связано с (II) формулой

$$\overset{\circ}{W}_{ij}=\frac{\partial}{\partial t}u_{ij} \tag{13}$$

Если не предполагать нечетности, то возможно, помимо $\overset{\circ}{W}_{ij}$ несколько различных выражений. Никакое из них, в отличие от (II), не обладает алгебраическими свойствами тензора энергии-импульса: W_{00} может быть отрицательным, из равенства W_{00} нулю не следует, вообще говоря, что $\mathbb{E}_{\alpha\beta}=\mathbb{H}_{\alpha\beta}=0$, отношение $|W_{0\alpha}|/W_{00}$ может быть сколь угодно большим и т.д. Таким образом, этот подход не дает ничего нового по сравнению с (11), и лагранжиан (12) мы в дальнейшем не рассматриваем.

Покажем теперь, как получить самое величину (II) из некоторого лагранжиана. Как и в электродинамике, можно доказать существование потенциалов $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$, φ_α таких, что

$$\mathbb{E}_{\alpha\beta}=-\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^\beta}-\dot{\mathbb{A}}_{\alpha\beta}$$

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\beta\gamma\delta}\frac{\partial \mathbb{A}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\delta} \tag{14}$$

которые определены с точностью до калибровки.

$$\varphi'_\alpha=\varphi_\alpha+f_\alpha,\quad \mathbb{A}'_{\alpha\beta}=\mathbb{A}_{\alpha\beta}+\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} \tag{15}$$

где f_α – произвольные функции. Величины $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$ и φ_α (линейные комбинации символов Кристоффеля) не образуют представления группы Лоренца (т.е. не образуют геометрического объекта относительно этой группы). Уравнения (4–5), выраженные в терминах $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$ и φ_α, следуют из лагранжиана[x)]

$$L=\mathbb{E}_{\alpha\beta}\mathbb{E}^{\alpha\beta}-\mathbb{H}_{\alpha\beta}\mathbb{H}^{\alpha\beta} \tag{16}$$

и, более того, это единственный калибровочно-инвариантный лагранжиан (если не требовать калибровочной инвариантности

---

x) Варьировать его нужно по потенциалам $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$ и φ_α (как и аналогичное выражение $\mathbb{E}^2-\mathbb{H}^2$ в электродинамике).

то, как и в электродинамике, возможно несколько выражений). Из (I6) стандартным образом получается выражение (II). L лоренц-ковариантен, но, поскольку $A_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{V}_{\alpha}$ не образуют представления группы Лоренца, это не приводит к лоренц-ковариантности для $\mathcal{U}_{ij}$.

Ввиду (2) и дважды самодуальности тензора Вейля ([I], Приложение)

$$L = \frac{1}{8} C_{ijkl} C^{ijkl} \tag{I7}$$

и мы получаем простую физическую интерпретацию для лагранжиана

$$L = R + \frac{\lambda^2}{\Sigma\pi} R_{ijkl} R^{ijkl} \tag{I8}$$

полученного в [8,9] (см. [I], § 4 гл.6) при интерпретации гравитации как калибровочного поля: первое слагаемое соответствует обычной энергии поля, второе - гравитационным волнам (и их энергия). Другой случай, когда возникает выражение вида (I8) - квантовый вывод уравнений гравитации; в линейном приближении соответствующий лагранжиан равен R [I0]; в квадратичном по кривизне - в случае пустого пространства из всех возможных слагаемых [II,I2] остается лишь член вида (I8).

5. Выражение для тензора энергии-импульса в потенциалах

Настоящая теория приводит к двум выражениям для энергии: (I) супертензору (II), который не является лоренц-ковариантным, но выражается через напряженности поля (т.е. $E_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$); (2) в потенциалах по типу псевдотензора Ландау-Лифшица $t_{ij}^{\wedge\wedge}$ ([I3] § 96). Это выражение лоренц-ковариантно, но зависит от калибровки (т.е.(на геометрическом языке) от координатных условий).

Трансформационные свойства этих двух выражений различны. Так, для монохроматической плоской волны (Э-I0), плотность энергии, вычисленная согласно (II), преобразуется при переходе к системе координат, движущейся со скоростью $\vec{v}$, по формуле

$$W' = \frac{W\left(1 + \frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right)^4}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \tag{I9}$$

где $\vec{n}$ -единичный вектор в направлении распространения волны. Плотность же энергии, сосчитанная из $t_{ik}^{\wedge\wedge}$, преобразуется по той же формуле, что и для электромагнитных волн:

$$W' = \frac{W\left(1 + \frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{20}$$

Как показано М.Я.Пальчиком [6], существуют в точности два линейно независимых квадратичных относительно $\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}$ выражения, дивергенция которых обращается в нуль при (I) (рассмотрение в 6 проводится в калибровке h =0, $\frac{\partial h^{i}_{j}}{\partial x^{j}}$ =0).

Для любой их линейной комбинации (и, в частности, для соответствующего приближений $t_{ij}^{\wedge\wedge}$) t_{00} не всегда неотрицательно, отношение $|t_{\alpha\alpha}|/t_{00}$ может быть сколь угодно большим (это связано с тем, что энергия уже в ньютоновской теории гравитации не является положительно определённой). Если дополнительно потребовать, чтобы t_{ik} при

$$h_{ij} \to 0,\ h_{00} = 2\Phi,\ h_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta}$$

переходил в тензор, каноническим образом построенный, исходя из лагранжиана ньютоновской теории $L = -(\nabla\Phi)^2$ x), то

x) Это соответствует требование, чтобы t_{ik} при $c \to \infty$ переходил в t_{ik} от ньютоновского лагранжиана.

t_{ik} с точностью до множителя совпадает с квадратичным приближением псевдотензора Меллера-Мицкевич ([I4] § II,9):

$$t_{ik}^{MM} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial h_{mn}}{\partial x^i}\frac{\partial h^{mn}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\eta_{ik}\eta^{lr}\frac{\partial h_{mn}}{\partial x^l}\frac{\partial h^{mn}}{\partial x^r}\right) \quad (2I)$$

Тот факт, что это свойство не выполняется для $t_{ij}^{\Lambda\Lambda}$, отмечен в § I06 [I3].

В случае монохроматической плоской волны, если метрику (в калибровке $h_{oi} = h = 0$) выбрать в виде

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{pmatrix} \quad (22)$$

где $a = a(x-t)$ и $b = b(x-t)$, то значения t_{ik}, сосчитанные с помощью любого квадратичного по $\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l}$ тензора, совпадают (с точностью до константы), причем

$$t_{00}^{MM} = \frac{1}{2}\left((a')^2 + (b')^2\right) = -t_{01}^{MM} = t_{11}^{MM} \quad (23)$$

(где a' –производная от a), и остальные компоненты обращаются в 0. Для случая обычных гравитирующих тел, как мы показали, предпочтительным является тензор t_{ik}^{MM} и, следовательно, энергию естественно вычислять, исходя из него.

Плотность энергии волн в смысле супертензора равна

$$W = U_{00} = 2(a^2+b^2) = \mathbb{E}_{\alpha\beta}\mathbb{E}^{\alpha\beta} = \mathbb{H}_{\alpha\beta}\mathbb{H}^{\alpha\beta}, \quad U_{01} = -W, \quad U_{11} = W \quad (24)$$

Остальные компоненты обращаются в нуль, $T_{ijkl} = W n_i n_j n_k n_l$, где $n_i = (1, -n_\alpha)$. Таким образом, как и для электромагнитных волн, поток энергии как в смысле супертензора, так и выраженный через потенциалы направлен вдоль направления

распространения волны со скоростью c.

Авторы благодарны Б.Г.Конопельченко за внимание к работе и ценные замечания.

Приложение I

Сравнение с имеющимися общековариантными определениями гравитационных волн

Обычно при определении понятия гравитационных волн обобщают какие-то характеристические свойства электромагнитных волн, но обобщение различных определений приводит, вообще говоря, к различным критериям гравитационных волн. Большинство этих критериев оказывается (в случае пустого пространства) выразимыми в терминах классификации Петрова, мы же будем исходить из представляющейся нам более естественной и очень близкой классификации: А.З.Петров проводит классификацию по собственным значениям матрицы $\mathbb{F}_{\alpha\beta}$, у нас же классификация – по числу плоских волн, в виде композиции которых можно представить данную матрицу $\mathbb{F}_{\alpha\beta}$.

Так, при определении гравитационной волны, как такой, в которой все инварианты обращаются в 0, мы приходим к типам N и III. При этом тип N – это тип плоской волны, а тип III, который многими авторами относится к простейшим волновым типам, оказывается самым удаленным от типа плоской волны: именно, поле типа III можно в каждой точке представить в виде суперпозиции не менее четырех плоских волн, в то время как поле любого другого типа – в виде суперпозиции не более трёх.

Покажем, как связана наша классификация с классификацией Петрова. Тип плоской волны – это тип N, в виде композиции двух плоских волн представимы решения типа I_α (I с $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ [I5]) причём в этом случае разложение на две волны однозначно. Решения типов I и D (но не I_α) можно представить в виде суммы трёх плоских волн, представление неоднозначно (содержит два свободных параметра, и можно задать два дополнительных условия), и пространства типа III не разложим в сумму трёх волн, но представимы в виде суммы четырех. В терминах инвариантов (см.§ I) представимости в виде суммы двух волн соответствует $C = D = 0$, $A \neq 0$, четырёх или одной – $A = B = C = D = 0$[x]. Приведенный анализ показывает, что любую пару ($\mathbb{E}_{\alpha\beta}$, $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$), т.е. любой тензор конформной кривизны можно считать волновым решением.

Эквивалентно в пустом пространстве критерия Лихнеровича ([I], § 2 гл.6), Малдыбаевой ([I] § 3 гл.8), описывают в точности поля типа N, критерий Зельманова (§ I гл.7 [I]) – все поля типа N, кроме двух выделенных симметричных метрик; второй критерий Беля (§ 4 гл.5 [I]), эквивалентный критериям Мизры и Сингха (§ 4 гл.8 [I]) и Абе (§ 5 гл.9 [I]), описывает пространства типов N и III, и второй критерий Пирани, эквивалентный первому критерию Беля и критерию Дебеве ([I], § 2 гл.4, § 2 гл.5 и § I гл.8) – типов II, N и III. Критерий Зунда-Левина (§ 2 гл.8 [I]) описывает только конформно-плоские пространства и в случае (I) тривиализуется.

Понятие плоской волны по Кундту (§ 3 гл.9 [I]) – типы N и III, при этом в линейном приближении $\ell_i \equiv const$, т.е. для типа N получается обычная плоская волна. Сферическим волнам в смысле § 2 гл.9 [I] соответствуют в линейном приближении (после подходящего преобразования Лоренца, если исключить нефизический случай источника движущегося со сверхсветовой скоростью) волны $\ell_{,i}$, где $\ell = \ell(r)$ и r – радиальная координата.

Поскольку мы ограничились линейным приближением, то все компоненты тензора Вейля можно считать хронометрически инвариантными, и хронометрически инвариантные определения ([I] гл.I2) не дают ничего нового в нашем приближении.

Приложение 2

Восстановление $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ по u_{ij}

Вместо $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ рассмотрим $\mathbb{F}_{\alpha\beta}$, а вместо u_{ij} – эрмитову матрицу

$$\mathbb{B}_{\alpha\beta} = \mathbb{F}_{\alpha\gamma} \mathbb{F}^*_{\beta\gamma} \qquad (25)$$

В силу (II) ее компоненты можно выразить через u_{ik} :

$$\mathbb{B}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}u_{00}\delta_{\alpha\beta}-u_{\alpha\beta}+i\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma}u_{0\gamma} \qquad (26)$$

Обратно, если мы знаем $\mathbb{B}_{\alpha\beta}$, то из ее следа можно найти u_{00}, из ее мнимой части – $u_{0\alpha}$ и из вещественной – $u_{\alpha\beta}$, так что задание $\mathbb{B}_{\alpha\beta}$ (равносильно заданию u_{ik}). Матрицу $\mathbb{B}_{\alpha\beta}$ можно в некотором комплексном ортонормированном базисе привести к виду

$$\mathbb{B}_{\alpha\beta}=\sum_{A=1}^{3}\lambda_A n_{A\alpha} n_{A\beta}^{*} \quad (Im\,\lambda_A=0) \qquad (27)$$

Для того, чтобы u_{ij} с $u^i_i=0$ порождалось некоторой парой ($\mathbb{E}_{\alpha\beta}$, $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$), необходимо и достаточно, чтобы соответствующая $\mathbb{B}_{\alpha\beta}$ была положительно определена ($\lambda_A \geq 0$ x)) и либо выполняется неравенство треугольника

$$\left|\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_3}\right| \leq \sqrt{\lambda_1} \leq \sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3} \qquad (28)$$

либо $\lambda_1^2=16\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$. При этом возможны следующие случаи xx) (отметим, что классификация тензоров u_{ik} по степени однозначности восстановления $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ тесно связанной с типом в смысле Петрова соответствующего паре ($\mathbb{E}_{\alpha\beta}$, $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$) тензора C_{ijkl}).

Однако, это совсем другая классификация, так как у А.З.Петрова – классификация в терминах напряженности поля, а у нас – в терминах энергии. Это связано с тем, что А.З.Петров интересовался в основном пространствами, допускающими группу симметрии, мы же занимаемся исследованием слабых волн кривизны (которые, вообще говоря, такой группы не допускают) с точки зрения их энергетических характеристик.

---

x) Отсюда следует, что $|v^\alpha| \leq c$.

xx) Случаи, различающиеся перестановкой λ_A, считаются за один.

1. Все λ_A различны, отличны от 0 и в (28) строгие неравенства (это общий случай). Тогда существуют (с точностью до замены $\mu_A \to \mu_A \exp(i\varphi)$, соответствующей дуальному повороту (8)) в точности два набора (μ_1, μ_2, μ_3) таких, что $\sum \mu_A=0$ и = 0 и $|\mu_A|^2=\lambda_A$ и

$$\mathbb{F}_{\alpha\beta}=\sum \mu_A n_{A\alpha} n_{A\beta} \qquad (29)$$

Соответствующий тензор C_{ijkl} – типа I.

В случае $u_{0\gamma}=0$ дискретная неоднозначность $\mu_A \to \mu_A^*$ имеет простой физический смысл: это замена $\mathbb{E}_{\alpha\beta} \to \mathbb{E}_{\alpha\beta}$, $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \to -\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, т.е. P-операция ($x^\alpha \to -x^\alpha$)

2. Все λ_A различны, отличны от 0 и $\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}$. Восстановление – по формуле (29), пространство – типа I, дискретной неопределённости нет.

3. $\lambda_1=0$, тогда неравенство треугольника влечет $\lambda_2=\lambda_3$. Возможны два решения: типа III в каноническом базисе n_A^α и типа I_a (I с одним из собственных чисел, равным 0). Дополнительная неопределенность возникает из-за неоднозначности в выборе ортонормированного базиса в пространстве, натянутом на n_2^α и n_3^α.

4. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2=\lambda_3$, $\sqrt{\lambda_1}<\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}$. Дискретной неоднозначности нет; неоднозначность, как и в 3, в выборе ортобазиса в пространстве, натянутом на n_2^α и n_3^α при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и во всем пространстве – при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$. C_{ijkl} – типа I, с $|\alpha_2+i\beta_2|=|\alpha_3+i\beta_3|$.

5. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2=\lambda_3$, $\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}$. Поле определяется с точностью до (8) и имеет тип D.

6. $\lambda_1^2=16\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_1 \neq 0$. Поле определяется однозначно с точностью до (8) и имеет тип II в базисе .

7. $\lambda_1=0$, $\lambda_1^2=16\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$ (т.е. $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3 \neq 0$). Поле определяется однозначно с точностью до ду-

ального поворота, который в данном случае сводится к повороту в плоскости натянутой на η^α_1 и η^α_2. Поле – типа N и совпадает с монохроматической плоской волной.

Отметим, что дуальный поворот, как и в электродинамике [I6] представляет собой вращение тогда и только тогда, когда $E_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ совпадают с монохроматической плоской волной. Отсутствие дискретной неопределённости в некоторых алгебраически специальных типах связано с теоремой Беля [7], согласно которой для этих типов во всех системах отсчёта $u^{0\alpha} \neq 0$ и, значит, представление, в котором переход $E_{\alpha\beta} \to E_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta} \to -H_{\alpha\beta}$ не меняя бы u_{ij}, отсутствует.

Литература

I. В.Д.Захаров. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., Наука, I972.
2. G.Rumer, Z.Phys. . I7I, I23, I963.
3. A.Einstein, N.Rosen, J. Fr. Inst. 223, 43, I937 (русский перевод в кн.: А.Эйнштейн, Собр.соч.,т.2, М., Наука, I964, с.438).
4. M.Novello, C.A.P.Galvao, I.D.Soares, J.M.Salim, J.Phys. A, 9, 547, I976.
5. A.Matte, Can. J. Math. 5, I, I953.
6. М.Я.Пальчик, Препринты ИЯФ № 23I, Н., I968; № 325 Н., I969.
7. L.Bel, C.r.Acad.Sci.Colon. 247, I094, I958.
8. Н.П.Коноплева, Тезисы У Международной гравитационной конференции, Тбилиси, I968, с.27.
9. Н.П.Коноплева, в кн.: "Проблема теории гравитации и элементарных частиц", вып.3, М., Атомиздат, I970.
I0. А.Д.Сахаров, ДАН СССР, I77, 70, I967.
II. В.Л.Гинзбург, Д.А.Киржниц, А.А.Любушин, ЖЭТФ, 60, 45I, I97I.
I2. В.Л.Гинзбург, в кн.: "Гравитация: Проблемы, перспективы", Киев, Наукова думка, I972, 40.

I3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, М., Наука, I973.
I4. К.Меллер. Теория относительности, М., Атомиздат, I975.
I5. А.М.Барков, Н.В.Мицкевич, депонент ВИНИТИ, № 2628-76.
I6. D.Brill, J.Wheeler, Rev. Modern Phys. , 29, 465, I957.

Работа поступила - 22 марта 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 30.III-1977 г. МН 02702
Усл. I,I печ.л., I,0 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 31

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР