

Ю.А.Березин, В.И.Карпман

**О нелинейной эволюции возмущений в плазме
и других диспергирующих средах**

Представлено в печать 15.05.66
Принято в печать 15.05.66
Сдано в печать 15.05.66
Издано на территории и в объеме, определенном
АН СССР.

НОВОСИБИРСК 1966

АННОТАЦИЯ

Исследуются нестационарные решения уравнения Кортевега-де Вриза, описывающего эволюцию нелинейных возмущений в плазме и других диспергирующих средах. Установлены условия распада возмущений на "солитоны" - стационарные уединенные волны. Выяснен физический смысл автомодельного решения уравнения Кортевега-де Вриза. Получены некоторые общие асимптотические соотношения для нестационарных решений.

NONLINEAR EVOLUTION OF DISTURBANCES IN A PLASMA AND
SIMILAR DISPERSIVE MEDIUMS

by

Yu. A. Berezin, V. I. Karpman

А Б С Т Р А К Т

Nonstationary solutions of the Korteweg-de Vries equation are considered. Conditions for solitary waves formations are derived. The selfsimilar solution of the Korteweg-de Vries equation is investigated. Some general asymptotic expressions for nonsteady waves are obtained.

I. ВВЕДЕНИЕ. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Качественное отличие нелинейной динамики плазмы от газо-динамики состоит в существенной роли дисперсионных эффектов (см., например, /1/). Для выяснения характера возникающих при этом явлений естественно рассмотреть прежде всего случай, когда отклонения закона дисперсии от линейного невелики, так что дисперсионное уравнение можно представить в виде ряда по степеням волнового числа:

$$\omega = v_f k (1 \pm \delta^2 k^2 + \dots), \quad (I.1)$$

где v_f - фазовая скорость малых колебаний при $k \rightarrow 0$, а

δ - некоторая постоянная, характеризующая величину дисперсионных эффектов ("длина" дисперсии). Если в соотношении (I.1) можно ограничиться двумя первыми членами (величина δ мала по сравнению с характерными длинами волн, существенными для данной задачи), а также рассматривать возмущения конечной, но достаточно малой амплитуды, то в целом ряде случаев уравнение для таких возмущений (в первом неисчезающем порядке по отношению к нелинейным и дисперсионным эффектам) приводится к виду

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (I.2)$$

где u - величина возмущения (например, скорости или магнитного поля в плазме), а параметр β равен $\mp v_f \delta^2$.^{†)}

Уравнение (I.2) было впервые получено Кортвегом и де-Вризом /2/ для поверхностных волн в жидкости, имеющих достаточно большую длину волны (по сравнению с глубиной) и достаточно малую, но конечную амплитуду. Аналогичное уравнение для плазмен-

^{†)} Уравнение (I.2) записано в системе отсчета, которая движется со скоростью $v_f = \lim_{k \rightarrow 0} (\omega/k)$ относительно среды; величина u имеет размерность скорости.

ных волн было впервые получено Гарднером и Морикавой /3/ (для волн, распространяющихся поперек магнитного поля в холодной плазме) и в работах /4,5/ (для волн, распространяющихся под углом к магнитному полю^{*)}). Разумеется, значение уравнения (1.2) не исчерпывается этими случаями. Как отмечено в /4/, оно справедливо и для других типов плазменных волн малой, но конечной амплитуды, когда можно ограничиться двумя первыми исчезающими членами в дисперсионном уравнении (1.1), которое легко получается из (1.2) после линеаризации и перехода к системе отсчета, где плазма покоится (см. также /6-8/). Заметим, наконец, что уравнение (1.2) также тесно связано с проблемой Ферми-Паста-Улама об установлении стохастических колебаний в нелинейной струне /9,10/.

Легко убедиться, что решения уравнения Кортевега-де Вриза при $\beta < 0$ получаются из соответствующих решений для случая $\beta > 0$ путем замены

$$u \rightarrow -u, \quad x \rightarrow -x, \quad t \rightarrow t. \quad (1.3)$$

Поэтому можно ограничиться подробным исследованием уравнения (1.2) при $\beta > 0$.

Стационарные решения уравнения (1.2) были изучены еще Кортевегом и де Вризом /2/, которые показали, что эти решения пред-

*) Для волн, распространяющихся поперек магнитного поля в холодной плазме, $\beta = V_A^2 c^2 / \omega_{ce}^2$ (при достаточно большом ларморовском радиусе ионов знак β меняется /7,8/). Для волн, распространяющихся под углом $\pi/2 - \theta$ к магнитному полю, $\beta = -V_A^2 c^2 \theta^2 / \omega_{ce}^2$ (при $\theta \gg (m_e/m_i)^{1/2}$). В случае гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости $\beta = \frac{1}{2}(gk)^{1/2} (k^2/3 - \alpha/\rho g)$, где α - коэффициент поверхностного натяжения, ρ - плотность, h - глубина канала /11/, так что в зависимости от последней β может быть как положительным, так и отрицательным.

ставляют собой уединенные и периодические ("кноидальные") волны, распространяющиеся с постоянной скоростью относительно среды, т.е. описываются уравнениями вида $u(x,t) = u(x-Vt)$. Для уединенной волны или, по терминологии работы /10/, "солитона" $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = u_0 \operatorname{sch}^2 \left\{ (u_0/12\beta)^{1/2} x \right\}, \quad (1.4)$$

а скорость волны определяется ее амплитудой и равна $V = u_0/3$. Для периодических волн

$$u(x) = (2a/s^2) \operatorname{dn}^2 \left\{ (a/6\beta)^{1/2} (x/s) \right\} + \gamma, \quad (1.5)$$

$$V = 2a(2-s^2)/3s^2 + \gamma.$$

Здесь $\operatorname{dn} z$ - эллиптическая функция Якоби с модулем $0 \leq s \leq 1$, a и γ - произвольные постоянные, причем a имеет смысл амплитуды волны. Длина волны λ и среднее значение амплитуды \bar{u} равны

$$\lambda = 2(6\beta/a)^{1/2} s K(s^2), \quad \bar{u} = 2aE(s^2)/s^2 K(s^2) + \gamma, \quad (1.6)$$

где $K(s^2)$, $E(s^2)$ - полные эллиптические интегралы с модулем s . При $s \rightarrow 1$

$$K(s^2) \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{16}{1-s^2} \right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \operatorname{dn} z \rightarrow \operatorname{sch} z, \quad (1.7)$$

так что периодическую волну при $s \approx 1$ можно приближенно рассматривать как последовательность солитонов с амплитудами $u_0 = 2a$ (по отношению к уровню $\bar{u} = \gamma$), удаленных друг от друга на логарифмически большое расстояние $\lambda = 2(6\beta/a)^{1/2} |\ln(1-s^2)|$. Ширина каждого солитона, согласно (1.4), равна $(12\beta/u_0)^{1/2}$, а его скорость - $V = (2a/3) + \gamma$ (в системе координат, которая движется относительно плазмы со скоростью $v_f = \lim_{k \rightarrow 0} (\omega/k)$).

Приведенные выше решения являются стационарными. Некоторые нестационарные решения уравнения Кортевега-де Вриза рассматривались ранее авторами в /4/, где было подробно изучено автомодельное решение уравнения (1.2), а также Забуским и Крускалом в /10/, где путем численного интегрирования было получено решение, соответствующее периодическому начальному условию

$$u(x,0) = \cos \pi x.$$

Интересный приближенный метод рассмотрения нестационарных решений уравнения Кортевега-де Вриза, основанный на представлении этих решений в виде (1.5) с медленно меняющимися параметрами a, s, γ , был развит Уитэмом /12/.

Решение, полученное в /10/ Забуским и Крускалом, существенно отличается от автомодельного решения, изучавшегося в /4/. Это различие заключается в том, что первое решение даёт ряд отдельных солитонов, на которые распадается выбранное начальное возмущение $u(x,0) = \cos \pi x$, в то время как автомодельное решение даёт волновой пакет, никогда на солитоны не распадающийся. Таким образом, различным начальным условиям могут соответствовать решения существенно разных типов. В настоящей работе выясняются некоторые характерные черты различных типов решений уравнения Кортевега-де Вриза.

2. ПРИНЦИП ПОДОБИЯ

Сформулируем прежде всего закон подобия для уравнения Кортевега-де Вриза. Запишем начальное условие в виде

$$u(x,0) = u_0 \varphi(x/l), \quad (2.1)$$

где u_0 - амплитуда, а l - линейный размер начального возмущения. Изменяя параметры u_0 и l , получаем семейство подоб-

ных начальных условий, характеризуемых безразмерной функцией $\varphi(x/l)$. Вводя новые переменные

$$\eta = u/u_0, \quad \xi = x/l, \quad \tau = ut/l, \quad (2.2)$$

из (1.2) и (2.1) получаем

$$\eta_\tau + \eta \eta_\xi + b^{-2} \eta_{\xi\xi\xi} = 0, \quad \eta(\xi,0) = \varphi(\xi), \quad (2.3)$$

где

$$b = l(u_0/\beta)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Из (2.3) следует, что течения, соответствующие одному и тому же значению числа b и одной и той же начальной функции $\varphi(\xi)$, являются подобными. Для солитона (1.4) имеем

$$b = b_s = 12^{1/2}. \quad (2.5)$$

Число b является фактически показателем нелинейности задачи, а его значение b_s для солитона - в определенном смысле характеристическим: для случаев $b \gg b_s$ и $b \ll b_s$ при одной и той же форме начального возмущения $\varphi(\xi)$ получаются качественно различные решения (см. ниже).

3. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим решения уравнения (1.2), соответствующие наиболее типичным начальным возмущениям, затухающим при $x \rightarrow \pm \infty$. Возьмем сначала начальное возмущение в виде одиночного возмущения, например,

$$u(x,0) = u_0 \exp(-x^2/l^2). \quad (3.1)$$

Характер решений будет зависеть от значений числа b для начального условия (3.1).

Как показывает численный эксперимент (см. рис.1), при достаточно больших значениях $b \gg b_s$ начальное возмущение (3.1) в процессе эволюции практически полностью распадается на от-

дельные солитоны (из дальнейшего будет видно, что, кроме солитонов, образуется еще "хвост", представляющий собой ограниченный волновой пакет малой амплитуды). Решение такого же типа (распадающееся на солитоны) было получено ранее Забуским и Крускалом /10/ для периодического начального условия

$$u(x, 0) = \cos \pi x.$$

Из численного эксперимента следует, что начальное возмущение (3.1) при $4 < b < 7$ распадается на 2 солитона, при $7 < b < 11$ - на 3, при $b > 11$ - на 4 и при $b \sim 16$ - на 6 солитонов, т.е. при увеличении числа b соответствующее возмущение распадается на большее число солитонов.

В обратном предельном случае ($b \ll b_c$) получаются "несолитонные" решения, соответствующие возмущениям, которые никогда не распадаются на солитоны. Эти решения представляют собой быстроосциллирующие волновые пакеты (рис.2). Качественно эти решения похожи на автомодельное решение, изучавшееся в /4/, хотя в количественном отношении они могут отличаться законом спада амплитуды во времени и пространстве (как будет показано ниже, характер асимптотической зависимости волнового числа от x и t в быстроосциллирующей части пакета является общим для всех решений такого типа и совпадает с полученным ранее для автомодельного решения в /4/).

Наконец, отметим, что при некоторых начальных условиях получается решение смешанного типа, содержащее наряду с солитонами, уходящими вперед, отстающий от них "хвост", имеющий такой же вид, как и цуг быстрых колебаний, изображенный на рис.2.

Некоторые качественные особенности "чисто солитонных" ре-

шений можно выяснить, исходя из законов сохранения, которые получаются из уравнения Кортевега-де Вриза. Оказывается, что кроме трех известных законов сохранения (массы импульса и энергии), приведенных, например в /12/, существует еще много других[†]). Эти законы сохранения можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial Q_m(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_m(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= u, & P_1 &= \frac{1}{2} u^2 + \beta u_{xx}, \\ Q_2 &= \frac{1}{2} u^2, & P_2 &= \frac{1}{3} u^3 + \beta (u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2), \\ Q_3 &= \frac{1}{3} u^3 - \beta u_x^2, & P_3 &= \frac{1}{4} u^4 + \beta (u^2 u_{xx} + 2u_x u_{xx}) + \beta^2 u_{xx}^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Первым законом сохранения является само уравнение (1.2), если записать его в дивергентной форме. Второй закон получается из (1.2) после умножения обеих частей уравнения на u и т.д. Громоздкость выкладок, однако, быстро возрастает с увеличением m .

Если при $x \rightarrow \pm \infty$ возмущение затухает, то из (3.2) следует:

$$S_m = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x, 0) dx. \quad (3.4)$$

Если из начального возмущения образуется N солитонов, то после того, как они разошлись друг от друга достаточно далеко, сохраняющиеся величины S_m будут складываться из значений этих величин для отдельных солитонов, т.е. $S_m = \sum_{i=1}^N S_m^{(i)}$. При-
†) Законы сохранения с четвертого по восьмой были получены М.Крускалом, Н.Забуским и Р.Мивра (частное сообщение проф.М.Крускала). По-видимому, число таких законов сохранения бесконечно.

равнивая эту сумму величине S_m , вычисленной для начального возмущения (3.1), получим следующие уравнения

$$\sum_{r=1}^N \eta_r^{m-\frac{1}{2}} = (\sigma/\sigma_s) \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x,0) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} q_m(x) dx} \quad (m=1,2,\dots), \quad (3.5)$$

где $\eta_r = u_r^{(2)}/u_0$ — безразмерные амплитуды образовавшихся солитонов, u_0 — характерная "амплитуда" начального возмущения (3.1), число σ , определяемое по формуле (2.4), относится к начальному возмущению, а $Q_m(x,0)$ и $q_m(x)$ — плотности сохраняющихся величин для начального условия и солитона соответственно, выраженные в безразмерных переменных (где $u_0 = \ell = 1$).

Система уравнений (3.5) позволяет, в принципе, определить амплитуды солитонов, образовавшихся из заданного начального возмущения. Пусть, например, это возмущение распадается на два солитона ($N=2$). В этом случае, решая систему (3.5), получим следующие выражения для амплитуд:

$$(\eta_{1,2})^{1/2} = \frac{1}{2} \left\{ a_1 \pm \left[(4a_2/3a_1) - a_1^2/3 \right]^{1/2} \right\}, \quad (3.6)$$

где

$$a_1 = (\sigma/2\sigma_s) \int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx, \quad a_2 = (3\sigma/4\sigma_s) \int_{-\infty}^{\infty} q^2(x) dx. \quad (3.7)$$

Условие вещественности корней приводит к неравенству $4a_2 > a_1^2$ (знак равенства нужно исключить, так как это означает образование двух солитонов одинаковой амплитуды, которые не могли бы разойтись, поскольку скорость солитона пропорциональна его амплитуде). Далее, отметим, что при получении выражения (3.6)

все квадратные корни понимались в арифметическом смысле; поэтому правая часть (3.6) должна быть положительной, что даёт неравенство $a_1^3 > a_2$. При $a_1^3 \rightarrow a_2$ амплитуда одного из солитонов стремится к нулю.

Таким образом, для распада начального возмущения (3.1) на два солитона необходимо, чтобы параметр подобия (2.4) удовлетворял условиям:

$$\sigma_c < \sigma < 2\sigma_c, \quad (3.8)$$

$$\sigma_c^2 = 6\sigma_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} q^2(x) dx \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx \right]^{-3}. \quad (3.9)$$

Нижняя граница $\sigma = \sigma_c$ отделяет возмущения, распадающиеся на солитоны, от возмущений, которые эволюционируют принципиально иным способом и никогда на солитоны не распадаются. Для начального профиля (3.1) $\sigma_c \approx 4$, что по порядку величины совпадает с σ_s (см. (2.5)). Если же выбрать в качестве начального возмущения

$$u(x,0) = u_0 \operatorname{sch}^2(x/\ell) \quad (3.10)$$

где u_0, ℓ — произвольные постоянные, то получим, что $\sigma_c = \sigma_s$.

Следовательно, значение параметра σ для солитона определяет по порядку величины границу между решениями качественно различных типов, т.е. при меньших значениях σ получаются решения, не распадающиеся на солитоны (рис.2)[†]. Характер такого

[†] Численные решения при больших, чем на рис.2, временах t , не дают чего-либо существенно нового: "хвост", состоящий из коротковолновых осцилляций удлиняется, а передний максимум очень медленно (значительно медленнее, чем солитон такой же амплитуды) движется вперед. В целом, пакет расплывается и амплитуда его убывает.

решения очень близок к решению линеаризованного уравнения (1.2) (см., например, /4/), количественные же характеристики при достаточно больших t будут иными.

При $b > b_c$ начальное возмущение (3.1) всегда распадается на солитоны. На рис.3 крестиками отмечены амплитуды солитонов, образовавшихся из (3.1) при разных значениях параметра b . Зависимость амплитуд солитонов от b , получающаяся из законов сохранения в предположении, что возмущение распадается на два и три солитона, изображена кривыми I и II соответственно (кривая I — две ветви выражения (3.6), а кривая II получена путем численного решения системы (3.5) при $N=3$). Как видно из рис.3, "экспериментальные" значения хорошо укладываются на соответствующие кривые, полученные при допущении, что возмущение полностью распадается на солитоны (т.е. что можно пренебречь вкладом "несолитонной" части решения^{*)}). При выполнении условия (3.8) экспериментальные значения хорошо укладываются на кривую I, за исключением непосредственной окрестности верхней границы $b = 2b_c$. Вблизи этой границы "экспериментальные" точки переходят уже на две верхних ветви кривой II, т.е. при $b > 2b_c \approx 8$ образуется три солитона, которые "сходят" с кривой II, когда амплитуды двух солитонов из трех становятся достаточно близкими друг к другу.

Нетрудно убедиться, что точки, где амплитуды каких-либо

^{*)} По-видимому, "несолитонная" часть решения должна существовать, во всех этих случаях, поскольку кроме тех законов сохранения, из которых определялись амплитуды солитонов, существуют еще и другие, которые также должны выполняться.

двух солитонов совпадают, являются особыми и в общем случае, — в том смысле, что решение, дающее конечное число солитонов, становится в этих точках неустойчивым. Действительно, если рассмотреть приращения амплитуд солитонов при бесконечно малой вариации начального условия, то из системы (3.5) получим:

$$(m - \frac{1}{2}) \sum_{z=1}^N \eta_z^{m-1/2} \delta \eta_z = \delta B_m \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.10)$$

где δB_m — вариации правых частей системы (3.5), а $\delta \eta_z$ — приращения амплитуд солитонов. Соотношения (3.10) можно рассматривать как систему уравнений для приращений $\delta \eta_z$ при заданных η_z и δB_m . Если за неизвестные принять величины $\eta_z^{-1/2} \delta \eta_z$, то система уравнений будет линейной, а её определитель есть определитель Вандермонда, составленный из величин η_z , который, как известно, обращается в нуль, если два каких-либо значения η_z совпадают. Таким образом, если $\eta_{z-1} \rightarrow \eta_z$ хотя бы ^{для} одного значения z , то малым вариациям начального условия отвечают большие изменения амплитуд солитонов (т.е. такие решения неустойчивы относительно вариации начальных условий). Вблизи указанных точек должен качественно измениться характер решения (реализуется более устойчивый вариант).

Необходимо отметить, что решения, которые не дают солитонов, могут иметь место не только при $b < b_c$. Так, например, если площадь профиля начального возмущения $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx \leq 0$, то его распад на одни только солитоны невозможен, поскольку площадь профиля сохраняется, а для солитона она должна быть положительной. Это справедливо для случая, когда параметр дисперсии β положителен. При $\beta < 0$ площадь профиля солитона от-

рицательна, и поэтому всякое возмущение, у которого площадь профиля положительна, не может распасться на солитоны. Следовательно, для распада возмущения на солитоны необходимо, чтобы знак площади профиля этого возмущения совпадал со знаком дисперсионного параметра β . Это условие можно обобщить на основе общих соотношений (3.5). Поскольку в левых частях уравнений (3.5) все квадратные корни понимаются в арифметическом смысле, то эти левые части должны быть положительными, т.е. необходимое условие распада возмущения на солитоны имеет вид

$$\text{sign} \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x, 0) dx = \text{sign} \int_{-\infty}^{\infty} q_m(x) dx, \quad (3.11)$$

где $Q_m(x, 0)$ и $q_m(x)$ определяются соотношениями (3.3) для начального возмущения и солитона соответственно. На рис. 4 в качестве иллюстрации приведено решение уравнения (1.2) с $\beta < 0$, соответствующее начальному возмущению (3.1) с $u_0 > 0$ ($\sigma = 10$). Оно аналогично решению для случая, когда $\beta > 0$ и $\sigma < \sigma_c$, с той только разницей, что коротковолновые осцилляции уходят вправо, а не влево (в соответствии с преобразованием (1.3)).

4. ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ КОРТВЕГА- ДЕ ВРИЗА

Используя приведенные выше результаты, можно получить дополнительную информацию относительно изучавшегося ранее в /4/ автомодельного решения. Рассмотрим последовательность начальных возмущений, у которых характерный размер $l \rightarrow 0$, но произведение $u_0 l^2$ остается постоянным. Решения уравнения (1.2), соответствующие таким начальным условиям, при одном и том же β должны быть подобными, т.к. σ остается постоянным. Вид этих ре-

шений при $l \rightarrow 0$ можно установить, исходя из того, что предельное решение не может содержать постоянных параметров с размерностью длины и скорости. Единственный размерный параметр, который может входить в решение, — это параметр дисперсии β с размерностью $\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$. Поэтому предельное решение может иметь только следующий вид:

$$u(x, t) = \beta^{1/3} t^{-2/3} \Psi \left\{ x / (\beta t)^{1/3} \right\}, \quad (4.1)$$

где Ψ — безразмерная функция. Выражение (4.1) совпадает с автомодельным решением, полученным в /4/, где также изучено поведение функции Ψ .

Нетрудно убедиться, что начальное возмущение, приводящее к предельному решению (4.1), имеет вид:

$$u(x, 0) = \beta \sigma^2 \delta'(x), \quad (4.2)$$

где σ — параметр подобия, соответствующий рассматриваемой последовательности начальных возмущений, $\delta'(x)$ — производная δ — функции. Действительно, если C — произвольная постоянная, то в соотношении

$$C \delta'(x) = \lim_{l \rightarrow 0} \left\{ -(Cx / \pi^{1/2} l^2) \exp(-x^2/l^2) \right\} \quad (4.3)$$

величина C/l^2 является характерной скоростью u_0 , следовательно, $u_0 l^2 = C = \text{const}$. Согласно (2.4), $u_0 l^2 = \beta \sigma^2$, откуда и следует выражение (4.2). Таким образом, физический смысл автомодельного решения (4.1) заключается в том, что оно описывает эволюцию начальных возмущений вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (C/\pi^{1/2}) \exp(-x^2/l^2) \right\} \quad \text{при} \quad x \gg l, \quad t \gg l^3/\beta \sigma^2. \quad +)$$

+) Разумеется, это относится к любой другой последовательности функций, стремящейся при $l \rightarrow 0$ к $\delta'(x)$, например,

$$u(x, 0) = C l^3 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x^2 + l^2)^{-2} \right\} \quad (\text{решение при достаточно больших } x \text{ и } t \text{ не зависит от детального вида } u(x, 0)).$$

5. НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Из сказанного выше следует, что для весьма широкого класса начальных возмущений "развившийся" профиль будет состоять из цуга быстрых осцилляций в левой (правой) части профиля при $\beta > 0$ ($\beta < 0$) и некоторой последовательности солитонов, уходящих вправо (влево). В определенных случаях амплитуда быстрых осцилляций может быть пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой солитонов (рис.1). При других начальных условиях, наоборот, солитоны никогда не образуются, и решение дает волновой пакет (рис.2,4) с быстрыми осцилляциями с одной стороны и медленными - с другой. Оказывается, что можно получить некоторые общие асимптотические соотношения для быстросциллирующей и "солитонной" частей решения (для последней, разумеется, лишь в том случае, когда число солитонов достаточно велико). Для получения этих соотношений, воспользуемся методикой, развитой Уитэмом в [12], где рассматриваются решения, характеризующиеся достаточно медленным изменением параметров осцилляций на расстояниях, больших по сравнению с их периодом. В этом случае профиль можно представить как квазипериодическую волну (1.5) с медленно меняющимися параметрами (амплитудой a , скоростью V и т.д.). Для уравнения (1.2) имеется три независимых параметра, в качестве которых можно выбрать, например, амплитуду a , волновое число $\kappa = 2\pi/\lambda$ и среднее значение \bar{u} (см. (1.5), (1.6)). При этом модуль эллиптической функции s связан с a и κ следующим выражением

$$sK(s^2) = (\pi/\kappa) (a/3\beta)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Если $s \rightarrow 0$, то эллиптическая функция $\operatorname{dn} z \rightarrow \beta$ (1.5)

приближается к тригонометрической, причем амплитуда колебаний при этом может оставаться конечной (при $\kappa \rightarrow \infty$); такой случай реализуется в быстросциллирующей части профиля. В обратном предельном случае, когда $s \rightarrow 1$ при $a = \text{const}$, волновое число $\kappa \sim \{1/\epsilon_1(1-s)\} \rightarrow 0$ и волну можно рассматривать как последовательность солитонов; этот случай реализуется в "солитонной" части профиля.

Уравнения Уитэма для "медленно" меняющихся параметров в удобной для нас форме имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_1 + \epsilon_2) + v_3 \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_1 + \epsilon_2) = 0, \quad \dots, \quad (5.2)$$

где многоточие означает циклическую перестановку, а $\epsilon_i(x,t)$ - величины, связанные с a, s, \bar{u} соотношениями

$$a = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad s^2 = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 - \epsilon_3), \quad \bar{u} = \frac{2aE(s^2)}{s^2K(s^2)} + \epsilon_3 \quad (5.3)$$

(для единообразия величина γ в (1.5), (1.6) здесь обозначена через ϵ_3); скорости $v_i(x,t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= (V/6) - aK/g(K-E), \\ v_2 &= (V/6) - a(1-s^2)K/g[E - (1-s^2)K], \\ v_3 &= (V/6) + a(1-s^2)K/gs^2E, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$V = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$ - скорость волны, определяемая выражением (1.5).

Величины $v_i(x,t)$ имеют смысл скоростей распространения "римановых инвариантов" $\epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2}$ ($i_1, i_2 \neq i$).

В общем случае уравнения (5.2) - (5.4) весьма сложны, однако, в предельных случаях $1-s \ll 1$ и $s \ll 1$ они существенно упрощаются. Рассмотрим эти случаи подробнее.

а) Пусть $1-s \ll 1$ (последовательность солитонов). Тогда $v_2 - v_3 \sim 1-s$, так что $v_2 \approx v_3$. Далее, $v_3 = \gamma$ имеет смысл величины возмущения между солитонами; поэтому $v_3 = 0$ (что можно получить также непосредственно из уравнений (5.2)) и величина \bar{u} оказывается логарифмически малой ($\bar{u} \sim \frac{1}{e_n(1-s)}$). Таким образом, $v_1 \approx 2a = u_0$ (u_0 — амплитуда солитона), $v_1 \approx 0$, $v_2 \approx v_3 \approx 2u_0$; второе из уравнений (5.2) вырождается, а первое и третье принимают одинаковый вид:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{1}{3} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0. \quad (5.5)$$

Общее решение этого уравнения можно написать в виде

$3x - u_0(t-t_0) = f(u_0)$, где $f(u_0)$ — произвольная функция, определяемая из условий в момент t_0 , когда солитоны уже образовались. При увеличении t имеет место укрупнение профиля $u_0(x, t)$, и при достаточно больших t решение становится многозначным. В области многозначности решение теряет физический смысл, что связано с неприменимостью усредненных уравнений (5.2) — (5.4) при больших градиентах. В области однозначности решение при достаточно больших $t-t_0$ принимает следующий асимптотический вид

$$u_0(x, t) = 3x/(t-t_0), \quad (5.6)$$

т.е. при достаточно больших фиксированных t вершины солитонов должны лежать на прямой линии^{†)}, угловой коэффициент которой убывает обратно пропорционально времени. Соотношение (5.6) справедливо, естественно, в том случае, когда число солитонов достаточно велико. Практически его точность, как показывает

^{†)} Это было замечено при анализе "экспериментальных" данных еще в [10].

численное решение, оказывается вполне удовлетворительной уже для возмущения, распадающегося на 6 солитонов (рис. 1б); при этом вершины самого большого и самого маленького солитонов несколько отклоняются от прямой, что связано, очевидно, с большими градиентами "средней" амплитуды в этих областях. Интересно, что соотношение (5.6) начинает выполняться с хорошей точностью еще до того, как солитоны пройдут расстояние, большое по сравнению с шириной области начального возмущения l (образование солитонов, вообще говоря, происходит очень быстро по сравнению с временем прохождения расстояния порядка l).

Можно получить еще несколько интересных соотношений, характеризующих асимптотическое поведение величин κ и \bar{u} для последовательности солитонов. Поскольку эти величины убывают при $s \rightarrow 1$ (см. (5.1), (5.3)), то в уравнениях (5.2) необходимо учитывать малые члены, которыми до сих пор пренебрегалось. Можно, однако, поступить проще, если воспользоваться "законом сохранения" для волнового числа [12],

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (V\kappa) = 0, \quad (5.7)$$

который следует из точных уравнений (5.2). Ограничиваясь в выражении для V (1.5) членами, не исчезающими при $s \rightarrow 1$, получаем $V \approx u_0/3$. Воспользовавшись для u_0 формулой (5.6), получаем из (5.7) простое уравнение, которое имеет общее решение вида $\kappa = t^{-1} f(x/t)$, где f — произвольная функция. Как и при получении (5.6), мы должны потребовать, чтобы асимптотическое выражение для κ не зависело от детального вида начальных условий. Волновое число κ имеет размерность обратной длины, и этому требованию можно удовлетворить только

при $f(x/t) = Ct/x$, где C - безразмерная постоянная. Поэтому при достаточно больших x

$$\kappa \approx C/x. \quad (5.8)$$

Таким образом, в фиксированной точке пространства среднее расстояние между солитонами не зависит от времени. Соотношению (5.8) можно придать более наглядную форму, если определить среднее расстояние между солитонами в окрестности точки, движущейся с каким-либо солитоном (имеющим, скажем, номер z). Обозначая его амплитуду через $u_0^{(z)}$, получаем из (5.6) для координаты солитона выражение $x = u_0^{(z)} t / 3$, откуда имеем

$$\kappa_z = 3C/u_0^{(z)} t, \quad \lambda_z = 2\pi u_0^{(z)} t / 3C, \quad (5.9)$$

где $\lambda_z = 2\pi/\kappa_z$ - среднее расстояние между солитонами. Оно увеличивается пропорционально времени, поскольку солитоны движутся равномерно, но с разными скоростями $V = u_0/3$.

Найдем теперь \bar{u} для рассматриваемой области. Учитывая (5.1) и (5.3) и пренебрегая величиной ϵ_3 , получаем

$$\pi^2 \bar{u}^2 \approx 6\beta u_0 \kappa^2, \quad \text{откуда следует}$$

$$\bar{u} = (18C^2\beta/\pi x t)^{1/2}. \quad (5.11)$$

Наконец, рассмотрим еще область быстрых осцилляций в профилях, аналогичных изображенным на рис.2,4. В этой области

$s^2 \ll 1$. Тогда из (5.2) - (5.4) следует:

$$\frac{\partial}{\partial t} (4\bar{u} - 6\beta\kappa^2) + (\bar{u} - 3\beta\kappa^2) \frac{\partial}{\partial x} (4\bar{u} - 6\beta\kappa^2) = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0. \quad (5.13)$$

В рассматриваемой области, очевидно, можно положить $\bar{u} = 0$, так что уравнение (5.13) удовлетворяется тождественно. Рассуж-

дая аналогично тому, как при выводе (5.6), из уравнения (5.12) получаем, что при достаточно больших x и t имеет место асимптотическое соотношение

$$\kappa^2 \approx -x/3\beta t \quad (5.14)$$

Знак минус здесь означает, что область быстрых осцилляций находится в задней ($x < 0$) или передней ($x > 0$) частях профиля в зависимости от знака β (см.рис.2 и 4, соответственно; начало координат выбрано в центре начального возмущения).

Если теперь учесть, что полное решение имеет вид

$u(x,t) = u(x-Vt)$ и что при $s \ll 1$, $\bar{u} \approx 0$ можно написать

$u(x) \approx a \sin(\kappa x + \alpha)$, $V = -\beta\kappa^3$, то

$$u(x,t) \approx a(x,t) \sin\left[\frac{2}{3}\left(-x^3/3\beta t\right)^{3/2} + \alpha\right], \quad (5.15)$$

где $a(x,t)$ - амплитуда, определяемая из начальных условий.

Соотношение (5.15) имеет в определенном смысле универсальный характер: оно справедливо для любой быстроосциллирующей части профиля, где \bar{u} достаточно мало (амплитуда при этом не обязательно должна быть малой). Поэтому естественно, что асимптотика автомодельного решения, при больших x , найденная в [4], имеет вид (5.15).

ЛИТЕРАТУРА

- I. Р.З.Сагдеев. Вопросы теории плазмы, вып.4, Атомиздат, Москва, 1964.
2. D.J. Korteweg, G. de Vries. *Phil. Mag.*, 39, ser.5, 442, 1895.
3. C.S. Gardner, G.K. Morikawa. *Courant Institute of Math. Sciences, Report NYO 3082*, 1960 (не опубликовано).
4. Ю.А.Березин, В.И.Карпман. *ЖЭТФ*, 46, 1880, 1964.
5. K.W. Morton. *Phys. Fluids*, 7, 1801, 1964.
6. В.Е.Захаров. *ПМТФ*, № 3, 167, 1964.
7. C.S. Gardner, G.K. Morikawa. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, 35, 1965.
8. Ю.А.Березин. *ПМТФ*, № 6, 26, 1965.
9. М.Д. Kruskal, Н.Г. Zabusky. *J. Math. Phys.*, 5, 231, 1964.
10. Н.Г. Zabusky, М.Д. Kruskal. *Phys. Rev. Lett.*, 15, 240, 1965.
- II. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, 1954.
12. G.B. Whitham. *Proc. Roy. Soc., ser. A*, 283, 238, 1965.

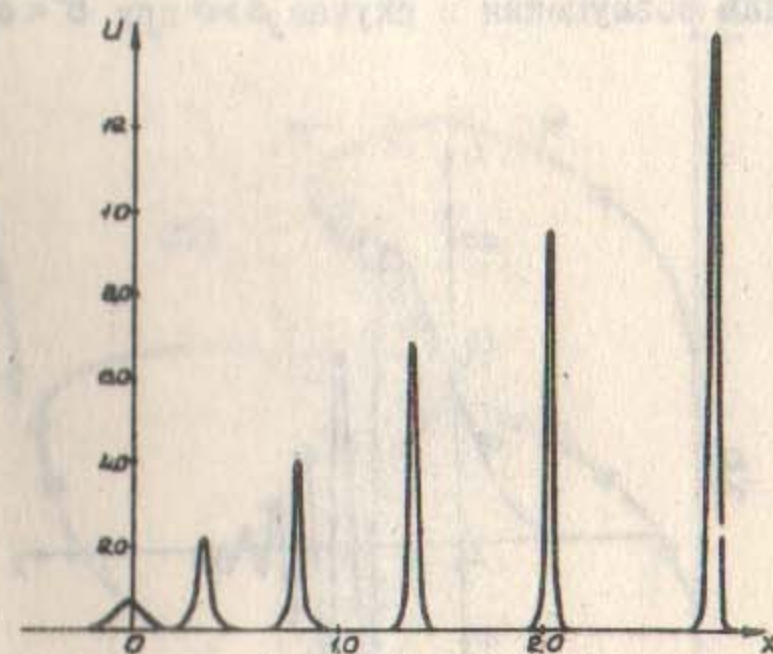
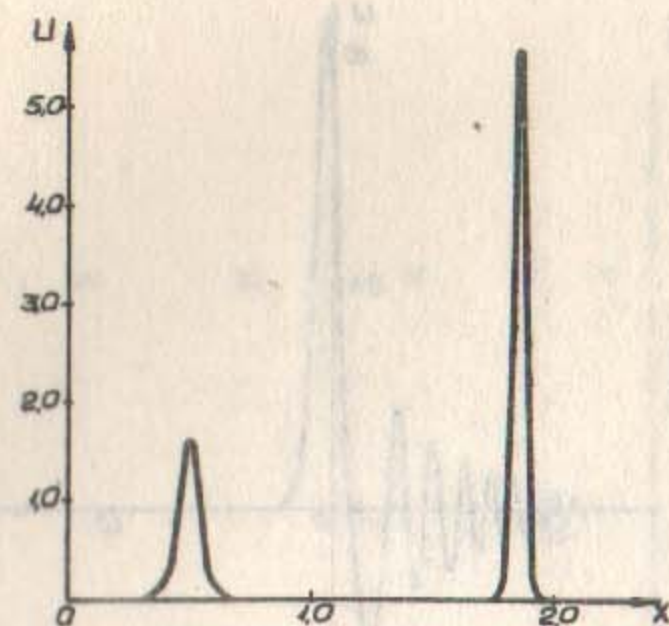


Рис. I. Профиль возмущения в случае $\beta > 0$ при $\sigma > \sigma_c$
 а) $\sigma = 5,9$; б) $\sigma = 16,5$.

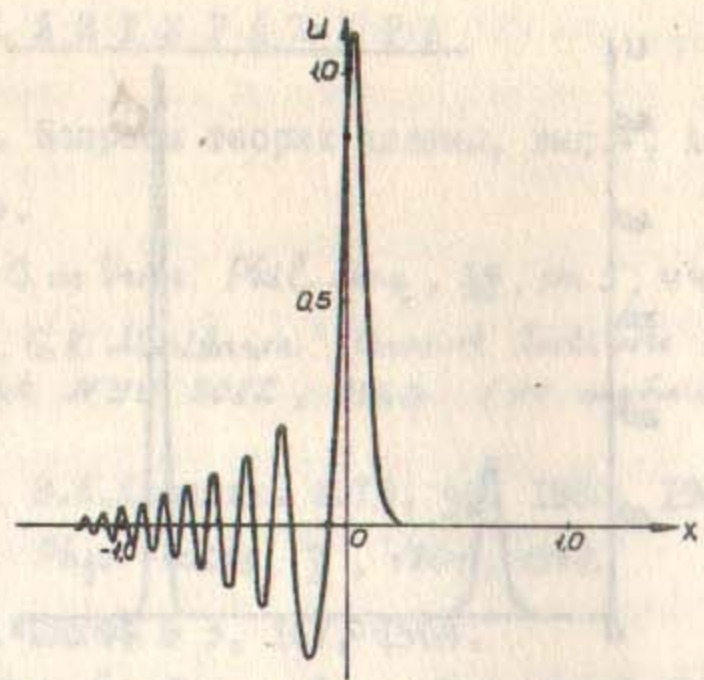


Рис. 2. Профиль возмущения в случае $\beta > 0$ при $\sigma < \sigma_c$ ($\sigma = 1,9$).

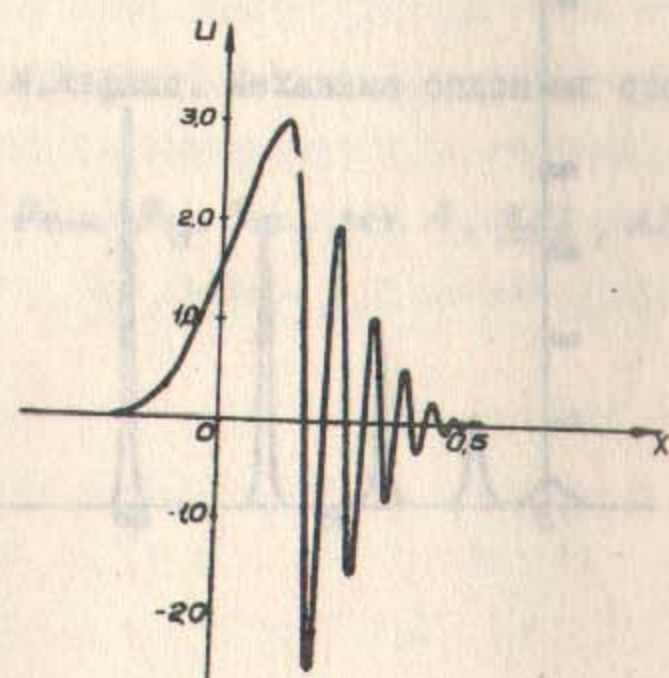


Рис. 4. Профиль возмущения в случае $\beta < 0$ ($\sigma = 10$).

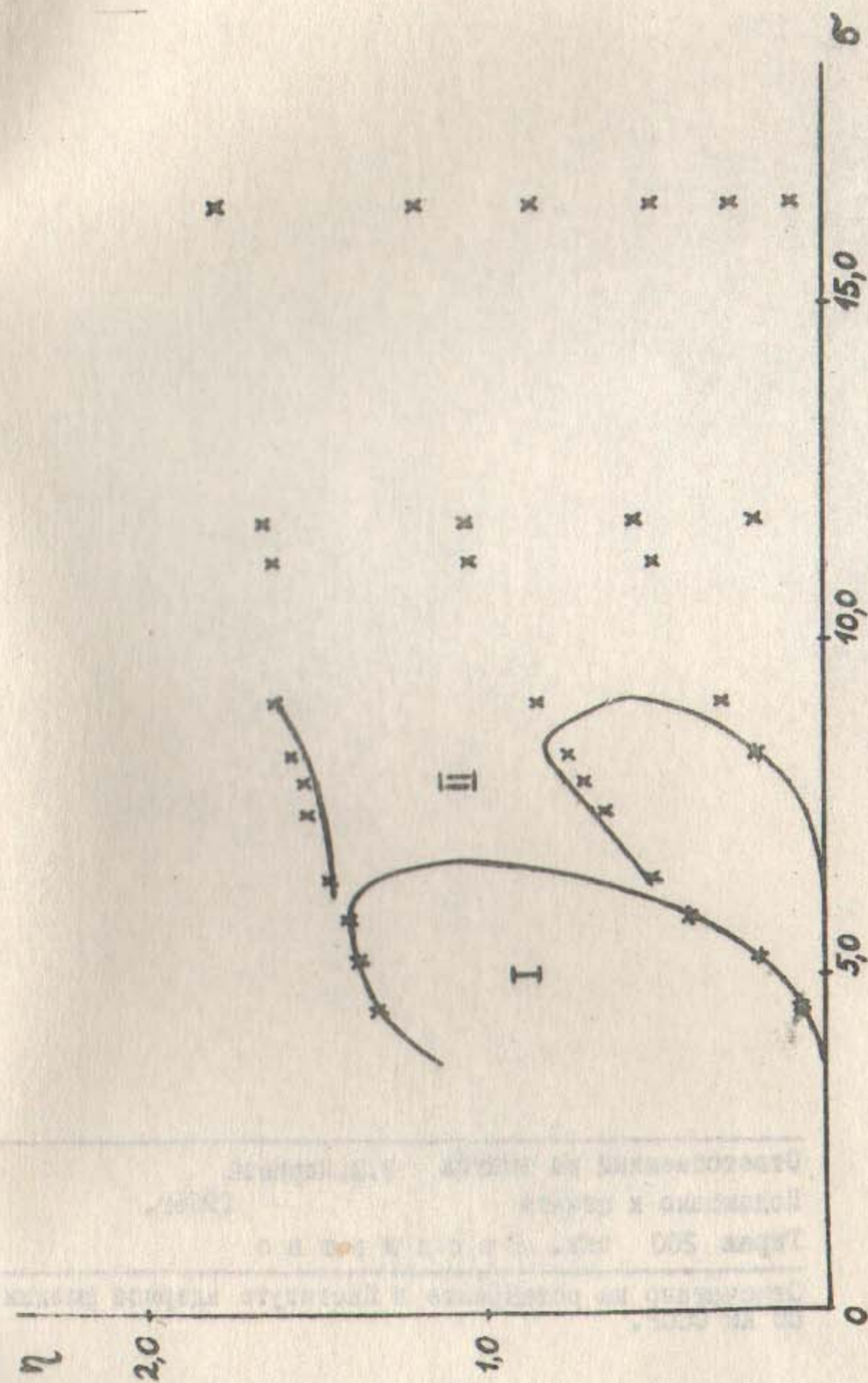


Рис. 3. Зависимость амплитуд солитонов от параметра подобия
 ($\times \times \times$ - "экспериментальные" значения, кривая I -
 амплитуды, вычисленные из двух законов сохранения, кривая II -
 амплитуды, вычисленные из трёх законов сохранения).