

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г.И. БУДКЕРА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Туев Петр Викторович

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАЗМЕННОГО
КИЛЬВАТЕРНОГО УСКОРЕНИЯ С ЛАЗЕРНЫМ
ДРАЙВЕРОМ ТЕРАВАТТНОГО УРОВНЯ
МОЩНОСТИ**

1.3.18. Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор РАН
Лотов Константин Владимирович

Новосибирск — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1 Распределение плотности газа в сверхзвуковой струе .	14
1.1 Устойчивый алгоритм восстановления плотности газа	15
1.2 Анализ экспериментальных данных	21
1.3 Основные результаты	23
Глава 2 Моделирование кильватерного ускорения	24
2.1 Квазистатическое приближение	24
2.2 Учет быстрых электронов плазмы	29
2.2.1 Моделирование захвата с пробными электронами	29
2.2.2 Учет влияния захваченных электронов на волну	33
2.3 Основные результаты	38
Глава 3 Оптимизация параметров ускорения в газовой струе . .	39
3.1 Сканирование параметров в квазистатическом приближении . . .	40
3.2 Уточнение параметров захваченных электронов	44
3.3 Основные результаты	46
Глава 4 Расширенная модель квазистатического описания плазмы	47
4.1 Расширение квазистатической модели	50
4.1.1 Физическая модель	50
4.1.2 Численная реализация	52
4.2 Тестирование новой модели	57
4.2.1 Распространение лазерного импульса	57
4.2.2 Плазма с продольным градиентом плотности	59

4.3	Обсуждения границ применимости и дальнейшего развития модели	64
4.4	Результаты	65
Глава 5 Каналирование лазерного излучения		66
5.1	Линейная теория	67
5.2	Структура мод и скорость затухания	71
5.3	Основные результаты	75
Заключение		76
Список литературы		78
Приложение А Численная схема для декартовой геометрии		
улучшенного плазменного решателя		98
A.1	Граничные и начальные условия	100
A.2	Движение частиц	101
A.3	Вычисление плотности заряда и токов	104
A.4	Вычисление полей	106
Приложение Б Численная схема для цилиндрической		
геометрии улучшенного плазменного решателя		109
B.1	Граничные условия	109
B.2	Движение частиц	110
B.3	Вычисление плотности заряда и токов	111
B.4	Вычисление полей	113

Введение

Ускорение частиц в плазме в настоящее время представляет большой интерес [1]. В плазме возможно поддержание электрических полей с напряженностью на порядки больше, чем можно получить в обычных радиочастотных структурах из-за электрического пробоя материала стенок. В этом случае плазма выступает лишь средой для передачи энергии от источника к ускоряемым частицам. Источником, называемым драйвером, может служить релятивистский пучок заряженных частиц или лазерный импульс, который возбуждает в плазме ленгмюровские волны с большой напряженностью электрического поля. За драйвером следует ускоряемый сгусток заряженных частиц (витнесс), который необходимо поместить в ускоряющую и фокусирующую для данного сорта частиц фазу волны для эффективной передачи энергии. В качестве витнесса обычно рассматривают электроны или позитроны. Концепция развивается во многих направлениях, которые различаются методами возбуждения и управления кильватерной волной [2–5].

Можно выделить два магистральных направления исследований в данной области: разработка будущих коллайдеров для физики высоких энергий [6] и создание компактных источников электронов или излучения для научных и коммерческих применений [3, 7–9]. Кильватерное ускорение с использованием лазерного импульса в качестве драйвера больше подходит для второй цели, на которой мы сосредоточимся в данной работе. Современные лазерные системы способны производить широкий спектр лазерных импульсов, подходящих для различных режимов кильватерного ускорения. Переход в сильно нелинейный режим позволяет отказаться от внешней инжекции, поскольку волна способна захватывать электроны плазмы [3, 10]. Работа в таких режимах открывает возможность построения компактных источников излучения. В этом случае для эксперимента требуется только лазерная система и плазменная мишень.

Актуальность темы исследования

Большое разнообразие режимов взаимодействия располагает к новым исследованиям в этой области [3, 10]. Исторически сложилось, что эксперименты по лазерному кильватерному ускорению проводились с передовыми на тот момент импульсами [11]. Однако широкое распространение могут получить только источники, построенные на базе относительно доступных лазерных систем. Поэтому определение минимальных требований на лазерный импульс, подходящий для генерации электронных сгустков из плазмы, является задачей, представляющей особый интерес. В этом случае удастся минимизировать размер лазерной системы, а следовательно и всей установки в целом. Ожидается, что минимальные параметры будут далеки от рекордных, и подойдут лазерные импульсы умеренной интенсивности. Для разработки методик исследования необходимо из широкого спектра всевозможных параметров сосредоточится на достаточно узкой области. В качестве базовых параметров будем опираться на лазерную установку, которая в настоящее время создается в Институте лазерной физики (ИЛФ) СО РАН, и где предполагается возможность получения коротких высококонтрастных импульсов тераваттового уровня мощности [12, 13].

Наиболее простая конфигурация эксперимента подразумевает использование сверхзвуковых газовых течений в качестве мишени для лазерного импульса. В таком случае лазерный импульс своим полем ионизует газ, а затем в образовавшейся плазме происходит процесс ускорения. Сверхзвуковые струи обладают продолжительной областью однородной плотности и традиционно измеряются интерференционными методами в кильватерных экспериментах [14]. Однако малое энергосодержание импульса накладывает ограничение на длину взаимодействия и плотность плазмы, поэтому требуется адаптировать существующие алгоритмы к новым условиям измерений.

Важно работать в достаточно нелинейном режиме, чтобы формирование ускоряемого сгустка происходило из плазменных электронов, и не потребовалась внешняя инжекция частиц. В настоящее время граница захвата плазменных электронов в пространстве параметров еще не изучена в полной мере, по-

сколькo может зависть от многих факторов [3, 10, 15]. Поэтому для каждой конкретной установки необходимо проводить отдельный параметрический поиск для определения оптимальных режимов взаимодействия. Полностью экспериментальное изучение кильватерного ускорения сильно затруднено из-за высокой сложности диагностики. Сложность диагностики связана с микронными масштабами волновых структур, которые распространяются в плазме с около-световыми скоростями. С другой стороны, задачу можно попробовать решать аналитически. Однако на плазменное кильватерное ускорение могут оказывать существенное влияние всевозможные нелинейные эффекты, которое не удается полностью учесть в рамках аналитического анализа. Из-за этого возможно построение теорий только в простейших приближениях, поэтому численное моделирование имеет решающее значение в этой области науки [16]. Большинство интересных процессов происходит в небольшой области пространства, которая движется вместе с пучками. Это облегчает моделирование, так как позволяет использовать короткое движущееся окно. Однако в задаче присутствуют сильно различающиеся временные и пространственные масштабы [17, 18], от длины волны лазерного импульса (около микрона) до полной длины ускорения (десятки сантиметров). Часто постановка вычислительных экспериментов с использованием кодов, опирающихся на базовые принципы движения частиц в электромагнитных полях, требует наличия больших компьютерных мощностей. Более того, даже использование таких кодов не всегда возможно. Следовательно, разработка эффективных алгоритмов и упрощенных моделей является актуальной задачей [16, 19, 20]. Одной из популярных упрощенных моделей является квазистатическое приближение (QSA) [21, 22], которое значительно снижает требования к вычислительным ресурсам по сравнению с моделированием методом “частиц в ячейке” (PIC) без упрощающих предположений. Эта модель была реализована в ряде вычислительных кодов [23–27], иногда в сочетании с другими упрощениями, такими как уравнение огибающей для лазерного импульса [22, 28–31] или жидкостное приближение для плазмы [32–34]. В некоторых

режимах взаимодействия квазистатическая модель не учитывает все важные физические процессы, например захват электронов плазмы, поэтому требуется дальнейшее ее развитие. Компактный источник должен работать в нелинейном режиме взаимодействия, и, вероятно, каждый конкретный набор параметров потребует численного поиска, который желательно осуществлять без привлечения значительных вычислительных ресурсов. Это делает задачу улучшения квазистатического приближения особенно важной. Отметим, что ранее уже было предложено расширение этой модели для учета процесса захвата электронов плазмы [35], однако как будет показано в данной работе, оно не является корректным для всех параметров взаимодействия и требует дальнейших улучшений.

При работе с газовыми струями часто полагаются на нелинейную плазменную фокусировку для предотвращения дифракции импульса. Работа в этом режиме накладывает ограничения на соотношения плотности плазмы, длины взаимодействия и параметров лазерного импульса. Эти ограничения сужают диапазон параметров ускоренных электронов, который доступен без существенных изменений в конструкции мишени или характеристик лазерного импульса. С другой стороны, для предотвращения дифракционного расплывания широко используются капилляры [11, 36], а исследование различных конфигураций капилляров является широко обсуждаемой темой. В этом случае можно работать с плазмой более низкой плотности, что приводит к уменьшению расфазировки волны с витнессом в процессе ускорения и способствует более эффективной передаче энергии от драйвера. Фокусировка происходит за счет создаваемого профиля плотности с минимумом на оси [37–48], либо обеспечивается непосредственно стенками капилляра [49–60]. Мы сосредоточимся на рассмотрении последнего случая в линейной теории, причем будем считать стенки капилляра металлическими. Это оправдано тем, что при высокой интенсивности излучения вблизи стенки все материалы ведут себя как плазма, и их свойства близки к свойствам металла [61]. При распространении лазерного импульса в металлическом волноводе реализуется режим, в котором длина волны излучения мала

в сравнении с размером капилляра. В этом случае классическое описание волноводных мод в металлических волноводах с конечной проводимостью перестает работать [62]. Детальный анализ этого режима является важным шагом на пути использования таких структур в кильватерном ускорении.

Целью работы является разработка эффективных методов анализа кильватерного ускорения в различных режимах взаимодействия и исследование с их помощью возможностей применения коротких лазерных импульсов средней интенсивности в качестве драйверов для компактных кильватерных ускорителей.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать алгоритм восстановления параметров сверхзвуковой газовой струи с малой оптической толщиной из интерференционных измерений.
2. Расширить область применимости квазистатического приближения, добавив в него учет эффектов, связанных с возбуждением сильнонелинейных волн в плазме.
3. Модернизировать код LCODE [24, 63], добавив в него разработанные модели.
4. Оптимизировать параметры взаимодействия лазерного импульса с энергосодержанием около 300 мДж с плазмой для обеспечения генерации электронных сгустков,
5. Исследовать особенности строения мод в узких металлических капиллярах и уточнить существующие приближенные модели.

Научная новизна: предложен новый алгоритм для устойчивого восстановления распределения плотности в объектах с цилиндрической симметрией при малых значениях полезного сигнала. Разработаны и проанализированы возможные модификации квазистатического приближения для учета захвата плазменных электронов. Обнаружен новый режим генерации электронных сгустков при взаимодействии короткого высококонтрастного лазерного импульса тера-

ваттного уровня мощности с плазменной мишенью. Разработана полуаналитическая модель для анализа волноводных мод в металлических капиллярах в широкой области параметров.

Теоретическая и практическая значимость: Разработанные инструменты могут применяться для широкого спектра исследований в области лазер-плазменного кильватерного ускорения. Оптимизированы параметры взаимодействия лазерного импульса ИЛФ СО РАН со сверхзвуковой газовой струей для генерации электронных сгустков. В рамках линейной теории объяснено аномально малое затухание лазерного излучения в металлическом капилляре и обнаружены важные отличия от приближенных решений в области параметров, специфичных для кильватерного ускорения.

Методология и методы исследования Для численного моделирования используется квазистатический код LCODE и электромагнитный PIC код FBPIC [64]. Для обработки результатов и численного анализа аналитической модели разработаны алгоритмы на языке Python.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разложение фазового распределения, полученного из интерференционных измерений сверхзвуковой газовой струи, по супергауссовым функциям позволяют устойчиво исследовать параметры течения, когда объект вносит относительно малое возмещение на уровне 1 рад.
2. Существующие в настоящее время алгоритмы учета захвата плазменных электронов кильватерной волной в рамках квазистатического приближения позволяют проводить только предварительную быструю оптимизацию параметров взаимодействия. Наиболее перспективные режимы взаимодействия необходимо исследовать с помощью более медленных кодов, использующих более полные физические модели.
3. Смещение перетяжки лазерного импульса в область, где плотность плазмы вышла на постоянную величину, позволяет достичь больших пиковых интенсивностей, нежели при его фокусировке на границу плазмы. Это делает возможным захват электронов из однородной плазмы

с плотностью около $6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ при энергосодержании драйвера около 300 мДж.

4. Упрощающие предположения, традиционно используемые в линейной теории волноводов, дают ошибку до 20% в скорости затухания основной моды при рассмотрении излучения с длиной волны 850 нм в металлическом капилляре радиуса порядка 15 мкм. Кроме того, существуют качественные отличия в характере возбуждения мод линейно-поляризованным лазерным импульсом.

Степень достоверности: результатов обеспечивается перекрестной проверкой двумя вычислительными кодами. Корректность используемых кодов обеспечивается сравнением с ранее проведенными экспериментами. Где это возможно, проведено сравнение с экспериментальными измерениями и аналитическими теориями.

Апробация работы: результаты работы докладывались и обсуждались на конкурсе молодых ученых ИЯФ СО РАН в 2018, 2020 и 2021 годах, а также представлялись на международных конференциях:

1. 43-я конференция по физике плазмы (EPS, Бельгия, Левен, 2016) [65];
2. 2-я Европейская конференция по современным методам ускорения (EAAS, Италия, о. Эльба, 2017) [66];
3. Конференция по лазер-плазменному ускорению (LPAW, Хорватия, Сплит, 2019) [67];
4. Азиатский форум по ускорителям и детекторам (AFAD, Россия, Новосибирск, 2021) [68];
5. 47-я конференция по физике плазмы (EPS, Испания, Сиджес, 2021) [69].

Часть результатов диссертации вошла в выпускную квалификационную работу аспиранта, которая была успешно защищена в 2021 году [70].

Публикации:

1. **Tuev, P. V.** Attenuation of waveguide modes in narrow metal capillaries / P. V. Tuev, K. V. Lotov. — Текст : электронный // Journal of the Optical Society of America A. — 2021. — Vol. 38, nr 1. — P. 108–114. — URL: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.410552>. — Дата публикации: 24.12.2020. [71]
2. Algorithm for supersonic gas jet density profile retrieval from interferometric measurement / S. V. Avtaeva, K. V. Gubin, V. I. Trunov, **P. V. Tuev.** — Текст : электронный // Journal of the Optical Society of America A. — 2019. — Vol. 36, nr 5. — P. 910–917. — URL: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.36.000910>. — Дата публикации: 25.04.2019. [72]
3. **Туев, П. В.** Формирование ускоряемого сгустка из электронов плазмы при моделировании кильватерного ускорения квазистатическим кодом / П. В. Туев, А. П. Соседкин, К. В. Лотов. — Текст : электронный // Сибирский физический журнал. — 2017. — Т. 12, № 4. — С. 14–19. — URL: <http://dx.doi.org/10.25205/2541-9447-2017-12-4-14-19> (дата обращения: 12.09.2022). [73]
4. **Tuev, P. V.** Optimization of moderate-power laser pulse interaction with plasmas using quasistatic simulations / P. V. Tuev, K. V. Lotov. — Текст : электронный // Proceedings of the 47th EPS Conference on Plasma Physics (Sitges, Spain, 21–25 June 2021). — Sitges, 2021. — Vol. 45A. — P2.2004. — URL: <http://ocs.ciemat.es/EPS2021PAP/pdf/P2.2004.pdf> (дата обращения: 12.09.2022). [74]
5. **Tuev, P. V.** Mode structure of a short laser pulse propagating through a metal capillary / P. V. Tuev, K. V. Lotov. — Текст : электронный // Proceedings of the 43rd EPS Conference on Plasma Physics (Leuven, Belgium, 4–8 July 2016). — Leuven, 2016. — Vol. 40A. — P5.088. — URL: <http://ocs.ciemat.es/EPS2016PAP/pdf/P5.088.pdf> (дата обращения: 12.09.2022). [75]

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 116 страниц, включая 34 рисунка. Список литературы содержит 111 наименований.

Первая глава посвящена анализу параметров сверхзвуковой газовой струи, которые могут быть экспериментально достигнуты в Институте лазерной физики СО РАН. Описан разработанный алгоритм восстановления распределения плотности струи для обеспечения стабильных измерений при малой амплитуде полезного сигнала [72].

Во второй главе описывается применяемое в LCODE квазистатическое приближение и обсуждается проблема захвата плазменных электронов в кильватерную волну. Рассмотрены несколько алгоритмов анализа захватываемых плазменных частиц и выбран оптимальный [73].

В рамках третьей главы проведена оптимизация параметров взаимодействия лазерного импульса средней интенсивности с плазмой и найдены достаточные условия для формирования сгустка ускоренных электронов. Предложен метод оптимизации, включающий быстрый параметрический поиск квазистатическим кодом и уточнение результатов PIC кодом [74].

В четвертой главе выяснены причины, из-за которых классическое квазистатическое приближение обеспечивает только качественное описание эффектов захвата.

Пятая глава посвящена обсуждению возможности удлинения области взаимодействия лазерного импульса и плазмы за счет применения металлических капилляров. Уточнена линейная теория распространения лазерного импульса в капилляре и рассмотрены особенности модового состава и затухания отдельных мод при параметрах, специфичных для лазерного кильватерного ускорения [71, 75].

Личный вклад: автор принимал активное участие в постановке задач, разработке применяемых численных кодов и построении аналитических моде-

лей, проводил анализ полученных результатов, а также участвовал в подготовке публикаций и докладов.

Глава 1. Распределение плотности газа в сверхзвуковой струе

Поскольку большой интерес представляют компактные системы, мы сосредоточимся на поиске минимальных параметров лазерного импульса для получения квази-моноэнергетического сгустка электронов из плазмы.

Зафиксируем параметры драйвера, ориентируясь на систему, разрабатываемую в Институте лазерной физики СО РАН в Новосибирске. Проектные параметры лазерной установки предполагают генерацию лазерного импульса с энергией 300 мДж, радиусом в перетяжке 10 мкм, длительностью 20 фс (ширина на полувысоте) и несущей длиной волны 810 нм.

Кроме параметров импульса, для ускорения также важны и параметры плазмы. Предварительные оценки показали, что требуется обеспечить плотность плазмы на уровне $10^{18} - 10^{19} \text{ см}^{-3}$ и протяженность около 1 мм для получения ускоренных частиц с энергией масштаба 100 МэВ [13]. В качестве мишени для импульса была предложена сверхзвуковая газовая струя как наиболее простой вариант. Интенсивности излучения достаточно для однократной ионизации газа и формирования однородной плазмы в широкой области.

Для получения струи было спроектировано сверхзвуковое сопло Лавалья. Тогда как лазерная система только разрабатывается, и мы опираемся на проектные параметры, то характеристики течения из изготовленных сопел требуют уточнения. В этой главе рассматривается методика измерения характеристик генерируемой газовой струи. Все экспериментальные результаты были получены сотрудниками ИЛФ СО РАН С.В. Автаевой, К.В. Губиным и В.И. Труновым. Автором был предложен и реализован алгоритм анализа экспериментальных данных [72].

1.1. Устойчивый алгоритм восстановления плотности газа

В кильватерных экспериментах в качестве инструментов для измерения мишени хорошо зарекомендовали себя интерференционные методы [14, 76–78]. Конфигурация измерений в данном случае соответствует двухлучевому интерферометру Маха-Цендера, в одном из плеч которого располагалась газовая струя (рисунок 1.1).

По искривлению интерференционной картины можно восстановить распределение индекса преломления, а следовательно и плотности в исследуемом объекте. Сложность заключается в относительно малом набеге фазы, вызванном струей, который составляет порядка 1 рад (рисунок 1.2). Для измерения таких объектов ранее был предложен метод, основанный на использовании модифицированного интерферометра Фабри-Перо [79]. В этом случае удается добиться большой чувствительности измерений к искажению оптической толщины на уровне $\lambda_d/600$, где λ_d — длина волны диагностического излучения. Недостатком является большее время интегрирования сигнала и более слож-

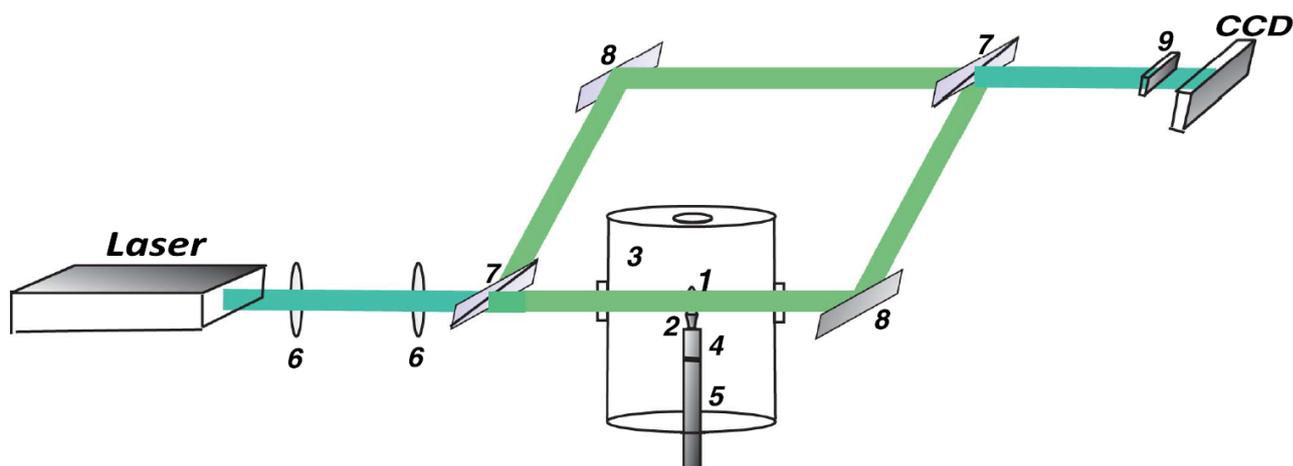


Рисунок 1.1 — Схема проведения интерференционных измерений: (1) сверхзвуковая струя; (2) сопло Лаваля; (3) вакуумная камера; (4) импульсный клапан; (5) запорный клапан; (6) линзы системы телескопа; (7) делитель пучка; (8) зеркала; (9) фильтр

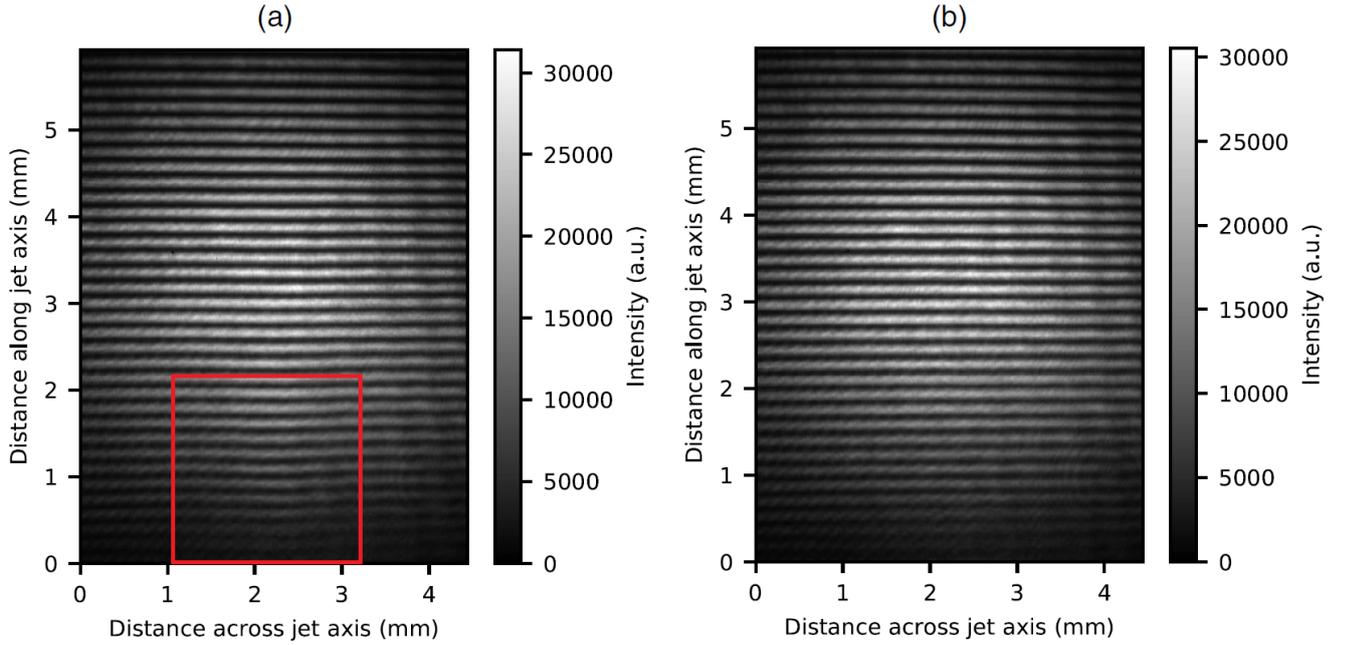


Рисунок 1.2 — Типичные интерферограммы (а) сверхзвуковой струи и (б) фона. Красным прямоугольником выделена область, где наблюдается набег фазы, близкий к 1 рад

ная схема измерений в сравнение с интерферометром Маха-Цендера. Поэтому была поставлена цель добиться максимальных результатов с более простой схемой измерений.

Для восстановления информации о распределении индекса преломления из интерференционной картины был выбран широко применяемый при подобных измерениях метод Фурье [80]. Для определенности, ось z направим вдоль газовой струи, а ось y — перпендикулярно. Распределение интенсивности интерференционной картины можно представить в виде

$$g(y, z) = p(y, z) + c(y, z)e^{2\pi i f_0 z} + \overline{c(y, z)}e^{-2\pi i f_0 z}, \quad (1.1)$$

где $p(y, z)$ — фоновая интенсивность, $c(y, z) = b(c, y)e^{i\Phi(x, y)}$, $b(x, y)$ — амплитуда модуляции интерференционной картины, $\Phi(x, y)$ — фазовый сдвиг, связанный с наличием газовой струи, а f_0 — частота интерференционных полос. Преобразование Фурье вдоль вертикальной оси приводит к выражению

$$G(y, f_z) = A(y, f_z) + C(y, f_z - f_0) + \overline{C(y, f_z + f_0)}, \quad (1.2)$$

которое представляет собой три локализованных пика возле частот 0 и $\pm f_0$ для каждого заданного значения y . Таким образом удается разделить три слагаемых из уравнения (1.1). Теперь можно использовать один из пиков с частотой $\pm f_0$, для получения информации о струе. Для этого необходимо домножить выражение (1.2) на оконную функцию, отличную от нуля только вблизи частоты f_0 , и сдвинуть получившиеся распределение на эту самую частоту. Получив выражение для $C(y, f_z)$ и выполнив обратное преобразование Фурье, мы получим слагаемое $c(y, z)$, где за фазовую часть отвечает только распределение плотности в газовой струе, которое можно получить из выражения

$$\Phi(y, z) = \arctan \frac{\Im[c(y, z)]}{\Re[c(y, z)]}. \quad (1.3)$$

Таким образом, мы получаем двумерное распределение фазы, которое является проекцией трехмерного распределения индекса преломления в камере. Для восстановления трехмерного распределения необходимо использовать какие-либо предположения. В данном случае естественно предположить аксиальную симметрию газовой струи относительно оси z . Тогда набор фазы Φ связан с распределением индекса преломления $N(r, z)$ через преобразование Абеля [81]:

$$\Phi(y, z) = \frac{4\pi}{\lambda_d} \int_y^{r_\infty} \frac{(N(r, z) - 1)r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr, \quad (1.4)$$

где r_∞ — некоторый достаточно большой радиус, на котором отсутствует влияние исследуемого объекта. В таких измерениях нельзя избежать рефракции, лучи диагностического пучка идут не строго параллельно в области струи, а немного отклоняются. При этом, как было показано в работе [82], правильная настройка финального фокуса интерферометра позволяет избежать перемешивания сигналов, приходящих с разных поперечных координат в плоскости формирования изображения. Там же было показано, что при измерении сверхзвуковых струй не слишком большой плотности фокусирующее действие исследуемого объекта является слабым. Поэтому, для простоты рассмотрения, можно считать, что лучи диагностического излучения не отклоняются от вакуумных траекторий. Для не слишком плотных газов и вдали от резонансных частот

индекс преломления можно выразить через плотность газа через соотношение Гладстона – Дейла [81, 83]:

$$N - 1 = \alpha_g n, \quad (1.5)$$

где n — плотность газа, а α_g — некоторая константа, которую можно вычислить, зная значение плотности и индекс преломления для каких-то условий. В нашем случае использовался Nd-YAG лазер с длины волны 532 нм. Для этой длины волны известно значение $N - 1$, равное $2.98 \cdot 10^{-4}$ при нормальных условиях (1.01325 бар, 273 К) [84], таким образом, $\alpha_g = 1.1 \cdot 10^{-35} \text{ см}^3$. Тогда набег фазы при проходе излучения через 1 мм азота с плотностью 10^{19} см^{-3} составит 1.3 рад.

Поскольку набег фазы предполагается малым, то относительные ошибки определения фазы могут оказаться значительными. Задача обращения преобразования Абеля является слабо обоснованной, что требует разработки устойчивого алгоритма для ее решения. Природа исследуемого объекта такова, что мы вправе предположить факторизацию распределения плотности газа в пространстве, $n(r, z) = n_1(z)n_2(r)$, что позволяет искать распределения плотности для каждого z независимо. Дополнительно предположим, что плотность в струе является некоторой монотонно спадающей функцией радиуса, что видно из предварительного моделирования истечения газа [81]. Для уменьшения влияния ошибок будем рассматривать некоторый ограниченный базис функций, по которому и будем раскладывать экспериментальные измерения. В качестве такого базиса выберем набор супергауссовых функций вида $\exp[-(r/\sigma_j)^i]$, тогда плотность можно представить в виде

$$n_2(r) \approx \sum_{i=2}^{M_1} \sum_{j=2}^{M_2} C_i^j \exp[-(r/\sigma_j)^i], \quad (1.6)$$

где C_i^j — константы разложения, а σ_j — пространственные размеры базисных функций. В данном случае M_1 ограничивает максимальную крутизну нарастания плотности в струе, которую можно будет разрешить при разложении по данному базису. В наиболее оптимистичном случае ожидается нарастание плотности не быстрее, чем за 100 мкм, значит, можно принять $M_1 = 30$. Набор σ_j

выбирается из предполагаемых размеров объекта, который можно оценить из характерных размеров распределения фазовой картины. Определим этот уровень через ширину на полувысоте этого распределения и обозначим за σ_g . Будем определять $\sigma_j = \sigma_g/2 \pm j\Delta h$, где Δh — размер пикселя камеры. Подставляя разложение искомой плотности (1.6) в разложение Абеля (1.4) и учитывая выражение (1.5) для фиксированного расстояния от сопла z_0 , получим

$$\begin{aligned}\Phi(y, z_0) &\approx \frac{4\pi k}{\lambda_d} \int_y^{r_\infty} n_1(z_0) \sum_{i,j} \frac{C_i^j \exp[-(r/\sigma_j)^i]}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr = \\ &= \frac{4\pi k}{\lambda_d} \sum_{i,j} n_1(z_0) C_i^j \int_y^{r_\infty} \frac{\exp[-(r/\sigma_j)^i]}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr = \frac{4\pi k}{\lambda_d} \sum_{i,j} n_1(z_0) C_i^j \tilde{\Phi}_i^j(y),\end{aligned}\quad (1.7)$$

где суммирование происходит по всем базисным функциям, $\tilde{\Phi}_i^j(y)$ — значение прямого преобразования Абеля от базисных функций. Используя метод наименьших квадратов с положительными коэффициентами, можно найти значения констант разложения C_i^j , умноженных на $n_1(z_0)$. Прделав эту операцию для каждого измеренного сечения, получим распределение плотности газа во всем пространстве.

Сравним результаты обработки тестового сигнала предложенным методом с результатами работы хорошо известных алгоритмов: стандартного обращения Абеля [85] и алгоритма Хансена-Ло [86], реализованных в модуле PyAbel [87]. В качестве тестовой задачи рассмотрим гипергауссово распределение плотности с резким ее нарастанием и продолжительной областью постоянного значения. Вычислялось прямое преобразование Абеля от модельного распределения плотности и к получившемуся распределению фазы добавлялась шумовая составляющая, распределенная по нормальному закону с различной амплитудой. Проводилось усреднение среднеквадратичной ошибки восстановления по выборке из 1000 реализаций распределения шума для каждого значения амплитуды.

Отметим, что необходимо сглаживать тестовый сигнал для получения разумных результатов с помощью классических алгоритмов, поскольку они полностью сохраняют высокочастотные компоненты сигнала. В нашем случае мы

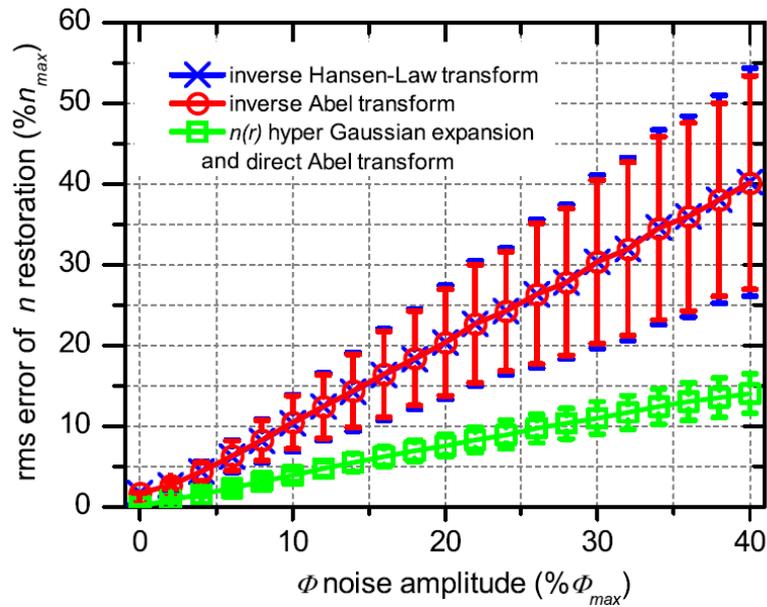


Рисунок 1.3 — Среднеквадратичная ошибка восстановления в зависимости от уровня шума в тестовом сигнале

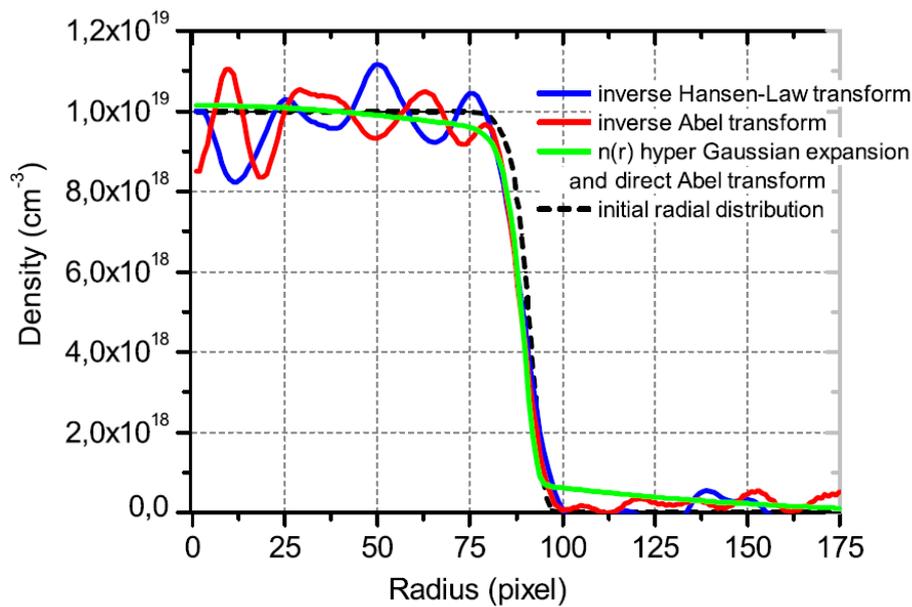


Рисунок 1.4 — Типичная картина восстановленных сигналов для разных алгоритмов при уровне шума 10% от амплитуды сигнала

использовали фильтр Баттерворта третьего порядка, в то время как при разложении по гладким функциям дополнительной фильтрации не требуется.

Для классических алгоритмов наблюдается прямая трансляция ошибок измерения на восстановленный сигнал даже с учетом сглаживания, в то время как предложенный алгоритм отлично справляется с возложенной на него задачей их подавления (рисунок 1.3). Для уменьшения этих ошибок для прямых

методов необходимо применять более сильную фильтрацию, чего хотелось бы избежать для уменьшения влияния обработки на восстановленный градиент нарастания плотности газа на краях струи. С этой точки зрения разложение по гладким функциям также не уступает традиционным методам решения обратной задачи (рисунок 1.4).

1.2. Анализ экспериментальных данных

Экспериментальные работы приведены для полноты изложения, автор не принимал в них участия. Роль автора заключалась в консультации по использованию предложенного алгоритма и адаптации его реализации для исследования возникающих в ходе работы вопросов.

С помощью разработанного алгоритма проводилась обработка измерений параметров сверхзвуковой струи, генерируемой разработанным соплом. Внутренний диаметр сопла Лавалья составляет 350 мкм, выходной диаметр 1.5 мм и углом раствора 14 градусов. В качестве рабочего газа использовался азот. Вакуумная камера была откачена до 10^{-3} мбар. Для напуска газа в сопло использовался импульсный клапан с временем открытия 1.7 мс и максимальным давлением 9 бар. В качестве источника диагностического излучения использовался Nd-YAG лазер с длиной волны 532 нм, луч которого расширялся с помощью телескопа до 7 мм. Интерференционная картина регистрировалась ПЗС камерой с размером пикселя 4.65 мкм. Время измерений составляло 0.1 мс. Пример усредненного распределения фазы, восстановленного из интерференционной картины, представлен на рисунке 1.5 (а). При обработке сигнала также было решено вычитать фоновое распределение фазы для уменьшения ошибок. Однако полностью от них избавиться не удалось, и они составляли 5–7 % от измеренной величины фазы (рисунок 1.5 (b)). Измерение производились через 6 мс после подачи сигнала на открытие запорного клапана.

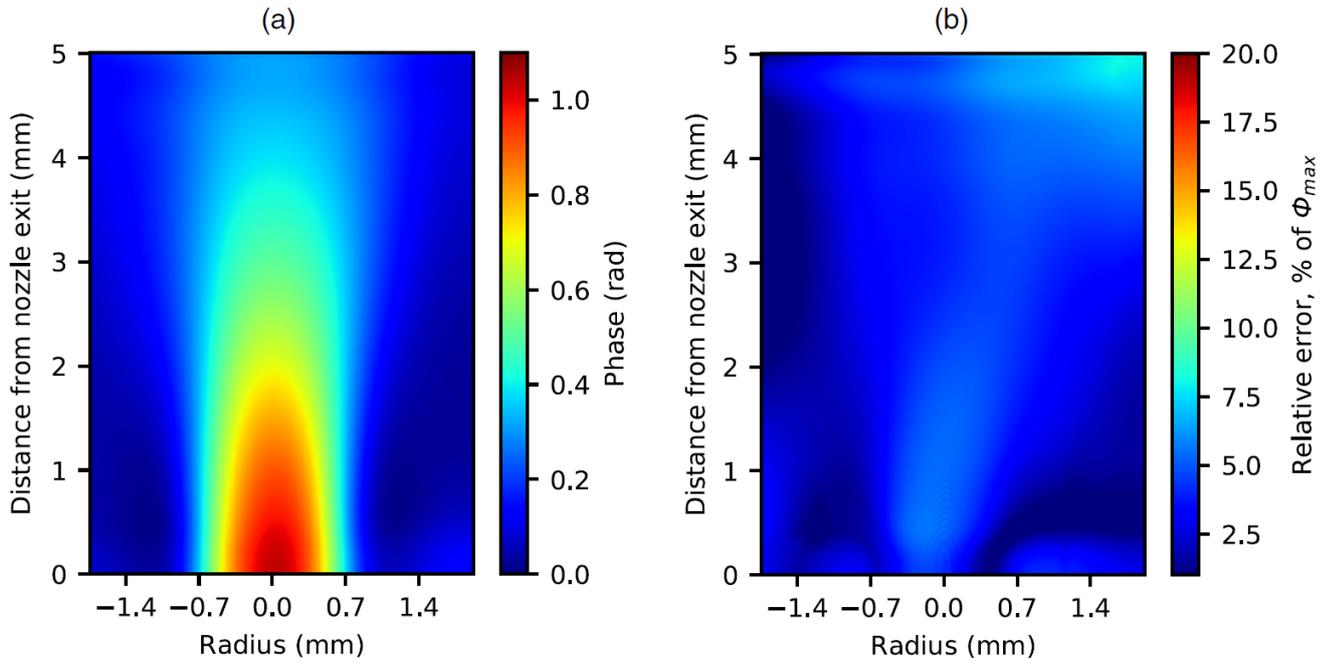


Рисунок 1.5 — (a) Распределение фазы, усредненное по пяти измерениям.
(b) Относительная ошибка

Восстановленное радиальное распределение плотности для различных расстояний от выхода из сопла представлено на рисунке 1.6. Максимальная плотность газа достигает $5.5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, ее изменения не превышают 10% для радиусов, меньших 0.4 мм, и такая картина наблюдается вплоть до расстояния 1 мм от выхода из сопла. Положительные и отрицательные координаты соответствуют плотностям, восстановленным из левой и правой части измеренной фазовой картины.

Сравнение профилей плотности с базисными функциями показывает, что основное поведение центральной части приближено к функции $\exp(-(r/\sigma_j)^3)$, а спад происходит как $\exp(-(r/r_g)^4)$ (рисунок 1.7), где σ_j — характерный размер струи. Таким образом, наблюдается плато плотности протяженностью ~ 0.8 мм, где изменения плотности лежат в пределах 10%. Получаемые распределения однозначно говорят о сверхзвуковом истечении газа из сопла. Параметры течения близки к ожидаемым.

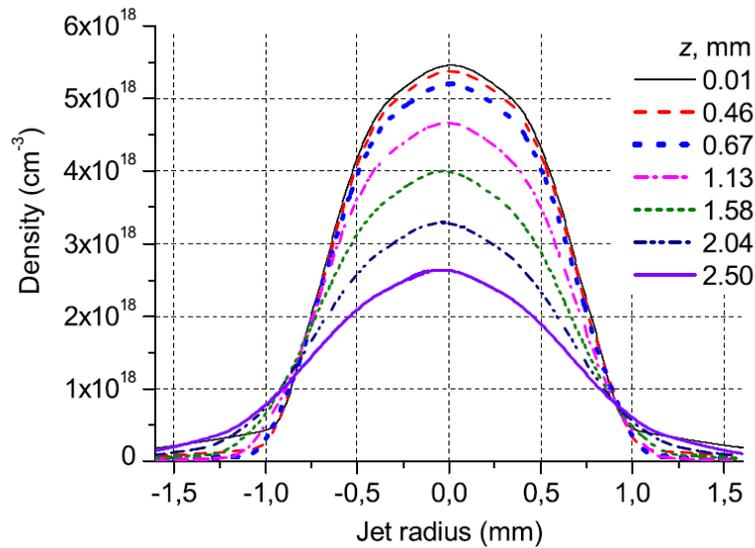


Рисунок 1.6 — Радиальное распределение плотности в зависимости от высоты z над соплом

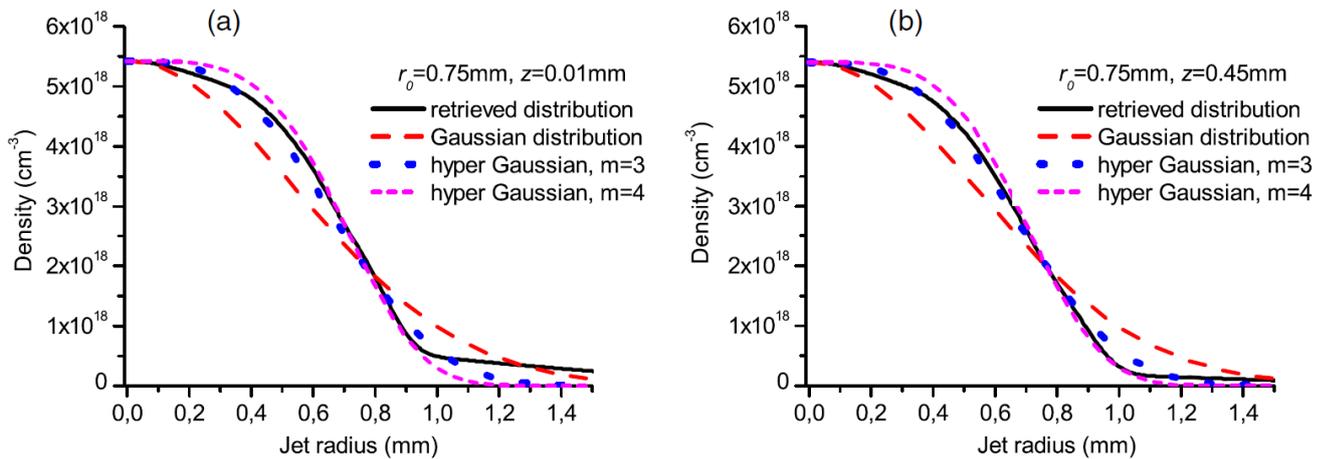


Рисунок 1.7 — Радиальное распределение плотности в сравнении с первыми базисными функциями на расстоянии (а) 0.01 мм и (б) 0.45 мм над соплом

1.3. Основные результаты

В этой главе разработан алгоритм, который позволяет устойчиво восстанавливать распределение плотности газовой струи в условиях больших относительных ошибок. Предложенный алгоритм успешно применяется для измерения распределения плотности сверхзвуковой газовой струи в ИЛФ СО РАН. Результаты опубликованы в статье [72].

Глава 2. Моделирование кильватерного ускорения

Прямое экспериментальное измерение процессов, происходящих при кильватерном ускорении, сильно затруднено из-за малых масштабов взаимодействия (~ 10 мкм) и времени их протекания (~ 100 фс). Сложность этого взаимодействия не позволяет до сих пор составить полную и детальную модель этого явления. По этим причинам крайне востребовано численное моделирование. Широкое распространение получил метод частиц в ячейках (particles in cell, PIC) [16].

При таком подходе на интересующую нас область накладывается сетка, в узлах которой вычисляются электрические и магнитные поля. Реальным частицам плазмы сопоставляются макрочастицы, которые являются их объединением. Затем поочередно происходит движение макрочастиц полями, вычисленными в узлах сетки, вычисление макропараметров плазмы (зарядовой плотности и токов) в узлах сетки по распределению макрочастиц и вычисление изменения электромагнитных полей, вызванного движением плазменных частиц.

При данном подходе можно напрямую решать полные уравнения движения заряженных частиц в совокупности с уравнениями Максвелла, либо использовать упрощающие предположения.

2.1. Квазистатическое приближение

Одной из популярных упрощенных моделей является так называемое квазистатическое приближение (QSA) [21, 22]. Оно было реализовано в ряде кодов [23–27], иногда в сочетании с другими упрощениями, такими как уравнение огибающей для лазерного импульса [22, 28–30] или описание движения плазмы жидкостной моделью [32–34].

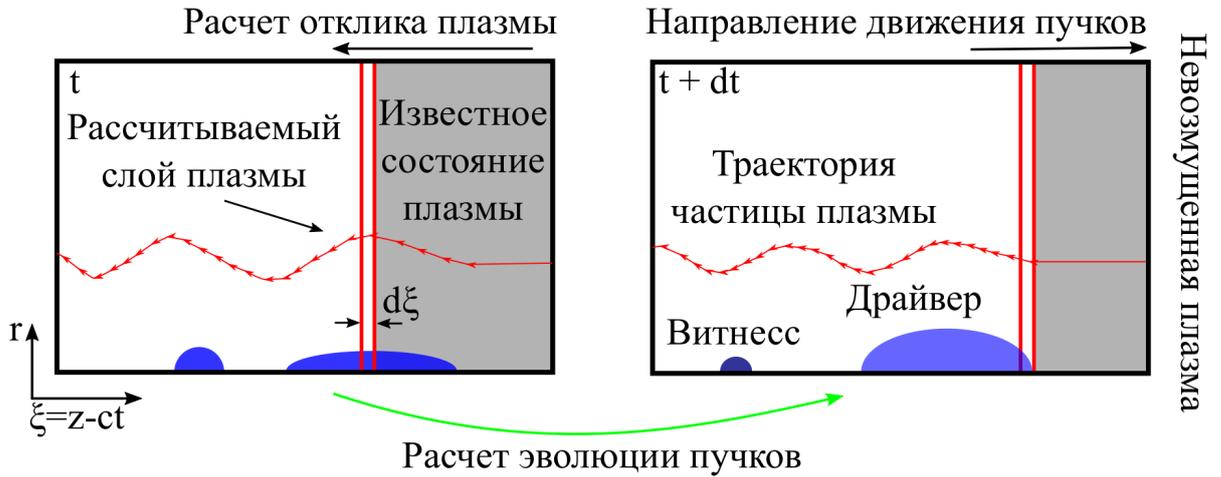


Рисунок 2.1 — Схема вычислительного цикла в квазистатическом приближении

Квазистатическое приближение базируется на существенной разнице времен эволюции драйвера и плазмы. Можно считать, что структура плазменной волны определяется расстоянием от головы пучка ξ и состоянием пучка при пролете через определенную координату пространства. Тогда достаточно вычислить отклик только для одного слоя плазмы. Некоторое количество соседних продольных слоев плазмы заменяются вычисленным, пока пучки заметно не изменятся. Посчитанные поля используются для эволюции драйвера и витнесса на элементарном шаге их эволюции, и цикл повторяется (рисунок 2.1). Такой подход позволяет значительно ускорить вычисления за счет использования больших шагов эволюции пучка. Квазистатическое приближение является точным, если пучки неизменной формы распространяются в продольно однородной плазме. Тогда в задаче появляется дополнительная симметрия: идентичные частицы плазмы, изначально находящиеся в одном поперечном положении \vec{r}_\perp , но при разных z , копируют движение друг друга с некоторой временной задержкой. Эта симметрия приводит к еще одному из преимуществ QSA: размерность задачи уменьшается на единицу при вычислении отклика плазмы. Одна пространственная координата (z) исчезает, сливаясь со временем t во времяподобную координату ξ . Уменьшение размерности позволяет использовать гораздо меньшее число “макрочастиц” для расчета отклика плазмы. Эти “макрочастицы” плазмы не являются образами совокупности реальных частиц, как

в принято в кодах общего назначения, а представляют собой “струи частиц”, объединяющие реальные частицы, которые начинают свое движение из заданного поперечного положения с заданным начальным импульсом, но с разными z . Эта особенность также способствует снижению требований на используемые вычислительные ресурсы. В случае медленного изменения формы пучков квазистатическое приближение хотя и становится не абсолютно точным, но все же остается применимым.

Еще одним преимуществом квазистатической модели является ее эффективность при моделировании долговременной динамики плазменной волны. В кодах общего назначения для расчета состояния плазмы в следующий момент времени необходима информация о текущем состоянии соседних слоев плазмы. Поэтому моделировать временную эволюцию можно только в длинных областях, охватывающих несколько периодов кильватерной волны λ_p , чтобы минимизировать влияние продольных границ. В квазистатической модели состояние соседних слоев не требуется для вычисления эволюции плазмы по ξ . Модель предполагает, что эти слои копируют рассматриваемый плазменный слой с некоторой временной задержкой или опережением. В результате выигрыш в скорости в несколько раз превышает отношение λ_p/τ_d , где τ_d — характерное время эволюции драйвера. Благодаря этому преимуществу QSA-коды удерживают рекорд по моделированию долговременной эволюции плазменной волны [88, 89].

Введем цилиндрическую систему координат в сопутствующем окне, движущемся со скоростью света c в направлении распространения драйвера. Пусть r — радиальная координата, z — продольная координата в лабораторной системе отсчета, ξ — координата вдоль счетного окна, и t — время. При описании состояния плазмы будем считать все ее параметры зависящими от z и t только в комбинации $\xi = z - ct$, тогда для всех уравнений верно

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (2.1)$$

Уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r &= 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_r}{\partial \xi}, & \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r &= -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_\varphi}{\partial \xi}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (E_r - B_\varphi) &= 4\pi \rho - \frac{4\pi}{c} j_z, & & \\ \frac{\partial E_z}{\partial r} &= \frac{4\pi}{c} j_r, & \frac{\partial B_z}{\partial r} &= -\frac{4\pi}{c} j_\varphi, & E_\varphi &= -B_r, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где \vec{E} и \vec{B} — электрическое и магнитное поля, ρ и \vec{j} — плотности заряда и тока.

Граничные условия для полей

$$E_r(0) = B_r(0) = B_\varphi(0) = E_z(r_{\max}) = B_r(r_{\max}) = B_z = 0, \quad (2.3)$$

где r_{\max} — граница расчетной области.

Уравнения движения плазменных частиц принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dr_p}{d\xi} &= \frac{v_{p,z}}{v_{p,z} - c}, & \vec{v}_p &= \frac{\vec{p}_p}{\sqrt{M_p^2 + p_p^2}}, \\ \frac{d\vec{p}_p}{d\xi} &= \frac{d\vec{p}_p}{dt} \frac{dt}{d\xi} = \frac{q_p}{v_{p,z} - c} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_p \times \vec{B}] \right) + F_L, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где \vec{p}_p и \vec{v}_p — импульс и скорость макрочастицы плазмы, M_p и q_p — ее масса и заряд, r_p — поперечная координата, а F_L — выражает силу действия лазера на частицы.

Для описания движения частиц пучка используются полные уравнения движения, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dr_b}{dt} &= v_{b,r}, & \frac{d\xi_b}{dt} &= v_{b,z} - c, \\ \frac{d\vec{p}_b}{dt} &= q_b \vec{E} + \frac{q_b}{c} [\vec{v}_b \times \vec{B}], & \vec{v}_b &= \frac{\vec{p}_b}{\sqrt{m_b^2 + p_b^2}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где \vec{p}_b и \vec{v}_b — импульс и скорость макрочастицы пучка, m_b и q_b — ее масса и заряд, а r_b и ξ_b — координаты в счетном окне. При этом предполагаем, что частицы пучка не находятся в области лазерного импульса.

Описывать лазерный импульс будем с помощью огибающей вектор-потенциала A [22, 29, 30]:

$$\begin{aligned}\hat{A}_\perp(\xi, r, t) &= A(\xi, r, t) \exp(ik_0\xi) + A^*(\xi, r, t) \exp(-ik_0\xi), \\ \left[\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(ik_0 + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] A &= \frac{4\pi e^2 \rho}{m_e c \bar{\gamma}} A, \\ \bar{\gamma} &= \sqrt{1 + \frac{1}{m_e^2 c^2} \left(|p_{pp}|^2 + 2 \left| \frac{e}{c} A \right|^2 \right)},\end{aligned}\quad (2.6)$$

где \hat{A}_\perp — поперечная составляющая вектор-потенциала, A^* — комплексное сопряжение, $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны лазерного излучения, e — элементарный заряд, m_e — масса электрона, p_{pp} — средний импульс плазменных электронов в рассматриваемой точке пространства, а горизонтальная черта над величиной означает усреднение по длине волны лазера. Электрическое и магнитное поля лазерного импульса выражается в следующем виде:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{\mathcal{A}}, \quad (2.7)$$

где $\vec{\mathcal{A}} = (\hat{A}_\perp, \hat{A}_z)$ — полный вектор-потенциал. В моделировании начальная интенсивность лазерного импульса задается в форме

$$\begin{aligned}A^2 &= \left(\frac{a_0 e}{\sqrt{2} m_e c^2} \right)^2 \Lambda^2(r) \left[1 + \cos \left(\frac{\sqrt{\pi}(\xi - \xi_c)}{c\tau_0} \right) \right], \\ \Lambda(r) &= \frac{1}{(1 + \delta z / \hat{R}_l)} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{k_0 r^2}{\hat{R}_l + \delta z} i \right),\end{aligned}\quad (2.8)$$

где a_0 — безразмерный максимум векторного потенциала, r_0 и τ_0 — радиус и длительность лазерного импульса в перетяжке, ξ_c — положение центра импульса в окне моделирования, $\delta z = z - z_f$, z_f — координата фокусировки импульса, $\hat{R}_l = -iR_l$, $R_l = k_0 r_0^2 / 2$ — длина Рэлея. Выражение для Λ описывает радиальное расплывание гауссовского импульса в вакууме вблизи точки перетяжки [90] и при $z = z_f$ сводится к выражению

$$\Lambda(r) = e^{-2r^2/r_0^2}. \quad (2.9)$$

Действие лазера на плазменные электроны выражается через пондеромоторную силу

$$\vec{F}_L = -\frac{e^2}{2m_e c^2 \bar{\gamma}} \nabla |A|^2. \quad (2.10)$$

Такое описание справедливо для частиц с малой продольной скоростью, когда они не могут долгое время находиться в постоянной фазе лазерной волны. Однако описание действия лазерного импульса на релятивистские частицы требует решения полных уравнений Максвелла. Поскольку для интересующих нас параметров лазерный импульс пространственно не пересекается с быстрыми электронами, мы не будем вводить это взаимодействие в нашу модель.

2.2. Учет быстрых электронов плазмы

С формальной точки зрения захват плазменной частицы кильватерной волной соответствует

$$\xi \approx \text{const}, \quad z \neq \text{const}. \quad (2.11)$$

В классическом квазистатическом приближении для каждого плазменного слоя полагается $z = \text{const}$, что абсолютно исключает явление захвата плазменных частиц из рассмотрения. Однако во многих случаях оказывается, что доля захваченных частиц мала, и ее учет можно включить в численную модель.

2.2.1. Моделирование захвата с пробными электронами

Рассмотрим отличия траекторий частиц, предсказываемых с помощью плазменной модели (2.4) и модели частиц пучка (2.5). Для этого рассмотрим взаимодействие модельного лазерного импульса с $a_0 = 3.5$, $\tau_0 = \omega_p^{-1}$, $r_0 = 1.9k_p^{-1}$ с однородной плазмой (рисунок 2.2), где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$ — плазменная ча-

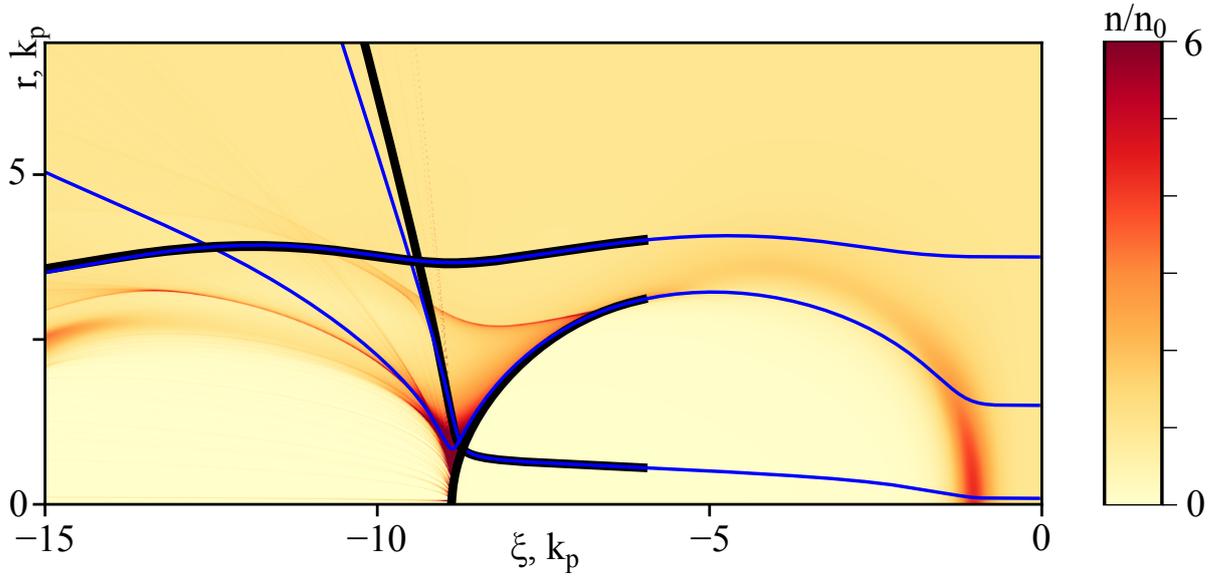


Рисунок 2.2 — Сравнение траекторий частиц, вычисленных в квазистатическом приближении (голубые линии) и без такового (широкие черные линии). Цветом показано распределение плотности электронов плазмы стота, $k_p = \omega_p/c$, n_0 — плотность электронов плазмы. При таких параметрах захват электронов должен происходить. Отклик плазмы будем вычислять в квазистатическом приближении, и в этих полях сравнивать движение пробных частиц для разных приближений. Для большинства частиц различий в траекториях нет. Существуют захватываемые волной частицы, для которых различия оказываются критическими. Однако эти различия наблюдаются за точкой опрокидывания волны.

В первом приближении можно пренебречь влиянием захваченных частиц на динамику кильватерной волны. Будем создавать распределение пробных электронов вблизи точки опрокидывания, копирующее распределение макрочастиц плазмы, и вычислять их движение по модели пучка (2.5). Вычисляя движение таких частиц на каждом шаге эволюции драйвера, можно оценить характеристики сформировавшегося пучка. Для оценки корректности этого метода необходимо его сравнение с уже известными результатами моделирования. Рассмотрим взаимодействие лазерного импульса с $\lambda = 810$ нм, $a_0 = 4$, $\tau_0 = 17$ фс и $r_0 = 28$ мкм с однородной плазмой плотности $n_0 = 1.5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, которое проанализировано в работе [91] с помощью кода OSIRIS. В этой работе использо-

влась трехмерная версия кода с поперечным шагом сетки $dx = dy = 0.116k_p^{-1}$ и продольным шагом $dz = 0.0059k_p^{-1}$ с двумя электронами на ячейку. В нашем случае нет необходимости разрешать лазерную длину волны для вычисления отклика плазмы, поэтому использовались следующие параметры моделирования: $dz = k_p^{-1}$, $dr = 0.05k_p^{-1}$, $d\xi = 0.02k_p^{-1}$ с пятью электронами на поперечный интервал dr .

В начале взаимодействия видно хорошее согласие обоих кодов (рисунок 2.3 (а)), но через некоторое время захваченные частицы начинают оказывать сильное влияние на структуру волны (рисунок 2.3 (b)). Тем не менее, можно оценить “корректность” формирования витнесса в квазистатическом приближении на этапе, когда различия еще малы. Структура первого периода волны в наименьшей степени подвержена влиянию захваченных электронов. Будем смотреть на энергетический спектр сформировавшегося в ней пучка. Расчеты в квазистатическом приближении необходимо остановить, когда пучок уже сформирован, но влияние его заряда еще не успело значительно модифицировать его поведение. Строго критерия этого перехода выработать не удалось, и моделиро-

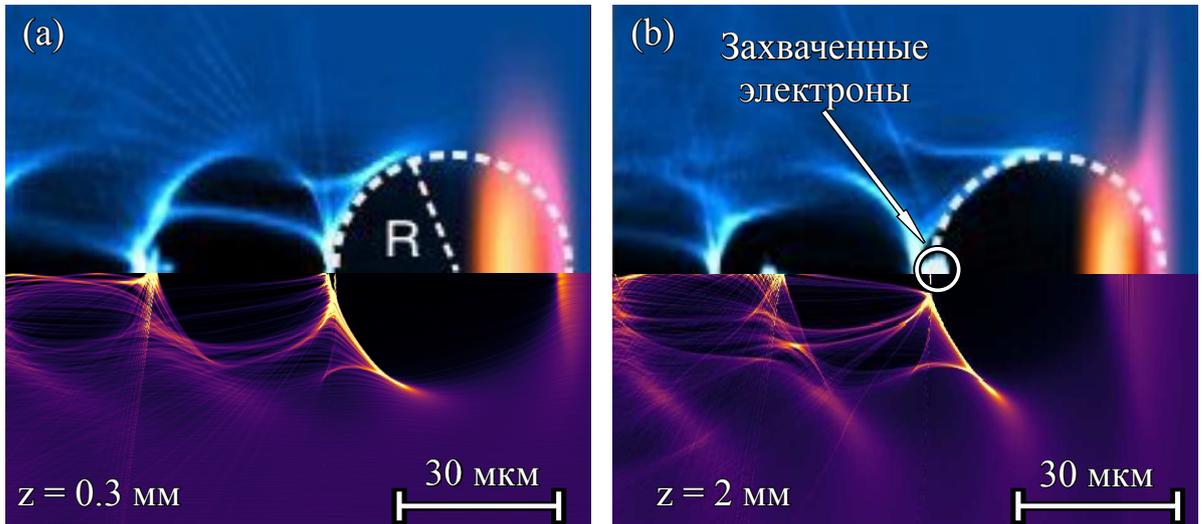


Рисунок 2.3 — В верхней части изображена зарядовая плотность электронов плазмы, полученная с помощью OSIRIS [91], в нижней части — с помощью LCODE. Структура плазменной волны приведена после прохождения лазерным импульсом расстояния 0.3 мм (а) и 2 мм (b). В верхней части также показан лазерный импульс

вание в квазистатическом приближении производилось для длины взаимодействия в 1 мм. В этом случае наблюдается четкое формирование моноэнергетического пучка в первой каверне (рисунок 2.4 (а)). Сравнивая его со спектром витнеса после 7.5 мм взаимодействия, рассчитанного с помощью OSIRIS (рисунок 2.4 (b)), пик с наибольшей энергией, отметим схожесть их формы, проявляющуюся в резком уменьшении числа частиц с малыми энергиями и наличии продолжительного хвоста высокоэнергичных частиц. Отношение средних энергий (224 МэВ против 1.5 ГэВ) практически совпадает с отношением рассмотренных длин взаимодействия (1 мм и 7.5 мм). Эти факты говорят о том, что структура волны оказывается одинаковой в обоих случаях, и электроны захватываются приблизительно в одинаковые фазы волны. Если говорить о нормализованном эмиттансе пучка ϵ_N , то наш подход предсказывает более качественный пучок с $\epsilon_N = 7.5$ мм мрад, против $\epsilon_N = 45.5$ мм мрад, предсказываемого кодом OSIRIS. Это различие может быть вызвано множеством факторов, от истощения лазерного импульса и ухудшения его “качества” при длительном распространении в кильватерной волне с неоптимальными параметрами до численных шумов. Его природу установить не удалось.

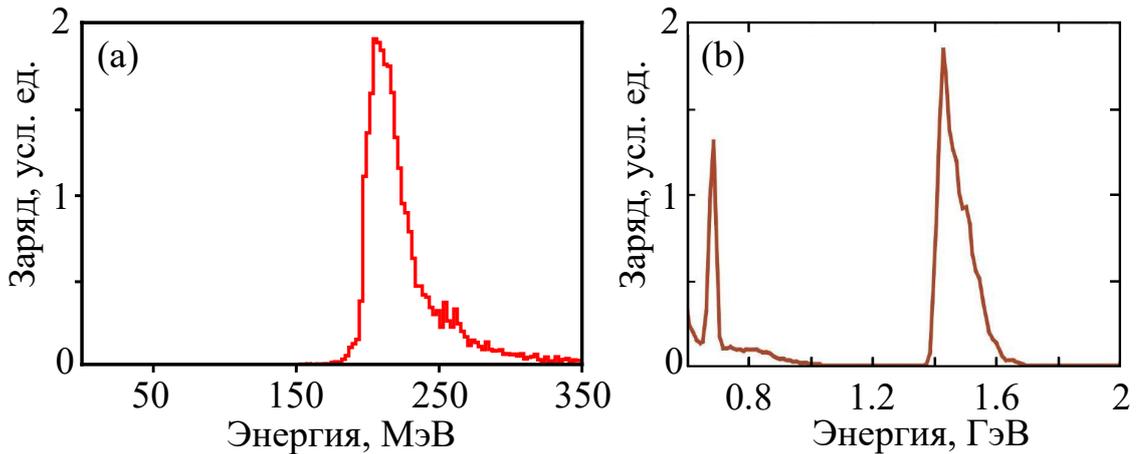


Рисунок 2.4 — Энергетические спектры пучков: (а) моделирование 1 мм плазмы с помощью LCODE; (b) моделирование 7.5 мм плазмы с помощью OSIRIS [91]

2.2.2. Учет влияния захваченных электронов на волну

Чтобы квазистатический код точно воспроизводил результаты PIC кодов, необходимо ввести заряд захватываемых частиц плазмы. Здесь возникает сложность трактовки макрочастиц плазмы. Если в традиционном PIC коде макрочастица олицетворяет собой локализованную в пространстве группу реальных электронов, то в квазистатическом подходе такую аналогию можно провести только для поперечного положения этой группы. Продольное положение этих частиц находится где-то между двумя поперечными сечениями плазмы, для которых вычисляется отклик на драйвер. Будем считать, что происходит захват сразу всех частиц плазмы, имеющих одинаковое начальное поперечное положение и расположенных между рассматриваемыми сечениями плазмы. Тогда заряд захватываемой макрочастицы можно записать через плотность плазмы в виде

$$q_{tr} = -2\pi r dr \frac{en_0(r_{in})}{N_p} dz, \quad (2.12)$$

где dz — шаг эволюции драйвера, r_{in} — начальное радиальное положение частицы, N_p — число макрочастиц в ячейке (в радиальном интервале dr).

Существует неопределенность, в какой момент вводить пробные частицы пучка и в какой момент наделять их зарядом. Появление заряженного “слоя” частиц, дублирующего состояние плазмы на некотором ξ , не соответствует физической картине явления, поэтому требуется ограничить количество частиц, которые будут рассматриваться как захваченные. В качестве такого критерия можно рассматривать продольное смещение частиц плазмы. Квазистатическая модель движения (2.4) не включает вычисление продольной координаты для макрочастиц, однако можно найти продольное смещение частицы относительно ее начального положения

$$\delta z_p = \int_0^\xi \frac{v_{p,z} d\xi}{c - v_{p,z}}, \quad (2.13)$$

где $d\xi/(c - v_{p,z})$ заменяет в таком рассмотрении приращение времени. Разумно сравнивать δz_p с шагом эволюции драйвера dz . Для быстрых частиц может быть выполнено условие $\delta z_p > dz$. Такая частица преодолела расстояние до следующего сечения плазмы, в котором будет вычисляться эволюция драйвера. В этом случае макрочастица плазмы “удаляется” из текущего расчетного окна и будет рассматриваться на следующем шаге в соответствующем положении относительно драйвера. Если окажется, что частица не должна быть захвачена, то она будет смещаться по окну моделирования назад, пока не покинет расчетную область. В противоположном случае она наберет достаточно энергии, чтобы следовать за драйвером продолжительное расстояние и ускоряться. При рассмотрении жесткого драйвера, распространяющегося через однородную плазму, такие частицы обязательно перейдут на место аналогичных частиц со следующего шага. В эволюционирующей системе на двух соседних шагах полностью идентичных частиц не окажется, и возможно естественное выделение фракции захваченных частиц.

При реализации этого подхода развиваются сильные численные неустойчивости, преодолеть которые к настоящему времени не удалось. Типичная картина плотности плазмы при развале решения представлена на рисунке 2.5.

Численные неустойчивости возрастают из-за “удаления” частиц из рассчитываемого слоя плазмы. Такое действие приводит к небольшому увеличению электрического поля, которое ускоряет оставшиеся макрочастицы, приближая их к порогу смены модели вычислений. Получается своего рода лавинообразный процесс, который пришедшие с предыдущего шага электроны не в силах остановить, поскольку приходят в немного отличающиеся положения в окне моделирования.

Существует другой подход к моделированию захвата плазменных электронов в квазистатическом приближении [35]. Он отличается критериями перевода частиц плазмы в захваченные. Очевидно, что захваченные частицы должны иметь значительную продольную скорость, которую в одномерной теории даже

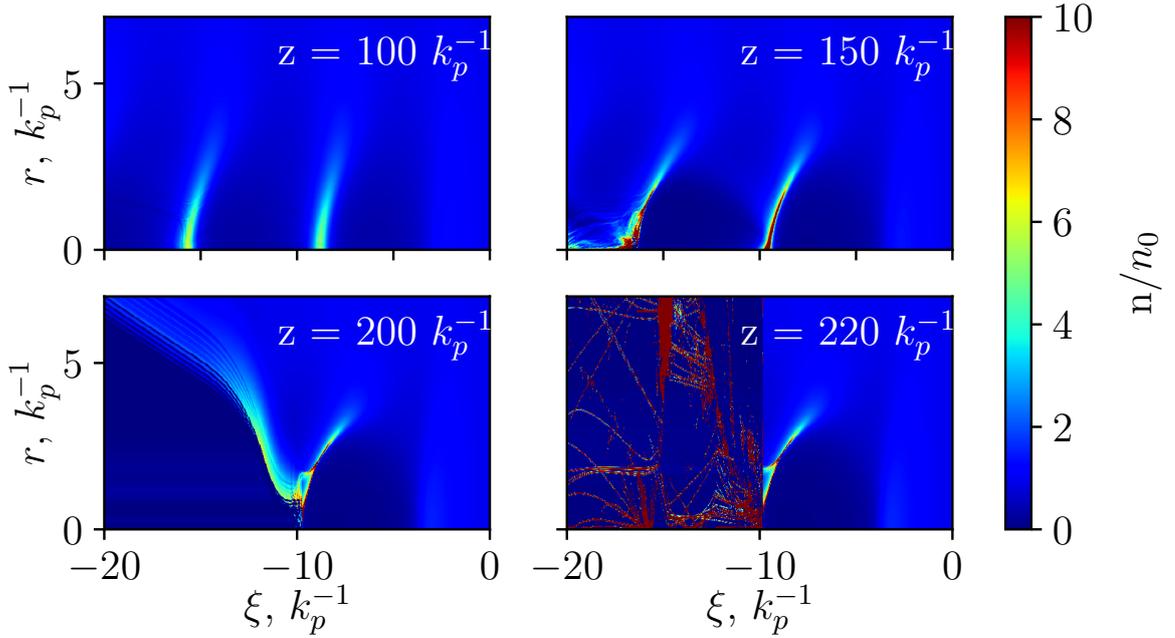


Рисунок 2.5 — Нарастание численной неустойчивости по мере фокусировки лазерного излучения и увеличения количества быстрых электронов

можно определить [10]. Для возможности аналитического решения рассматривается движение пробных частиц, имеющих некоторую начальную скорость, в одномерной кильватерной волне с жестким драйвером. Тогда можно вычислить сепаратрисы, разделяющие сорта частиц. Таким образом, существует пороговое значение кинетической энергии частицы, ниже которой захват точно не будет происходить.

Исследование влияния этой границы на формирующийся в оригинальной работе [35] пучок показало, что граница перехода находится при весьма малых продольных скоростях. В этом случае требуется ввести дополнительный критерий, близость захватываемых электронов к оси (см. также рисунок 2.2), для обеспечения лучшей устойчивости кода [35]. Мы будем считать плазменную частицу захваченной, если для нее выполнены следующие критерии:

1. $\gamma_p > 1.2$
2. $r_p < 0.15 k_p^{-1}$

где γ_p — релятивистский фактор рассматриваемого плазменного электрона.

Отметим, что такой подход также не идеальный. В рассматриваемом исследовании [35] проводится сравнение с PIC кодом общего назначения OSIRIS

на примере работы [91], описанное в начале этой главы. Однако в вычислениях с предлагаемой модернизацией квазистатического приближения наблюдается грубое согласие захвата только в первую каверну, для захвата же во вторую каверну такого согласия нет (пик более низкой энергии на рисунке 2.4 (b)). Также приводится сравнение распределения плотности плазмы в кильватерной волне, но только на начальном этапе взаимодействия. Структура кильватерной волны для рассматриваемых параметров, предсказываемая кодом OSIRIS, воспроизводится кодами с квазистатическим приближением без каких-либо модификаций (рисунок 2.3 (a)), что косвенно свидетельствует о наличии проблем с влиянием пространственного заряда в предложенной модели [35]. Однако как будет показано в главе 3, такой подход все еще позволяет определить наиболее благоприятные условия взаимодействия для генерации ускоренных частиц.

Кратко опишем предпринятые попытки улучшения, которые не привели к принципиальным изменениям характера поведения кода. Шумы, приводящие к неустойчивости кода, возникают из-за “удаления” макрочастицы из ансамбля плазменных электронов. Чтобы этого избежать, можно “переносить” частицу плазмы на следующий шаг по z , при этом оставив ее в текущем слое и пометив как “захваченную”. В этом случае связанный с ней заряд создает чрезмерное возмущение уже на новом шаге по z , поскольку для нее не освободится вакантное место симметричной плазменной частицей. Была надежда, что такое влияние получится достаточно согласованным, чтобы обеспечить захват правильного количества заряда. К сожалению, мы либо не видели кардинальных отличий, либо развивались неустойчивости, описанные ранее.

Другая идея состояла в использовании пробных частиц. Подходящие под критерии захвата электроны плазмы дублировались, и некоторое время их влияние на волну не учитывалось. Такие частицы наделялись зарядом при достижении пороговой энергии порядка 10 МэВ (проверялись различные значения порога). В этом случае лавинообразные неустойчивости происходили с этими пробными частицами, и в волне образовывался нереалистично большой заряд.

Было предположение, что использование модели пучка (уравнения (2.5)) с большими шагами эволюции слабо подходит для описания частиц с малыми энергиями. Очевидный путь борьбы с этими — уменьшение шага расчета dz для таких частиц, не привел к улучшениям. Также был опробован способ вычисления их движения с помощью плазменной модели (уравнения (2.4)), но при этом дополнительно вычислялось их продольное смещение (уравнение (2.13)). Тогда, при выполнении условия $\delta z_p > dz$, макрочастица “удалялась” из рассматриваемого сечения плазмы и “переносилась” в следующее сечение. Но в новом сечении ее движение по-прежнему рассматривалась в рамках квазистатической модели движения плазменных частиц вплоть до набора скорости, сопоставимой со скоростью драйвера. Оказалось, что захватываемые частицы быстро набирают энергию, и такой подход не приводит к улучшениям.

Для уменьшения возникающих шумов, предлагалось “дробить” быстрые частицы плазмы на более мелкие. В этом случае единичное возмущение оказывается меньше, но численная неустойчивость полностью не устраняется. Также изменялись критерии захвата, учитывался поперечный импульс и его направление, сравнивались характеристики частицы не с заранее заданными критериями перехода, а с состоянием соседних частиц плазмы. Описанные методы применялись как по отдельности, так и в различных комбинациях. Это породило большое количество вариантов, некоторые из которых были весьма устойчивы. Несмотря на это, не удалось выделить какой-либо алгоритм, значительно превосходящий по точности остальные. Поэтому для дальнейшего исследования остановились на уже известном подходе из работы [35], обращая особое внимание на достоверность его предсказаний.

2.3. Основные результаты

В этой главе рассмотрена принципиальная возможность учета захвата плазменных электронов при моделировании кильватерного ускорения в квазистатическом приближении. Описаны несколько подходов к модификации квазистатического приближения для исследования этого явления. Все подходы реализованы в квазистатическом коде LCODE. Выбран наиболее подходящий для оптимизации взаимодействия плазмы с лазерным импульсом. Результаты обсуждалась в публикации [73].

Глава 3. Оптимизация параметров ускорения в газовой струе

Имея инструмент для быстрого сканирования различных параметров взаимодействия, можно оптимизировать захват плазменных электронов в широком диапазоне параметров. Основные характеристики исследуемой системы приведены в таблице 1.

В качестве изменяемых параметров выберем плотность плазмы и точку фокусировки лазерного излучения, поскольку их настройка не вносит радикальных изменений в лазерную установку. Как обсуждалось в главе 2, с помощью реализованной методики можно ожидать лишь качественных результатов. Поэтому использование измеренного профиля газовой струи (глава 2) будет излишним, ограничимся знаниями о максимальной доступной плотности и характерном размере струи. В моделировании будем использовать однородную неогра-

Таблица 1 — Параметры лазерного импульса и плазмы

Параметр	Значение
Плотность плазмы, n_0	$< 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$
Длина плазмы, L_p ,	1 мм
Масса иона плазмы,	∞
Начальная температура плазмы, T_e	0 эВ
Энергия лазерного импульса	300 мДж
Длина волны лазера, λ	810 нм
Длительность импульса, τ_0	12 фс
Радиус в перетяжке, r_0	14 мкм
Пиковая интенсивность, I_0	$4.5 \cdot 10^{18} \text{ Вт/см}^2$
Безразмерный максимум векторного потенциала, a_0	1.45
Шаг сетки по r , dr	$0.02 k_p^{-1}$
Шаг сетки по ξ , $d\xi$	$0.02 k_p^{-1}$
Шаг эволюции драйвера, dz	k_p^{-1}

ниченную по радиусу плазму с областью однородности 900 мкм и линейным нарастанием/спадом плотности до нуля на протяжении 50 мкм.

3.1. Сканирование параметров в квазистатическом приближении

В нашем моделировании будем максимизировать заряд и среднюю энергию сгустков, образовавшихся в первом и во втором периодах кильватерной волны. В первую очередь, интересно исследовать взаимодействие лазерного импульса с плазмой различной плотности. В этом случае положение фокуса лазерного импульса z_f положим совпадающим с началом однородного участка плотности плазмы (рисунок 3.1).

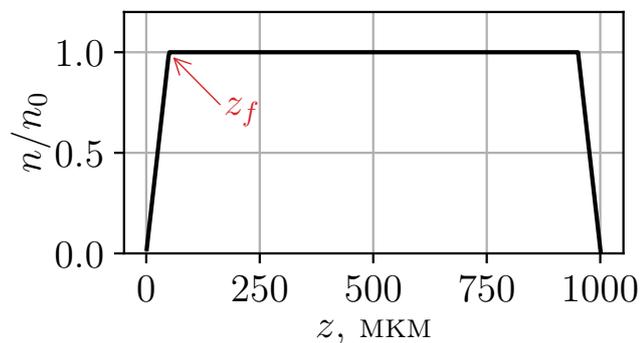


Рисунок 3.1 — Исследуемый профиль плазмы и положение точки фокусировки z_f

Поскольку энергозапас рассматриваемого лазерного импульса невелик, то желательно обеспечить условия постоянной фокусировки этого излучения для поддержания его высокой интенсивности. В этом случае можно рассчитывать на возбуждение более нелинейных волн и захват электронов плазмы. В области взаимодействия не предусмотрены фокусирующие элементы либо профилирование плотности плазмы для создания фокусирующего канала. Поэтому будем

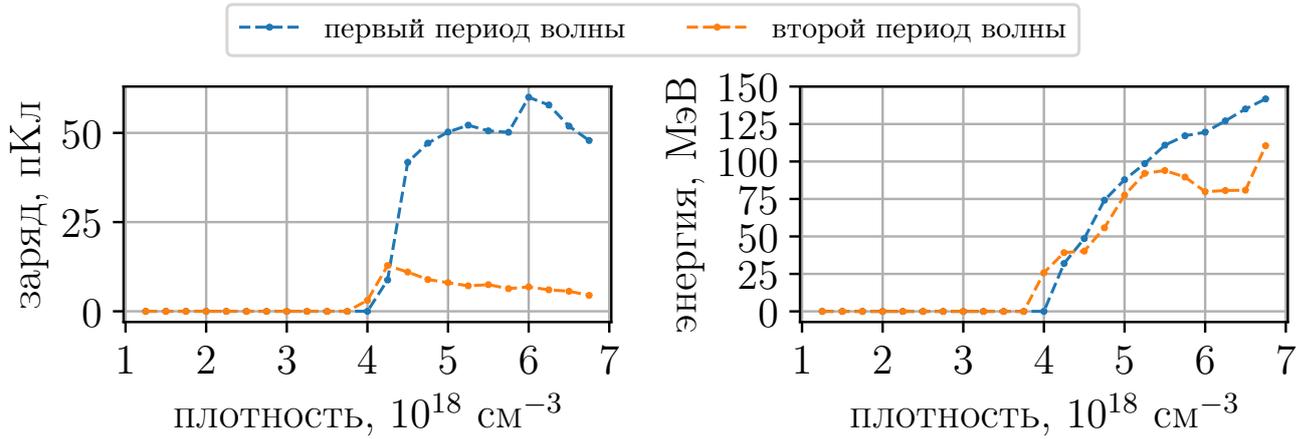


Рисунок 3.2 — Зависимость заряда (слева) и энергии (справа) сформированных пучков от плотности плазмы

рассматривать плотности выше критической для самофокусировки лазерного импульса, которая для наших условий составляет $2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

На рисунке 3.2 представлены зависимости характеристик сформированного пучка от плотности плазмы. Формирование сгустка электронов не происходит при низких плотностях. Более того, необходимо превысить критическую плотность в два раза для начала этого процесса. С ростом плотности происходит рост как заряда, так и энергии сгустков.

В главе 1 было обнаружено, что экспериментально достижимая плотность находится на уровне $5.5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Ее можно дополнительно увеличить за счет поднятия давления в импульсном клапане (рисунок 1.1 (4)). Однако значительное увеличение не требуется, поскольку уже при плотности плазмы $6.5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ происходит разрушение лазерного импульса после 1 мм взаимодействия. Это можно наблюдать на профиле огибающей лазерного излучения, где возникают колебания интенсивности (красная кривая на рисунке 3.3). Эти колебания являются следствием выхода за пределы применимости используемого приближения для описания эволюции лазерного излучения вследствие сильного истощения импульса и модификации его спектра [28]. Исследование такого режима взаимодействия хотя и представляет некоторый интерес, не будет рассматриваться далее ввиду желания найти стабильный режим генерации пучка в пределах

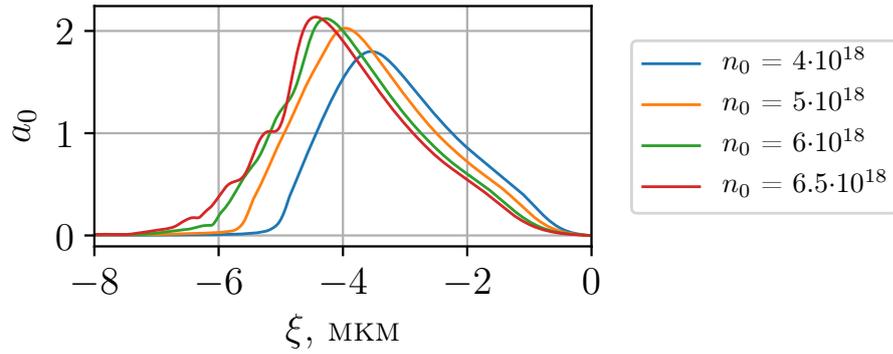


Рисунок 3.3 — Профиль огибающей лазерного импульса после 1 мм взаимодействия с плазмой различной плотности

ограничений используемого кода. Далее зафиксируем плотность плазмы на отметке $6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

Еще одним параметром, для изменения которого не требуется значительных усилий, является продольное положение точки фокусировки лазерного импульса относительно начала сверхзвуковой газовой струи. Эта зависимость представлена на рисунке 3.4. Этот параметр не влияет на итоговую энергию сформировавшихся сгустков. Однако фокусировка вглубь плазменной секции позволяет значительно увеличить захват во вторую каверну. Оказывается, что лазерный импульс собирается в более маленький радиус, если сместить точку фокусировки вглубь плазмы. В этом случае достигаются большие интенсивности (рисунок 3.5 (а)), что приводит к раскачке более сильных плазменных волн

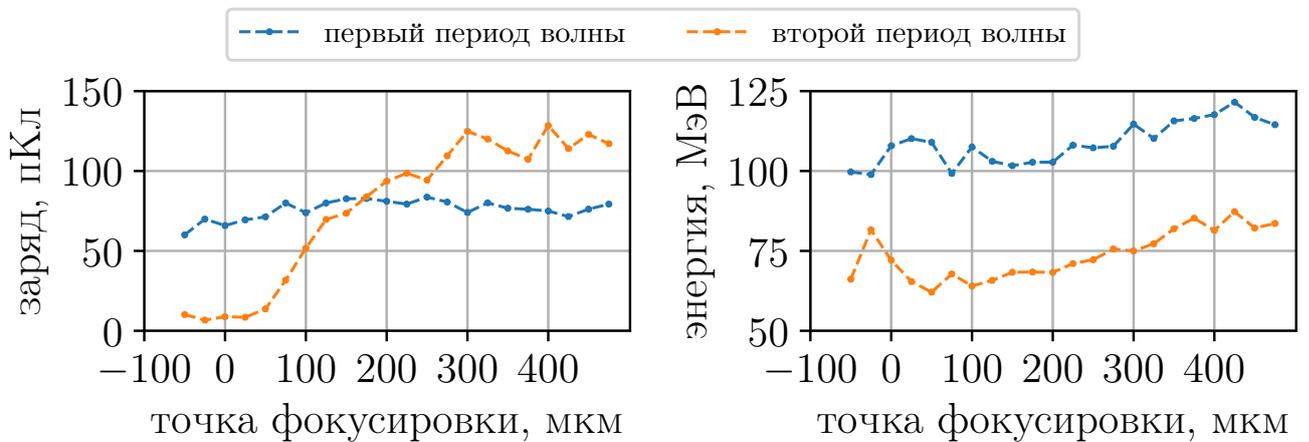


Рисунок 3.4 — Зависимость заряда (слева) и энергии (справа) сформировавшихся пучков от точки фокусировки лазерного импульса

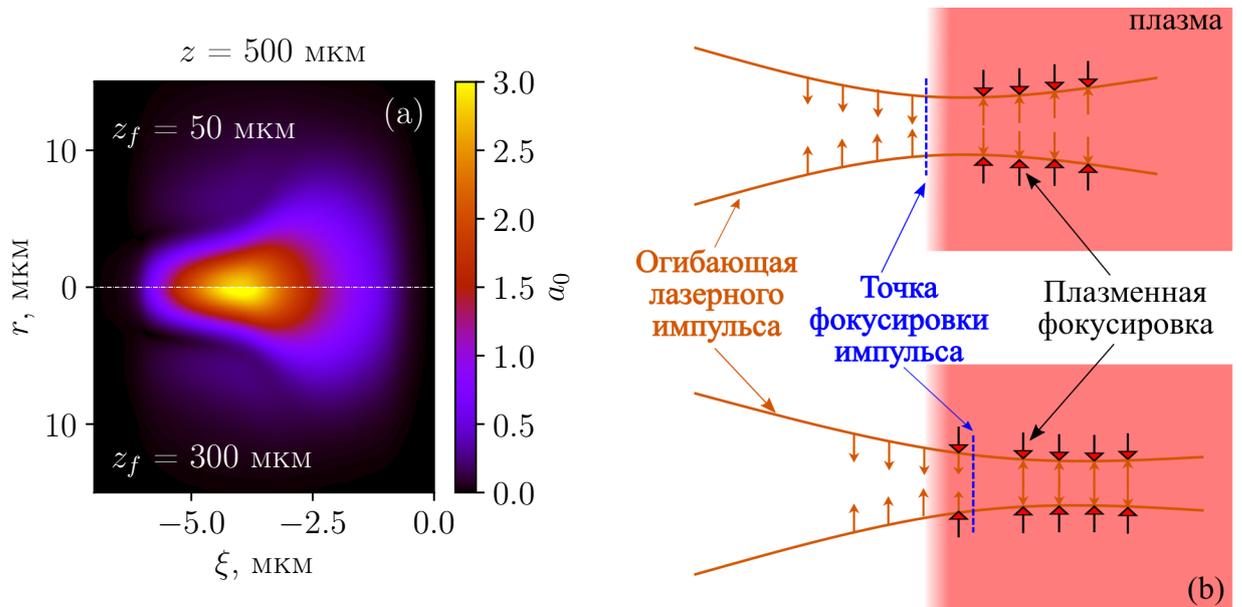


Рисунок 3.5 — (а) Сравнение распределений интенсивности лазерного импульса при различных точках фокусировки после 500 мкм взаимодействия с плазмой. (б) Иллюстрация действия фокусирующих сил плазмы на лазерный импульс для различных точек фокусировки

и увеличивает вероятность захвата электронов. Влияние на итоговую энергию в этом случае минимально, поскольку ускоряющее электрическое поле сильно пикировано. Захваченные частицы располагаются до этого пика, так как вблизи него происходит смена фокусирующей и дефокусирующей фазы волны (рисунок 3.6 при $\xi \approx -10k_p^{-1}$). Из-за изменения структуры волны вследствие эволюции драйвера частицы не могут находиться вблизи этой точки, а величина поля до пика, главным образом, определяется плотностью плазмы.

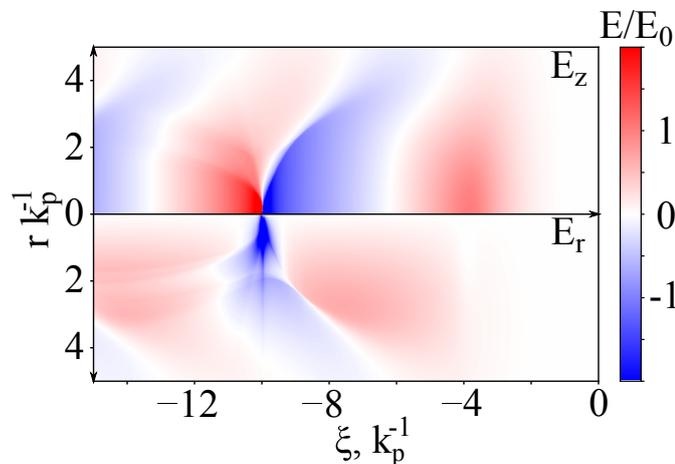


Рисунок 3.6 — Распределение ускоряющего и фокусирующего полей после 500 мкм взаимодействия при $z_f = 300$ мкм

Усиление фокусировки импульса может быть вызвано совместным действием фокусирующих оптических элементов и плазменной фокусировки. Если точка фокусировки расположена на входе в плазму, то в глубине лазерное излучение стремится расширяться, создавая “конкуренцию” нелинейной самофокусировке. При смещении точки фокуса эти эффекты складываются, что схематически изображено на рисунке 3.5 (b).

Таким образом, выгоднее фокусировать излучение вглубь плазмы. При смещении точки фокусировки на 300 мкм и более вглубь плазмы дальнейшего увеличения захваченного заряда не происходит.

3.2. Уточнение параметров захваченных электронов

Зафиксируем плотность плазмы $n_0 = 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ и точку фокусировки $z_f = 300$ мкм. Для подтверждения возможности захвата электронов из плазмы для выбранных параметров проведем моделирование квази-цилиндрическим PIC кодом общего назначения FBPIC с использованием азимутальных гармоник [64]. Распределение плотности плазмы и сформировавшийся электронный сгусток представлены на рисунке 3.7. В отличие от рассмотренных выше результатов, происходит формирование лишь одного сгустка. Сравнение характеристик ускоренных во втором периоде плазменной волны электронов, полученных кодами LCODE и FBPIC, представлены в таблице 2. Отметим, что вычисления с помощью кода FBPIC требуют на три порядка больше времени, чем нужно для работы квазистатического кода с использованием одинаковых вычислительных ресурсов.

Видно, что квазистатическим кодом значительно переоценивается величина захватываемого заряда. Это вызвано приосевыми частицами плазмы, которые не успевают уйти далеко от оси и набирают пороговую энергию для перевода их в захваченные. Однако при вычислениях кодом FBPIC такие частицы не

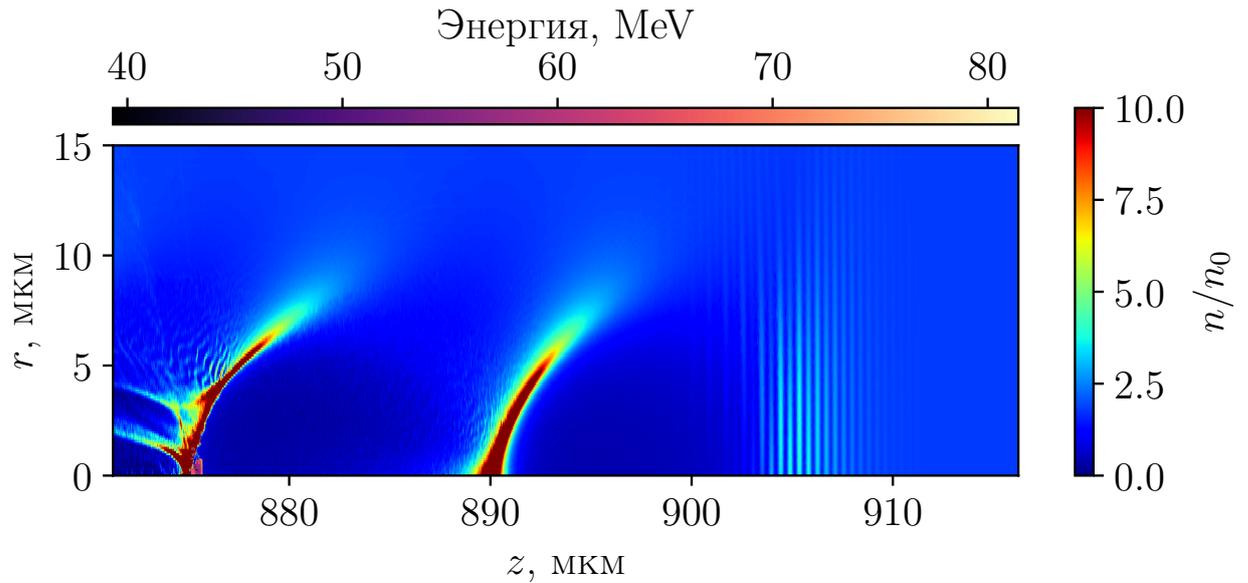


Рисунок 3.7 — Сформированный сгусток электронов на фоне карты распределения плотности плазмы; моделирование кодом FBPIC

захватываются. Увеличение пороговой энергии в LCODE приводит к слишком позднему “обнаружению” частиц, которые должны сформировать пучок. При данных параметрах часть из них набирает достаточную энергию уже за точкой опрокидывания, и они покидают окно моделирования даже при переводе их в частицы пучка. При повышении энергетического порога нарастание захвата частиц происходит непрерывным образом, и обнаружить лучшие параметры не удалось. Другие способы ограничения захвата лишних частиц также не привели к успеху.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что на текущий момент квазистатические коды с существующими моделями захвата частиц плазмы могут использоваться только для предварительного быстрого анализа интересующей конфигурации. Однако качественные зависимости воспроизводятся одинаково

Таблица 2 — Характеристики электронов, захваченных во второй период кильватерной волны

	энергия	энергоразброс	нормализованный эмиттанс	заряд
FBPIC	77 МэВ	16 МэВ	8 мм мрад	18 пКл
LCODE	75 МэВ	30 МэВ	4 мм мрад	120 пКл

в обоих кодах. Так, при фокусировке лазерного излучения на вход плазменной секции захват электронов в FBPIC пропадает, что соответствует значительному снижению заряда во второй каверне в LCODE (рисунок 3.4). При понижении плотности до значения $4 \cdot 10^{18} \text{см}^{-3}$ захват в FBPIC также пропадает, аналогично анализу параметров, проведенному в параграфе 3.1.

3.3. Основные результаты

Реализована модификация квазистатического кода, позволяющая производить быстрые оценки возможности захвата электронов плазмы кильватерной волной. Достигается прирост производительности на три порядка по сравнению с PIC кодом общего назначения. Обнаружен режим, в котором удается обеспечить условия для захвата плазменных электронов при работе с короткими импульсами с энергосодержанием порядка 300 мДж, длиной волны 810 нм и длительностью 12 фс. Для этого требуется использовать плазму с плотностью выше $4 \cdot 10^{18} \text{см}^{-3}$. Кроме того, требуется фокусировать излучение вглубь плазмы. Только тогда импульс сожмется до необходимой для захвата интенсивности. Результаты главы обсуждались в публикации [74].

Глава 4. Расширенная модель квазистатического описания плазмы

Как обсуждалось в главе 2, квазистатическое приближение опирается на тот факт, что свойства исследуемых объектов изменяются гораздо медленнее в сопутствующей системе координат, чем в лабораторной системе отсчета (рисунок 4.1). Это относится к свойствам плазменной волны (метка 1 на рисунке 4.1), плотности и скорости пучков частиц (метка 2) и интенсивности лазерного излучения (метка 3). Если пучки распространяются в направлении z , то замена переменных с продольной координаты z и времени t на

$$s = z, \quad \xi = z - ct \quad (4.1)$$

разделяет характер зависимостей от переменных. Все исследуемые функции зависят от s (при постоянной ξ) гораздо медленнее, чем от ξ (при постоянной s) или от z и ct по отдельности. В то время как PIC коды общего назначения требуют малых шагов сетки как по времени, так и по продольной координате для разрешения быстрых изменений в моделируемых величинах (метка 5), QSA требует малых шагов только по ξ и допускает большие шаги по s (метка 6). Такой увеличенный шаг сетки делает коды, использующие квазистатическую модель, на несколько порядков быстрее обычных PIC кодов, что хочется сохранить в расширенной модели. Выигрыш в скорости определяется отношением длины эволюции пучка к длине волны плазмы или лазера, в зависимости от типа драйвера. Это — первое преимущество квазистатического приближения.

Для моделирования временной эволюции волны в кодах общего назначения требуется отслеживать протяженную в направлении движения драйвера область, чтобы минимизировать влияние продольных границ (метка 7). Из-за наличия дополнительной симметрии в квазистатической модели информация о состоянии соседних слоев плазмы не требуется, что позволяет вычислять эво-

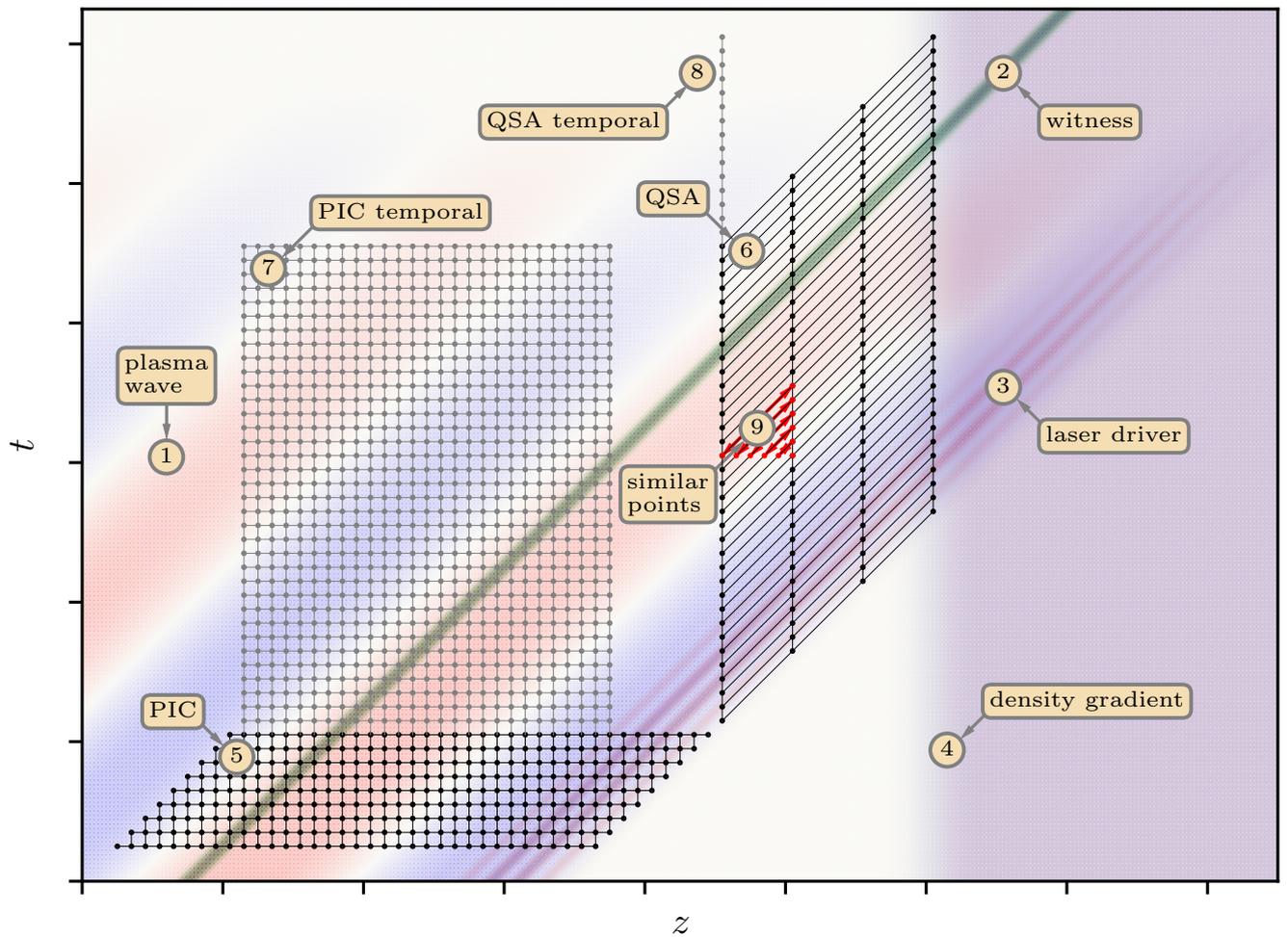


Рисунок 4.1 — Изображение объектов, моделируемых в контексте плазменного кильватерного ускорения: плазменная волна (1), ускоряемый пучок (2), лазерный драйвер (3), градиент плотности плазмы (4). Сетки моделирования, используемые в обычных PIC кодах (5),(7) и в квазистатических кодах (6),(8) для моделирования динамики пучка (5),(6) и временной эволюции плазменной волны (7),(8). Двойственность интерпретации квазистатических результатов (9)

люцию волны в заданном сечении независимо (метка 8), и это — второе преимущество.

Отметим также, что в квазистатической модели временная зависимость исследуемых величин при некотором z может быть легко преобразована в их зависимость от z при фиксированном t (метка 9), если свойства пучка и плазмы меняются незначительно на соответствующих пространственных и временных интервалах.

Как отмечалось в главе 2, квазистатическое приближение становится неточным, если пучки медленно меняют форму, или невозмущенная плотность плазмы слабо зависит от z , но все еще остается применимым. Неточность возникает из-за неправильного обмена информацией между соседними слоями по z . В квазистатической модели в уравнениях на состояние плазмы предполагается, что плазма и пучок одинаковы при всех z , но это не так. Пучки эволюционируют по мере распространения в плазме, и также начальное состояние плазмы может быть различным при разных z . Обычно область пространства, состояние которой влияет на поведение плазмы при некоторых z , составляет около одной длины плазменной волны в продольном направлении и не расширяется со временем, поскольку групповая скорость ленгмюровских волн в холодной плазме равна нулю. Относительная точность QSA в этом случае может быть оценена как отношение плазменной длины волны к типичному расстоянию изменения пучка или масштабу неоднородности плазмы. Однако если некоторые электроны плазмы значительно перемещаются в продольном направлении в сильно нелинейной волне, или в плазме присутствуют волны с ненулевой групповой скоростью или резкие продольные градиенты плотности, QSA становится менее точным, и ошибка накапливается со временем.

В данной главе мы рассмотрим усовершенствованное квазистатическое приближение (AQSA) [92], которое свободно от ограничений обычного QSA, но сохраняет его основные преимущества — скорость и пониженную размерность модели плазмы. Новый подход учитывает обмен информацией между соседними слоями плазмы и поэтому позволяет корректно моделировать продольные неоднородности плазмы, быстрые частицы, появляющиеся в плазме, и волны с ненулевой групповой скоростью, если эти особенности могут быть разрешены выбранной сеткой моделирования. В параграфе 4.1 рассмотрим физическую модель и обсудим ее численную реализацию на примере двумерной геометрии. В параграфе 4.2 описано сравнение результатов моделирования с имеющимися аналитическими решениями и с кодами общего назначения, которое показывает, что новая модель воспроизводит эффекты, отсутствующие в QSA.

4.1. Расширение квазистатической модели

4.1.1. Физическая модель

Начнем развитие расширенной квазистатической модели с добавления отброшенных малых слагаемых в уравнениях на электромагнитное поле. Запишем уравнения Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (4.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (4.3)$$

где \vec{E} и \vec{B} — электрические и магнитные поля, а \vec{j} и ρ — плотности тока и заряда.

Уравнения на магнитное и электрическое поле можно записать отдельно:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi \nabla \rho + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} [\nabla \times \vec{j}]. \quad (4.5)$$

Производные при переходе к переменным (s, ξ) изменятся следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (4.6)$$

Мы предполагаем, что все величины медленно зависят от s , поэтому соответствующая производная является малым параметром: $\partial_s \ll \partial_\xi$. В QSA все малые члены, содержащие ∂_s , опускаются. Здесь мы сохраняем члены первого порядка малости:

$$\left(\Delta_\perp + 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \xi} \right) \vec{E} = 4\pi \hat{\nabla} \rho - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial \xi}, \quad (4.7)$$

где $\hat{\nabla} = (\nabla_\perp, \partial_s + \partial_\xi)$, а подстрочный индекс \perp обозначает двумерные (поперечные) векторы и операторы. Опущенная вторая производная ∂_{ss}^2 отвечает за описание обратного излучения [93]. Ее учет является важным для задач, в

которых присутствуют низкочастотные возмущения со скоростью распространения значительно ниже скорости света [28, 94]. Аналогично, для магнитного поля получаем

$$\left(\Delta_{\perp} + 2\frac{\partial^2}{\partial s \partial \xi}\right) \vec{B} = -\frac{4\pi}{c} [\hat{\nabla} \times \vec{j}]. \quad (4.8)$$

Смешанные производные в уравнениях (4.7) и (4.8) отвечают за описание свободного излучения.

Помимо уравнений для электромагнитного поля, также необходимо модифицировать законы движения макрочастиц плазмы, то есть законы изменения их параметров. Требуется отслеживать поперечное положение макрочастицы \vec{r}_{\perp} , три компоненты импульса \vec{p} и заряд q . При этом характеристики макрочастицы необходимо вычислять как функции ξ для данного s (рисунок 4.2). Продольное положение макрочастицы не является параметром, так как оно объединяется со временем t и переходит в аргументы. Масса m пропорциональна заряду q и не требует отдельного рассмотрения. В обычных переменных параметры частиц плазмы изменяются в соответствии с уравнениями

$$\frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} = \vec{v}_{\perp}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right), \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad (4.9)$$

где $\vec{v} = \vec{p}c / \sqrt{p^2 + m^2c^2}$ — скорость частицы. Обозначим рассматриваемый параметр через $\chi(s, \xi)$, а правую часть соответствующего уравнения в (4.9) — через F . В квазистатических переменных (4.1) получаем

$$\frac{d\chi}{dt} = F = \frac{\partial\chi}{\partial s} \Big|_{\xi} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial \xi} \Big|_s \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\chi}{\partial s} \Big|_{\xi} v_z + \frac{\partial\chi}{\partial \xi} \Big|_s (v_z - c), \quad (4.10)$$

откуда

$$\frac{\partial\chi}{\partial \xi} \Big|_s = \frac{1}{v_z - c} \left(F - v_z \frac{\partial\chi}{\partial s} \Big|_{\xi} \right). \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) всегда применяется к частице в “струе частиц”, которая в данный момент имеет продольную координату s . Эта частица может первоначально (до прихода драйвера) находиться на некотором расстоянии от рассматриваемого сечения взаимодействия. Таким образом, уравнение (4.11) описывает параметры различных физических частиц при различных ξ . Если пренебречь производной ∂_s , уравнение (4.11) сводится к обычному QSA [63].

Для полноты системы к уравнениям (4.7), (4.8) и (4.11) нужно добавить уравнения для вычисления заряда и тока по ансамблю макрочастиц, которые такие же, как в QSA:

$$\vec{j} = A \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{c - v_{z,i}} + \vec{j}_b, \quad \rho = A \sum_i \frac{q_i}{c - v_{z,i}} + \rho_b, \quad (4.12)$$

где \vec{j}_b и ρ_b — плотности тока и заряда драйвера, A — нормировочный коэффициент, и суммирование ведется по “струям частиц”, пересекающим ячейку, в которой мы вычисляем \vec{j} и ρ . Знаменатели в уравнении (4.12) появляются потому, что вклад “струи частиц” в плотность и ток зависит от скорости макрочастиц в движущемся окне моделирования.

Уравнения для частиц драйвера не требуют изменений и описаны в главе 2.

4.1.2. Численная реализация

Новый алгоритм будем реализовывать на основе кода LCODE [95]. Сразу оговоримся, что представленная схема не является оптимальной с точки зрения точности и производительности. Она была выбрана для демонстрации принципиальной возможности реализации предложенной модели в рамках квазистатического кода. Код может работать и в декартовой, и в осесимметричной геометрии. Обе геометрии будут использованы при тестировании новой модели. В этой главе мы обсудим основные моменты реализации численной схемы на примере декартовой геометрии. Более подробное описание вынесено в приложение А, а рассмотрение цилиндрической геометрии — в приложение Б. В рассмотренных тестовых случаях три компоненты поля тождественно равны нулю ($E_y = B_x = B_z = 0$), поэтому мы не будем выписывать уравнения для этих компонент.

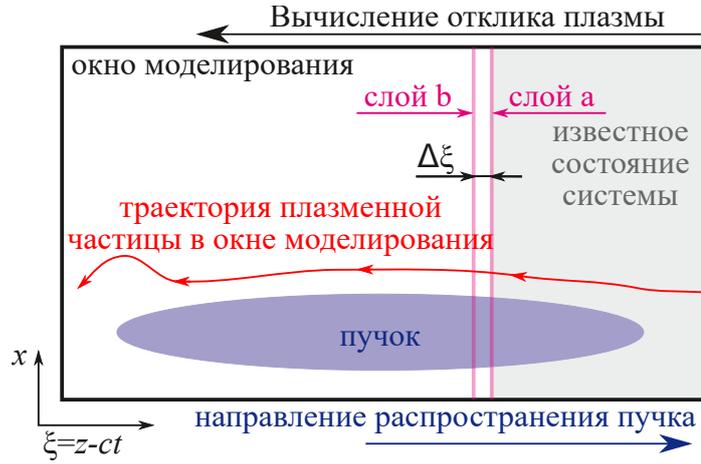


Рисунок 4.2 — Схема вычисления отклика плазмы в квазистатической модели

Мы рассчитываем отклик плазмы в LCODE послойно в направлении убывания ξ (справа налево на рисунке 4.2). Поскольку для расчета поля E_x нам нужны производные тока по ξ в уравнении (4.7), используется следующая схема предиктор-корректор:

- рассчитываем движение макрочастиц плазмы из слоя a в слой b под действием полей слоя a ;
- вычисляем ток и плотность заряда в слое b ;
- вычисляем все поля в слое b ;
- рассчитываем движение частиц плазмы из слоя a в слой b под действием средних полей слоев a и b ;
- снова вычисляем ток и плотность заряда в слое b ;
- снова вычисляем все поля в слое b ;
- в третий раз рассчитываем движение частицы плазмы из слоя a в слой b под действием средних полей.

Чтобы обеспечить устойчивость алгоритма, мы решаем в конечных разностях вместо уравнения (4.7) следующее уравнение для поперечного электрического поля:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \xi} \right) E_x - E_x = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_x}{\partial \xi} - \tilde{E}_x, \quad (4.13)$$

где \tilde{E}_x — некоторое предсказание для E_x . Это уравнение по структуре напоминает уравнение (2.6) для описания эволюции огибающей лазерного импульса.

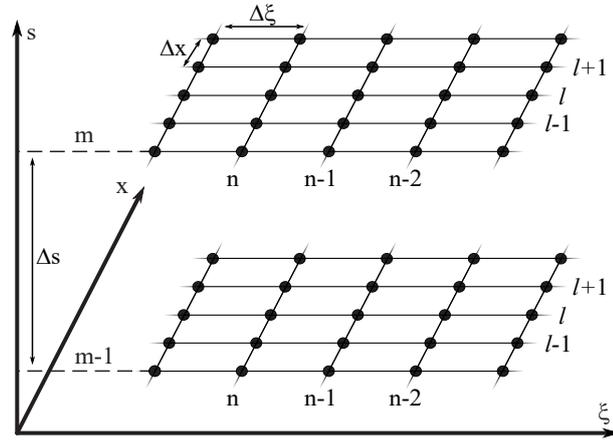


Рисунок 4.3 — Сетка моделирования

Ранее Р.И. Спицыным была разработана устойчивая схема для решения такого рода уравнений [30], которой мы и воспользуемся. В конечных разностях уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{E_{x,n,l+1}^m - 2E_{x,n,l}^m + E_{x,n,l-1}^m}{\Delta x^2} + \frac{E_{x,n,l+1}^{m-1} - 2E_{x,n,l}^{m-1} + E_{x,n,l-1}^{m-1}}{\Delta x^2} \right) + \\ & + \frac{2}{\Delta s} \left(\frac{-3E_{x,n,l}^m + 4E_{x,n-1,l}^m - E_{x,n-2,l}^m}{2\Delta \xi} - \frac{-3E_{x,n,l}^{m-1} + 4E_{x,n-1,l}^{m-1} - E_{x,n-2,l}^{m-1}}{2\Delta \xi} \right) - \\ & - \frac{E_{x,n,l}^m + E_{x,n,l}^{m-1}}{2} = 4\pi \left(\frac{\rho_{n,l+1}^{m-\frac{1}{2}} - \rho_{n,l-1}^{m-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} + \frac{1}{c} \frac{j_{x,n,l}^{m-\frac{1}{2}} - j_{x,n-1,l}^{m-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} \right) - \tilde{E}_{x,n,l}^{m-\frac{1}{2}}, \quad (4.14) \end{aligned}$$

где индексы l , m и n обозначают слои сетки по x , s и ξ соответственно (рисунок 4.3), Δx , Δs и $\Delta \xi$ — шаги сетки, а верхние полуцелые индексы обозначают полусумму значений в близлежащих точках сетки, например,

$$\tilde{E}_{x,n,l}^{m-\frac{1}{2}} = \frac{\tilde{E}_{x,n,l}^m + \tilde{E}_{x,n,l}^{m-1}}{2}. \quad (4.15)$$

Когда мы вычисляем поля в слое с индексом n в первый раз (предиктор), $\tilde{E}_{x,n,l}^m = E_{x,n-1,l}^m$, иначе (корректор) $\tilde{E}_{x,n,l}^m = (E_{x,n,l}^m + E_{x,n-1,l}^m)/2$, где значение $E_{x,n,l}^m$ найдено на шаге предиктора. При выборе конечно-разностной аппроксимации производных поля относительно ξ мы опираемся на принцип причинности. Мы предполагаем, что ни одно возмущение не распространяется в направлении, противоположном пучкам, и что все возмущения в системе вызваны пучками и распространяются вместе с ними или отстают от них. В окне, движущемся

со скоростью света, это означает, что последующие слои в ξ не могут повлиять на предыдущие, поэтому следует использовать только правые производные по ξ . Это ограничивает область применимости, но позволяет проводить конвейерное распараллеливание моделирования [24]. Для поперечного лапласиана мы используем устойчивую схему Крэнка-Николсона [96], которая хорошо зарекомендовала себя при решении уравнения огибающей лазерного импульса при моделировании плазменного кильватерного ускорения [30, 93]. В результате получается неявная численная схема, которая, при необходимости, может быть обобщена на трехмерный случай с помощью неявного метода переменных направлений [97, 98].

Чтобы избежать вычисления производной по ξ в продольной составляющей уравнения (4.7), используем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (4.16)$$

и получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \xi} \right) E_z = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_x}{\partial x} + 4\pi \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho + \frac{j_z}{c} \right), \quad (4.17)$$

что в конечных разностях можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{E_{z,n,l+1}^m - 2E_{z,n,l}^m + E_{z,n,l-1}^m}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{2}{\Delta s} \left(\frac{-3E_{z,n,l}^m + 4E_{z,n-1,l}^m - E_{z,n-2,l}^m}{2\Delta \xi} - \frac{-3E_{z,n,l}^{m-1} + 4E_{z,n-1,l}^{m-1} - E_{z,n-2,l}^{m-1}}{2\Delta \xi} \right) = \\ & = 4\pi \left(\frac{1}{c} \frac{j_{x,n,l+1}^m - j_{x,n,l-1}^m}{2\Delta x} + \frac{\rho_{n,l}^m - \rho_{n,l}^{m-1}}{\Delta s} + \frac{1}{c} \frac{j_{z,n,l}^m - j_{z,n,l}^{m-1}}{\Delta s} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Системы уравнений (4.14) и (4.18) решаются с помощью метода прогонки (Приложение А).

Уравнение для магнитного поля может быть упрощено в двумерной геометрии. Вычитание z -компонент первого из уравнений (4.3) и второго из уравнений (4.2) дает

$$\frac{\partial}{\partial x} (B_y - E_x) = \frac{4\pi}{c} j_z - 4\pi \rho + \frac{\partial E_z}{\partial s}, \quad (4.19)$$

откуда

$$\frac{B_{y,n,l}^m - B_{y,n,l-1}^m}{\Delta x} - \frac{E_{x,n,l}^m - E_{x,n,l-1}^m}{\Delta x} = \frac{4\pi j_{z,n,l}^m + j_{z,n,l-1}^m}{c} - \frac{4\pi \rho_{z,n,l}^m + \rho_{z,n,l-1}^m}{2} + \frac{E_{z,n,l}^m - E_{z,n,l-1}^m + E_{z,n,l-1}^m - E_{z,n,l-1}^{m-1}}{2\Delta s}. \quad (4.20)$$

Это уравнение позволяет вычислить магнитное поле с точностью до константы. Для ее вычисления в декартовой геометрии используем x -компоненту первого из уравнений (4.3):

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(B_y - E_x) = -\frac{4\pi}{c}j_x - \frac{\partial B_y}{\partial s}. \quad (4.21)$$

Достаточно найти константу только для одного значения поперечного индекса l . Мы можем выбрать это значение (l') на периферии окна моделирования, где токи и поля малы, и ∂_s можно пренебречь. В конечных разностях

$$\frac{B_{y,n,l'}^m - B_{y,n-1,l'}^m}{\Delta \xi} - \frac{E_{x,n,l'}^m - E_{x,n-1,l'}^m}{\Delta \xi} = \frac{4\pi j_{x,n,l'}^m + j_{x,n-1,l'}^m}{c} - \frac{4\pi \rho_{z,n,l'}^m + \rho_{z,n-1,l'}^m}{2}, \quad (4.22)$$

отсюда находим $B_{y,n,l'}^m$, зная остальные слагаемые.

Для расчета параметров частиц мы используем неявную схему, которая для уравнения (4.11) имеет вид

$$\frac{\chi_n^m - \chi_{n-1}^m}{\Delta \xi} = \frac{1}{c - v_{z,n-\frac{1}{2}}^m} \left(F_{n-\frac{1}{2}}^m - v_{z,n-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \frac{\chi_n^m - \chi_{n-1}^{m-1}}{\Delta s} \right), \quad (4.23)$$

где используется скорость частицы на полуцелом шаге по ξ , что более подробно рассмотрено в приложении А.

Граничные условия совпадают с документированной версией LCODE [99]. Поперечные границы представляют собой идеально проводящие стенки, которые отражают частицы, но поглощают их энергию (изменяют импульс частицы до нуля). На правой (передней) границе нет полей и нет движения частиц плазмы. Граничные условия на левой (задней) границе не нужны в квазистатистических кодах.

Схема для вычисления эволюции пучка также не изменяется. Уравнения движения решаются с помощью модифицированного метода Эйлера (метод

средней точки). Поля, действующие на макрочастицу, линейно интерполируются к предсказанному местоположению макрочастицы на половине временного шага.

4.2. Тестирование новой модели

4.2.1. Распространение лазерного импульса

Рассмотрим распространение короткого двумерного лазерного импульса через докритическую плазму плотности n_0 в линейном режиме. Этот тест показывает, как возмущения с групповой скоростью, отличной от скорости света, описываются новой моделью.

Групповая скорость v_g импульса отличается от скорости света c не только из-за плазмы, но и из-за конечного поперечного размера импульса. Адаптируя теорию, изложенную в работе [100], к плоскому двумерному случаю, можно получить поправки для групповой скорости, измеренной на оси вблизи точки фокусировки, в следующем виде:

$$\frac{c - v_g}{c} = \frac{1}{x_0^2 k_0^2} + \frac{k_p^2}{2k_0^2}, \quad (4.24)$$

где x_0 — ширина импульса в точке фокуса. Поперечный размер лазерного импульса x_s растет согласно параксиальной теории [100]:

$$x_s = x_0 \sqrt{1 + \frac{s^2}{s_R^2}}, \quad (4.25)$$

где $s_R = k_0 x_0^2 / 2$ — длина Рэлея, а расстояние s измеряется от точки фокуса.

Рассмотрим линейно поляризованный лазерный импульс с электрическим и магнитным полями при $s = 0$

$$E_x = B_y = E_m \sin(k_0 \xi) \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{(\xi - \xi_c)^2}{L^2}\right) \quad (4.26)$$

и $\lambda = 2\pi/k_0 = 810$ нм, $x_0 = 13$ мкм, $L = 9$ мкм, $E_m = 1.26$ МВ/м (рисунок 4.4). Продольное электрическое поле E_z выбрано так, чтобы удовлетворить уравнение $\text{div } \vec{E} = 0$ в вакууме. Максимальная интенсивность поля изначально находится в точке $\xi_c = -30$ мкм, которая является центром окна моделирования (x, ξ) размером 180 мкм \times 60 мкм. Шаги сетки составляют $\Delta\xi = \lambda/40$, $\Delta x = \lambda/4$, $\Delta s = 25\lambda$.

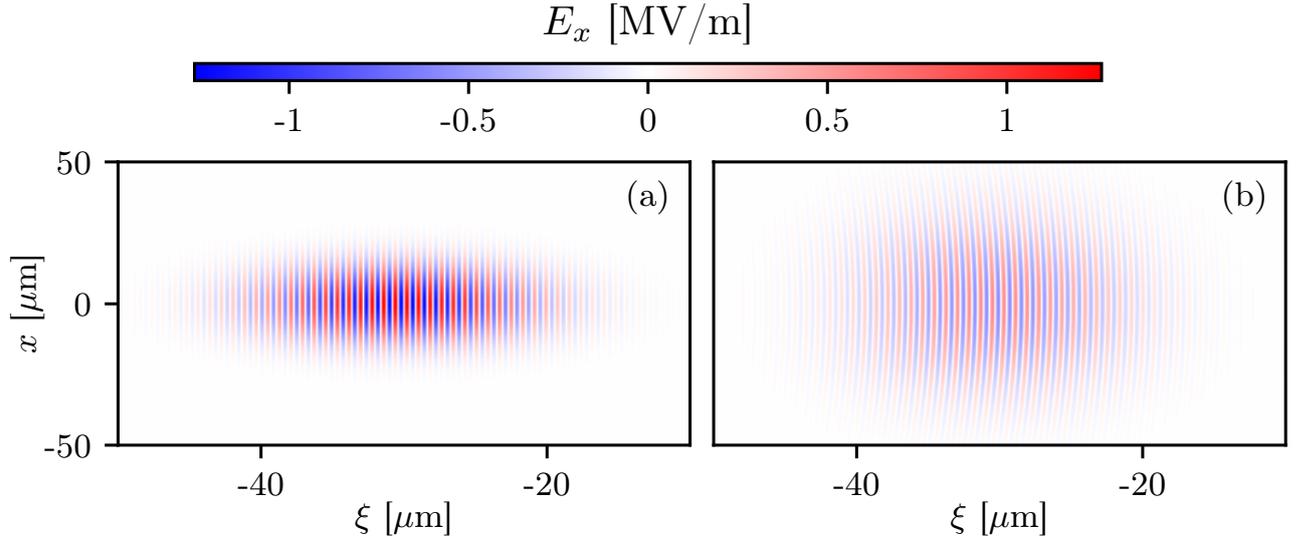


Рисунок 4.4 — Исследуемый лазерный импульс при $s = 0$ (a) и $s = 2s_R$ (b). Для лучшей наглядности показана только часть окна моделирования с различными вертикальными и горизонтальными масштабами

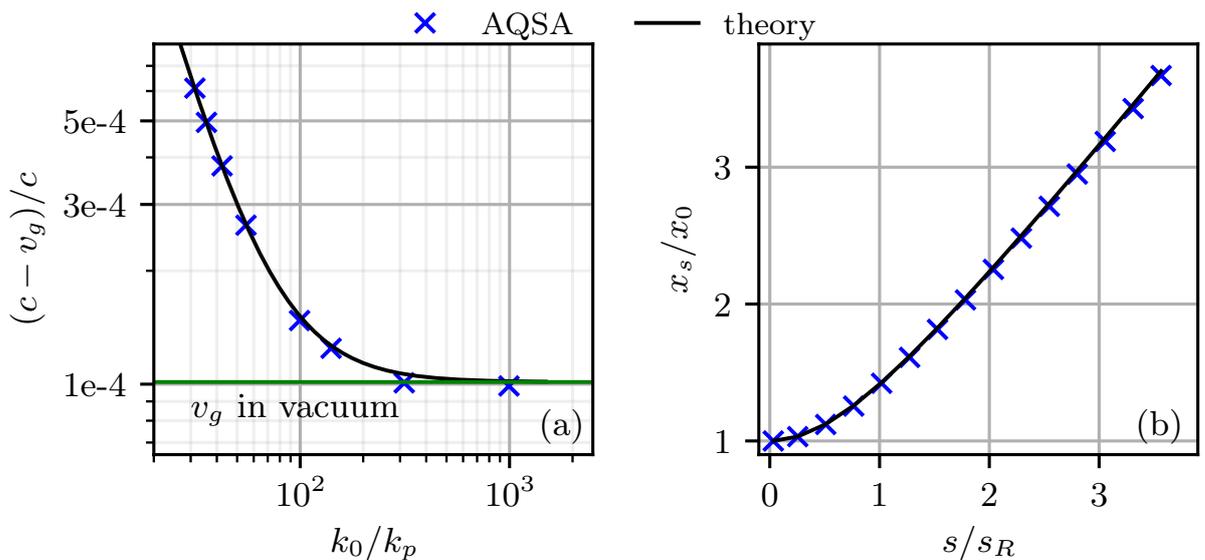


Рисунок 4.5 — (a) Групповая скорость лазерного импульса в плазме различной плотности, и (b) рост радиуса импульса в вакууме

В отличие от других кодов, использующих квазистатическое приближение [22, 29, 30], распространение излучения в предложенном подходе описывается в рамках модели плазмы. Результаты моделирования количественно воспроизводят теоретически предсказанную скорость волнового пакета и его поперечную дисперсию (рисунок 4.5). Чтобы найти групповую скорость из результатов моделирования, мы аппроксимируем огибающую импульса на оси распространения гауссовой функцией и измеряем среднюю скорость максимума этой функции за время прохождения импульсом расстояния $0,13s_R$, начиная с точки фокусировки. Ширина импульса измеряется в соответствии с формулой

$$x_s = 2\sqrt{\frac{\langle x^2 E_x^2 \rangle}{\langle E_x^2 \rangle}}, \quad (4.27)$$

где угловые скобки означают усреднение по окну моделирования. Заметим, что шаг вдоль направления распространения импульса $\Delta s \gg \lambda$, поэтому AQSA сохраняет главное преимущество QSA.

4.2.2. Плазма с продольным градиентом плотности

Этот тест показывает, как новая модель описывает сильнонелинейную плазменную волну в присутствии продольных градиентов плотности. В этом тесте нас интересует поведение плазменного решателя, поэтому волна возбуждается неэволюционирующим коротким осесимметричным электронным пучком до режима каверны (рисунок 4.6). Электроны плазмы в точке опрокидывания волны приобретают большую продольную скорость (близкую к c), перемещаются далеко вперед от своего первоначального местоположения и могут передавать информацию из одного плазменного слоя в другой. В продольно однородной плазме этот эффект сводится на нет благодаря одинаковым характеристикам плазмы в разных сечениях взаимодействия, но в присутствии градиента плотности он может быть значительным.

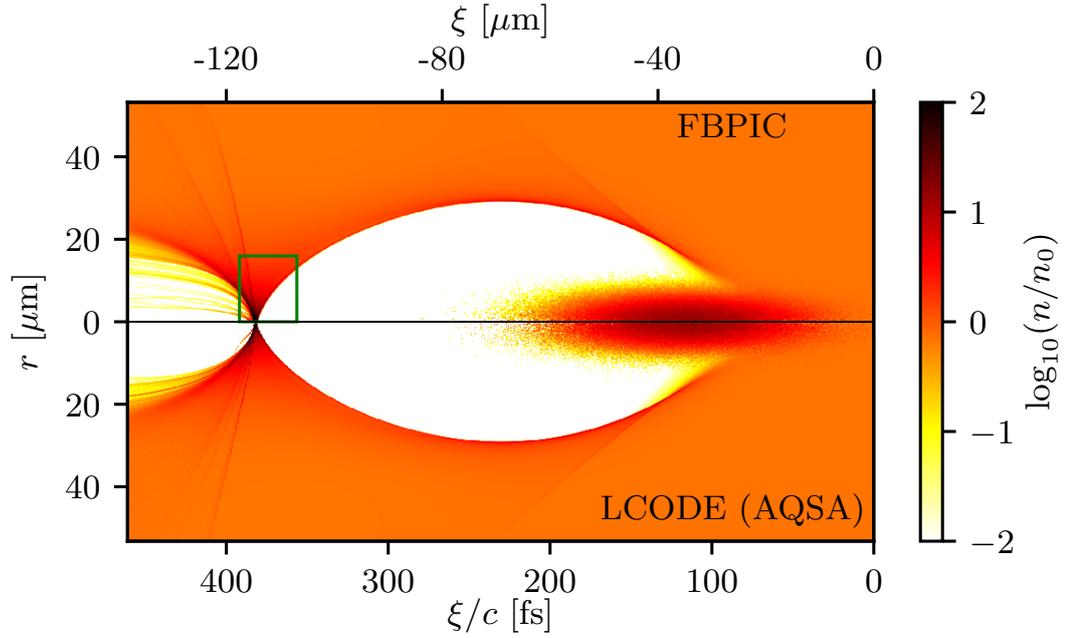


Рисунок 4.6 — Полная электронная плотность n пучка и плазмы для случая, когда электронный пучок распространяется в однородной плазме (при $s = 20$ мкм) перед областью с градиентом плотности. Зеленый прямоугольник отмечает область, показанную на рисунке 4.8. Моделирование выполнено с помощью FBPIC (верхняя половина) и модели AQSA, реализованной в LCODE (нижняя половина)

Рассмотрим гауссов электронный пучок со среднеквадратичным поперечным и продольным размерами 3 мкм и 10 мкм, соответственно, релятивистским фактором $4 \cdot 10^4$ и пиковым током 11 кА. Такой пучок возбуждает в плазме волну в сильнонелинейном режиме, которая хорошо подходит для демонстрации возможностей новой модели и в то же время не имеет особенностей со слишком малым пространственным масштабом, которые трудно разрешить. Продольный профиль плотности плазмы содержит область линейного роста от $1.75 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ при $s = 50$ мкм до $2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ при $s = 220$ мкм, что соответствует изменению глубины плазменного скин-слоя k_p^{-1} от 12.7 мкм до 10.6 мкм. Плотность постоянна до и после этой области (рисунок 4.8, верхний ряд). Моделирование проводится в цилиндрических координатах (r, ξ) или (r, z) .

Мы сравниваем моделирование, выполненное с помощью квазистатического кода LCODE, осесимметричного PIC кода FBPIC [64], и решателя с применением новой модели, реализованного на основе LCODE. Размер окна модели-

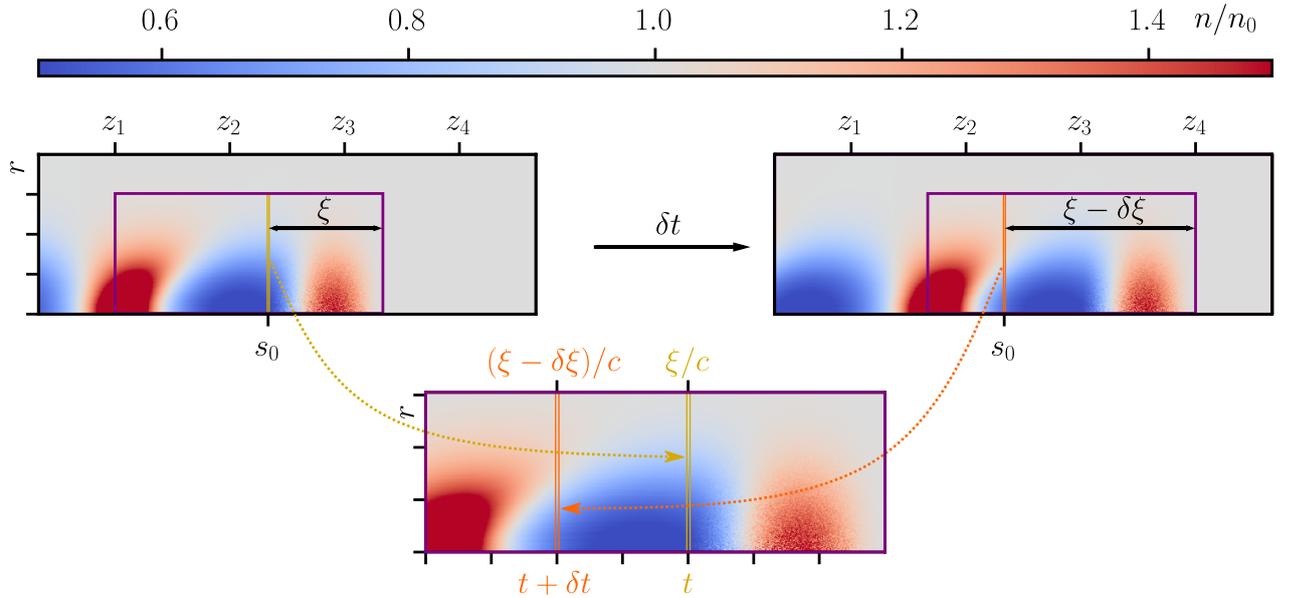


Рисунок 4.7 — Схема перевода результатов работы PIC кода к квазистатическим переменным. Фиолетовым цветом выделено окно моделирования

рования составляет $250 \text{ мкм} \times 170 \text{ мкм}$ в r - и ξ -направлении, соответственно. При моделировании с использованием QSA и AQA шаги сетки составляют $\Delta r = \Delta \xi = 0.1 \text{ мкм}$, $\Delta s = 10 \text{ мкм}$. При моделировании с помощью кода FBPIC $\Delta r = \Delta z = \Delta(ct) = 0.1 \text{ мкм}$. На ячейку сетки приходится 12 макрочастиц плазмы, а для задания пучка используется 2×10^5 макрочастиц. Чтобы сравнить квазистатическое и PIC моделирование, мы должны представить результаты в одних и тех же координатах. Это сравнение будем проводить в квазистатических переменных (r, ξ) . Зависимости от ξ имеют смысл зависимостей от времени при определенном z (рисунок 4.7). В однородной плазме их также можно интерпретировать как портреты пучка в некоторый момент времени, но не в плазме с продольными градиентами плотности. Стандартная диагностика в FBPIC не позволяет выводить временные зависимости при фиксированном z , поэтому мы сохраняем состояние плазмы каждый пятый временной шаг (для упрощения работы с большими объемами данных), если интересующая нас координата s_0 находится в окне моделирования. Затем для каждого сохраненного состояния мы берем значения в пяти ближайших к s_0 сечениях и рассматрива-

ем их как пять последовательных точек искомой временной зависимости при $z = s_0$.

Все три подхода согласуются в областях однородной плотности плазмы (рисунки 4.6 и 4.8, левая и правая колонки). В области градиента плотности классическое QSA дает иной отклик плазмы, чем AQSA и PIC (средний столбец на рисунке 4.8). В отличие от QSA, AQSA воспроизводит удлинение плазменной волны (особенность 1 на рисунке 4.8) и более протяженную область высокой плотности вблизи оси (особенность 2), наблюдаемой при моделировании без приближений. Оба эффекта вызваны продольно движущимися электронами плазмы, которые приходят из предыдущих областей, где плотность плазмы ниже и волна длиннее. Причина различий в форме пика поля в AQSA и FBPIC (особенность 3) еще не до конца ясна. Амплитуда пика определяется разбросом электронов по поперечной скорости [63], поэтому это различие может появиться из-за разного численного нагрева в двух кодах. Форма “хвостовой” волны [101], наблюдаемой после области градиента плотности (особенность 4), также отличается в QSA и AQSA или FBPIC. Эта волна (видимая как гребень плотности) содержит электроны плазмы высокой энергии, ускоренные в областях плазмы, через которые пучок прошел ранее. Поскольку плотность плазмы там ниже, эти электроны появляются при больших $|\xi|$, и фронт хвостовой волны изгибается, что видно в моделировании AQSA и FBPIC, но не в QSA.

Также следует отметить, что модель AQSA воспроизводит особенности, возникающие из-за продольной неоднородности плазмы, аналогично PIC коду FBPIC, но в 80 раз быстрее, что близко к теоретической оценке, определяемой как отношение шагов моделирования $\Delta s / \Delta \xi = 100$.

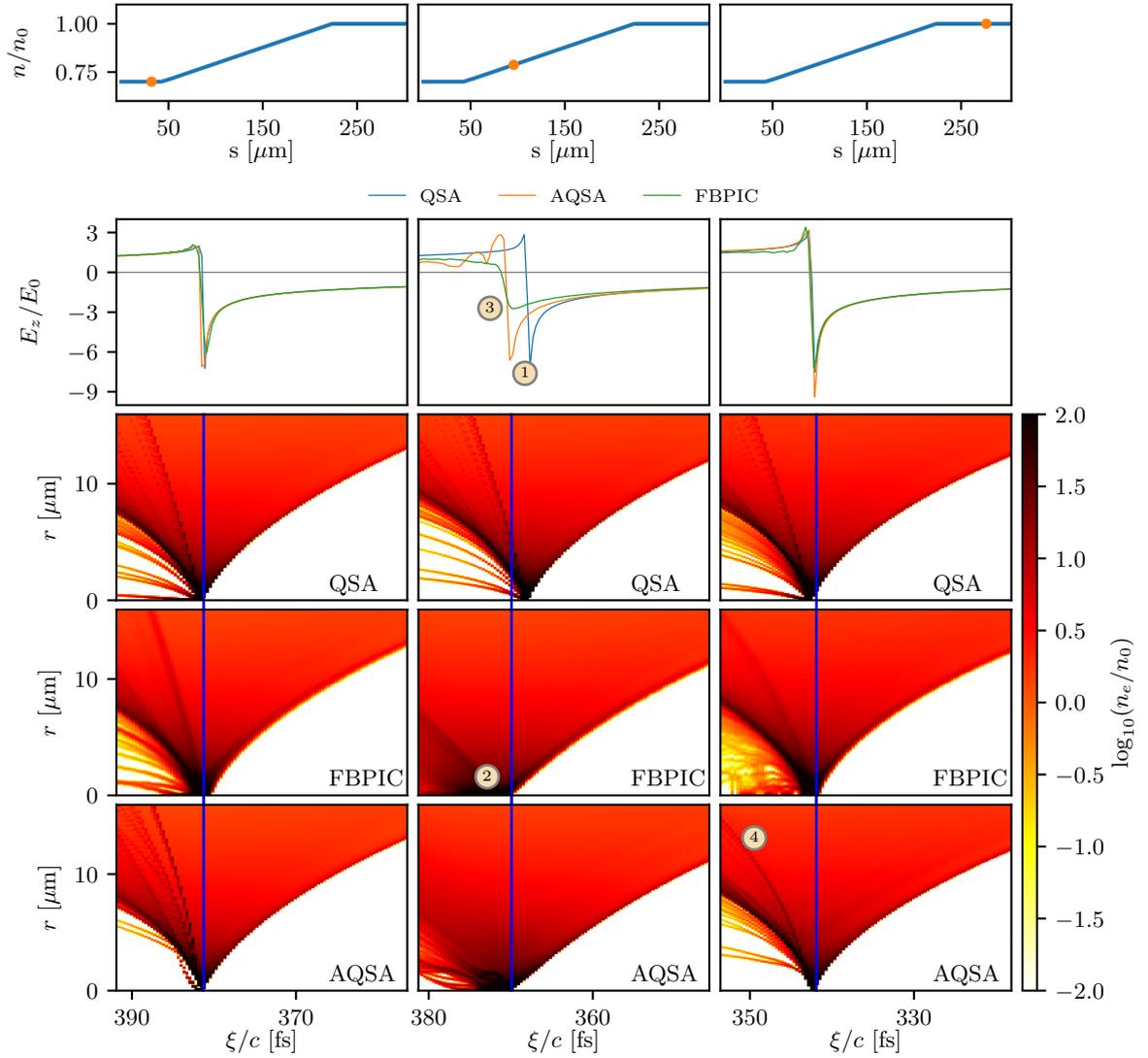


Рисунок 4.8 — Сравнение FBPIC и LCODE с использованием QSA и AQSA моделей: моделирование плазменной волны в режиме каверны в однородной плазме (левая и правая колонки) и в плазме с градиентом плотности (средняя колонка). В первом (верхнем) ряду показано расположение рассматриваемых сечений (оранжевые точки) на профиле плотности плазмы. Во втором ряду показано продольное электрическое поле $E_z(\xi)$, рассчитанное с помощью рассмотренных моделей, а в остальных рядах — карты электронной плотности, полученные с помощью QSA, FBPIC и AQSA, соответственно. Конечная плотность плазмы $n_0 = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ определяет единицу электрического поля $E_0 = \sqrt{4\pi n_0 m_e c^2}$. Синие вертикальные линии на картах плотности показывают продольное положение минимума поля E_z в моделировании AQSA для облегчения сравнения. Цифры в кружках указывают на особенности, обсуждаемые в тексте

4.3. Обсуждения границ применимости и дальнейшего развития модели

Описанная модель является лишь первым шагом к более полному и быстрому моделированию лазерного и плазменного кильватерного ускорения на основе квазистатического приближения. Уравнения на электрические поля можно расширить, оставив вторую производную ∂_{ss}^2 . Однако следующим важным шагом должно стать включение в модель захвата плазменных частиц на основе описанных в главе 2 идей. Сложность непосредственного учета захваченных плазменных частиц объясняется тем, что захват сопровождается уменьшением пространственного масштаба изменения параметров частиц до уровня, который не получается разрешить при разумном шаге сетки. Именно по этой причине мы тестировали новую модель на примере плазмы с положительными градиентами плотности. Отрицательные градиенты могут приводить к захвату частиц.

Выбранный метод численного решения уравнений, хотя и достаточно надежный, вряд ли является наилучшим. Поэтому еще одним направлением совершенствования модели будет оптимизация численного алгоритма.

В то время как QSA очень эффективно моделирует долгосрочную эволюцию плазменной волны, нет уверенности, что AQSA будет работать так же хорошо на больших временных масштабах. Разница в траекториях и параметрах отдельных частиц плазмы при разных s увеличивается с длиной окна моделирования, определяющей длительность эволюции волны. Для того, чтобы правильно разрешить это различие, шаг сетки Δs должен быть уменьшен, что обесценивает основное преимущество кодов с использованием квазистатического приближения.

4.4. Результаты

Как было показано выше, классическое квазистатического приближение не учитывает ряд эффектов, важных при исследовании сильнонелинейных волн. Поэтому исследование захвата плазменных электронов следует проводить на базе более точной модели, например, предложенной в этой главе. Новая модель открывает возможность быстрого исследования взаимодействия лазера и плазмы с учетом физических явлений, опущенных при описании лазера через его огибающую. Влияние неоднородностей плазмы на ускоряемые частицы может быть изучено более точно, чем в стандартном QSA. Полученные результаты согласуются как с аналитической теорией, так и с моделированием из первых принципов.

Глава 5. Каналирование лазерного излучения

Для режима взаимодействия лазера с плазмой, найденного в главе 3, плазма выступает не только в качестве ускоряющей структуры, но и в качестве фокусирующего элемента для лазерного импульса. Это позволяет упростить постановку эксперимента, но ограничивает возможность контроля характеристик ускоренных частиц. Работа в линейном режиме избавляет нас от этого недостатка. В этом случае процессы инжекции и ускорения электронов происходят отдельно. Изменяя условия для двух стадий, можно независимо регулировать заряд, размер и энергию пучка. Работа в линейном режиме означает переход на более низкие плотности плазмы, чем рассматривались ранее.

Плазма низкой плотности обладает менее выраженными фокусирующими свойствами. Поэтому потребуется внешняя фокусировка лазерного излучения. Для этих целей широкое распространение получили узкие капилляры. Капилляр предотвращает дифракцию лазерного излучения и увеличивает длину ускорения либо напрямую путем отражения импульса от стенок капилляра [37–48], либо через формирование внутри них специфических профилей плазмы [49–60].

В этой главе будем рассматривать распространение лазерного импульса в самых узких капиллярах, в которых импульс находится в прямом контакте со стенками капилляра. Будем предполагать, что стенки либо металлические, либо быстро ионизируются импульсом. Эти капилляры потенциально могут позволить ускорять частицы до высоких энергий с помощью лазерных драйверов с умеренной пиковой мощностью [46]. В этом случае длина ускорения и, как следствие, достижимая энергия зависят от скорости затухания импульса и от структуры волноводных мод в капилляре.

Теория распространения волн в металлических или ионизированных капиллярах для параметров излучения, рассматриваемых в работе, еще не завершена. Классическая волноводная теория [102] не полностью применима к этим условиям, как было показано в работе [62]. Коэффициенты затухания

можно получить либо с использованием сильных упрощающих предположений [62, 103, 104], либо численно, в комбинации с другими эффектами [104, 105]. В то же время существуют экспериментальные доказательства того, что затухание коротких, высококонтрастных лазерных импульсов в металлических [106] или ионизированных [107, 108] капиллярах достаточно мало, чтобы рассмотреть возможность использования узких капилляров для лазерного кильватерного ускорения.

Далее мы построим линейную теорию для вычисления коэффициентов затухания и структуры волноводных мод в интересующей нас области параметров.

Отметим, что при переходе на пониженную плотность плазмы захват электронов не происходит (Глава 3) и потребуются сторонняя инжекция ускоряемого сгустка. Далее мы не будем касаться вопросов возбуждения кильватерных волн и инжекции в них ускоряемых сгустков.

5.1. Линейная теория

В этой главе будем использовать цилиндрические координаты (r, φ, z) , ось z является направлением распространения импульса. Рассмотрим круглый волновод радиуса a с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & r < a, \\ \varepsilon_w, & r \geq a. \end{cases} \quad (5.1)$$

Следуя стандартному подходу [62, 109, 110], возьмем решение уравнений Максвелла для компонент электрического (\vec{E}) и магнитного (\vec{B}) полей в виде

$$E_z = e^{ikz - i\omega t + im\varphi} \begin{cases} E_1 J_m(\chi_1 r), & r < a, \\ E_2 K_m(\chi_2 r), & r \geq a; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$B_z = e^{ikz-i\omega t+im\varphi} \begin{cases} B_1 J_m(\chi_1 r), & r < a, \\ B_2 K_m(\chi_2 r), & r \geq a; \end{cases} \quad (5.3)$$

$$E_r = \frac{(-1)^j}{\chi_j^2} \left(-ik \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{m\omega}{cr} B_z \right), \quad (5.4)$$

$$E_\varphi = \frac{(-1)^j}{\chi_j^2} \left(\frac{km}{r} E_z + \frac{i\omega}{c} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \quad (5.5)$$

$$B_r = \frac{(-1)^j}{\chi_j^2} \left(-ik \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{m\omega\varepsilon}{cr} E_z \right), \quad (5.6)$$

$$B_\varphi = \frac{(-1)^j}{\chi_j^2} \left(\frac{km}{r} B_z - \frac{i\omega\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right), \quad (5.7)$$

где $j = 1, 2$ соответствует внутренней и внешней областям,

$$\chi_1^2 = \omega^2/c^2 - k^2, \quad (5.8)$$

$$\chi_2^2 = k^2 - \varepsilon_w \omega^2/c^2, \quad (5.9)$$

ω — частота излучения, k — продольное волновое число, m — целое азимутальное число, а J_m и K_m — функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Бесселя, соответственно. Непрерывность E_φ , E_z , B_φ и B_z при $r = a$ приводит к условию

$$\left(\frac{J'_m}{J_m} + \frac{\chi_1 K'_m}{\chi_2 K_m} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_w} \frac{J'_m}{J_m} + \frac{\chi_1 K'_m}{\chi_2 K_m} \right) = \frac{1}{\varepsilon_w} \left(\frac{mkc}{\omega \chi_1 a} \right)^2 \left(1 + \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} \right)^2, \quad (5.10)$$

где штрихи обозначают производные относительно аргументов, а аргументами функций Бесселя являются: $J_m(\chi_1 a)$, $J'_m(\chi_1 a)$, $K_m(\chi_2 a)$, и $K'_m(\chi_2 a)$.

Чтобы решить уравнение (5.10), нужно определить ε_w . Металлы и быстро ионизированные твердые стенки обычно характеризуются формулой Друде [111]

$$\varepsilon_w(\omega) = 1 + i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 - i\omega\tau)}, \quad (5.11)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2/m_e = 4\pi\sigma_0/\tau$ — квадрат плазменной частоты электронов проводимости, n_e — их плотность, σ_0 — проводимость, τ — частота столкновений электронов в среде. Формула (5.11) правильно описывает отражение коротких

мощных лазерных импульсов от различных материалов, которые при высокой интенсивности ведут себя как “универсальное плазменное зеркало” [61].

Далее будем рассматривать медный капилляр радиуса $a = 15$ мкм и лазерный импульс с длиной волны $\lambda = 850$ нм. Электрическое поле падающего лазерного импульса имеет одинаковое направление по всему сечению, что соответствует азимутальным модам с $|m| = 1$ и соотношению

$$E_r = -imE_\varphi \quad (5.12)$$

между компонентами поля. Возбужденные капиллярные моды должны иметь такую же азимутальную зависимость, поэтому сконцентрируемся на модах с $|m| = 1$.

Поскольку $a \gg \lambda$, волноводные моды низшего порядка являются почти плоскими волнами и аналогично имеют $k \approx \omega/c$. Медь на высоких частотах характеризуется значениями $\sigma_0 \approx 1.6 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ и $\tau \approx 1.3 \cdot 10^{-14} \text{ с}$ [62]. Для этих значений

$$\varepsilon_w \approx -30 + 1.1i, \quad |\varepsilon_w| \gg 1, \quad \varkappa_2 \gg \omega/c \gg 1/a, \quad (5.13)$$

что соответствует малому проникновению излучения вглубь материала. В этом случае обычно используются граничные условия Леонтовича [110], которые связывают тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей на стенках:

$$E_\varphi = \zeta B_z, \quad E_z = -\zeta B_\varphi, \quad (5.14)$$

где $\zeta = 1/\sqrt{\varepsilon_w}$ — поверхностный импеданс. Эти условия приводят к дисперсионному соотношению [62]

$$\left(\frac{J'_m}{J_m} - \frac{i\varkappa_1 c \zeta}{\omega} \right) \left(\frac{J'_m}{J_m} - \frac{i\varkappa_1 c}{\omega \zeta} \right) = \left(\frac{m k c}{\omega \varkappa_1 a} \right)^2. \quad (5.15)$$

Как видно из сравнения уравнений (5.10) и (5.15), использование условий (5.14) эквивалентно приближению большого аргумента для модифицированных функций Бесселя ($K'_m/K_m \approx -1$), пренебрежением k^2 в Eq. (5.9) и пренебрежением отношения $\varkappa_1^2/\varkappa_2^2$ в правой части уравнения (5.10).

При высокой проводимости стенок в задаче присутствуют два малых параметра: импеданс $|\zeta|$ и отношение $\varkappa_1 c/\omega$. В зависимости от их соотношения решения уравнения (5.15) принимают качественно различные формы. В случае

$$|\zeta| \ll \varkappa_1 c/\omega \quad (5.16)$$

(очень высокая проводимость) решение соответствует результатам классической теории волноводов [110]: существуют две группы мод, *ТМ* моды, для которых

$$J_m(\varkappa_1 a) = 0, \quad E_z \neq 0, \quad B_z \equiv 0 \quad (5.17)$$

и *ТЕ* моды, для которых

$$J'_m(\varkappa_1 a) = 0, \quad E_z \equiv 0, \quad B_z \neq 0. \quad (5.18)$$

Амплитуда волны затухает как $e^{-\alpha z}$, где

$$\alpha = \frac{\omega \operatorname{Re}(\zeta)}{kac}, \quad (5.19)$$

$$\alpha = \frac{c\varkappa_1^2 \operatorname{Re}(\zeta)}{\omega ka} \left(1 + \frac{m^2 \omega^2}{c^2 \varkappa_1^2 (a^2 \varkappa_1^2 - m^2)} \right) \quad (5.20)$$

для *ТМ* и *ТЕ* мод соответственно.

В случае

$$|\zeta| \gg \varkappa_1 c/\omega \quad (5.21)$$

(малая длина волны или большой радиус капилляра) решения для $m \neq 0$ представляют собой циркулярно поляризованные волны [62]

$$J_{m\pm 1}(\varkappa_1 a) = 0, \quad \vec{B} = \pm i \vec{E}, \quad E_r = \pm i E_\varphi \quad (5.22)$$

с коэффициентом затухания

$$\alpha = \frac{\varkappa_1^2 \operatorname{Re}(\zeta)}{2k^2 a |\zeta|^2}. \quad (5.23)$$

Если $m > 0$, то решения, соответствующие верхнему и нижнему знакам в уравнении (5.22), называются *L* и *R* модами [62]. Только *R* моды соответствуют

требованию (5.12) и могут быть эффективно возбуждены гауссовским импульсом. R моды с левой круговой поляризацией также существуют и соответствуют $m < 0$ и верхним знакам в уравнении (5.22).

С ростом $|\zeta|$ моды TM_{mn} непрерывно трансформируются в моды R_{mn} , где индексы m и n обозначают азимутальные и радиальные волновые числа [62]. Моды TE_{mn} превращаются в $L_{m,n-1}$, а мода TE_{m1} исчезает.

5.2. Структура мод и скорость затухания

Для рассматриваемого набора параметров условие (5.21) выполняется, но без большого запаса. Даже для самой низкой моды (R_{11}) с $\kappa_1 a \approx 2.40483$ имеем

$$\zeta \approx 0.0032 - 0.18i, \quad \delta \equiv \frac{\kappa_1 c}{|\zeta| \omega} \sim 0.12. \quad (5.24)$$

В связи с этим возникает вопрос, насколько точно приближенное решение (выражение (5.23)) описывает затухание. Чтобы ответить на него, мы сравним точное численное решение уравнения (5.10) и его приближенное решение для раз-

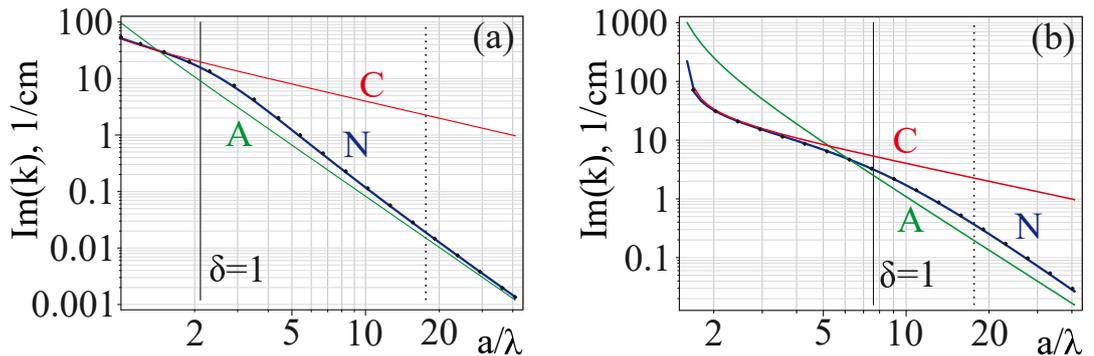


Рисунок 5.1 — Скорости затухания для (a) R_{11} или TM_{11} мод и (b) R_{13} или TM_{13} мод, вычисленные по классической формуле (5.19) (кривые ‘C’), в приближении малых длин волн (5.23) (‘A’) и численно путем решения уравнения (5.10) (‘N’). Черные точки на кривой “N” получены путем решения уравнения (5.15). Тонкие вертикальные линии отмечают границу между приближениями ($\delta = 1$), пунктирные вертикальные линии соответствуют рассматриваемому набору параметров

личных отношений a/λ (рисунок 5.1) и для различных радиальных волновых чисел n (рисунки 5.2 и 5.3). Для R -мод с малыми n приближенное выражение (5.23) всегда недооценивает затухание. Для радиальной моды самого низкого порядка (R_{11}), которая должна распространяться на большое расстояние, формула (5.23) дает ошибку около 20%. Скорости затухания для R -мод более высокого порядка, которые должны быстро затухать, верны с точностью до двойки (рисунок 5.3), и ошибка почти не уменьшается с уменьшением параметра δ [рисунок 5.1(b)]. Численное решение уравнения (5.15) почти совпадает с решением уравнения (5.10) (рисунок 5.1), поэтому ошибка возникает из-за приближения (5.21), а не из-за использования условий Леонтовича (5.14). Любопытно, что приближенное выражение верно для R -мод с $n \sim 7$, для которых $\delta \sim 1$, и неравенство (5.21) не справедливо. Разница в действительных частях k меньше 10-15% для рассматриваемых параметров и исчезает по мере увеличения отношения a/λ . Выводы о слабом затухании излучения в рассматриваемом диапазоне параметров согласуются с проведенными ранее экспериментами [106].

Разница между рассмотренными решениями хорошо видна по структуре распределения электрического поля, но только для $n > 1$ (рисунок 5.4). Моды

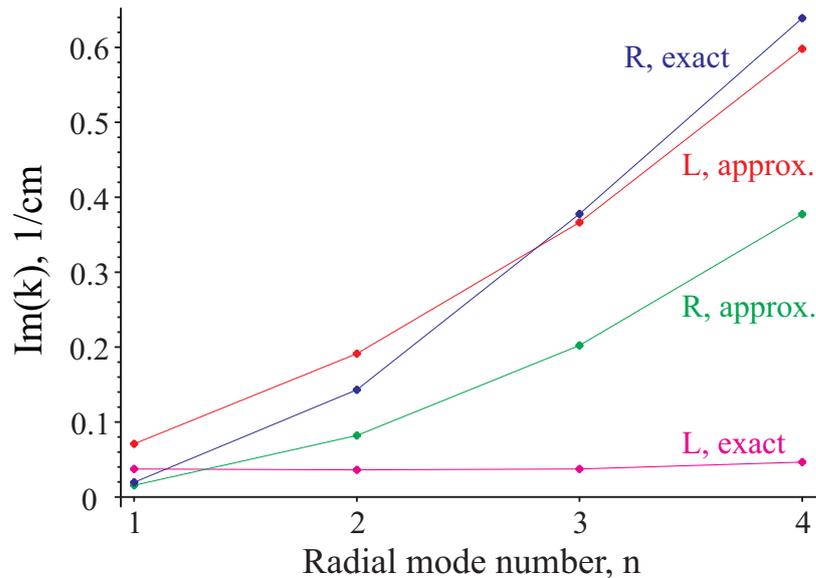


Рисунок 5.2 — Коэффициенты затухания для различных мод, полученные численно (exact) и с использованием приближения (5.21) (approx) для базового набора параметров

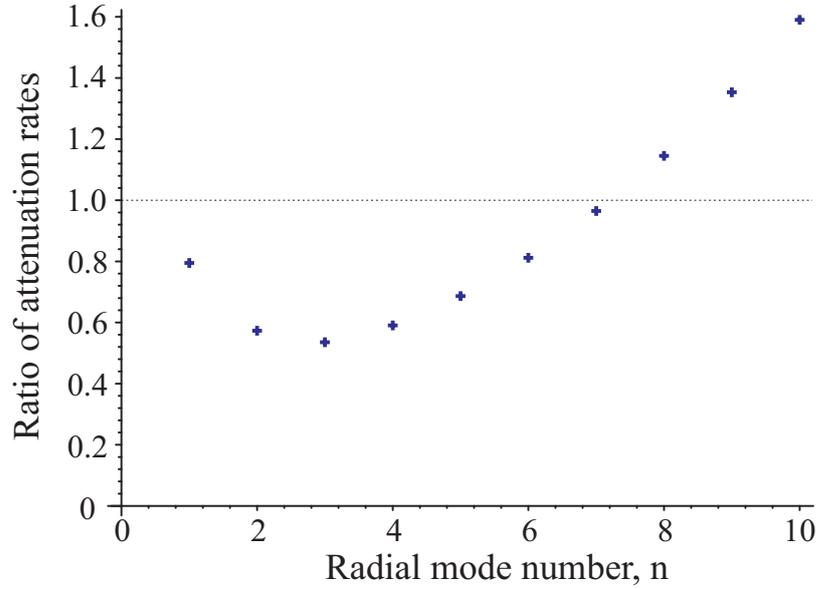


Рисунок 5.3 — Отношение скоростей затухания, полученных с использованием приближения (5.21) и численно для различных R -мод при базовом наборе параметров

самого низкого порядка R_{11} и TE_{11} , которые содержат большую часть падающей энергии, в соответствующих предельных случаях выглядят аналогично. Основное отличие состоит в том, что в пределе (5.21) электрическое поле на стенках отсутствует. Отсутствие (или, точнее, очень малое значение) поля на стенках объясняет низкую скорость затухания при $\delta \ll 1$. Для высших мод (второй ряд на рисунке 5.4) точное решение содержит черты обоих приближений: векторы поля неколлинеарны, как в TM -модах, и поле исчезает на стенках, как следует из уравнения (5.22). Наиболее существенные различия наблюдаются для L -мод (третий ряд на рисунке 5.4): точное решение визуально ближе к моде TE и, следовательно, может быть возбуждено с сопоставимой эффективностью.

Для изучения возбуждения отдельных мод падающим излучением рассмотрим линейно поляризованный лазерный импульс с гауссовым распределением поля на входе в капилляр:

$$E_y = E_l e^{-r^2/\sigma_r^2}, \quad E_x = 0. \quad (5.25)$$

Для широкого лазерного импульса ($\sigma_r \gg \lambda$) можно пренебречь продольной составляющей электрического поля лазерного импульса и вычислять долю энергии C_{mode} , которая идет на возбуждение выделенной моды, интегрируя произ-

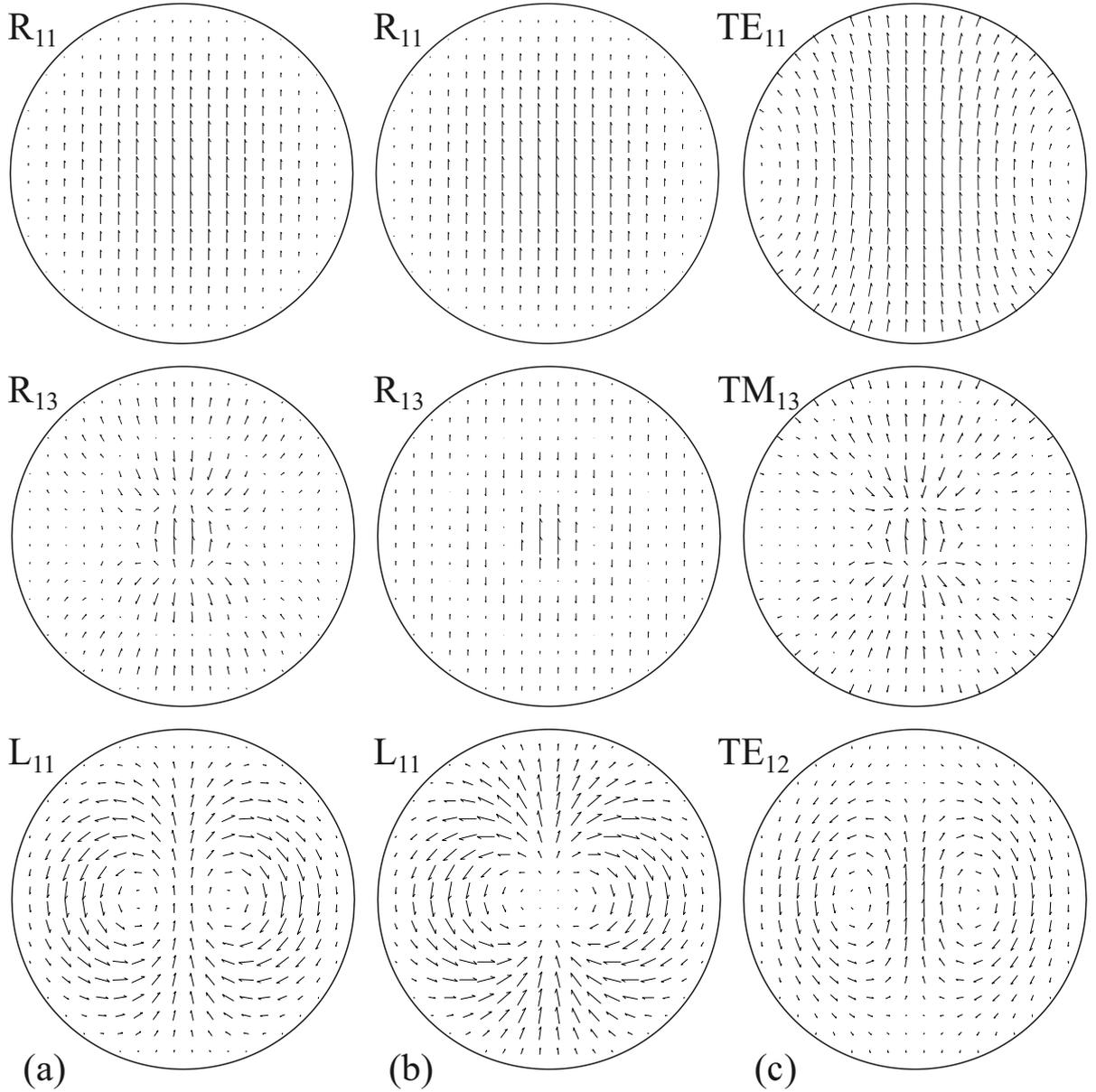


Рисунок 5.4 — Распределение поперечного электрического поля для различных мод, рассчитанные по точным уравнениям (5.10) (а) и с использованием приближений (5.21) (б) и (5.16) (с)

ведения полей по сечению капилляра S :

$$C_{\text{mode}} = \frac{(\int E_y E_{\text{mode},y} dS)^2}{\int E_y^2 dS \int E_{\text{mode}}^2 dS}, \quad (5.26)$$

где \vec{E}_{mode} — поперечное электрическое поле для R_{1n} или L_{1n} моды.

При $\sigma_r/a \approx 0.64$ до 98% начальной энергии переходит в слабо затухающую моду R_{11} (рисунок 5.5). При меньших радиусах импульса часть энергии идет на возбуждение моды L_{11} . Поскольку она также является слабо затухающей

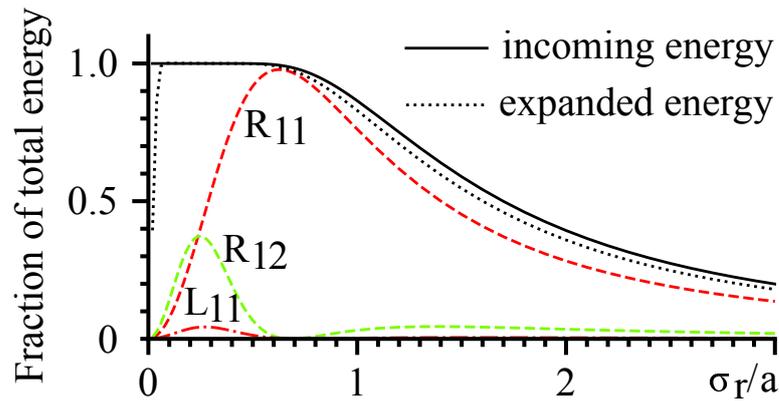


Рисунок 5.5 — Доля энергии лазера, попадающая в отдельные моды волновода, в зависимости от радиуса падающего импульса. Черная сплошная линия — это полная энергия лазера, геометрически попадающая в капилляр. Черная пунктирная линия — энергия, перешедшая в первые пятнадцать мод (рисунок 5.2), ее наличие может повлиять на возбуждение кильватерных полей внутри капилляра.

5.3. Основные результаты

При рассматриваемых параметрах возникает особый режим распространения лазерного импульса через капилляр, в котором отношение длины волны лазерного излучения к радиусу капилляра меньше абсолютного значения поверхностного импеданса, но не намного меньше. В этих условиях собственные моды капилляра отличаются от тех, которые известны из классической волноводной теории. Как следует из точного решения уравнений Максвелла в круглом капилляре, имеющиеся приближенные решения предсказывают скорость затухания с ошибкой в пределах двух раз. При определенном радиусе падающего лазерного импульса до 98% начальной энергии переходит в слабозатухающую основную моду. При меньших радиусах импульс также возбуждает медленно затухающую более высокую моду, что не предсказывается приближенными моделями. Результаты этой главы опубликованы в работах [71, 75].

Заключение

В диссертации разработаны несколько алгоритмов и описаны подходы, позволяющие проводить исследования лазерного кильватерного ускорения. С их помощью проведен анализ взаимодействия лазерного импульса умеренной интенсивности с плазмой. Результаты работы опубликованы в статьях [71–75].

Разработан устойчивый алгоритм восстановления распределения плотности сверхзвуковой газовой струи при малой оптической толщине. С его помощью измерены параметры газовой струи, создаваемой спроектированным в ИЛФ СО РАН соплом Лавалья. Характерный размер квазиоднородной области составляет 0.8 мм, а плотность газа достигает $5.5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, что является приемлемым для экспериментов по лазерному кильватерному ускорению.

Проанализированы несколько вариантов модификации квазистатического приближения для исследования захвата плазменных электронов в кильватерную волну. Показано несовершенство моделей, ограничивающихся простым переводом частиц из плазменных в пучковые. Реализована модификация квазистатического кода, позволяющая производить быстрые оценки возможности захвата электронов плазмы кильватерной волной. Достигается прирост производительности на три порядка по сравнению с обычными PIC кодами.

Обнаружено, что фокусировка лазерного импульса вглубь плазмы позволяет инициировать формирование моноэнергетического сгустка электронов при параметрах взаимодействия, потенциально реализуемых в ИЛФ СО РАН. При этом взаимодействие происходит в умеренно нелинейном режиме, формирование электронного сгустка происходит во втором периоде кильватерной волны, и ускоренные электроны имеют энергию порядка 75 МэВ.

Показано, что классическое квазистатическое приближение не учитывает ряд эффектов, важных для исследования сильнонелинейных волн. Поэтому захват плазменных электронов следует изучать на базе более точной модели. Построение такой модели возможно, а ее предсказания согласуются как с ана-

литической теорией, так и с моделированием из первых принципов. Однако предложенная модель еще не включает эффекты захвата плазменных электронов, а устойчивость численной схемы не гарантируется. Рекомендуется продолжить дальнейшее развитие этой модели. В первую очередь важно разработать точную численную схему для предложенных уравнений, обладающую абсолютной устойчивостью. А затем приступить к тестированию в широком диапазоне параметров и исправлению обнаруженных неточностей.

Построена полуаналитическая теория, позволяющая определять модовый состав волновода в широкой области параметров. Особенно рассматривались параметры, интересные для кильватерных экспериментов: длина волны излучения 850 нм при радиусе капилляра 15 мкм. Обнаружено, что существующие приближенные теории имеют заметные неточности как в коэффициентах затухания, так и в возможности возбуждения отдельных мод линейно-поляризованным лазерным импульсом. Выводы линейной теории согласуются с проведенными ранее экспериментами.

Список литературы

- [1] 2020 roadmap on plasma accelerators / F. Albert, M. E. Couprie, A. Debus [et al.]. — Текст : электронный // New Journal of Physics. — 2021 — Vol. 23. — P. 031101. — URL: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abcc62>. — Дата публикации: 17.03.2021.
- [2] Hogan, M.J. Electron and Positron Beam-Driven Plasma Acceleration / M. J. Hogan. — Текст : электронный // Reviews of Accelerator Science and Technology. — 2016 — Vol. 9. — P. 63-83. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S1793626816300036> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [3] Nakajima, K. Laser-driven plasma electron acceleration and radiation / K. Nakajima. // Reviews of Accelerator Science and Technology. — 2016 — Vol. 9. — P. 19-61. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S1793626816300024> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [4] Adli, E. Proton-Beam-Driven Plasma Acceleration / E. Adli, P. Muggli. — Текст : электронный // Reviews of Accelerator Science and Technology. — 2016 — Vol. 9. — P. 85-104. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S1793626816300048> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [5] Directions in plasma wakefield acceleration / B. Hidding, B. Foster, M. J. Hogan [et al.]. — Текст : электронный // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2019 — Vol. 377 — P. 20190215. — URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2019.0215>. — Дата публикации: 24.06.2019.
- [6] Schulte, D. Application of advanced accelerator concepts for colliders / D. Schulte. — Текст : электронный // Reviews of Accelerator Science and Technology. — 2016 — Vol. 9. — P. 209-233. — URL:

- <http://dx.doi.org/10.1142/S1793626816300103> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [7] Principles and applications of compact laser-plasma accelerators / V. Malka, J. Faure, Y. A. Gauduel [et al.]. — Текст : электронный // Nature Physics. — 2008. — Vol. 4 — P. 447-453. — URL: <https://doi.org/10.1038/nphys966> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [8] Albert, F. Applications of laser wakefield accelerator-based light sources / F. Albert and A. G. R. Thomas. — Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2016 — Vol. 58. — P. 103001. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0741-3335/58/10/103001>. — Дата публикации: 02.09.2016.
- [9] Florio, M. The socio-economic impact of a breakthrough in the particle accelerators technology: A research agenda / M. Florio, A. Bastianin, P. Castelnovo. — Текст : электронный // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. — 2018 — Vol. 909 — P. 21-26. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2018.02.013>. — Дата публикации: 07.02.2018.
- [10] Esarey, E. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators / E. Esarey, C. B. Schroeder, W. P. Leemans. — Текст : электронный // Reviews of Modern Physics. — 2009 — Vol. 81 — Iss. 3 — P. 1229-1285. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1229>. — Дата публикации: 27.08.2009.
- [11] Hooker, S. M. Developments in laser-driven plasma accelerators / S. M. Hooker. — Текст : электронный // Nature Photonics — 2013 — Vol. 7. — P. 775-782. — URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.234>. — Дата публикации: 27.09.2013.
- [12] Coherent combining of multimillijoule parametric-amplified femtosecond pulses / V. E. Leshchenko, V. I. Trunov, S. A. Frolov [et al.]. — Текст :

- электронный // Laser Physics Letters. — 2014 — Vol. 11. — P. 095301. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1612-2011/11/9/095301>. — Дата публикации: 14.07.2014.
- [13] Laser-driven plasma wakefield electron acceleration and coherent femtosecond pulse generation in X-ray and gamma ranges / V. I. Trunov, K. V. Lotov, K. V. Gubin [et al.]. — Текст : электронный // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Vol. 793. — P. 012028. — URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/793/1/012028> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [14] Characterization of neutral density profile in a wide range of pressure of cylindrical pulsed gas jets / V. Malka, C. Coulaud, J. P. Geindre [et al.] — Текст : электронный // Review of Scientific Instruments. — 2000. — Vol. 71, nr. 6. — P. 2329-2333. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.1150619>. — Дата публикации: 01.06.2000.
- [15] Malka, V. Laser plasma accelerators / V. Malka — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2012. — Vol. 19. — P. 055501. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3695389>. — Дата публикации: 05.04.2012.
- [16] Vay, J.-L. Simulations for Plasma and Laser Acceleration / J.-L. Vay, R. Lehe. — Текст : электронный // Reviews of Accelerator Science and Technology. — 2016 — Vol. 9. — P. 165-186. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S1793626816300085>. — Дата публикации: 14.07.2014.
- [17] Lotov, K. V. Simulation of ultrarelativistic beam dynamics in the plasma wake-field accelerator / K. V. Lotov. — Текст : электронный // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A . — 1998 — Vol. 410. — P. 461-468. — URL: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(98\)00178-8](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(98)00178-8). — Дата публикации: 21.06.1998.

- [18] Design of an Experiment on Wakefield Acceleration on the VEPP-5 Injection Complex / A. V. Burdakov, A. M. Kudryavtsev, P. V. Logatchov [et. al]. — Текст : электронный // Plasma Physics Reports. — 2005 — Vol. 31. — P. 292-299. — URL: <https://doi.org/10.1134/1.1904145> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [19] Vay, J.-L. Noninvariance of Space- and Time-Scale Ranges under a Lorentz Transformation and the Implications for the Study of Relativistic Interactions / J.-L. Vay. — Текст : электронный // Physical Review Letters. — 2007 — Vol. 98. — P. 130405. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.130405>. — Дата публикации: 30.03.2007.
- [20] Numerical methods for instability mitigation in the modeling of laser wakefield accelerators in a Lorentz-boosted frame / J.-L. Vay, C. G. R. Geddes, E. Cormier-Michel, D. P. Grote. — Текст : электронный // Journal of Computational Physics. — 2011. — Vol. 230 — P. 5908-5929. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2011.04.003>. — Дата публикации: 12.04.2011.
- [21] Sprangle, P. Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions / P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting. — Текст : электронный // Physical Review Letters. — 1990. — Vol. 64, nr. 17. — P. 2011-2014. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2011>. — Дата публикации: 23.04.1990.
- [22] Mora, P. Kinetic modeling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas / P. Mora, T. M. Antonsen. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 1997. — Vol. 4. — P. 217-229. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.872134>. — Дата публикации: 03.09.1998.
- [23] Plasma wakefield acceleration studies using the quasi-static code WAKE / N. Jain, J. Palastro, T. M. Antonsen [et al.]. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2015. — Vol. 22. — P. 023103. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4907159>. — Дата публикации: 05.02.2015.

- [24] Sosedkin, A. P. LCODE: A parallel quasistatic code for computationally heavy problems of plasma wakefield acceleration / A. P. Sosedkin, K. V. Lotov. — Текст : электронный // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. — 2016. — Vol. 829. — P. 350-352. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2015.12.032>. — Дата публикации: 01.09.2016.
- [25] An improved iteration loop for the three dimensional quasi-static particle-in-cell algorithm: QuickPIC. W. An, V. K. Decyk, W. B. Mori, T. M. Antonsen Jr. — Текст : электронный // Journal of Computational Physics. — 2013. — Vol. 250. P. 165-177. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2013.05.020>. — Дата публикации: 01.10.2013.
- [26] HiPACE: a quasi-static particle-in-cell code / T. Mehrling, C. Benedetti, C. B. Schroeder, J. Osterhoff. — Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2014. — Vol. 56. — P. 084012. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0741-3335/56/8/084012>. — Дата публикации: 22.07.2014.
- [27] Pukhov, A. Stable Particle Acceleration in Coaxial Plasma Channels / A. Pukhov, J. P. Farmer. — Текст : электронный // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 121. — P. 264801. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.264801>. — Дата публикации: 27.12.2018.
- [28] Zhu, W. Studies of spectral modification and limitations of the modified paraxial equation in laser wakefield simulations / W. Zhu, J. P. Palastro, T. M. Antonsen. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2012. — Vol. 19. P. 033105. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3691837>. — Дата публикации: 18.03.2012.
- [29] QUICKPIC: A highly efficient particle-in-cell code for modeling wakefield acceleration in plasmas / C. Huang, V.K. Decyk, C. Ren [et al.]. — Текст

- : электронный // Journal of Computational Physics. — 2006. — Vol. 217. — P. 658-679. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2006.01.039>. — Дата публикации: 20.09.2006.
- [30] Спицын, Р. И. Численная реализация квазистатической модели лазерного драйвера для плазменного кильватерного ускорения : направление подготовки 03.04.02 «Физика» : магистерская диссертация / Спицын Роман Игоревич; Новосибирский государственный университет. — Новосибирск, 2018. — 45 с. — Текст : непосредственный.
- [31] Accuracy of the time-averaged ponderomotive approximation for laser-plasma accelerator modeling / D. Terzani, C. Benedetti, C. B. Schroeder, E. Esarey. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2021. — Vol. 28. — P. 063105. — URL: <https://doi.org/10.1063/5.0050580>. — Дата публикации: 14.06.2021.
- [32] Propagation and guiding of intense laser pulses in plasmas / P. Sprangle, E. Esarey, J. Krall, G. Joyce. — Текст : электронный // Physical Review Letters. — 1992. — Vol. 69, nr. 15. — P. 2200-2203. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2200>. — Дата публикации: 12.10.1992.
- [33] Optically guided laser wake-field acceleration / E. Esarey, P. Sprangle, J. Krall, [et al.]. — Текст : электронный // Physics of Fluids B: Plasma Physics. — 1993. — Vol. 5. — P. 2690-2697. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.860707> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [34] Lotov, K. V. Simulation of ultrarelativistic beam dynamics in plasma wake-field accelerator / K. V. Lotov. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 1998. — Vol. 5. — P. 785-791. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.872765>. — Дата публикации: 04.06.1998.
- [35] Morshed, S. Efficient simulation of electron trapping in laser and plasma wakefield acceleration / S. Morshed, T. M. Antonsen, J. P. Palastro. — Текст

- : электронный // *Physics of Plasmas*. — 2010. — Vol. 17. — P. 063106. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3432685>. — Дата публикации: 16.06.2010.
- [36] Petawatt Laser Guiding and Electron Beam Acceleration to 8 GeV in a Laser-Heated Capillary Discharge Waveguide / A. J. Gonsalves, K. Nakamura, J. Daniels [et al.]. — Текст : электронный // *Physical Review Letters*. — 2019. — Vol. 122. — P. 084801. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.084801>. — Дата публикации: 25.02.2019.
- [37] Monomode guiding of 10^{16} W/cm² laser pulses over 100 Rayleigh length in hollow capillary dielectric tubes / F. Dorchies, J. R. Marques, B. Cros [et al.]. — Текст : электронный // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 82, nr. 23. — P. 4655-4658. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.4655>. — Дата публикации: 07.06.1999.
- [38] Extending plasma accelerators: Guiding with capillary tubes / B. Cros, C. Courtois, G. Malka [et al.]. — Текст : электронный // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2000. — Vol. 28, nr. 4 — P. 1071-1077. — URL: <https://doi.org/10.1109/27.893291>. — Дата публикации: 08.2000.
- [39] Kitagawa, Y. Electron Acceleration in an Ultraintense-Laser-Illuminated Capillary / Y. Kitagawa, Y. Sentoku, S. Akamatsu [et al.]. — Текст : электронный // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 92. — P. 205002. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.205002>. — Дата публикации: 19.05.2004.
- [40] Laser-plasma electron acceleration in dielectric capillary tubes / G. Genoud, K. Cassou, F. Wojda [et al.]. — Текст : электронный // *Applied Physics B*. — 2011. — Vol. 105. — P. 309-316. — URL: <https://doi.org/10.1007/s00340-011-4639-4>. — Дата публикации: 29.07.2011.

- [41] Study of electron acceleration and x-ray radiation as a function of plasma density in capillary-guided laser wakefield accelerators / J. Ju, K. Svensson, H. Ferrari [et al.]. — Текст : электронный // *Physics of Plasmas*. — 2013. — Vol. 20. — P. 083106. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4817747>. — Дата публикации: 06.08.2013.
- [42] Enhanced stability of laser wakefield acceleration using dielectric capillary tubes / M. Hansson, L. Senje, A. Persson [et al.]. — Текст : электронный // *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*. — 2014. — Vol. 17. — P. 031303. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.17.031303>. — Дата публикации: 17.03.2014.
- [43] Analysis of x-ray emission and electron dynamics in a capillary-guided laser wakefield accelerator. J. Ju, G. Genoud, H. E. Ferrari [et al.]. — Текст : электронный // *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*. — 2014. — Vol. 17. — P. 051302. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.17.051302>. — Дата публикации: 19.05.2014.
- [44] Study of the plasma wave excited by intense femtosecond laser pulses in a dielectric capillary / V. Eremin, Yu. Malkov, V. Korolikhin [et al.]. — Текст : электронный // *Physics of Plasmas*. — 2012. — Vol. 19. — P. 093121. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4754868>. — Дата публикации: 28.09.2012.
- [45] Lotov, K. V. Driver channeling for laser wakefield accelerator / K. V. Lotov. *Particle Accelerators*. — 1999. — Vol. 63. — P. 139-146. — Текст : непосредственный
- [46] Lotov, K. V. Laser wakefield acceleration in narrow plasma-filled channels / K. V. Lotov. — Текст : электронный // *Laser and Particle Beams*. — 2001. — Vol. 19. — P. 219-222. — URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0263034601192098>. — Дата публикации: 18.01.2002.

- [47] Numerical modeling of multi-GeV laser wakefield electron acceleration inside a dielectric capillary tube / B. S. Paradkar, B. Cros, P. Mora, G. Maynard. — Текст : электронный // *Physics of Plasmas*. — 2013. — Vol. 20. — P. 083120. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4819718>. — Дата публикации: 29.08.2013.
- [48] Curcio, A. Tuning of betatron radiation in laser-plasma accelerators via multimodal laser propagation through capillary waveguides / A. Curcio, D. Giulietti, M. Petrarca. — Текст : электронный // *Physics of Plasmas*. — 2017. — Vol. 24. — P. 023104. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4975185>. — Дата публикации: 06.02.2017.
- [49] GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator / W. P. Leemans, B. Nagler, A. J. Gonsalves [et al.]. — Текст : электронный // *Nature Physics*. — 2006. — Vol. 2. — P. 696-699. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys418>. — Дата публикации: 24.09.2006.
- [50] GeV plasma accelerators driven in waveguides / S. M. Hooker, E. Brunetti, E. Esarey [et al.]. — Текст : электронный // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2007. — Vol. 49. — P. B403-B410. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0741-3335/49/12B/S37>. — Дата публикации: 19.11.2007.
- [51] Progress on laser plasma accelerator development using transversely and longitudinally shaped plasmas / W. P. Leemans, E. Esarey, C. G. R. Geddes [et al.]. — Текст : электронный // *Comptes Rendus Physique*. — 2009. — Vol. 10. — P. 130-139. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.crhy.2009.05.001>. — Дата публикации: 01.03.2009.
- [52] Multi-GeV Electron Beams from Capillary-Discharge-Guided Subpetawatt Laser Pulses in the Self-Trapping Regime / W. P. Leemans, A. J. Gonsalves, H.-S. Mao [et al.]. — Текст : электронный //

- Physical Review Letters. — 2014. — Vol. 113 — P. 245002. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.245002>. — Дата публикации: 08.12.2014.
- [53] Generation and pointing stabilization of multi-GeV electron beams from a laser plasma accelerator driven in a pre-formed plasma waveguide / A. J. Gonsalves, K. Nakamura, J. Daniels [et al.]. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2015. — Vol. 22. — P. 056703. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4919278>. — Дата публикации: 15.05.2015.
- [54] Multistage coupling of independent laser-plasma accelerators / S. Steinke, J. van Tilborg, C. Benedetti [et al.]. — Текст : электронный // Nature. — 2016. — Vol. 530. — P. 190-193. — URL: <http://www.nature.com/doi/10.1038/nature16525>. — Дата публикации: 01.02.2016.
- [55] Laser wakefield acceleration of electron beams beyond 1 GeV from an ablative capillary discharge waveguide / H. Lu, M. Liu, W. Wang [et al.]. — Текст : электронный // Applied Physics Letters. — 2011. — Vol. 99. — P. 091502. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3626042>. — Дата публикации: 31.08.2011.
- [56] GeV-scale electron acceleration in a gas-filled capillary discharge waveguide / S. Karsch, J. Osterhoff, A. Popp [et al.]. — Текст : электронный // New Journal of Physics. — 2007. — Vol. 9. — P. 415. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/9/11/415>. — Дата публикации: 23.11.2007.
- [57] Gamma-rays from harmonically resonant betatron oscillations in a plasma wake / S. Cipiccia, M.R. Islam, B. Ersfeld [et al.]. — Текст : электронный // Nature Physics. — 2011. — Vol. 7. — P. 867-871. — URL: <http://www.nature.com/doi/10.1038/nphys2090>. — Дата публикации: 18.09.2011.

- [58] Autoinjection of electrons into a wake field using a capillary with attached cone / Y. Mori, Y. Sentoku, K. Kondo [et al.]. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2009. — Vol. 16. — P. 123103. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3271152>. — Дата публикации: 08.12.2009.
- [59] Laser pulse guiding and electron acceleration in the ablative capillary discharge plasma / T. Kameshima, H. Kotaki, M. Kando [et al.]. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2009. — Vol. 16. — P. 093101. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3212589>. — Дата публикации: 02.09.2009.
- [60] Hybrid capillary discharge waveguide for laser wakefield acceleration / Z. Qin, W. Li, J. Liu [et al.]. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2018. — Vol. 25. — P. 073102. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.5025847>. — Дата публикации: 03.07.2028.
- [61] Absorption of Ultrashort Laser Pulses by Solid Targets Heated Rapidly to Temperatures 1-1000 eV / D. F. Price, R. M. More, R. S. Walling [et al.]. — Текст : электронный // Physical Review Letters. — 1995. — Vol. 75. — P. 252-255. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.252>. — Дата публикации: 10.07.1995.
- [62] Kotelnikov, I. A. Attenuation in Waveguide / I. A. Kotelnikov. — Текст : электронный // Technical Physics. — 2004. — Vol. 49. — P. 1196-1201. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/1.1800242> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [63] Lotov, K. V. Fine wakefield structure in the blowout regime of plasma wakefield accelerators / K. V. Lotov. — Текст : электронный // Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams. — 2003. — Vol. 6. — P. 061301. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.6.061301> . — Дата публикации: 06.06.2003.
- [64] A spectral, quasi-cylindrical and dispersion-free Particle-In-Cell algorithm R. Lehe, M. Kirchen, I. A. Andriyash [et al.]. — Текст : электронный

- // Computer Physics Communications. — 2016. — Vol. 203. — P. 66-82. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2016.02.007>. — Дата публикации: 01.06.2016.
- [65] Tuev, P. Mode structure of a short laser pulse propagating through a metal capillary / P. Tuev, K. Lotov. — Текст : электронный // Book of Abstracts of 43rd European Physical Society Conference On Plasma Physics. (Leuven, Belgium, 04–08 July 2016) — Leuven, 2016 — P5.088. — URL: <http://ocs.ciemat.es/EPS2016abs/pdf/P5.088.pdf> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [66] Simulation of electron trapping with quasistatic code / P. Tuev, K. Lotov, R. Spitsyn, A. Sosedkin. — Текст : электронный // Contributions book of 3rd European Advanced Accelerator Concepts Workshop. (La Biodola, Italy, 24–30 September 2017 года) — La Biodola, 2017 — P. 91. — URL: <https://agenda.infn.it/event/12611/attachments/11093/12468/Contributions.pdf> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [67] Tuev, P. Quasistatic and PIC simulations of electron self-trapping by the wake of low power laser pulse / P. Tuev, A. Sosedkin, K. Lotov. — Текст : электронный // Book of Abstracts of Laser-Plasma Accelerator Workshop 2019. (Split, Croatia, 05–10 May 2019) — Split, 2019. — URL: <https://indico.physik.uni-muenchen.de/event/5/contributions/108/> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [68] AFAD: [электронный ресурс]. — <https://indico.inp.nsk.su/event/42/contributions/2117> (Дата обращения: 09.09.2022). — Яз. англ. — Текст : электронный.
- [69] Tuev, P. Optimization of moderate-power laser pulse interaction with plasmas using quasistatic simulations / P. Tuev, K. Lotov. — Текст : электронный // Book of Abstracts of 47th European Physical Society Conference On

- Plasma Physics. (Sitges, Spain 21–25 June 2021) — Sitges, 2021 — P2.2004. — URL: <http://ocs.ciemat.es/EPS2021abs/pdf/P2.2004.pdf> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [70] Туев, П. В. Плазменное кильватерное ускорение с лазерным драйвером средней интенсивности : специальность 1.3.9 «Физика плазмы» : научно-квалификационная работа аспиранта / Туев Пётр Викторович; Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера. — Новосибирск, 2021. — 55 с. — Текст : непосредственный.
- [71] Tuev, P. V. Attenuation of waveguide modes in narrow metal capillaries / P. V. Tuev, K. V. Lotov. — Текст : электронный // Journal of the Optical Society of America A. — 2021. — Vol. 38, nr 1. — P. 108–114. — URL: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.410552>. — Дата публикации: 24.12.2020.
- [72] Algorithm for supersonic gas jet density profile retrieval from interferometric measurement / S. V. Avtaeva, K. V. Gubin, V. I. Trunov, P. V. Tuev. — Текст : электронный // Journal of the Optical Society of America A. — 2019. — Vol. 36, nr 5. — P. 910–917. — URL: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.36.000910>. — Дата публикации: 25.04.2019.
- [73] Туев, П. В. Формирование ускоряемого сгустка из электронов плазмы при моделировании кильватерного ускорения квазистатическим кодом / П. В. Туев, А. П. Соседкин, К. В. Лотов. — Текст : электронный // Сибирский физический журнал. — 2017. — Т. 12, № 4. — С. 14–19. — URL: <http://dx.doi.org/10.25205/2541-9447-2017-12-4-14-19> (дата обращения: 12.09.2022).
- [74] Tuev, P. V. Optimization of moderate-power laser pulse interaction with plasmas using quasistatic simulations / P. V. Tuev, K. V. Lotov. — Текст : электронный // Proceedings of the 47th EPS Conference on Plasma Physics (Sitges, Spain, 21–25 June 2021). — Sitges, 2021. — Vol. 45A. — P2.2004. —

- URL: <http://ocs.ciemat.es/EPS2021PAP/pdf/P2.2004.pdf> (дата обращения: 12.09.2022).
- [75] Tuev, P. V. Mode structure of a short laser pulse propagating through a metal capillary / P. V. Tuev, K. V. Lotov. — Текст : электронный // Proceedings of the 43rd EPS Conference on Plasma Physics (Leuven, Belgium, 4–8 July 2016). — Leuven, 2016. — Vol. 40A. — P5.088. — URL: <http://ocs.ciemat.es/EPS2016PAP/pdf/P5.088.pdf> (дата обращения: 12.09.2022).
- [76] Behjat, A. The characterization of a high-density gas jet / A. Behjat, G. J. Tallents, D. Neely. — Текст : электронный // Journal of Physics D: Applied Physics. — 1997. — Vol. 30. — P. 2872-2879. — URL:<http://dx.doi.org/10.1088/0022-3727/30/20/014>. — Дата публикации: 21.10.1997.
- [77] Semushin, S. High density gas jet nozzle design for laser target production / S. Semushin, V. Malka. — Текст : электронный // Review of Scientific Instruments. — 2001. — Vol. 72, nr. 7. — P. 2961. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1380393>. — Дата публикации: 26.06.2001.
- [78] Fast electron generation using PW-class PEARL facility / A. A. Soloviev, K. F. Burdonov, V. N. Ginzburg [et al.]. — Текст : электронный // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. — 2011. — Vol. 653. — P. 35-41. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2011.01.180>. — Дата публикации: 11.10.2011.
- [79] Бурдонов, К. Ф. Использование многомодового лазерного источника для интерферометрии сверхмалых фазовых неоднородностей / К. Ф. Бурдонов, А. А. Соловьев, М. В. Стародубцев. — Текст : электронный // Письма в журнал технической физики. — 2016. — Том 42. — Вып. 6. — с. 77-83. — URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/43019>. — Дата публикации: 18.02.2016.

- [80] Takeda, M. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry / M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashi. — Текст : электронный // Journal of the Optical Society of America A. — 1982. — Vol. 72, nr. 1. — P. 156-160. — URL: <http://dx.doi.org/10.1364/JOSA.72.000156>. — Дата публикации: 01.01.1982.
- [81] Shadwick, B. A. Supersonic gas jets for laser-plasma experiments / B. A. Shadwick, C. B. Schroeder, E. Esarey. — Текст : электронный // Review of Scientific Instruments. — 2012. — Vol. 83, nr. 5 — P. 053304. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4719915>. — Дата публикации: 30.05.2012.
- [82] Winckler, J. The Mach Interferometer Applied to Studying an Axially Symmetric Supersonic Air Jet / J. Winckler. — Текст : электронный // The Review of Scientific Instruments. — 1948. — Vol. 19, nr. 5. — P. 307-322. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.1741257> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [83] Jackson, J. D. Classical Electrodynamics / Jackson, J. D. — 3rd edition — Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2002. — 832 p. — Текст : непосредственный.
- [84] Nikogosyan, D. N. Properties of Optical and Laser-Related Materials / Nikogosyan, D. N. — Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 1997. — 614 p. — Текст : непосредственный.
- [85] Reconstruction of Abel-transformable images: the Gaussian basisset expansion Abel transform method / V. Dribinski, A. Ossadtchi, V. A. Mandelshtam, H. Reisler. — Текст : электронный // Review of Scientific Instruments. — 2002. — Vol. 73. — P. 2634–2642. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.1482156>. — Дата публикации: 21.06.2002.
- [86] Hansen, E. W. Recursive methods for computing the Abel transform and its inverse / E. W. Hansen, P.-L. Law. — Текст : электронный // Journal of the

- Optical Society of America A. — 1985. — Vol. 2, nr. 4. — P. 510–520. — URL: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.2.000510> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [87] Hickstein, D.D. A direct comparison of high-speed methods for the numerical Abel transform / D. D. Hickstein, S. T. Gibson, R. Yurchak [et al.]. — Текст : электронный // Review of Scientific Instruments. — 2019. — Vol. 90. — P.065115. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.5092635>. — Дата публикации: 25.06.2019.
- [88] Dissipation of electron-beam-driven plasma wakes / R. Zgadzaj, T. Silva, V.K. Khudyakov [et al.]. — Текст : электронный // Nature Communications. — 2020. — Vol. 11. — P. 4753. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-18490-w>. — Дата публикации: 21.09.2020.
- [89] Khudiakov, V. K. Ion dynamics driven by a strongly nonlinear plasma wake / V. K. Khudiakov, K. V. Lotov, M. S. Downer. — Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2022. — Vol. 64. — P. 045003. — URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/ac4523>. — Дата публикации: 10.02.2020.
- [90] Springer Handbook of Laser and Optics / R. F. Н. Haglund, N. Lindlein, G. Leuchs [et al.]; edited by F. Trager — Heidelberg. Heidelberg : Springer Berlin, 2012. — 1694 p. — URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-19409-2> (Дата обращения: 09.09.2022). — Текст : электронный.
- [91] Generating multi-GeV electron bunches using single stage laser wakefield acceleration in a 3D nonlinear regime / W. Lu, M. Tzoufras, C. Joshi [et al.]. — Текст : электронный // Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams. — 2007. — Vol. 10. — P. 061301. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.10.061301>. — Дата публикации: 05.06.2007.

- [92] Tuev, P. V. Advanced quasistatic approximation / P. V. Tuev, R. I. Spitsyn, K. V. Lotov. — Текст : электронный // Препринт arXiv.org. — URL: <https://arxiv.org/abs/2205.04390> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [93] An accurate and efficient laser-envelope solver for the modeling of laser-plasma accelerators / C. Benedetti, C. B. Schroeder, C. G. R. Geddes [et al.]. — Текст : электронный // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2018. — Vol. 60. — P. 014002. — URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/aa8977>. — Дата публикации: 17.10.2017.
- [94] Zhu, W. Pulsed mid-infrared radiation from spectral broadening in laser wakefield simulations / W. Zhu, J.P. Palastro, T.M. Antonsen. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2013. — Vol. 20. — P. 073103. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4813245>. — Дата публикации: 09.07.2013.
- [95] LCODE: [сайт]. — <https://lcode.info/> (дата обращения 09.09.2022). — Яз. англ. — Текст : электронный.
- [96] Crank, J. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type / J. Crank, P. Nicolson. — Текст : электронный // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1947. — Vol. 43. — P. 50-67. — URL: [10.1017/S0305004100023197](https://doi.org/10.1017/S0305004100023197) (Дата обращения: 09.09.2022).
- [97] Peaceman, D. W. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations / D. W. Peaceman, H. H. Rachford. — Текст : электронный // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. — 1955. — Vol. 3. — P. 28-41. — URL: <https://doi.org/10.1137/0103003> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [98] Douglas, J. On the Numerical Integration $\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = \frac{\partial U}{\partial T}$ by Implicit Methods / J. Douglas. — Текст : электронный // Journal of the Society

- for Industrial and Applied Mathematics. — 1955. — Vol. 3. — P. 42-65. — URL: <https://doi.org/10.1137/0103004> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [99] LCODE: [электронный ресурс]. — URL : <https://lcode.info//manual.pdf> (дата обращения 09.09.2022). — Яз. англ. — Текст : электронный.
- [100] Esarey, E. Nonparaxial propagation of ultrashort laser pulses in plasma channels / E. Esarey, W. P. Leemans. — Текст : электронный // Physical Review E. — 1999. — Vol. 59. — P. 1082–1095. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.1082>. — Дата публикации: 01.01.1999.
- [101] Dynamics of boundary layer electrons around a laser wakefield bubble / J. Luo, M. Chen, G.-B. Zhang [et al.]. — Текст : электронный // Physics of Plasmas. — 2016. — Vol. 23. — P. 103112. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4966047>. — Дата публикации: 27.10.2016.
- [102] Marcatili, E. A. J. Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers / E. A. J. Marcatili, R. A. Schmeltzer. — Текст : электронный // The Bell System Technical Journal. — 1964. — Vol. 43. — P. 1783-1809. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/j.1538-7305.1964.tb04108.x> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [103] Davies, J. R. Basic physics of laser propagation in hollow waveguides / J. R. Davies, J. T. Mendonca. — Текст : электронный // Physical Review E. — 2000. — Vol. 62. — P. 7168-7180. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.62.7168>. — Дата публикации: 01.11.2000.
- [104] Nonlinear propagation of short intense laser pulses in a hollow metallic waveguide / N. E. Andreev, C. Courtois, B. Cros [et al.]. — Текст : электронный // Physical Review E. — 2001. — Vol. 64. — P. 016404. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.64.016404>. — Дата публикации: 19.06.2001.

- [105] Theory and simulation of short intense laser pulse propagation in capillary tubes with wall ablation / M. Veysman, B. Cros, N. E. Andreev, G. Maynard. — Текст : электронный // *Physics of Plasmas*. — 2006. — Vol. 13. — P. 053114. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2201060>. — Дата публикации: 24.05.2006.
- [106] Guiding femtosecond high-intensity high-contrast laser pulses by copper capillaries / K. V. Lotov, K. V. Gubin, V. E. Leshchenko [et al.]. — Текст : электронный // *Physics of Plasmas*. — 2015. — Vol. 22. — P. 103111. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4933354>. — Дата публикации: 19.10.2015.
- [107] Guiding of a 10-TW picosecond laser pulse through hollow capillary tubes / M. Borghesi, A. J. Mackinnon, R. Gaillard [et al.]. — Текст : электронный // *Physical Review E*. — 1998. — Vol.57. — P. R4899-R4902. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.R4899>. — Дата публикации: 01.05.1998.
- [108] Short pulse interaction experiments for fast ignitor applications / M. Borghesi, A. J. Mackinnon, R. Gaillard [et al.]. — Текст : электронный // *Laser and Particle Beams*. — 2000. — Vol. 18. — P. 389-397. — URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0263034600183065> (Дата обращения: 09.09.2022).
- [109] Eigenmodes for capillary tubes with dielectric walls and ultraintense pulse guiding / B. Cros, C. Courtois, G. Matthieussent [et al.]. — Текст : электронный // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 65. — P. 026405. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.65.026405>. — Дата публикации: 24.01.2002.
- [110] Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Учебное пособие : Для вузов. В 10 томах. Том VIII. Электродинамика сплошных сред. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е издание. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 656 с.

[111] Ashcroft, N. W. Solid State Physics / N. W. Ashcroft, N. D. Mermin — Orlando : Harcourt, 1976. — 848 p.

Приложение А

Численная схема для декартовой геометрии улучшенного плазменного решателя

Представленная схема является обобщением численной схеме LCODE (автор которой — К.В. Лотов) на расширенную квазистатическую модель (глава 4). Далее используются безразмерные переменные, в которых

$$c = m_e = e = n_0 = 1. \quad (\text{A.1})$$

Значит, мы будем измерять массу частиц в массах электрона m_e , время — в обратных плазменных частотах ω_p^{-1} , плотности — в невозмущенной плотности электронов плазмы n_0 , расстояния — в единицах k_p^{-1} , а поля — в полях опрокидывания $E_0 = \sqrt{4\pi n_0 m_e c^2}$.

Мы рассчитываем отклик плазмы в LCODE послойно в направлении убывания ξ (справа налево на рисунке А.1). Плазменный солвер вычисляет траектории частиц плазмы и электромагнитное поле в прямоугольной области от 0 до x_{\max} в поперечном направлении и от 0 до $-\xi_{\max}$ по продольной координате ξ , причем проходит по слоям от $\xi = 0$ в направлении уменьшения параметра ξ с

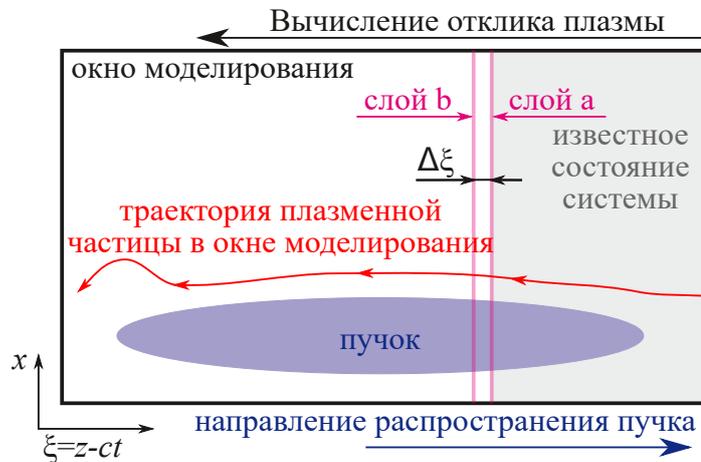


Рисунок А.1 — Схема вычисления отклика плазмы в квазистатической модели (копия рисунка 4.2)

шагом $-\Delta\xi < 0$. Поскольку для расчета поля E_x нам нужны производные тока по ξ в уравнении (4.7), используется схема предиктор-корректор. Для удобства повторим здесь ее описание из главы 4.1:

- рассчитываем движение макрочастиц плазмы из слоя a в слой b под действием полей слоя a ;
- вычисляем ток и плотность заряда в слое b ;
- вычисляем все поля в слое b ;
- рассчитываем движение частиц плазмы из слоя a в слой b под действием средних полей слоев a и b ;
- снова вычисляем ток и плотность заряда в слое b ;
- снова вычисляем все поля в слое b ;
- в третий раз рассчитываем движение частицы плазмы из слоя a в слой b под действием средних полей.

После последнего шага поля и состояния частиц считаются вычисленными корректно. На этом этапе необходимо сохранить состояние плазмы и частиц для вычисления их влияния на последующие по s слои плазмы. Также в этот момент вычисляется движение частиц пучка, которые находятся между слоями a и b .

Напомним, что мы обозначаем номер слоя по ξ нижним индексом n , номер узла поперечной сетки — нижним индексом l , номер продольного положения слоя плазмы по s — верхним индексом m (рисунок А.2), номер макрочастицы — нижним индексом i .

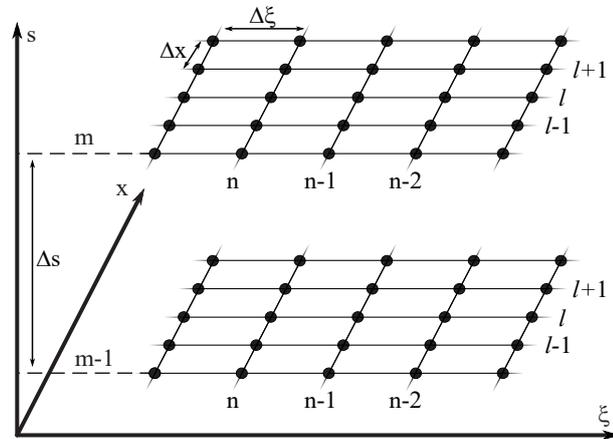


Рисунок А.2 — Сетка моделирования (копия рисунка 4.3)

После завершения цикла предиктор-корректор можно приступить к вычислению следующего шага моделирования по ξ на шаге m , а также n слоя плазмы на шаге $m + 1$. Представленные ниже рассуждения предполагают, что известны все величины на предыдущих шагах по s и ξ . Искомыми являются величины вида $f_{n,\tilde{l}}^m$, где \tilde{l} — произвольный индекс поперечной сетки. Далее предполагается, что ионы плазмы представляют собой неподвижный положительно заряженный фон. Учет движения ионов можно включить в модель по аналогии с движением электронов, описанным в разделе А.2.

А.1. Граничные и начальные условия

До прихода драйвера будем считать плазму нейтральной, холодной, покоящейся и с нулевыми полями:

$$\vec{E}_{0,l}^m = \vec{B}_{0,l}^m = 0, \quad \vec{j}_{0,l}^m = \rho_{0,l}^m = 0 \quad (\text{A.2})$$

для любых l и m . В плоской геометрии в отсутствие внешнего продольного магнитного поля три компоненты поля тождественно равны нулю: $E_y = B_x = B_z = 0$. При этом также $p_y = 0$, а смещение частиц по y не вычисляется. Для каждой частицы

$$\vec{p}_{i,0}^m = 0. \quad (\text{A.3})$$

Также нужно раздать макрочастицам плазмы начальные координаты $x_{i,0}^m$, массы $M_{i,0}^m$ и заряды $q_{i,0}^m$. Они зависят от общего количества N_p макрочастиц и поперечного размера счетной области x_{\max} . Для электронов

$$\begin{aligned} \Delta x_p &= x_{\max}/N_p, & x_{i,0}^m &= \Delta x_p(i + 0.5), \\ M_{i,0}^m &= -q_{i,0}^m = \Delta x_p, & i &= 0 \dots N_p - 1. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ионы изначально расположены в тех же местах и отличаются знаком заряда и массой. Поперечные граничные условия для полей соответствуют бесконечно проводящей стенке. При достижении частицей плазмы поперечной границы

счетной области ее энергия зануляется, но сама частица остается в окне моделирования.

А.2. Движение частиц

В этом разделе опускаем индекс i , обозначающий рассматриваемую макрочастицу. Движение макрочастиц рассматривается независимо, их взаимодействие происходит только через поля системы. Напомним, что мы отслеживаем следующие характеристики макрочастиц: поперечное положение \vec{r}_\perp , три компоненты импульса \vec{p} и заряд q . Для расчета траектории одной частицы нужно решить группу уравнений (4.11) с законами изменения, отвечающими уравнениям (4.9). В конечных разностях эти уравнения можно записать в безразмерных переменных аналогично уравнению (4.23):

$$\frac{\chi_n^m - \chi_{n-1}^m}{\Delta\xi} = \frac{1}{1 - v_{z,n-1/2}^m} \left(F_{n-1/2}^m - v_{z,n-1/2}^{m-1/2} \frac{\chi_n^m - \chi_n^{m-1}}{\Delta s} \right). \quad (\text{A.5})$$

или в более удобном для вычислений виде

$$\chi_n^m = \eta \chi_{n-1}^m + \eta \frac{\Delta\xi}{1 - v_{z,n-1/2}^m} \left(F_{n-1/2}^m + v_{z,n-1/2}^{m-1/2} \frac{\chi_n^{m-1}}{\Delta s} \right), \quad (\text{A.6})$$

$$\eta = \left(1 + \frac{v_{z,n-1/2}^{m-1/2}}{1 - v_{z,n-1/2}^m} \frac{\Delta\xi}{\Delta s} \right)^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

В уравнения (A.6) и (A.7) входят характеристики отдельных частиц и электрические поля на полушаге. Для решения этой системы сначала “прикидываем” среднее положение частицы $\tilde{x}_{n-1/2}^m$ при ее переходе на следующий слой:

$$\tilde{x}_{n-1/2}^m = x_n^m + \frac{v_{x,n-1}^m \Delta\xi}{2(1 - v_{z,n-1}^m)}, \quad (\text{A.8})$$

где скорости определяются через импульсы:

$$\vec{v}_{n-1}^m = \frac{\vec{p}_{n-1}^m}{\Gamma_{n-1}^m}, \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{n-1}^m = \sqrt{(M_{n-1}^m)^2 + (p_{x,n-1}^m)^2 + (p_{z,n-1}^m)^2}. \quad (\text{A.10})$$

Затем находим средние поля, действующие на эту частицу (обозначаем их тильдой). При выполнении первой итерации берем поля с известного слоя $n - 1$ (например, $E_{x,n-1,l}^m$), при последующих — полусумму полей на слоях $n - 1$ и n (например, $(E_{x,n-1,l}^m + E_{x,n,l}^m)/2$). Далее в этом разделе индексы для слоев по ξ (n) и s (m) при обозначении полей будем опускать.

При разложении частиц на плотности тока и заряда используется параболическое ядро, тогда на частицу должны действовать распределенные по поперечной сетке электромагнитные поля, определенные в трех ближайших узлах сетки. Пусть ближайший к $\tilde{x}_{n-1/2}^m$ узел сетки имеет индекс \tilde{l} . Искомые коэффициенты определяются из выражений

$$\begin{aligned} \delta x &= \tilde{x}_{n-1/2}^m - \tilde{j}\Delta x, & a_{-1} &= 0.5(\delta x - 0.5)^2, \\ a_0 &= 0.75 - \delta x^2, & a_1 &= 0.5(\delta x + 0.5)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

а действующее поле определяется с учетом этих коэффициентов

$$\tilde{E}_x = a_{-1}E_{x,\tilde{l}-1} + a_0E_{x,\tilde{l}} + a_1E_{x,\tilde{l}+1}, \quad (\text{A.12})$$

и аналогично для других компонент поля. При $\tilde{l} = 0$ в формуле (A.10) вместо значения поля в узле $\tilde{l} - 1$ берется поле в узле $\tilde{l} + 1$, а при $\tilde{l} = l_{\max}$ вместо $\tilde{l} + 1$ берется поле в узле $\tilde{l} - 1$. Далее требуется вычислить $\tilde{\eta}$ из уравнения (A.7) для определения приращений импульсов на целом шаге:

$$\tilde{\eta} = \left(1 + \frac{v_{z,n-1}^m + v_{z,n-1}^{m-1}}{1 - v_{z,n-1}^m} \frac{\Delta \xi}{2\Delta s} \right)^{-1}. \quad (\text{A.13})$$

Предсказываем приращения компонент импульса:

$$\Delta \tilde{p}_x = \frac{\tilde{\eta}\Delta \xi}{1 - v_{z,n-1}^m} (q\tilde{E}_x - qv_{z,n-1}^m\tilde{B}_y + p_{x,n-1}^{m-1} \frac{v_{z,n-1}^m + v_{z,n-1}^{m-1}}{2\Delta s}), \quad (\text{A.14})$$

$$\Delta \tilde{p}_z = \frac{\tilde{\eta}\Delta \xi}{1 - v_{z,n-1}^m} (q\tilde{E}_z + qp_{x,n-1}^m\tilde{B}_y + p_{z,n-1}^{m-1} \frac{v_{z,n-1}^m + v_{z,n-1}^{m-1}}{2\Delta s}). \quad (\text{A.15})$$

Предсказываем средние импульсы частиц и релятивистский фактор:

$$\tilde{\eta}_{1/2} = \left(1 + \frac{v_{z,n-1}^m + v_{z,n-1}^{m-1}}{1 - v_{z,n-1}^m} \frac{\Delta\xi}{4\Delta s} \right)^{-1} \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{p}_{x,n-1/2}^m = \tilde{\eta}_{1/2} p_{x,n-1}^m + \frac{\Delta\tilde{p}_x}{2}, \quad \tilde{p}_{z,n-1/2}^m = \tilde{\eta}_{1/2} p_{z,n-1}^m + \frac{\Delta\tilde{p}_z}{2}, \quad (\text{A.17})$$

$$\Gamma_{n-1/2}^m = \sqrt{(M_{n-1}^m)^2 + (\tilde{p}_{x,n-1/2}^m)^2 + (\tilde{p}_{z,n-1/2}^m)^2}. \quad (\text{A.18})$$

Уточняем приращения компонент импульса частицы:

$$\tilde{v}_{z,n-1/2}^{m-1/2} = \frac{2\tilde{v}_{z,n-1/2}^m + v_{z,n}^{m-1} + v_{z,n-1}^{m-1}}{4} \quad (\text{A.19})$$

$$\eta = \left(1 + \frac{\tilde{v}_{z,n-1/2}^{m-1/2}}{1 - \tilde{v}_{z,n-1/2}^m} \frac{\Delta\xi}{\Delta s} \right)^{-1} \quad (\text{A.20})$$

$$\Delta p_x = \frac{\eta\Delta\xi}{1 - \tilde{v}_{z,n-1/2}^m} (q\tilde{E}_x - qp_{z,n-1}^m \tilde{B}_y + p_{x,n}^{m-1} \frac{\tilde{v}_{z,n-1/2}^{m-1/2}}{\Delta s}), \quad (\text{A.21})$$

$$\Delta p_z = \frac{\eta\Delta\xi}{1 - \tilde{v}_{z,n-1/2}^m} (q\tilde{E}_z + qp_{x,n-1}^m \tilde{B}_y + p_{z,n}^{m-1} \frac{\tilde{v}_{z,n-1/2}^{m-1/2}}{\Delta s}), \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{v}_{z,n-1/2}^m = \frac{\tilde{p}_{z,n-1/2}^m}{\Gamma_{n-1/2}^m}, \quad (\text{A.23})$$

$$\tilde{v}_{z,n-1/2}^{m-1} = \frac{p_{z,n}^{m-1} + p_{z,n-1}^{m-1}}{2}. \quad (\text{A.24})$$

Уточняем средние импульсы частиц:

$$\eta_{1/2} = \left(1 + \frac{\tilde{v}_{z,n-1/2}^{m-1/2}}{1 - \tilde{v}_{z,n-1/2}^m} \frac{\Delta\xi}{2\Delta s} \right)^{-1}, \quad (\text{A.25})$$

$$p_{x,n-1/2}^m = \eta_{1/2} p_{x,n-1}^m + \frac{\Delta p_x}{2}, \quad p_{z,n-1/2}^m = \eta_{1/2} p_{z,n-1}^m + \frac{\Delta p_z}{2}. \quad (\text{A.26})$$

Находим поперечное положение макрочастицы на новом слое:

$$x_n^m = \eta x_{n-1}^m + \frac{\eta\Delta\xi}{1 - \tilde{v}_{z,n-1/2}^m} \left(\frac{p_{x,n-1/2}^m}{\Gamma_{n-1/2}^m} + x_{n-1}^{m-1} \frac{\tilde{v}_{z,n-1/2}^{m-1/2}}{\Delta s} \right). \quad (\text{A.27})$$

Компоненты импульса на новом слое

$$p_{x,n}^m = \eta p_{x,n-1}^m + \Delta p_x, \quad p_{z,n}^m = \eta p_{z,n-1}^m + \Delta p_z. \quad (\text{A.28})$$

После этой операции вычисляется изменение заряда макрочастицы:

$$q_n^m = \eta q_{n-1}^m + q_{n-1}^{m-1} \frac{\eta \Delta \xi}{1 - \tilde{v}_{z,n-1/2}^m} \frac{\tilde{v}_{z,n-1/2}^{m-1/2}}{\Delta s}. \quad (\text{A.29})$$

Этот заряд используется при вычислении полей. После последнего шага корректора новое значение заряда закрепляется за частицей, а также корректируется ее масса:

$$M_n^m = q_n^m \frac{M_{n-1}^m}{q_{n-1}^m}. \quad (\text{A.30})$$

Особого обращения требуют частицы, которые успевают за этот шаг выйти из расчетной области. В этом случае положение и импульсы частицы корректируются:

$$x_n^m = \begin{cases} -x_{n,\text{old}}^m, & \text{если } x_{n,\text{old}}^m < 0, \\ 2x_{\text{max}} - x_{n,\text{old}}^m, & \text{если } x_{n,\text{old}}^m > x_{\text{max}}, \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

$$p_{x,n}^m = p_{z,n}^m = 0, \quad (\text{A.32})$$

где $x_{n,\text{old}}^m$ — значение, получившиеся по формуле (A.27). Если после операции (A.31) получается $x_n^m < 0$ или $x_n^m > x_{\text{max}}$, то так быть не должно, и частицу нужно убрать с сообщением об ошибке.

А.3. Вычисление плотности заряда и токов

Каждый раз (при каждой итерации) после движения всех частиц на новый слой вычисляются компоненты плазменного тока \vec{j} и плотность заряда ρ в этом слое. Сначала частицы раскладываются по ячейкам, соответствующим узлам сетки (центр ячейки совпадает с узлом сетки). Еще раз вычисляем релятивистский факторы, так как они входят в “вес” частиц:

$$\Gamma_{i,n}^m = \sqrt{(M_{i,n-1}^m)^2 + (p_{x,i,n}^m)^2 + (p_{z,i,n}^m)^2}. \quad (\text{A.33})$$

Пусть \tilde{l}_i — номер ближайшего к $x_{i,n}^m$ узла. Аналогично (A.11) вычисляем веса:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \tilde{x}_{i,n}^m - \tilde{l}_i \Delta x, & a_{i,-1} &= 0.5(\delta x_i - 0.5)^2, \\ a_{i,0} &= 0.75 - \delta x_i^2, & a_{i,+1} &= 0.5(\delta x_i + 0.5)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Затем вклад каждой частицы добавляется к заряду и току:

$$\rho_{n,\tilde{l}+k}^m = \rho_{n,\tilde{l}+k,\text{old}}^m + \frac{a_{k,i} q_{i,n}^m \gamma_{i,n}^m}{\Gamma_{i,n}^m - p_{z,i,n}^m}, \quad (\text{A.35})$$

$$j_{\mathbf{v},n,\tilde{l}+k}^m = j_{\mathbf{v},n,\tilde{l}+k,\text{old}}^m + \frac{a_{k,i} q_{i,n}^m p_{\mathbf{v},i,n}^m}{\Gamma_{i,n}^m - p_{z,i,n}^m}, \quad (\text{A.36})$$

где индекс old означает соответствующую величину, вычисленную до начала обработки частицы с индексом i , $k = (0, \pm 1)$, а $\mathbf{v} = (x, z)$. Таким образом вклад каждой частицы раскладывается по трем ближайшим ячейкам с весами $a_{i,-1}$, $a_{i,0}$ и $a_{i,+1}$. После суммирования по всем частицам полученные массивы необходимо нормировать, разделив на размер поперечной ячейки Δx во внутренней области и на $\Delta x/2$ для граничных узлов. К плотности электронов необходимо добавить плотность ионов плазмы.

Особого обращения требуют узлы вблизи границ расчетной области. Для частиц с $\tilde{l}_i = l_{\max}$ или $\tilde{l}_i = 0$ перед раскладкой делаем дополнительное действие:

$$a_{i,-1} = a_{i,-1,\text{old}} + a_{i,+1,\text{old}}, \quad a_{i,+1} = 0, \quad (\text{A.37})$$

где индекс ‘old’ отмечает значения, получившиеся по формуле (A.31). К плотностям заряда и токов плазмы необходимо добавить разложение пучка. Описание численной схемы пучкового “солвера“ здесь опущено и совпадает с реализованным в квазистатическом коде LCODE [99].

После раскладки и нормировки принудительно зануляем величины, которые должны быть равными нулю из физических соображений:

$$j_{x,n,0}^m = j_{x,n,l_{\max}}^m = j_{z,m,l_{\max}}^m = 0. \quad (\text{A.38})$$

А.4. Вычисление полей

На этом этапе известны величины $\rho_{n,l}^m, \rho_{n,l}^{m-1}, j_{x,n,l}^m, j_{x,n,l}^{m-1}, j_{z,n,l}^m, j_{z,n,l}^{m-1}$. Вычисление полей начинается с решения уравнения (4.14) на поперечное электрическое поле в безразмерном виде. Решать его будем методом прогонки. Найдем вспомогательные коэффициенты:

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = -\Delta x \frac{\rho_{n,0}^m + \rho_{n,1}^m}{2}, \quad (\text{A.39})$$

$$\alpha_l = -\frac{C_l}{B_l + A_l \alpha_{l-1}}, \quad \beta_l = \frac{RHS_l - A_l \beta_{l-1}}{B_l - A_l \alpha_{l-1}}, \quad l = 1 \dots l_{\max} - 1, \quad (\text{A.40})$$

где

$$A_l = C_l = 0.5, \quad B_l = -\left(1 + \Delta x^2 + \frac{3\Delta x^2}{\Delta \xi \Delta s}\right), \quad (\text{A.41})$$

$$\tilde{B}_l = -\left(1 + \Delta x^2 - \frac{3\Delta x^2}{\Delta \xi \Delta s}\right), \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} RHS_l = & \frac{\Delta x}{4} \left(\rho_{n,l+1}^m - \rho_{n,l-1}^m + \rho_{n,l+1}^{m-1} - \rho_{n,l-1}^{m-1} \right) + \\ & + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{j_{x,n,l}^m - j_{x,n-1,l}^m}{\Delta \xi} + \frac{j_{x,n,l}^{m-1} - j_{x,n-1,l}^{m-1}}{\Delta \xi} - \tilde{E}_{x,n,l}^m - \tilde{E}_{x,n,l}^{m-1} \right) - \\ & - \left(A_l E_{x,n,l-1}^{m-1} + \tilde{B}_l E_{x,n,l}^{m-1} + C_l E_{x,n,l+1}^{m-1} \right) - \\ & - \frac{\Delta x^2}{\Delta \xi \Delta s} \left(4E_{x,n-1,l-1}^m - E_{x,n-2,l-1}^m - 4E_{x,n-1,l-1}^{m-1} + E_{x,n-2,l-1}^{m-1} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

а в качестве $\tilde{E}_{x,n,l}^m$ на первой итерации выступает $E_{x,n-1,l}^m$, а на второй — полусумма $(E_{x,n,l}^m + E_{x,n-1,l}^m)/2$ со значением $E_{x,n,l}^m$, полученным на первой итерации. Для $\tilde{E}_{x,n,l}^{m-1}$ берутся аналогичные выражения с известными полями на предыдущих слоях. Затем восстанавливаем поле, двигаясь от x_{\max} до 0:

$$E_{x,n,l_{\max}}^m = \frac{\beta_{l_{\max}-1} + 0.5\Delta x(\rho_{n,l_{\max}}^m + \rho_{n,l_{\max}-1}^m)}{1 - \alpha_{l_{\max}-1}}, \quad (\text{A.44})$$

$$E_{x,n,l}^m = \alpha_l E_{x,n,l+1}^m + \beta_l, \quad l = l_{\max} - 1 \dots 0. \quad (\text{A.45})$$

Поле на границе (А.44) получилось из разностного представления закона Гаусса (второе из уравнений (4.2)):

$$\frac{E_{x,n,l_{\max}}^m - E_{x,n,l_{\max}-1}^m}{\Delta x} = \frac{\rho_{n,l_{\max}} + \rho_{n,l_{\max}-1}}{2} \quad (\text{А.46})$$

с учетом граничного условия $E_z = 0$ на стенке и связи (А.45) между значениями поля в двух крайних узлах.

Аналогично ищем поле E_z из уравнения (4.18). Выражения (А.40) и (А.45) аналогичны. Зануление продольного поля на границе выражается изменениями в выражениях (А.39) и (А.44):

$$\alpha_0 = \beta_0 = E_{z,n,l_{\max}}^m = 0. \quad (\text{А.47})$$

При этом вспомогательные коэффициенты (А.41), (А.42) и (А.43) для рассматриваемого уравнения записываются следующим образом:

$$A_l = C_l = 1, \quad B_l = - \left(2 + \Delta x^2 + \frac{3\Delta x^2}{\Delta \xi \Delta s} \right), \quad (\text{А.48})$$

$$\tilde{B}_l = - \left(2 + \Delta x^2 - \frac{3\Delta x^2}{\Delta \xi \Delta s} \right), \quad (\text{А.49})$$

$$\begin{aligned} RHS_l = & \frac{\Delta x}{2} (j_{x,n,l+1}^m - j_{x,n,l-1}^m) + \frac{\Delta x^2}{\Delta s} (\rho_{n,l+1}^m - \rho_{n,l+1}^{m-1} + j_{z,n,l}^m - j_{z,n,l}^{m-1}) - \\ & - \left(A_l E_{z,n,l-1}^{m-1} + \tilde{B}_l E_{z,n,l}^{m-1} + C_l E_{z,n,l+1}^{m-1} \right) - \\ & - \frac{\Delta x^2}{\Delta \xi \Delta s} \left(4E_{z,n-1,l-1}^m - E_{z,n-2,l-1}^m - 4E_{z,n-1,l-1}^{m-1} + E_{z,n-2,l-1}^{m-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{А.50})$$

Осталось вычислить магнитное поле B_y по формуле (4.22), которое восстанавливается за один проход из рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} A_l = & A_{l-1} + \frac{\Delta x}{2} (\rho_{n,l}^m - j_{z,n,l}^m + \rho_{n,l-1}^m - j_{z,n,l-1}^m) - \\ & - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{E_{z,n,l}^m - E_{z,n,l}^{m-1}}{\Delta s} - \frac{E_{z,n,l-1}^m - E_{z,n,l-1}^{m-1}}{\Delta s} \right), \end{aligned} \quad (\text{А.51})$$

где $A_0 = 0$. Затем нужно вычислить константу интегрирования из уравнения (4.22):

$$B_0 = A_{l'} - \left(E_{x,n-1,l'}^m - B_{y,n-1,l'}^m - \Delta \xi \frac{j_{x,n,l'}^m - j_{x,n-1,l'}^m}{2} \right), \quad (\text{А.52})$$

где $l' = 0.9l_{\max}$ — некоторый узел вдали от области существования кильватерной волны. Тогда магнитное поле выражается следующим образом:

$$B_{y,n,l}^m = E_{x,n,l}^m - A_l + B_0. \quad (\text{A.53})$$

После этого будут вычислены все интересующие нас поля, и можно приступить к следующему шагу схемы предиктор-корректор или вычислению состояния на следующем слое по ξ .

Приложение Б

Численная схема для цилиндрической геометрии улучшенного плазменного решателя

Плазменный солвер для цилиндрической геометрии во многом повторяет схему, используемую для плоской геометрии (приложение А), и по возможности далее будет опущено описание пересекающихся частей. Далее также используются безразмерные переменные, принятые в приложении А (выражения (А.1)). Вычисляем траектории частиц плазмы и электромагнитное поле в прямоугольной области от 0 до r_{\max} по радиусу r и от 0 до $-\xi_{\max}$ по продольной координате ξ . Общая схема вычислений совпадает с описанной в приложении А, как и обозначения с заменой координаты x на r .

Б.1. Граничные условия

До прихода драйвера будем считать плазму холодной, а начальные электромагнитные поля нулевыми. В условиях осевой симметрии и в отсутствие продольного магнитного поля в холодной плазме могут возбуждаться поля E_r , B_φ и E_z , остальные компоненты в данной геометрии тождественно оказываются нулевыми. Также нулевыми будут $p_{\varphi,i}$, а смещение по углу не вычисляется. Кроме того, нужно задать начальные характеристики макрочастиц: начальные координаты $r_{i,0}^m$, массу $M_{i,0}^m$ и заряд $q_{i,0}^m$. Они зависят от общего количества N_p макрочастиц данного сорта и расстояния между макрочастицами Δr_p , для элек-

тронов:

$$\Delta r_p = r_{\max}/N_p, \quad r_{i,0}^m = \Delta r_p(i + 0.5), \quad (\text{Б.1})$$

$$M_{i,0}^m = -q_{i,0}^m = 2\pi\Delta r_p^2(i + 0.5), \quad i = 0 \dots N_p - 1. \quad (\text{Б.2})$$

Ионы расположены в тех же местах, что и электроны, при этом их заряд равен заряду соответствующего электрона. Масса задается пропорциональной их заряду, чтобы отношения заряда к массе соответствовало реально рассматриваемым ионам.

Б.2. Движение частиц

В этом разделе опускаем индекс i , обозначающий рассматриваемую частицу. Чтобы избежать сложности вычисления особенностей движения частиц вблизи оси, локально переходим к декартовым координатам, при этом

$$E_x = E_r, \quad B_y = B_\varphi, \quad E_z = E_z, \quad (\text{Б.3})$$

$$x = r, \quad p_x = p_r, \quad p_z = p_z. \quad (\text{Б.4})$$

Далее рассчитываем движение частиц по алгоритму, описанному в разделе А.2, согласно уравнениям (А.5) – (А.29). Отличие есть в учете приосевых ячеек. При вычислении поля, действующего на частицу (уравнение (А.12)), при $\tilde{l} = 0$ нулевая точка учитывается согласно уравнениям:

$$\tilde{E}_x = (a_1 - a_{-1})E_{x,1} + a_0E_{x,0}, \quad (\text{Б.5})$$

$$\tilde{B}_y = (a_1 - a_{-1})B_{x,1} + a_0B_{x,0}, \quad (\text{Б.6})$$

$$\tilde{E}_z = (a_1 + a_{-1})E_{z,1} + a_0E_{z,0}. \quad (\text{Б.7})$$

Состояние частиц, которые успевают за этот шаг выйти из расчетной области, преобразуется согласно формулам

$$x_n^m = -x_{n,\text{old}}^m, \quad p_{x,n}^m = -p_{x,n,\text{old}}^m, \quad \text{если } x_{n,\text{old}}^m < 0, \quad (\text{Б.8})$$

$$x_n^m = 2x_{\text{max}} - x_{n,\text{old}}^m, \quad p_{x,n}^m = p_{z,n}^m = 0, \quad \text{если } x_{n,\text{old}}^m > x_{\text{max}}, \quad (\text{Б.9})$$

где индекс “old” обозначает величины, полученные при нормальной отработке алгоритма движения частиц. Если после операций (Б.8) и (Б.9) частица окажется за пределами счетной области, то ее следует исключить из моделирования с сообщением об ошибке. После этого возвращаемся к цилиндрическим координатам:

$$r = x, \quad p_r = p_x, \quad p_z = p_z. \quad (\text{Б.10})$$

Этот трюк можно использовать и при наличии продольного магнитного поля. В этом случае удобно для каждой частицы вводить независимую систему координат, в которой направление оси x совпадает с направлением радиус-вектора этой частицы.

Б.3. Вычисление плотности заряда и токов

Следующим шагом является разложение ансамбля частиц на плотность тока и заряда для последующего вычисления электромагнитных полей. Еще раз вычисляем релятивистские факторы:

$$\Gamma_{i,n}^m = \sqrt{(M_{i,n-1}^m)^2 + (p_{x,i,n}^m)^2 + (p_{z,i,n}^m)^2}. \quad (\text{Б.11})$$

Пусть \tilde{l}_i — номер ближайшего к $x_{i,n}^m$ узла. Аналогично (А.11) вычисляем веса:

$$\delta r_i = \tilde{r}_{i,n}^m - \tilde{l}_i \Delta r, \quad a_{i,-1} = 0.5(\delta r_i - 0.5)^2, \quad (\text{Б.12})$$

$$a_{i,0} = 0.75 - \delta r_i^2, \quad a_{i,+1} = 0.5(\delta r_i + 0.5)^2. \quad (\text{Б.13})$$

Затем вклад каждой частицы добавляется к заряду и току:

$$\rho_{n,\tilde{l}+k}^m = \rho_{n,\tilde{l}+k,\text{old}}^m + \psi_{\tilde{l}+k} \frac{a_{k,i} q_{i,n}^m \gamma_{i,n}^m}{\gamma_{i,n}^m - p_{z,i,n}^m}, \quad (\text{Б.14})$$

$$j_{\mathbf{v},n,\tilde{l}+k}^m = j_{\mathbf{v},n,\tilde{l}+k,\text{old}}^m + \psi_{\tilde{l}+k} \frac{a_{k,i} q_{i,n}^m p_{\mathbf{v},i,n}^m}{\gamma_{i,n}^m - p_{z,i,n}^m}, \quad (\text{Б.15})$$

где индекс old означает соответствующую величину, вычисленную до начала обработки частицы с индексом i , $k = (0, \pm 1)$, $\mathbf{v} = (r, z)$, $\psi_{\tilde{l}+k}$ — нормировочный коэффициент. Нормировка осуществляется таким образом, чтобы в начальном состоянии плазма была квазинейтральной, а коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$\psi_l = \frac{1}{2\pi\Delta r^2 l}, \quad l = 1 \dots l_{\max}-1, \quad (\text{Б.16})$$

$$\psi_0 = \frac{32}{\pi(13\Delta r^2 + 2\Delta r_p^2)}, \quad (\text{Б.17})$$

$$\psi_1 = \frac{192}{2\pi(193\Delta r^2 + 2\Delta r_p^2)}, \quad (\text{Б.18})$$

$$\psi_{l_{\max}} = \frac{1}{\pi\Delta r^2(l_{\max} - 13/32)}. \quad (\text{Б.19})$$

Столь экзотические нормировочные коэффициенты получаются из требования, чтобы в исходном невозмущенном состоянии набор дискретных “треугольных” частиц давал строго единичную плотность электронов плазмы во всех ячейках.

Особого обращения требуют узлы вблизи границ расчетной области. Для частиц с $\tilde{l}_i = l_{\max}$ перед раскладкой делаем дополнительное действие:

$$a_{i,0} = a_{i,0,\text{old}} + a_{i,+1,\text{old}}, \quad a_{i,+1} = 0, \quad (\text{Б.20})$$

где индекс ‘old’ отмечает значения, получившиеся по формулам (Б.13). При $\tilde{l}_i = 0$

$$a_{i,0} = a_{i,-1} = 0, \quad a_{i,+1} = a_{i,+1,\text{old}} \pm a_{i,-1,\text{old}}, \quad (\text{Б.21})$$

причем знак ‘+’ выбирается при вычислении ρ и j_z , а знак ‘−’ — при вычислении j_r . После раскладки и нормировки принудительно зануляем величины, которые должны быть равными нулю из физических соображений:

$$j_{r,n,0}^m = j_{r,n,l_{\max}}^m = j_{z,n,l_{\max}}^m = 0. \quad (\text{Б.22})$$

Б.4. Вычисление полей

На этом этапе известны величины $\rho_{n,l}^m, \rho_{n,l}^{m-1}, j_{r,n,l}^m, j_{r,n,l}^{m-1}, j_{z,n,l}^m, j_{z,n,l}^{m-1}$. Вычисление полей начинается с решения уравнения на радиальное поле, аналогичного уравнению (4.13):

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \xi} \right) E_r - E_r = \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\partial j_r}{\partial \xi} - \tilde{E}_r, \quad (\text{Б.23})$$

которое в конечных разностях, аналогично представлению (4.14), запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{E_{r,n,l+1}^m - 2E_{r,n,l}^m + E_{r,n,l-1}^m}{\Delta r^2} + \frac{E_{r,n,l+1}^{m-1} - 2E_{r,n,l}^{m-1} + E_{r,n,l-1}^{m-1}}{\Delta r^2} \right) + \\ & \frac{1}{2l\Delta r} \left(\frac{E_{r,n,l+1}^m - E_{r,n,l-1}^m}{2\Delta r} + \frac{E_{r,n,l+1}^{m-1} - E_{r,n,l-1}^{m-1}}{2\Delta r} \right) - \frac{E_{r,n,l}^m + E_{r,n,l}^{m-1}}{2l^2\Delta r^2} + \\ & + \frac{2}{\Delta s} \left(\frac{-3E_{r,n,l}^m + 4E_{r,n-1,l}^m - E_{r,n-2,l}^m}{2\Delta \xi} - \frac{-3E_{r,n,l}^{m-1} + 4E_{r,n-1,l}^{m-1} - E_{r,n-2,l}^{m-1}}{2\Delta \xi} \right) - \\ & - \frac{E_{r,n,l}^m + E_{r,n,l}^{m-1}}{2} = \left(\frac{\rho_{n,l+1}^{m-\frac{1}{2}} - \rho_{n,l-1}^{m-\frac{1}{2}}}{2\Delta r} + \frac{j_{r,n,l}^{m-\frac{1}{2}} - j_{r,n-1,l}^{m-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} \right) - \tilde{E}_{r,n,l}^{m-\frac{1}{2}}, \quad (\text{Б.24}) \end{aligned}$$

где величины на полуцелых шагах получаются линейной интерполяцией из ближайших узлов. Решать это уравнение будем методом прогонки. Найдем вспомогательные коэффициенты:

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad (\text{Б.25})$$

$$\alpha_l = -\frac{C_l}{B_l + A_l\alpha_{l-1}}, \quad \beta_l = \frac{RHS_l - A_l\beta_{l-1}}{B_l - A_l\alpha_{l-1}}, \quad l = 1 \dots l_{\max} - 1, \quad (\text{Б.26})$$

где

$$A_l = \frac{1}{2} - \frac{1}{4l}, \quad C_l = \frac{1}{2} + \frac{1}{4l}, \quad (\text{Б.27})$$

$$B_l = -\left(1 + \frac{1}{2l^2} + \frac{\Delta r^2}{2} + \frac{3\Delta r^2}{\Delta \xi \Delta s} \right), \quad (\text{Б.28})$$

$$\tilde{B}_l = -\left(1 + \frac{1}{2l^2} + \frac{\Delta r^2}{2} - \frac{3\Delta r^2}{\Delta \xi \Delta s} \right), \quad (\text{Б.29})$$

$$\begin{aligned}
RHS_l = & \frac{\Delta r}{4} \left(\rho_{n,l+1}^m - \rho_{n,l-1}^m + \rho_{n,l+1}^{m-1} - \rho_{n,l-1}^{m-1} \right) + \\
& + \frac{\Delta r^2}{2} \left(\frac{j_{r,n,l}^m - j_{r,n-1,l}^m}{\Delta \xi} + \frac{j_{r,n,l}^{m-1} - j_{r,n-1,l}^{m-1}}{\Delta \xi} - \tilde{E}_{r,n,l}^m - \tilde{E}_{r,n,l}^{m-1} \right) - \\
& - \left(A_l E_{r,n,l-1}^{m-1} + \tilde{B}_l E_{r,n,l}^{m-1} + C_l E_{r,n,l+1}^{m-1} \right) - \\
& - \frac{\Delta r^2}{\Delta \xi \Delta s} \left(4E_{r,n-1,l-1}^m - E_{r,n-2,l-1}^m - 4E_{r,n-1,l-1}^{m-1} + E_{r,n-2,l-1}^{m-1} \right),
\end{aligned} \tag{B.30}$$

а в качестве $\tilde{E}_{r,n,l}^m$ на первой итерации выступает $E_{r,n-1,l}^m$, а на второй — полусумма $(E_{r,n,l}^m + E_{r,n-1,l}^m)/2$ со значением $E_{r,n,l}^m$, полученным на первой итерации. Для $\tilde{E}_{r,n,l}^{m-1}$ берутся аналогичные выражения с известными полями на предыдущих слоях. Затем восстанавливаем поле, двигаясь по радиусу в обратном направлении:

$$E_{r,n,l_{\max}}^m = \frac{2(l_{\max} - 1)\beta_{l_{\max}-1} + \Delta r(l_{\max} - 0.5)(\rho_{n,l_{\max}}^m + \rho_{n,l_{\max}-1}^m)}{2l_{\max} - 2(l_{\max} - 1)\alpha_{l_{\max}-1}}, \tag{B.31}$$

$$E_{r,n,l}^m = \alpha_l E_{r,n,l+1}^m + \beta_l, \quad l = l_{\max} - 1 \dots 0. \tag{B.32}$$

Поле на границе (B.31) получилось из разностного представления закона Гаусса (второе из уравнений (4.2))

$$\frac{l_{\max} E_{r,n,l_{\max}}^m - (l_{\max} - 1) E_{r,n,l_{\max}-1}^m}{(l_{\max} - 0.5)\Delta r} = \frac{\rho_{n,l_{\max}} + \rho_{n,l_{\max}-1}}{2} \tag{B.33}$$

с учетом граничного условия $E_z = 0$ на стенке и связи (B.32) между значениями поля в двух крайних узлах.

Метод прогонки также используется для нахождения поля E_z . Запишем уравнение (4.17) в цилиндрических координатах:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \xi} \right) E_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r j_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} (\rho + j_z), \tag{B.34}$$

которое в конечных разностях выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{E_{z,n,l+1}^m - 2E_{z,n,l}^m + E_{z,n,l-1}^m}{\Delta r^2} + \frac{E_{z,n,l+1}^m - 2E_{z,n,l}^m + E_{z,n,l-1}^m}{2l\Delta r} + \\
& + \frac{2}{\Delta s} \left(\frac{-3E_{z,n,l}^m + 4E_{z,n-1,l}^m - E_{z,n-2,l}^m}{2\Delta \xi} - \frac{-3E_{z,n,l}^{m-1} + 4E_{z,n-1,l}^{m-1} - E_{z,n-2,l}^{m-1}}{2\Delta \xi} \right) = \\
& = \left(\frac{j_{r,n,l+1}^m - j_{r,n,l-1}^m}{2\Delta r} + \frac{j_{r,n,l}^m}{l\Delta r} + \frac{\rho_{n,l}^m - \rho_{n,l}^{m-1}}{\Delta s} + \frac{j_{z,n,l}^m - j_{z,n,l}^{m-1}}{\Delta s} \right).
\end{aligned} \tag{B.35}$$

Выражения (Б.25), (Б.26) и (Б.32) аналогичны. Вспомогательные коэффициенты (Б.27), (Б.28), (Б.29) и (Б.30) изменяются следующим образом:

$$A_l = 1 - \frac{1}{2l}, \quad C_l = 1 + \frac{1}{2l}, \quad (\text{Б.36})$$

$$B_l = - \left(2 + \frac{3\Delta r^2}{\Delta \xi \Delta s} \right), \quad \tilde{B}_l = - \left(2 - \frac{3\Delta r^2}{\Delta \xi \Delta s} \right), \quad (\text{Б.37})$$

$$\begin{aligned} RHS_l = & \frac{\Delta r}{2l} (2j_{r,n,l}^m + l[j_{r,n,l+1}^m - j_{r,n,l-1}^m]) + \\ & + \frac{\Delta r^2}{\Delta s} \left(\rho_{n,l}^m - \rho_{n,l}^{m-1} + j_{z,n,l}^m - j_{z,n,l}^{m-1} \right) - \\ & - \left(A_l E_{z,n,l-1}^{m-1} + \tilde{B}_l E_{z,n,l}^{m-1} + C_l E_{z,n,l+1}^{m-1} \right) - \\ & - \frac{\Delta r^2}{\Delta \xi \Delta s} \left(4E_{z,n-1,l-1}^m - E_{z,n-2,l-1}^m - 4E_{z,n-1,l-1}^{m-1} + E_{z,n-2,l-1}^{m-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.38})$$

Из условия зануления продольного поля на границе определяем

$$E_{z,n,l_{\max}}^m = 0. \quad (\text{Б.39})$$

Осталось вычислить магнитное поле B_φ . По аналогии с уравнением (4.19) запишем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (B_\varphi - E_r) = j_z - \rho + \frac{\partial E_z}{\partial s}, \quad (\text{Б.40})$$

что в конечных разностях выражается как

$$\begin{aligned} \frac{lB_{\varphi,n,l}^m - (l-1)B_{\varphi,n,l-1}^m}{(l-\frac{1}{2})\Delta r^2} - \frac{lE_{x,n,l}^m - (l-1)E_{x,n,l-1}^m}{(l-\frac{1}{2})\Delta r^2} = \\ = j_{z,n,l-\frac{1}{2}}^m - \rho_{z,n,l-\frac{1}{2}}^m + \frac{E_{z,n,l-\frac{1}{2}}^m - E_{z,n,l-\frac{1}{2}}^{m-1}}{\Delta s}. \end{aligned} \quad (\text{Б.41})$$

Это уравнение можно разрешить с помощью рекуррентных соотношений, интегрируя это уравнение от оси:

$$\begin{aligned} A_l = A_{l-1} + \frac{\Delta r}{2} \left[l \left(\rho_{n,l}^m - j_{z,n,l}^m - \frac{E_{z,n,l}^m - E_{z,n,l}^{m-1}}{\Delta s} \right) + \right. \\ \left. + (l-1) \left(\rho_{n,l-1}^m - j_{z,n,l-1}^m - \frac{E_{z,n,l-1}^m - E_{z,n,l-1}^{m-1}}{\Delta s} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{Б.42})$$

$$B_{\varphi,n,l}^m = E_{r,n,l}^m - A_l/l, \quad (\text{Б.43})$$

где $A_0 = 0$. После этого будут вычислены все интересующие нас поля, и можно приступить к следующему шагу схемы предиктор-корректор или вычислению состояния плазмы на следующем слое по ξ .