20

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 65 - 71

Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, П.З.Чеботаев

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Новосибирск

1971

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, П.З.Чеботаев

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Новосибирск
1971

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, П.З.Чеботаев

1. Введение

Один из способов нагрева плазмы до термоядерных температур состоит в передаче ей энергии, запасенной в мощном пучке релятивистских электронов. Для оценки перспектив такого метода нагрева необходимо исследовать коллективные механизмы взаимодействия пучка с плазмой, поскольку торможение пучка за счет парных столкновений обычно крайне неэффективно. Принимая во внимание, что характерное время изменения параметров плазмы под воздействием пучка в реальных условиях намного больше времени развития пучковой неустойчивости, теоретическое описание процесса нагрева можно разделить на две части.

Во-первых, решить задачу о релаксации пучка в плазме с фиксированными во времени параметрами и найти энергию, которую пучок теряет на единице длины своего пути в плазме.

Во-вторых, на основе полученных результатов исследовать изменение состояния плазмы при пучковом нагреве и выяснить, как сказывается это изменение на характере релаксации.

Первая часть задачи в рамках квазилинейного приближения решена в работах /1-4/ как для однородной, так и для неоднородной плазмы. Однако во многих практически интересных случаях критерий применимости квазилинейного приближения не выполняется /3,5/, и поэтому особый интерес приобретает исследование нелинейного режима релаксации.

Как было показано в работе /6/, процессы нелинейной трансформации спектра колебаний, возбуждаемых пучком, могут приводить к стабилизации пучковой неустойчивости. При этом энергия колебаний, взаимодействующих с электронами пучка, оказывается по существу "замороженной" на весьма низком уровне, и длина торможения пучка возрастает по сравнению с квазилинейной.

Применительно к задаче о нагреве ультрарелятивистским пучком плотной плазменной мишени роль нелинейных эффектов исследовалась в работе /3/. В качестве механизма нелинейной стабилизации неустойчивости здесь расматривалось индуцированное рассеяние колебаний на частицах плазмы. Модель релаксации, построенная в /3/, основана на предположении, что длинноволновые ленгмюровские колебания ($k < \omega_p / c$; k -волновое число ω_p -плазменная частота, c -скорость света), не взаимодействующие с пучком, практически полностью подавляют неустойчивость в "резонансной" ($k \gtrsim \omega_p / c$) области благодаря индуцированному рассеянию "резонансных" колебаний на электронах плазмы. Остаточная неустойчивость лишь компенсирует столкновительное затухание "нерезонансных" колебаний. Роль рассеяния колебаний на ионах в такой модели фактически не учитывалась, хотя рассеяние на ионах приводит к гораздо более быстрой перекачке колебаний в длинноволновую область, чем рассеяние на электронах.

Как будет показано в настоящей работе, рассеяние на ионах существенно изменяет динамику релаксации по сранению с моделью /3/. В частности, релаксация перестает быть квазиодномерной, а длина торможения пучка значительно увеличивается.

Исследование нелинейного режима релаксации в плазме с фиксированными параметрами составляет содержание раздела 2. Задача об изменении параметров плазмы под воздействием пучка расматривается в разделах 3,4. Здесь показано, что при определенных условиях процесс нагрева плотной плазменной мишени представляет собой распространение в плазму волны, на фронте которой энергия пучка переходит в тепло. Это явление названо в работе волной релаксации.

2. Нелинейный режим релаксации

Пусть в полупространство $z > 0$, заполненное однородной плазмой, инжектируется моноэнергетический ультрарелятивистский ($E \gg mc^2$) электронный пучок, функция распределения которого на входе в плазму имеет вид:

$$f = \frac{n_b g_0(\theta)}{2\pi p_0^2}\,\delta(p - p_0) \tag{1}$$

где n_b -концентрация пучка, p_0 -импульс электронов, а $g_0(\theta)$ угловое распределение частиц. Мы будем предполагать, что угловой разброс пучка $\Delta\theta$ не слишком мал

$$1 \gg \Delta\theta \gg \frac{mc^2}{E} \tag{2}$$

Тогда можно пренебречь отличием модуля скорости частиц пучка от c и положить $\vec{v} = c\vec{p}/p$.

Если, кроме того,

$$\Delta\theta \gg \max\left\{ \left(\frac{n_b}{n}\frac{mc^2}{E}\right)^{1/4} ; \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/6}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^{1/2} \right\} \tag{3}$$

(n -концентрация плазмы), то неустойчивость можно считать кинетической.

В рамках квазилинейного приближения квазистационарное состояние системы плазма - пучок устанавливается за счет того, что возбуждение ленгмюровских колебаний на масштабе релаксации компенсируется их сносом в глубь плазмы. Вместе с тем при пучковой неустойчивости возможен и другой механизм установления квазистационарного состояния: генерация ленгмюровских колебаний в той области $\vec{k}$ -пространства, где они находятся в резонансе с пучком, т.е. при

$$\left| k_\parallel - \frac{\omega_p}{c} \right| \lesssim \frac{\omega_p}{c}\Delta\theta^2 + k_\perp \Delta\theta \tag{4}$$

($k_\parallel$ и $k_\perp$, соответственно, продольная и поперечная по отношению к оси пучка составляющие волнового вектора) может компенсироваться их перекачкой в "нерезонансную" часть спектра за счет нелинейных процессов. Для этого должно быть выполнено соотношение:

$$\gamma_{NL} \gtrsim \gamma$$

где γ_{NL} -обратное время спектральной перекачки, а γ -инкремент неустойчивости.

При исследовании такого (нелинейного) режима релаксации мы ограничимся для определенности случаем почти изотермической плазмы ($T_i \sim T_e$). Тогда, как показывают простые оценки, основным механизмом нелинейного взаимодействия является рассеяние ленгмюровских колебаний на ионах плазмы. Возбуждение колебаний пучком и эволюция их спектра за счет индуцированного рассеяния описываются следующим уравнением:[x)]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 2(\gamma + \gamma_i) W \qquad (5)$$

где $W(\vec{k}, z, t)$ –спектральная плотность энергии колебаний, а γ_i –частота рассеяния, причем согласно /7/

$$\gamma_i = \frac{3\sqrt{2\pi}}{16} \frac{T_e/T_i}{(1+T_e/T_i)^2} \times \qquad (6)$$

$$\times \int d^3k' \frac{W(\vec{k}')}{nmv_{T_i}} \frac{(\vec{k}\vec{k}')^2}{k^2 k'^2} \frac{k'^2-k^2}{|\vec{k}-\vec{k}'|} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{V_{T_e}^2}{\omega_p V_{T_i}} \frac{k'^2-k^2}{|\vec{k}-\vec{k}'|}\right)^2\right)$$

Процесс рассеяния обусловлен черенковским взаимодействием ионов плазмы с биениями, каждое из которых образовано двумя ленгмюровскими колебаниями (ω, $\vec{k}$, ω', $\vec{k}'$). Для того, чтобы в рассеянии участвовала заметная часть ионов, фазовая скорость биений должна быть меньше ионной тепловой скорости V_{T_i}:

$$\omega - \omega' / |\vec{k} - \vec{k}'| \lesssim V_{T_i} \qquad (7)$$

Если теперь учесть, что характерное значение волнового вектора колебаний, генерируемых пучком, равно ω_p / c, то с помощью формулы (7) можно оценить уменьшение частоты $\Delta\omega \equiv \omega - \omega'$ и модуля волнового вектора $\Delta k \equiv k - k'$ в одном акте рассеяния

x) Мы пренебрегаем сносом колебаний, т.к. их групповая скорость очень мала.

$$\Delta\omega \sim \omega_p \frac{V_{T_i}}{c} \qquad (8)$$

$$\Delta k \sim \omega_p \frac{V_{T_i}}{V_{T_e}^2} \qquad (9)$$

В горячей плазме ($T_e > (m/M)^{1/2} (T_i\, mc^2)^{1/2}$) отношение $\frac{\Delta k}{k}$ оказывается малым:

$$\frac{\Delta k}{k} \ll 1$$

Поэтому в результате рассеяния происходит в первую очередь изотропизация спектра колебаний. Кроме того, осуществляется перекачка колебаний в область малых k ($\omega_p / k > c$), где они перестают взаимодействовать с пучком (см.рис.1). Хотя этот механизм и ограничивает уровень энергии "резонансных" ($\omega_p / k < c$) колебаний, он не обязательно приводит к установлению стационарного спектра шумов. Действительно, стационарный спектр должен удовлетворять уравнению:

$$W(\gamma_i + \gamma) = 0$$

Это интегральное уравнение первого рода, вообще говоря, не имеет регулярных решений. Таким образом, спектральная перекачка может компенсировать генерацию колебаний лишь в среднем, а спектр колебаний должен быть, вообще говоря, пульсирующим. Чтобы найти усредненную по времени зависимость $W(k)$ мы воспользуемся следующим рассуждением.

Выделим в $\vec{k}$ –пространстве сферический слой

$$k_0 - \Delta k < k < k_0 + \Delta k$$

Поскольку в одном акте рассеяния изменение волнового вектора равно Δk, колебания, находящиеся внутри слоя, взаимодействуют главным образом друг с другом, и гораздо слабее – со всеми остальными. Далее заметим, что если величина $W(k_0)$ достаточно мала, так что $-\gamma_i(k_0) < \gamma(k_0)$, то плотность энергии колебаний внутри слоя будет увеличиваться за счет пучковой неустойчивости. С другой стороны, если $-\gamma_i(k_0) > \gamma(k_0)$, то $W(k_0)$ уменьшается за счет перекачки энергии колебаний в длинноволновую область. Поэтому даже в отсутствие истинно стационарного решения в среднем по времени при каждом k_0 должно быть выполнено условие:

$$\overline{\gamma W + \gamma_i W} = 0 \tag{10}$$

(черта означает усреднение по времени).

Формального решения уравнения (10) найти не удается, но можно провести простые оценки, позволяющие найти форму усредненной функции W.

В отсутствие истинно стационарного решения оценка γ_i существенно зависит от соотношения между Δk и шириной области неустойчивости по k, которую мы будем обозначать через δk:

$$\gamma_i \sim \omega_p \frac{W}{nT_i}\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)^{-2} k^2 \begin{cases} \Delta k, & \Delta k > \delta k, \\ \dfrac{\Delta k^2}{\delta k}, & \Delta k < \delta k. \end{cases} \tag{11}$$

Величина δk в свою очередь задается следующей формулой

$$\delta k = \begin{cases} \dfrac{k^2 \Delta\theta c}{\omega_p}, & \dfrac{\omega_p}{c} < k < \dfrac{\omega_p}{c\Delta\theta}, \\ k, & k > \dfrac{\omega_p}{c\Delta\theta}. \end{cases} \tag{12}$$

Воспользовавшись оценкой инкремента пучковой неустойчивости

$$\gamma \sim \omega_p \frac{n_b}{n} \frac{mc^2}{E} \frac{\omega_p^2}{k^2c^2} \frac{1}{\Delta\theta^2}$$

и соотношением (10) найдем отсюда $W(k)$ ж):

$$W \sim \frac{n_b}{n} \frac{mc^2}{E}\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)^2 nT_i \frac{\omega_p^2}{k^2c^2} \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta\theta^2 \cdot \Delta k \cdot k^2}, & \dfrac{\omega_p}{c} < k < \left(\dfrac{\omega_p \Delta k}{c\Delta\theta}\right)^{1/2} \\ \dfrac{c}{\Delta\theta \cdot \Delta k^2 \cdot \omega_p}, & \left(\dfrac{\omega_p \Delta k}{c\Delta\theta}\right)^{1/2} < k < \dfrac{\omega_p}{c\Delta\theta} \\ \dfrac{1}{\Delta\theta^2\, k\Delta k^2}, & k > \dfrac{\omega_p}{c\Delta\theta} \end{cases} \tag{13}$$

при $\Delta\theta < \dfrac{\Delta k c}{\omega_p}$ и

$$W \sim \frac{n_b}{n} \frac{mc^2}{E}\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)^2 nT_i \frac{\omega_p^2}{k^2c^2} \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta\theta} \dfrac{c}{\Delta k^2 \omega_p}, & \left(\dfrac{\Delta k \cdot \omega_p}{\Delta\theta \cdot c}\right)^{1/2} < k < \dfrac{\omega_p}{c\Delta\theta} \\ \dfrac{1}{\Delta\theta^2} \dfrac{1}{k\Delta k^2}, & k > \dfrac{\omega_p}{c\Delta\theta} \end{cases} \tag{14}$$

при $\Delta\theta > \dfrac{\Delta k c}{\omega_p}$

ж)При вычислении плотности энергии колебаний $U = 4\pi \int_0^\infty W(k) k^2 dk$ с помощью формул (13) и (14) получается интеграл, логарифмически расходящийся при больших k. Обрезание этого интеграла на верхнем пределе происходит за счет того, что при больших k инкремент пучковой неустойчивости очень мал, и неустойчивость может подавляться слабыми диссипативными процессами – кулоновскими столкновениями, выносом колебаний из области релаксации и т.д.

В области $k<\omega_p/c$ зависимость $W(k)$ определяется из условия постоянства потока энергии по спектру:

$$W\sim\frac{n_b}{n}\frac{mc^2}{E}\,nT_i\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)^2\begin{cases}\dfrac{1}{k^2\Delta k\,\Delta\theta^2}, & \Delta\theta<\dfrac{\Delta k c}{\omega_p},\\[2ex] \dfrac{\omega_p}{ck^2\Delta k^2\Delta\theta}, & \Delta\theta>\dfrac{\Delta k c}{\omega_p}.\end{cases}\qquad(15)$$

Такой вид спектра означает, что в области малых k будет происходить накопление ленгмюровских колебаний. Вопрос об их диссипации рассматривается ниже.

Найдем теперь пространственную зависимость углового разброса пучка $\Delta\theta(z)$ и средней энергии электронов $E(z)$. Это можно сделать с помощью квазилинейного уравнения:

$$c\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2\left(D_{pp}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{D_{p\theta}}{p}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\qquad(16)$$

$$+\frac{1}{p\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\left(D_{p\theta}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{D_{\theta\theta}}{p}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right).$$

Зная спектр колебаний, взаимодействующих с пучком, нетрудно оценить компоненты тензора диффузии , см./4/):

$$D_{pp}\sim D_{p\theta}\sim D_{\theta\theta}\sim\omega_p\frac{n_b}{n}\left(\frac{E}{c}\right)^2\left(\frac{mc^2}{E}\right)^3\times\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)^2\times$$

$$\times\begin{cases}\left(\dfrac{M}{m}\right)^{1/2}\left(\dfrac{T_i}{T_e}\right)^{1/2}\left(\dfrac{T_e}{mc^2}\right)^{3/2}\dfrac{1}{\Delta\theta^2}, & \Delta\theta<\dfrac{\Delta k c}{\omega_p},\\[2ex] \dfrac{M}{m}\left(\dfrac{T_e}{mc^2}\right)^2\dfrac{1}{\Delta\theta}, & \Delta\theta>\dfrac{\Delta k c}{\omega_p}.\end{cases}\qquad(17)$$

По смыслу величины $D_{\theta\theta}$

$$\left(\frac{c}{E}\right)^2D_{\theta\theta}\sim c\frac{d}{dz}\Delta\theta^2(z)$$

Отсюда:

$$\Delta\theta(z)\sim\begin{cases}\left(\Delta\theta_0^4+\dfrac{zV_{T_i}c}{lV_{T_e}^2}\right)^{1/4}, & 0<z<l\left(\dfrac{V_{T_i}c}{V_{T_e}^2}\right)^3,\\[2ex] \left(\dfrac{z}{l}\right)^{1/3}, & l\left(\dfrac{V_{T_i}c}{V_{T_e}^2}\right)^3<z<l\end{cases}\qquad(18)$$

где

$$l=\frac{c}{\omega_p}\frac{n}{n_b}\frac{m}{M}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3\left(\frac{mc^2}{T_e}\right)\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)^{-2}\qquad(19)$$

а $\Delta\theta_0$ -угловой разброс пучка на входе в плазму. Поскольку все элементы тензора диффузии $D_{\alpha\beta}$ при изотропном спектре по порядку величины одинаковы, относительное изменение энергии электронов пучка в процессе релаксации оказывается примерно равным изменению углового разброса

$$\frac{\Delta E}{E_0}\sim\begin{cases}\left(\Delta\theta_0^4+\dfrac{zV_{T_i}c}{lV_{T_e}^2}\right)^{1/4}-\Delta\theta_0, & 0<z<l\left(\dfrac{V_{T_i}c}{V_{T_e}^2}\right)^3\\[2ex] \left(\dfrac{z}{l}\right)^{1/3}, & l\left(\dfrac{V_{T_i}c}{V_{T_e}^2}\right)^3<z<l\end{cases}\qquad(20)$$

Как видно из приведенных оценок, величина l представляет собой длину торможения пучка в мишени. На расстоянии l от границы плазмы пучок теряет энергию порядка E_0, а его угловой разброс достигает значения $\Delta\theta \sim 1$.

Примечательно, что мощность энерговыделения

$$Q \equiv -\frac{d}{dz} n_b E(z) c$$

имеет резкий максимум вблизи от границы плазмы

$$Q_{max} \sim \frac{n_b E_0 c^2 v_{T_i}}{\ell v_{T_e}^2 \Delta\theta_0^3}$$

В тонком слое $0 < z < \ell \frac{v_{T_e}^2}{v_{T_i} c} \Delta\theta_0^4$ величина Q в $\frac{v_{T_i} c}{v_{T_e}^2} \Delta\theta_0^{-3}$ раз больше, чем в остальном объеме, хотя пучок выделяет здесь сравнительно немного энергии

$$\frac{\Delta E}{E_0} \sim \Delta\theta_0$$

Почти всю свою энергию пучок выделяет на промежутке $\ell\left(\frac{v_{T_i} c}{v_{T_e}^2}\right)^3 < z < \ell$, но величина Q здесь относительно мала:

$$Q \sim Q_{max} \Delta\theta_0^3 \frac{v_{T_e}^2}{v_{T_i} c} \ll Q_{max}$$

В построенной схеме релаксации энергия, потерянная пучком, перекачивается в длинноволновую часть спектра. Мы укажем ниже некоторые из механизмов, ограничивающих уровень длинноволновых колебаний. Вопрос о том, какой из них является основным, должен решаться с учетом условий конкретного эксперимента. Подчеркнем однако, что если отвод энергии из длинноволновой части спектра достаточно эффективен, то результаты, относящиеся к релаксации пучка, не зависят от механизма гибели длинноволновых колебаний. Слова "достаточно эффективен" означают, что характерное время гибели ленгмюровских колебаний не превышает времени их перекачки из области $k > \omega_p/c$ в область $k \ll \omega_p/c$ за счет рассеяния на ионах (время перекачки по порядку величины рав-

но $\omega_p^{-1}(nT/U)(k/\Delta k)^2$, где U – плотность энергии коротковолновых ($k > \omega_p/c$) колебаний x).

Поглощение длинноволновых колебаний может быть обусловлено, в частности, парными столкновениями (если $\nu > \omega_p (U/nT)(\Delta k/k)^2$) Имеется и другая возможность – трансформация ленгмюровских колебаний в электромагнитные волны при слиянии ленгмюровских колебаний с $k < \omega_p/c$ и колебаний с $k > \omega_p/c$. Электромагнитное излучение имеет при этом частоту $\sim 2\omega_p$. Оценка скорости этого процесса (выражение для вероятности содержится, например в /7/) показывает, что он может препятствовать накоплению колебаний в длинноволновой области при условии

$$\frac{T_e}{mc^2}\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$$

Электромагнитные волны могут либо покидать плазму, либо (в случае плотной плазмы) поглощаться за счет парных столкновений.

Если же отвод энергии из длинноволновой ($k < \omega_p/c$) области недостаточно эффективен, то спектральная перекачка при рассеянии ленгмюровских колебаний на ионах вызывает накопление этих колебаний в области $k \lesssim \Delta k$, где возникает очень большая концентрация энергии. Одним из механизмов, ограничивающих этот эффект, может служить раскачка звука, рассмотренная в работе /8/. Подробное исследование устойчивости спектра длинноволновой ленгмюровской турбулентности содержится в более поздней работе /9/. Не исключено, что раскачка звука быстро перейдет в режим

---

x) Заметим, что в тех случаях, когда время эксперимента меньше, чем характерное время перекачки, вопроса о накоплении колебаний в длинноволновой части спектра вообще не возникает.

сильной турбулентности /10/. В этом случае, как показано в работе /10/, в плазме могут образовываться локальные возмущения концентрации (каверны), в которых "заперты" ленгмюровские колебания. Каверны за конечное время схлопываются, а энергия колебаний передается электронам и ионам плазмы.

Отметим, что возбуждение низкочастотных колебаний может сильно исказить картину релаксации пучка, поскольку звуковая волна модулирует концентрацию плазмы и вызывает тем самым диффузию ленгмюровских колебаний по спектру.

В заключение этого раздела укажем условие применимости изложенного описания релаксации. Формулы (18)-(20), были получены нами в предположении, что коллективные процессы, ответственные за релаксацию пучка, можно рассматривать в рамках теории слабой турбулентности. Для этого необходимо, чтобы частота биений $\Delta\omega \sim \omega_p V_{T_i}/c$ превышала частоту рассеяния колебаний на ионах

$$\omega_p V_{T_i}/c > \gamma_i$$

Воспользовавшись выражением для γ_i (см.(11)-(14) этот критерий можно записать как ограничение на параметры пучка и плазмы:

$$\frac{n_b}{n}\,\frac{mc^2}{E}\,\frac{1}{\Delta\theta^2} < \frac{V_{T_i}}{c} \tag{21}$$

Если же неравенство (21) не выполнено, то наряду с рассеянием становятся существенными нелинейные процессы высших порядков, и исследование релаксации значительно усложняется.

3. Волна релаксации (постановка задачи и качественное рассмотрение)

При исследовании релаксации электронного пучка мы предполагали, что параметры плазмы (профиль концентрации, температура) фиксированы. Если пучок используется для нагрева плазмы, то этим приближением можно ограничиться лишь в течение достаточно малого промежутка времени, пока параметры плазмы не успевают существенно измениться под воздействием пучка. Для описания всего процесса нагрева необходимо решить самосогласованную задачу о релаксации пучка и движении прогреваемой им плазмы. Такая задача рассматривается ниже.

Мы ограничимся исследованием нагрева плотной плазменной мишени, в которой электроны и ионы быстро обмениваются энергией друг с другом благодаря кулоновским столкновениям ($T_i = T_e = T$). Кроме того, будем иметь в виду, что нагрев происходит в квазистационарном режиме: т.е. характерное время установления стационарного решения в задаче о релаксации пучка намного меньше, чем время изменения параметров плазмы[x)].

При сделанных предположениях движение плазмы можно описывать следующей системой уравнений газодинамики:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{Mn}\vec{\nabla} nT \tag{22}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div\, n\vec{v} = 0 \tag{23}$$

$$nMT\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\,grad\, s\right) = div\,\chi\, grad\, T + Q \tag{24}$$

Здесь s -энергия единицы массы плазмы, Q -энергия, выделяемая пучком в единице объема в единицу времени; остальные обозначения общепринятые[xx)].

С помощью системы уравнений (22)-(24) будет исследовано поведение плазмы, занимающей полупространство $z > 0$, в которое инжектируется аксиально симметричный электронный пучок радиуса R . В начальный момент плазма считается неподвижной, а её концентрация n и температура T однородными и равными, соответственно, n_0 и T_0 .

x) Так, в частности, должно обстоять дело в опытах, предложенных в работе /11/.

xx) Вообще говоря, следует включить в уравнение (22) импульс, вносимый пучком в плазму,но, как показывают оценки, эта величина пренебрежимо мала.

Динамика нагрева плазмы целиком определяется свойствами источника тепла Q, входящего в уравнение (24). Обозначив через ℓ длину торможения пучка в однородной плазме, характерное значение Q можно оценить по формуле[x)].

$$Q \sim \frac{n_b E c}{\ell} \tag{25}$$

Напомним теперь, что релаксация пучка в неоднородной плазме гораздо менее эффективна, чем в однородной /2,4/. Между тем неоднородность концентрации (даже если вначале она отсутствует) обязательно возникает в процессе нагрева. Как показано в работе /2/, релаксация полностью срывается, если градиент концентрации плазмы в направлении инжекции пучка превышает некоторое критическое значение, которое мы обозначим здесь $(\partial n/\partial z)_{max}$. Отсюда можно оценить тот перепад концентрации на масштабе ℓ, при котором неоднородность "выключает" нагрев:

$$\left(\frac{\Delta n}{n}\right)_{max} \sim \frac{\ell}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max} \tag{26}$$

Особенно рельефно роль неоднородности должна проявляться, если

$$\left(\frac{\Delta n}{n}\right)_{max} << 1 \tag{27}$$

В дальнейшем это неравенство считается выполненным.

Рассмотрим сначала случай, когда теплопроводность плазмы мала, а нагрев производится широким ($R >> \ell$) пучком. Затем можно будет легко понять, как повлияют на результат теплопроводность плазмы и радиальная ограниченность пучка.

При сделанных предположениях динамика нагрева описывается линеаризованной (по малому параметру ($\Delta n / n$)$_{max}$) системой уравнений (22)-(24), где все величины зависят только от z и t:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{M}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{28}$$

x) В зависимости от конкретных условий ℓ задается различными соотношениями. Так, например, в случае нелинейного режима релаксации (см.раздел 2) справедлива формула (19).

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_o \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{29}$$

$$n_o M c_v \frac{\partial T}{\partial t} = Q \tag{30}$$

(c_v -теплоемкость единицы массы плазмы при постоянном объеме).

Для точного решения этой системы потребовалось бы знать точный вид функции Q. Мы же располагаем лишь "грубыми" её характеристиками, которых, однако, достаточно, чтобы построить качественное описание процесса. Физическая картина нагрева оказывается следующей.

Пучок, который включается в момент $t=0$, начинает греть плазму внутри слоя $0 < z < \ell$. Из-за неравномерности тепловыделения температура плазмы в слое становится неоднородной. Характерную величину градиента температуры легко оценить с помощью уравнения (30):

$$\left|\frac{\partial T}{\partial z}\right| \sim \frac{tQ}{n_o M c_v \ell} \sim \frac{n_b E c}{n_o M c_v \ell^2}\, t$$

Под действием градиента давления ($\frac{\partial P}{\partial z} = n_o \frac{\partial T}{\partial z}$) плазма приходит в движение, и концентрация её также делается неоднородной:

$$\left|\frac{\partial n}{\partial z}\right| \sim \frac{n_b E c}{M^2 c_v \ell^4}\, t^3$$

По истечении времени

$$t \sim t_o = \left(\frac{M^2 c_v}{n_b E c}\right)^{1/3} \ell^{4/3} \left[\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{1/3}$$

перепад концентрации внутри слоя достигает величины $\left(\frac{\Delta n}{n}\right)_{max}$ Тогда эффективность нагрева в слое падает фактически до нуля, и начинает интенсивно греться следующий участок плазмы

$$l < z < 2l$$

На этом промежутке также появляется неоднородность концентрации, и область, где мощность нагрева максимальна, продвигается еще дальше в первоначально однородную плазму.

Мы назовем такое явление волной релаксации. За фронтом волны неоднородность концентрации плазмы практически полностью срывает релаксацию пучка. Поэтому тепловыделение здесь отсутствует, и температура плазмы T постоянна (см. (30))

$$T = T_0 + Mc^2\left(\frac{n_b E}{n_0 Mc^2 Mc_v}\right)^{2/3}\left[\frac{l}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{1/3} \tag{31}$$

T_0 -начальная температура плазмы.

Поскольку длина релаксации l обычно зависит от температуры плазмы, соотношение (31) определяет температуру за волной в неявном виде. Как видно из формулы (31), в зависимости от параметров пучка и плазмы волна может быть сильной ($T \gg T_0$) или слабой ($T - T_0 \ll T_0$). Температура за фронтом сильной волны определяется уравнением:

$$T = Mc^2\left(\frac{n_b E}{n_0 Mc^2 Mc_v}\right)^{2/3}\left[\frac{l(T)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{1/3} \tag{32}$$

В слабой волне

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{Mc^2}{T_0}\left(\frac{n_b E}{n_0 Mc^2 Mc_v}\right)^{2/3}\left[\frac{l(T_0)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{1/3} \ll 1 \tag{33}$$

Найдем далее скорость распространения волны u. Для этого заметим, что за время $t \sim t_0$ волна проходит расстояние $z \sim l$. Удобно выразить скорость волны через скорость звука за её фронтом:

$$u = c_s\left(\frac{T - T_0}{T}\right)^{1/2}\left[\frac{l(T)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{-1/2} \tag{34}$$

Отсюда видно, что скорость распространения как сильной, так и слабой волны в рассматриваемых условиях значительно превышает скорость звука. Действительно, линеаризуя уравнение (22), мы полагали $\Delta n/n \ll \Delta T/T$, но отношение u/c_s по порядку величины равно $\frac{n \Delta T}{T \Delta n}$ (см. (34)), т.е. $u/c_s \gg 1$.

Рассмотрим теперь влияние теплопроводности плазмы на характер распространения волны. За счет теплопроводности энергия, выделяемая пучком на входе в плазму, проникает вглубь по закону:

$$z \sim \left(\frac{\chi t}{n_0}\right)^{1/2}$$

Если выравнивание температуры происходит достаточно быстро, то внутри слоя $0 < z < l$ профиль температуры, а следовательно и профиль концентрации будет все время оставаться однородным. Описанная волна в этом случае очевидно не сможет возникнуть, и механизмом распространения тепла в глубь плазмы будет служить обычная теплопроводность.

Другими словами, для возникновения волны необходимо, чтобы теплопроводность плазмы была достаточно мала:

$$\chi \ll n_0 l^2 / t_0$$

тогда теплопроводность будет лишь несколько сглаживать профиль температуры за волной, не меняя качественно характера её распространения.

В заключение этого раздела отметим, что волна релаксации может существовать и в том случае, когда радиус пучка мал по сравнению с l ($R \ll l$). Вся картина явления при этом сохраняется, с той лишь разницей, что продольная неоднородность концентрации возникает за счет радиального движения плазмы. Мы ограничимся поэтому только тем, что приведем оценки скорости распространения сильной волны и температуры, до которой нагрета плазма за её фронтом:

$$u = \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}\frac{l}{R}\left[\frac{l(T)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{-1/2} \tag{35}$$

$$T = Mc^2\left(\frac{n_b E}{n_0 Mc^2 Mc_v}\right)^{2/3}\left(\frac{R}{l}\right)^{2/3}\left[\frac{l(T)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{1/3} \qquad (36)$$

На границе своей применимости (при $R \sim l$) эти формулы, как и следовало ожидать, дают значения скорости и температуры, соответствующие случаю неограниченного пучка.

4. Волна релаксации (количественная модель)

Попытка построить последовательное количественное описание волны релаксации наталкивается на существенную трудность - для этого потребовалось бы прежде всего знать детальный вид функции Q. Поэтому представляется разумным смоделировать мощность энерговыделения Q в соответствии с теми "грубыми" чертами процесса релаксации пучка, которые нам известны, и далее исследовать такую модель количественно. Мы рассмотрим здесь только один случай - слабую волну релаксации. Не составляет, впрочем, труда осуществить аналогичную процедуру и применительно к сильной волне.

Зададим для определенности конкретный вид радиального распределения концентрации пучка на входе в плазму:

$$n_b(r) = \begin{cases} n_b^* \cos^2 \frac{\pi r}{2R} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Для сокращения записи при решении системы (22) - (24) удобно пользоваться безразмерными величинами, которые вводятся следующим образом:

$$\vec{r} \to l(T_0)\vec{r}$$

$$t \to \frac{l(T_0)}{2c}\left(\frac{n_b}{n_0 Mc_v}\right)^{1/3}\left(\frac{Mc^2}{E}\right)^{1/3}\left[\frac{l(T_0)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{1/3} t$$

$$\vec{v} \to 2c\left(\frac{n_b}{n_0 Mc_v}\right)^{1/3}\left(\frac{E}{Mc^2}\right)^{1/3}\left[\frac{l(T_0)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{2/3}\vec{v}$$

$$T - T_0 \to 4E\left(\frac{n_b}{n_0 Mc_v}\right)^{2/3}\left(\frac{Mc^2}{E}\right)^{1/3}\left[\frac{l(T_0)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{1/3} T$$

$$Q \to 8\,\frac{n_b E c}{l(T_0)}\, Q$$

$$\frac{n - n_0}{n} \to \left[\frac{l(T_0)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right] n$$

$$\chi \to 2 l(T_0) n_b c\left(\frac{n_b}{n_0 Mc_v}\right)^{-2/3}\left(\frac{E}{Mc^2}\right)^{1/3}\left[\frac{l(T_0)}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{max}\right]^{-1/3}\chi$$

Новые переменные $\vec{r}, t, \vec{v}, Q, T, n, \chi$, стоящие справа, выбраны исходя из качественного описания так, чтобы при распространении волны все её основные параметры (ширина фронта, скорость распространения, возмущения концентрации и температуры) были порядка единицы. В новых обозначениях линеаризованная система уравнений (22) - (24) принимает вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} T \qquad (37)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{v} = 0 \qquad (38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \Delta T + Q \qquad (39)$$

Зададим теперь мощность тепловыделения $Q(\vec{r}, t)$

$$Q(r,z,t) = \frac{1}{3}\cos^2\pi\frac{r}{2R}\sum_{i=1,2,\dots}\sin^4\pi\frac{z-z_i}{z_{i+1}-z_i}\times \qquad (40)$$

$$\times\theta(z-z_i)\theta(z_{i+1}-z)\theta\left(1-\left|\frac{\partial n}{\partial z}\right|\right)\theta\left[1-\int_0^z\theta\left(1-\left|\frac{\partial n}{\partial z'}\right|\right)dz'\right]$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

а $z_i(r,t)$ -занумерованные в порядке возрастания корни уравнения:

$$z\left(1-\left|\frac{\partial n}{\partial z}\right|\right)\left(1-\int_0^z\theta\left(1-\left|\frac{\partial n}{\partial z'}\right|\right)dz'\right) = 0$$

Все кратные корни имеют один и тот же индекс " i ".

Нетрудно убедиться, что определенная соотношением (40) функция Q правильно отражает характерные особенности тепловыделения в неоднородной плазме. Так, например, в тех точках, где $|\partial n/\partial z|>1$, тепловыделение отсутствует. Это соответствует наличию критического значения градиента концентрации плазмы, при котором происходит срыв релаксации пучка. То обстоятельство, что $Q=0$, если $\int_0^z\theta\left(1-\left|\frac{\partial n}{\partial z'}\right|\right)dz' > 1$, также имеет простой смысл: оно означает, что нагрев наиболее интенсивен вблизи границы плазмы (разумеется, только в том случае, когда плазма в этой области достаточно однородна). Наконец, множитель $\cos^2\pi\frac{r}{2R}$, где R -безразмерный радиус пучка, учитывает радиальную неоднородность тепловыделения.

Дополним далее систему (37)-(39) граничными и начальными условиями. Мы будем считать, что равен нулю поток тепла через границу плазмы, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0$$

Тогда из уравнения (37) видно, что равен нулю также и поток частиц

$$V_z = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0$$

На границе пучка ($r = R$) поток тепла также предполагается равным нулю

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$$

Начальные условия, сформулированные выше, в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$n = 0 \qquad t = 0$$
$$\vec{V} = 0 \qquad t = 0$$
$$T = 0 \qquad t = 0$$

Несмотря на то, что полученная система уравнений значительно проще исходной, её удается проинтегрировать только численно.

Вычисления проводились как в случае одномерной модели ($R \to \infty$), так и с учетом радиальной ограниченности пучка ($R \sim 1$). При этом выбирались различные значения теплопроводности плазмы, заключенные в промежутке: $0 < \varkappa < 1$.

Результаты вычислений иллюстрируются рисунками 2-6. Обратившись к ним, можно четко выявить следующие закономерности.

При малой теплопроводности плазмы ($\chi = {}^{1}/10$ $\chi = {}^{1}/3$) под воздействием пучка возникает волна релаксации с крутым фронтом температуры[x)]. За фронтом температура медленно изменяется (в пространстве и во времени) из-за небольшого выделения тепла вблизи экстремумов профиля концентрации.

Распределение концентрации за фронтом носит осциллирующий характер, причем пространственный масштаб осцилляций со временем уменьшается.

Скорость распространения волны по порядку величины равна единице. С увеличением теплопроводности фронт температуры все более и более "размазывается", а скорость волны падает. Наконец, при $\chi = 1$ (см.рис.4) теплопроводность фактически срывает распространение волны.

Все эти выводы находятся в полном согласии с результатами качественного рассмотрения.

---

x) В том, что при малой теплопроводности плазмы нагрев обязательно приводит к появлению критического градиента плотности ($\left|\frac{\partial n}{\partial z}\right| = 1$), легко убедиться, положив $\chi = 0$.

Литература

1. Я.Б.Файнберг, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. ЖЭТФ, 57, 966 (1969).
2. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов. Письма в ЖЭТФ, 11, 606 (1970).
3. Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 59, 2091 (1970).
4. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов. ЖЭТФ, 60, 408 (1971).
5. А.Т.Алтынцев, Б.Н.Брейзман, А.Г.Еськов, О.А.Золотовский, В.И.Коротеев, Р.Х.Куртмуллаев, В.Л.Масалов, Д.Д.Рютов, В.Н.Семенов. Доклад CN-28/E-20 на 1У Международной конференции по физике плазмы. Мэдисон, США (1971).
6. В.Н.Цытович, В.Д.Шапиро. Nucl. Fusion, 5, 228 (1965).
7. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме, изд-во "Наука", М., (1967).
8. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 159, 767 (1964).
9. В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 57, 141 (1969).
10. В.Е.Захаров. Доклад на конференции по теории плазмы. Киев, 1971. ЖЭТФ, в печати.
11. F. Winterberg. Phys. Rev., 174, 212 (1968).

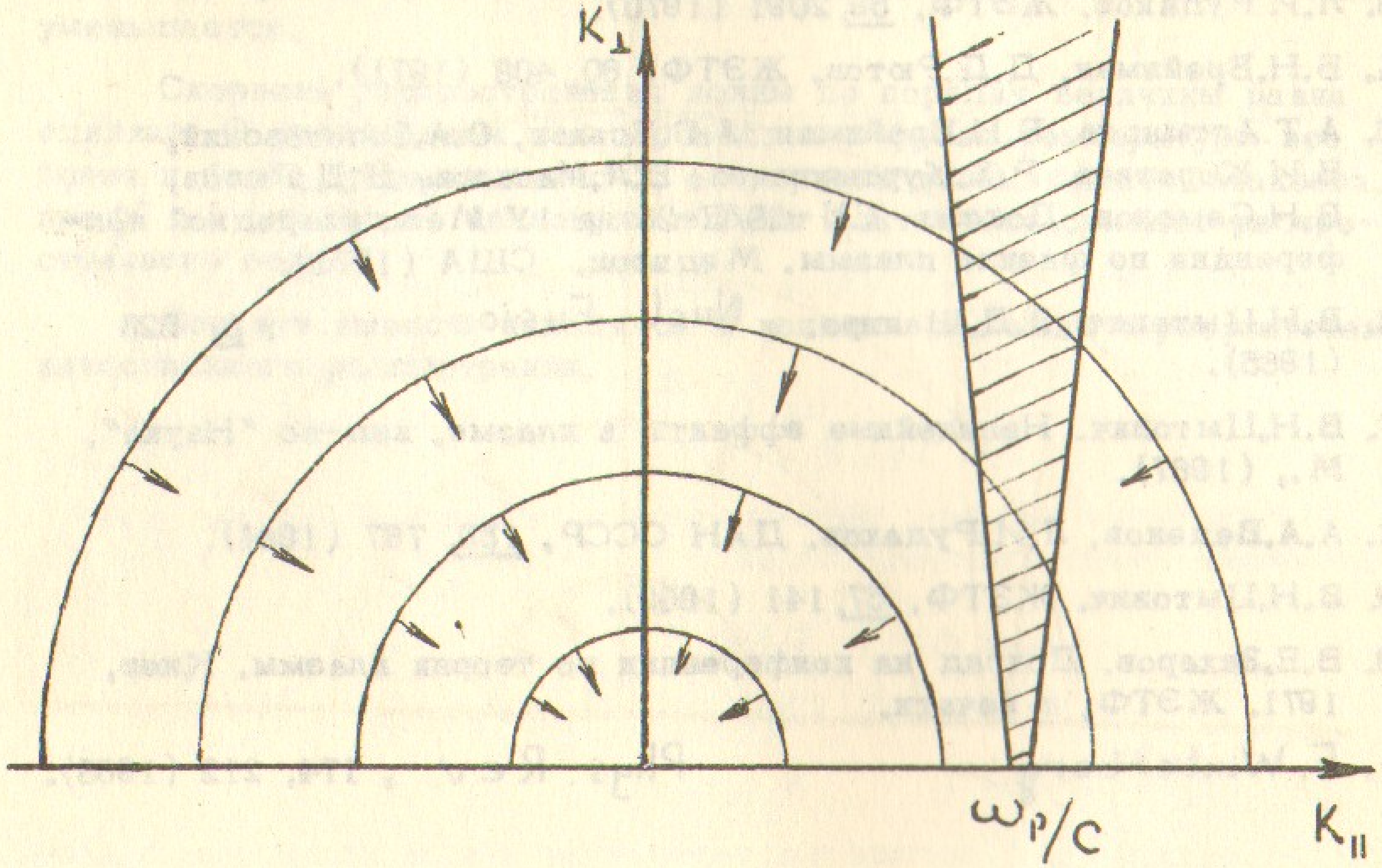

Рис.1. К теории релаксации ультрарелятивистского пучка в плазме. Область волновых векторов, в которой имеется взаимодействие колебаний с пучком, заштрихована. Концентрические окружности изображают линии, вдоль которых происходит изотропизация спектра колебаний. Стрелками указано направление спектральной перекачки.

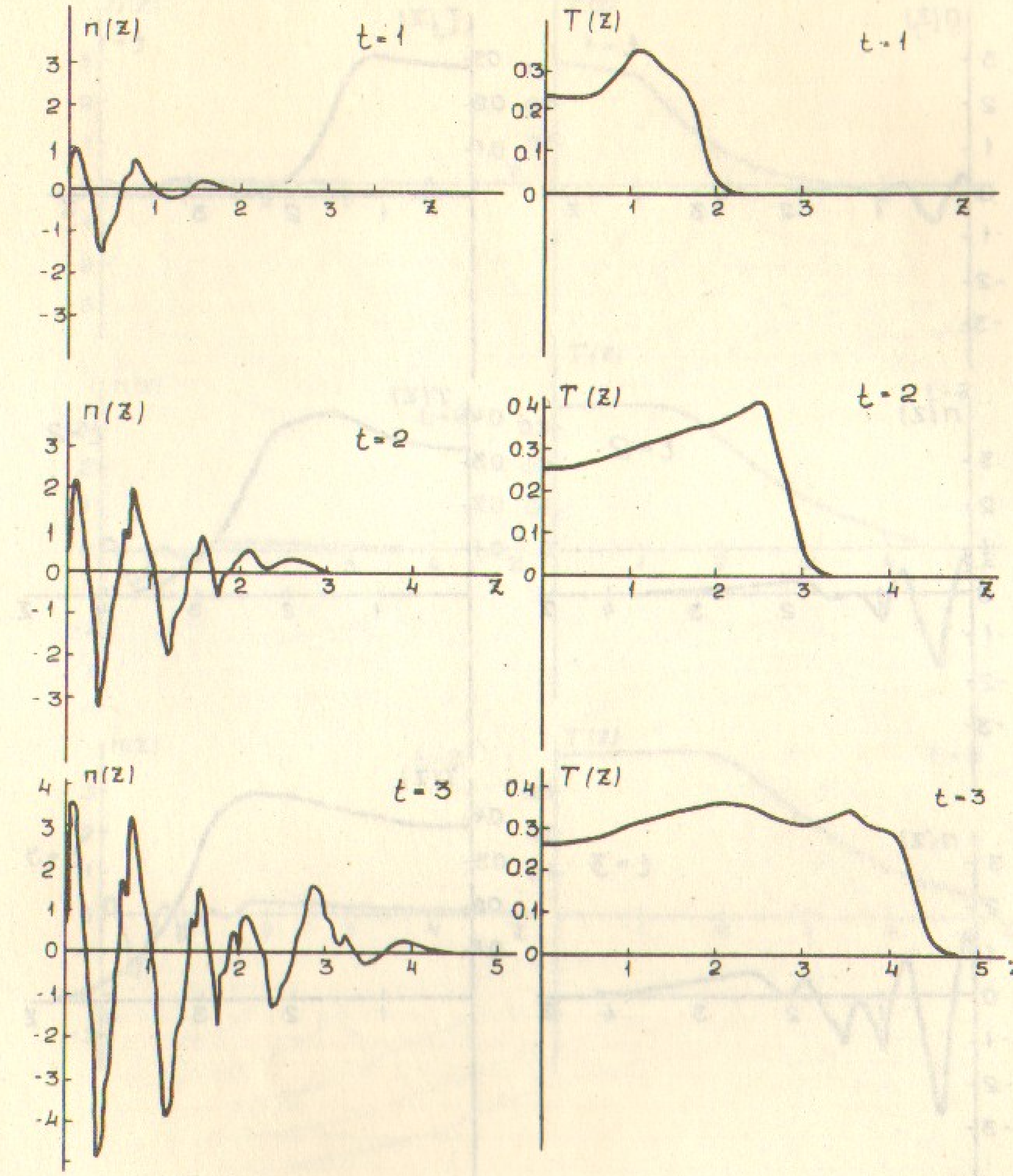

Рис.2. Профили температуры и концентрации плазмы в одномерной волне релаксации. Использованы безразмерные переменные, введенные в разделе 4, χ =1/10.

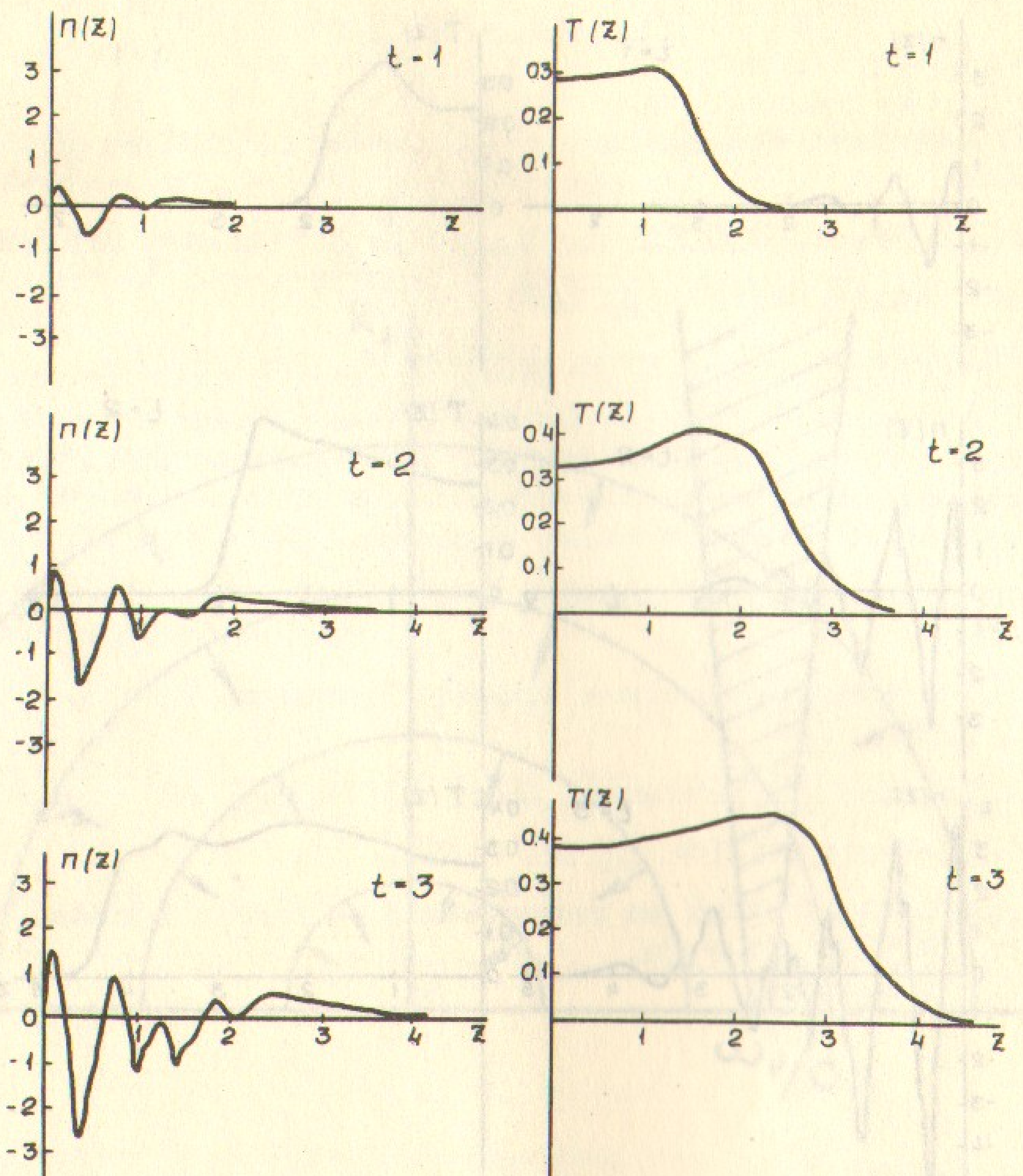

Рис.3. Профили температуры и концентрации плазмы в одномерной волне релаксации $\chi = 1/3$.

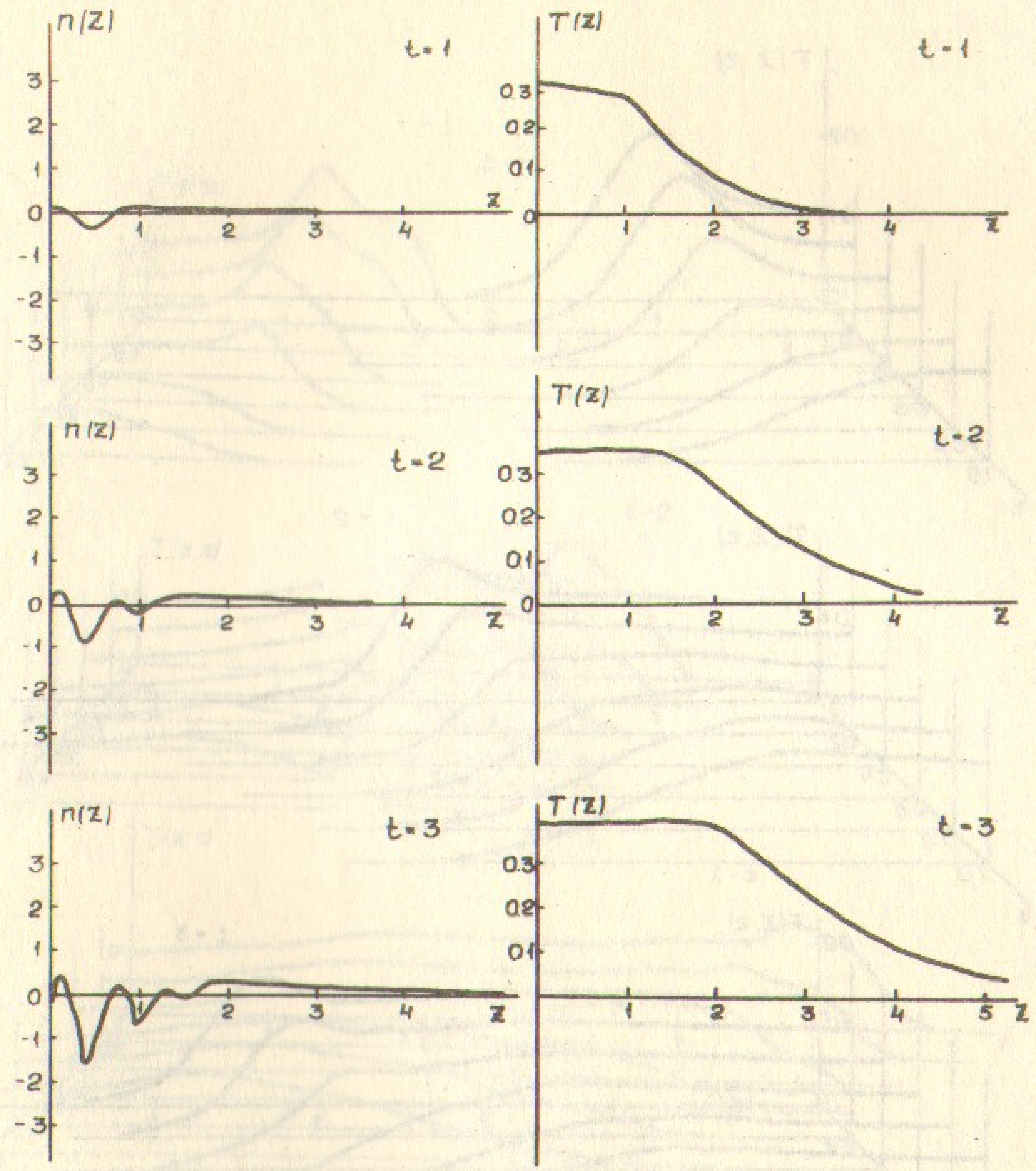

Рис.4. Профили температуры и концентрации плазмы в одномерной волне релаксации $\chi = 1$.

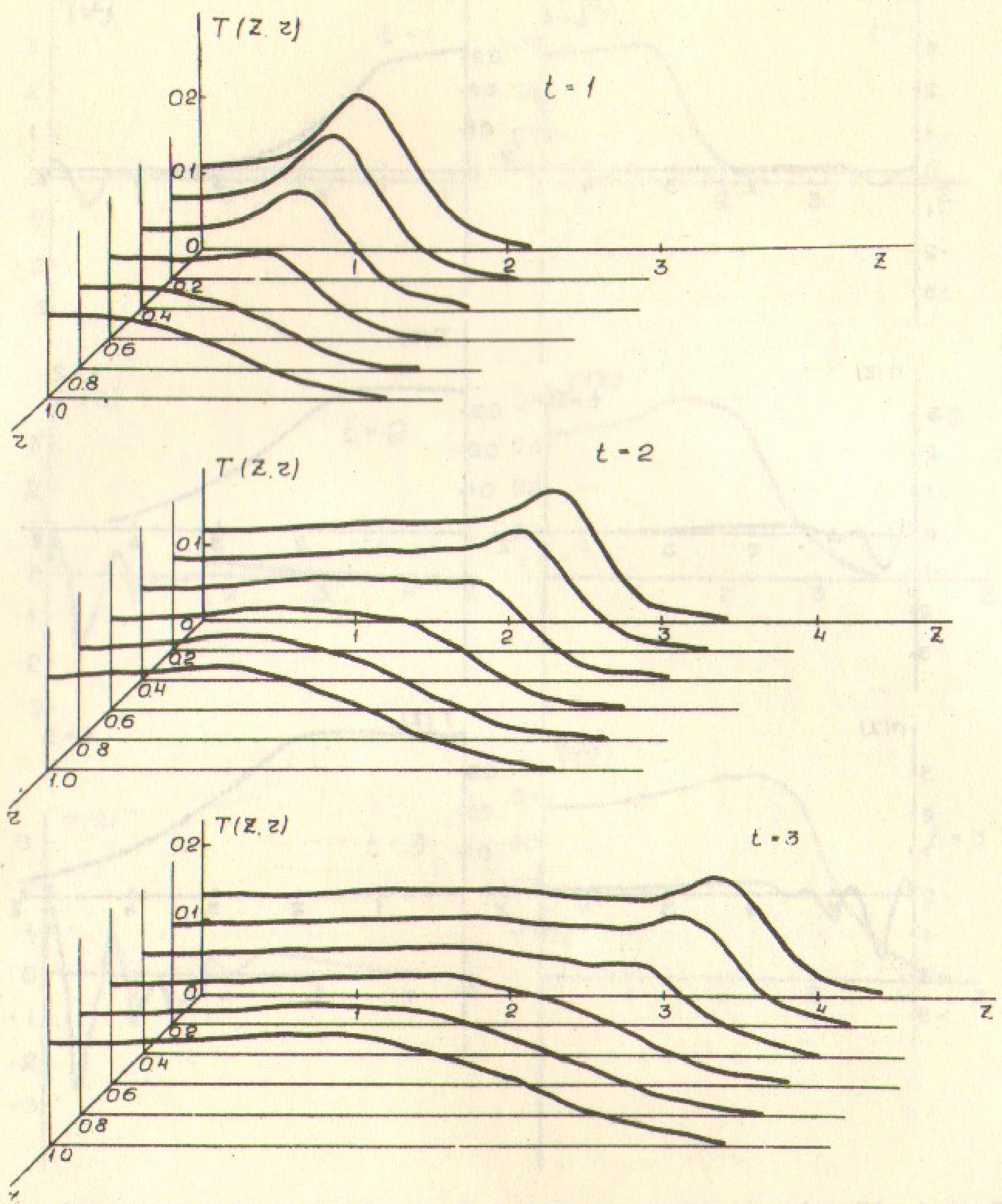

Рис.5. Распределение температуры плазмы в волне релаксации. Радиус пучка R выбран равным единице, $\chi = 1/3$.

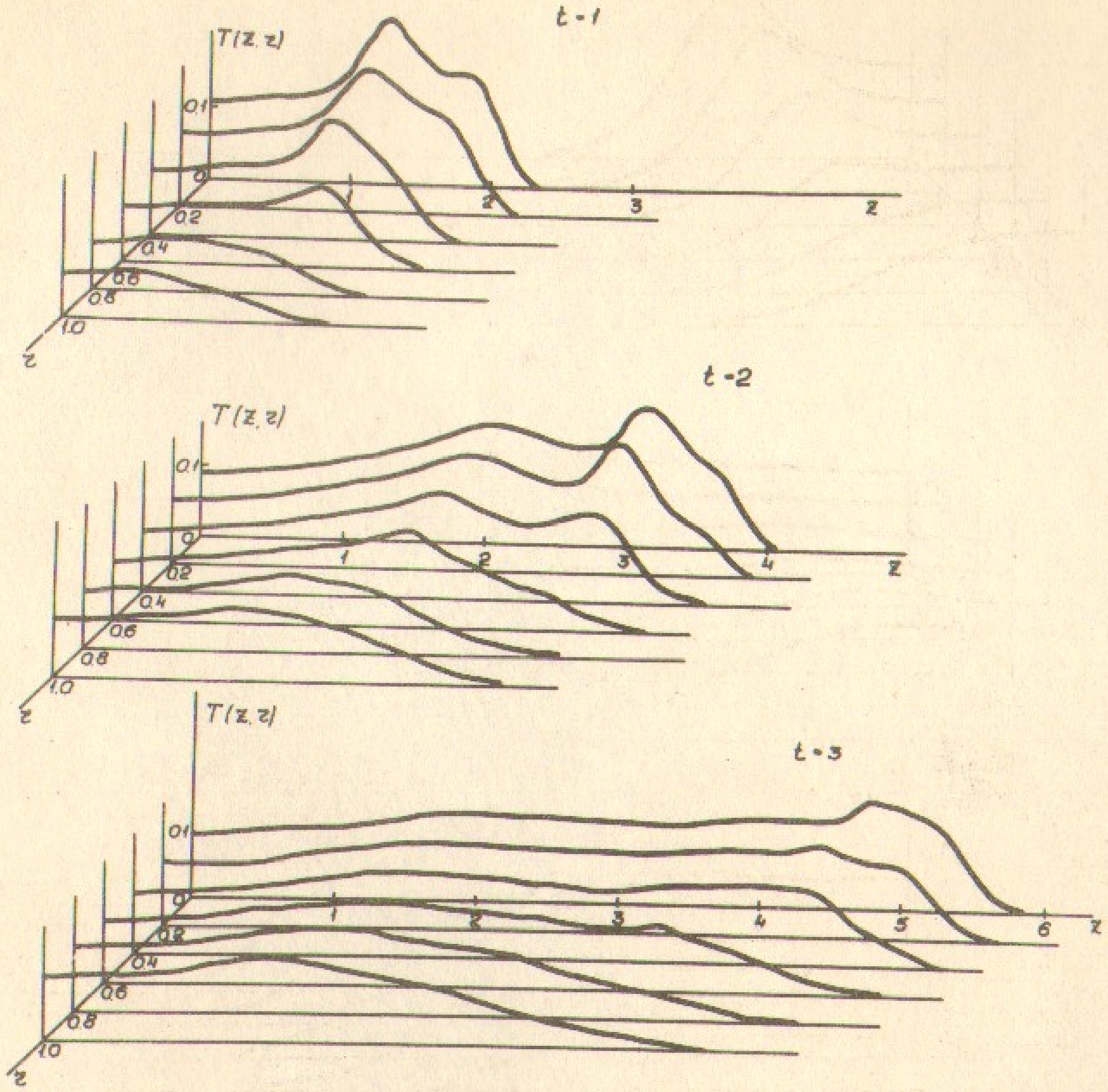

Рис.6. Распределение температуры плазмы в волне релаксации $R = 1$ $\chi = 1/10$.

Ответственный за выпуск БРЕЙЗМАН Б.Н.
Подписано к печати 11/X-1971г., № МН 15214
Усл. 1,4 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 65. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг.