

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г.И. БУДКЕРА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Минаков Владимир Алексеевич

**ОСОБЕННОСТИ УСКОРЕНИЯ ПУЧКОВ
В ПЛАЗМЕННОЙ КИЛЬВАТЕРНОЙ ВОЛНЕ
ДЛИННОГО МОДУЛИРОВАННОГО ДРАЙВЕРА**

1.3.9. Физика плазмы

1.3.18. Физика пучков заряженных частиц
и ускорительная техника

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор РАН
Лотов Константин Владимирович

Новосибирск — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Код LCODE	13
1.1. Обзор	13
1.2. Обозначения и единицы измерения	14
1.3. Физические модели	16
1.3.1. Кинетическая модель плазмы	16
1.3.2. Жидкостная модель плазмы	18
1.3.3. Модель пучка	21
1.3.4. Потоки энергии и плотности энергии	22
1.3.5. Реализация параллельной работы	23
Глава 2. Параметрические зависимости амплитуды электрического поля, возбужденного самомодулирующимся протонным пучком	25
2.1. Эксперимент AWAKE	26
2.2. Параметрические зависимости	27
Глава 3. Рост эмиттанса ускоряемого пучка из-за флуктуаций плотности драйвера в плазменном кильватерном ускорителе	38
3.1. Моделирование эксперимента AWAKE	39
3.2. Моделирование в декартовых координатах	48
Глава 4. Усиление продольного поля в кильватерном ускорителе из-за движения ионов	55
4.1. Увеличение поля	55

4.2. Причины увеличения поля	57
Заключение	62
Список литературы	65
Список рисунков	72

Введение

Проблема создания высокоэнергетичного пучка электронов для применения в физике высоких энергий уже давно привлекает к себе внимание исследователей по всему миру. Сложность получения таких пучков состоит в том, что возбудить в высокочастотном (ВЧ) резонаторе ускоряющее поле большее, чем 100 МВ/м, затруднительно. Такие поля могут просто вырывать электроны из металлической стенки резонатора, вызывая пробой.

Ограничение на размер ускоряющих полей приводит к тому, что повышение энергии результирующего сгустка требует пропорционального увеличения длины ускорителя. Так, например, для получения пучка с энергией 1 ТэВ требуется линейный ускоритель длиной примерно 10 км. Использовать же циклический ускоритель не получится. Двигаясь в таком ускорителе, частицы излучают, и мощность излучения при заданной величине поля обратно пропорциональна четвертой степени массы частицы, а значит, электроны излучают на несколько порядков сильнее, чем протоны. В какой-то момент энергия, получаемая частицей за цикл, сравнивается с потерями на синхротронное излучение, и ускорение останавливается. Несмотря на то, что энергия протонов в большом адронном коллайдере (БАК) достигает 7 ТэВ, ускорить в том же кольце электроны можно только до 100 ГэВ.

Актуальность темы

На фоне невозможности увеличить темп ускорения при использовании ВЧ резонаторов альтернативные методы ускорения заряженных частиц получили стимул к развитию. Одним из таких методов является плазменное кильватерное ускорение. Если не вдаваться в подробности, то этот метод состоит в следующем (рисунок 1). В плазму запускают два пучка. Первый из них — это высокоэнергетичный пучок заряженных частиц или мощный лазерный импульс, который называется драйвер. Заряженный драйвер действует на электроны плазмы своим кулоновским полем, расталкивая их со своего пути или же притягивая на ось,

в зависимости от знака его заряда. Лазерный драйвер воздействует на электроны посредством пондеромоторной силы, заставляя их покинуть приосевую область. Ионы плазмы гораздо тяжелее электронов и в большинстве моделей считаются неподвижными. Электроны начинают колебаться вокруг положений равновесия и создают в плазме волну. В поле этой волны ускоряется второй пучок, который называется витнесс. Фаза волны привязана к драйверу, значит, если драйвер и витнесс будут иметь скорости, близкие к скорости света, возможно длительное ускорение. Интерес к этому методу вызван тем, что в плазме можно создать большие электрические поля. Например, эксперимент AWAKE, речь о котором пойдет дальше, использует плазму плотности порядка 10^{15}см^{-3} . При такой плотности характерный масштаб электрических полей составляет несколько ГВ/м, а длина плазменной волны — примерно 0.2 мм. С одной стороны, поля в плазме получаются на несколько порядков больше, чем в ВЧ резонаторах. С другой стороны, малость пространственного и временного масштабов накладывает строгие ограничения на точность синхронизации и позиционирования пучков. Стоит отметить, что увеличение плотности плазмы приводит как к росту электрического поля, так и к уменьшению длины плазменной волны.

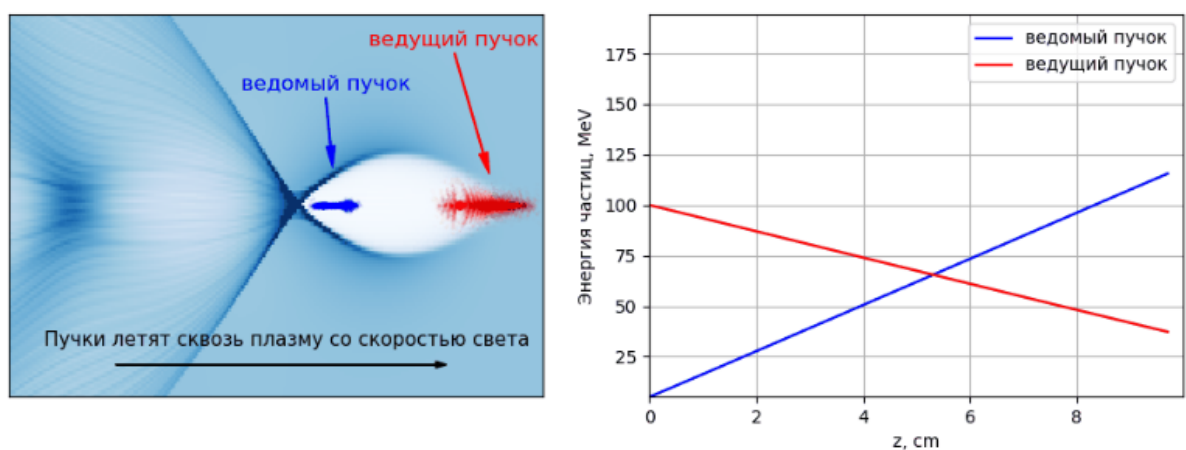


Рисунок 1 — Принципиальная схема плазменного ускорения

В зависимости от типа драйвера можно разделить кильватерное ускорение на три направления: протонное, лазерное и электронное. У каждого типа

есть свои преимущества и недостатки. В данной работе мы будем рассматривать только ускорение с протонным драйвером. Его преимуществом является огромный энергозапас. Он превосходит запас энергии в электронных или лазерных пучках на несколько порядков и потенциально позволяет ускорить электронный пучок до энергий порядка 1 ТэВ в одной плазменной секции, без необходимости синхронизировать пучки много раз на входе в большое число секций. Недостатком протонного драйвера является его размер. В отличие от других драйверов, длины которых сопоставимы с длиной плазменной волны, протонные сгустки в современных синхротронах имеют длину порядка 10 см, что на несколько порядков превосходит плазменную длину волны. Такой пучок не будет эффективно возбуждать волну. Сжать пучок в продольном направлении в сотни раз не представляется возможным, зато можно разбить пучок на последовательность коротких сгустков. Сделать это можно, используя самомодуляционную или поперечную двухпотокую неустойчивость. Подробнее об этом будет сказано далее в работе.

Целью данной работы является обнаружение и исследование различных специфичных эффектов, возникающих при взаимодействии длинного протонного пучка с плазмой в контексте плазменного кильватерного ускорителя.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Используя квазистатический 2D3V код, численно исследовать, каким образом изменение параметров плазмы и драйвера повлияет на величину возбуждаемых ускоряющих кильватерных полей.
2. В ходе моделирования эксперимента AWAKE идентифицировать физические эффекты, возникающие из-за большой длины пучка.
3. Исследовать найденные эффекты аналитически и численно.

Методология и методы исследования

Для выполнения работы используется квазистатический 2D3V код LCODE [1–5], использующий метод частиц в ячейках (particles in cell, PIC). Поскольку время бетатронных колебаний протонного пучка гораздо больше

периода колебаний кильватерной волны, квазистатическое приближение допустимо.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 76 страниц, включая 28 рисунков. Список литературы содержит 57 наименований.

Первая глава описывает код, который был использован в данной работе. В этом разделе можно узнать, какие модели описания плазмы и пучка используются и какие уравнения при этом решаются. Кроме того, кратко описан способ распараллеливания кода для работы с большим числом вычислительных узлов.

Вторая глава основана на результатах работы [6]. В ней описан эксперимент AWAKE, а также численно исследована чувствительность амплитуды ускоряющего поля в этом эксперименте к изменениям различных параметров драйвера и плазмы. Изменения всех параметров были произведены в широком диапазоне. Сильные изменения могут помочь обнаружить, какие фундаментальные физические законы и эффекты могут ограничивать рост амплитуды волны. Небольшие же изменения покажут, как волна будет вести себя от выстрела к выстрелу. Это — необходимая предварительная работа для эксперимента AWAKE, которая позволила понять, какие процессы влияют на создание волны в плазме, и как происходит самомодуляция протонного пучка.

В третьей главе показано влияние флуктуаций плотности драйвера на эмиттанс витнесса в протонном кильватерном ускорителе. Цель плазменных методов ускорения состоит не только в том, чтобы уменьшить размеры ускорителей за счет повышения электрического поля, но и в том, чтобы сохранить качество пучка. В частности, нужно сделать так, чтобы нормализованный эмиттанс пучка в плазме не рос, или хотя бы рос слабо. Несколько причин роста эмиттанса уже были найдены и описаны в литературе: движение ионов плазмы [7], многократное кулоновское рассеяние [8, 9], переходы между плазменными секциями и обычными фокусирующими элементами [10–13], согласование нескольких плазменных секций [14, 15]. Постепенно появляются решения этих проблем.

Мы нашли и описали [16] еще один эффект, который может вызвать рост эмиттанса. Он связан с нестационарностью драйвера. Драйверу требуется некоторое время, чтобы достигнуть поперечного равновесия в плазменной волне [17]. Форма драйвера меняется в то время, пока он приходит к равновесию, вызывая временные флуктуации в фокусирующей силе создаваемой волны, что нагревает витнесс.

В рамках четвертой главы исследуется влияние движения ионов плазмы на величину возбуждаемых в ней полей. Обычно интервал между драйвером и витнессом составляет один или два периода ленгмюровской волны. Это слишком короткий промежуток, чтобы тяжелые плазменные ионы успели сдвинуться. Поэтому в формировании волны участвуют только электроны плазмы, в то время как ионы считаются неподвижными. Однако есть случаи, в которых движение ионов оказывается важным. Это происходит, когда драйвер или витнесс достаточно интенсивны, чтобы создать возмущение ионной плотности за один период [7, 18–21], или в случае, когда волну резонансным образом в течении многих периодов возбуждает длинный драйвер [22–25]. Наше исследование [26] относится ко второму случаю.

Движение ионов обычно деструктивно влияет на волну. Возмущения ионной плотности вызывают фазовое рассогласование электронных колебаний и опрокидывание волны [24, 25, 27–29]. Однако при некоторых условиях движение ионов приводит к увеличению продольного электрического поля на оси. Наибольший пророст, который мы смогли найти, используя разные драйверы, составил около 40%. Увеличение не является существенным, но оно может быть важно для правильной интерпретации результатов экспериментов и ускорения высококачественных витнессов.

Научная новизна состоит в обнаружении ранее не известных физических эффектов в пучково-плазменном взаимодействии, связанных с большой длиной драйвера. Обнаруженные эффекты оказались универсальными, и, хо-

тя большая длина пучка помогает их выявить, но проявляются они для всех видов драйвера.

Научная и практическая значимость

Результаты работы [6] позволили идентифицировать и охарактеризовать оптимальные режимы эксперимента AWAKE [30–34], что стало важной составляющей его успеха [35, 36]. Результаты моделирования были подтверждены экспериментами [37] и позволили по результатам косвенных измерений охарактеризовать происходящие в плазме процессы [38, 39].

Найденные в работе [16] эффекты влияют на качество ускоряемого пучка и должны учитываться для достижения количественного согласия моделирования и эксперимента.

Кроме того, обнаруженный эффект увеличения поля из-за движения ионов [26] увеличивает коэффициент трансформации без дополнительных манипуляций с пучком. Это параметр, повышение которого очень важно для кильватерного ускорения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Базовые значения эмиттанса и заряда пучка в первой очереди эксперимента AWAKE являются пороговыми в том смысле, что их улучшение не приводит к пропорциональному росту амплитуды ускоряющего поля, а ухудшение уменьшает поле.
2. Малые изменения параметров пучка и плазмы, происходящие от выстрела к выстрелу, не приводят к значительному изменению амплитуды возбуждаемой волны.
3. Неоднородности плотности драйвера, появляющиеся во время релаксации пучка к равновесному состоянию в плазме, приводят к появлению флуктуаций фокусирующей силы в кильватерной волне, которые, в свою очередь, вызывают рост эмиттанса витнесса. Рост эмиттанса замедляется при увеличении заряда витнесса, поскольку витнесс начинает дополнительно фокусироваться своим собственным кильватерным полем.

4. Движение ионов может приводить к увеличению ускоряющего поля в кильватерном ускорителе. Величина эффекта не зависит от массы ионов и составляет 40% для AWAKE

Достоверность полученных результатов обеспечивается совпадением результатов моделирования используемым численным кодом и экспериментальных данных в близких режимах [37].

Личный вклад

Автор принимал активное участие в постановке задачи, производил расчеты, проводил анализ полученных результатов, а также участвовал в подготовке публикаций.

Апробация работы

Результаты работы представлялись на международных конференциях, в том числе:

1. Международной конференции Laser-Plasma Accelerator Workshop 2019 (г. Сплит, 2019)
2. Международной конференции European Advanced Accelerator Concepts Workshop (о. Эльба, 2017)
3. Собрании коллаборации AWAKE (г. Новосибирск, 2017)

Большая часть результатов диссертации вошла в выпускную квалификационную работу аспиранта [40], которая была успешно защищена в 2020 году.

Результаты диссертации изложены в следующих работах:

1. K.V. Lotov, **V.A. Minakov**, and A.P. Sosedkin, Parameter sensitivity of plasma wakefields driven by self-modulating proton beams. Phys. Plasmas **21**, 083107 (2014) [6].
2. **V.A. Minakov**, M. Tacu, A.P. Sosedkin, and K.V. Lotov, Witness emittance growth caused by driver density fluctuations in plasma wakefield accelerators. Phys. Plasmas **25**, 093112 (2018) [16].
3. **V.A. Minakov**, A.P. Sosedkin and K.V. Lotov, Accelerating field enhancement due to ion motion in plasma wakefield accelerators. Plasma Phys. Control. Fusion **61**, 114003 (2019) [26].

4. K.V. Lotov and **V.A. Minakov**, Proton beam self-modulation seeded by electron bunch in plasma with density ramp. *Plasma Phys. Control. Fusion* **62**, 115025 (2020) [34].
5. A.A. Gorn, M. Turner, E. Adli, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration), Proton beam defocusing in AWAKE: comparison of simulations and measurements. *Plasma Phys. Control. Fusion* **62**, 125023 (2020) [37].
6. E. Gschwendtner, M. Turner, E. Adli, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration) Proton-driven plasma wakefield acceleration in AWAKE. *Phil. Trans. R. Soc. A* **378**, 20180418 (2019) [36].
7. M. Turner, E. Adli, A. Ahuja, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration), Experimental Observation of Plasma Wakefield Growth Driven by the Seeded Self-Modulation of a Proton Bunch. *Phys. Rev. Lett.* **122**, 054801 (2019) [38].
8. E. Adli, A. Ahuja, O. Apsimon, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration), Experimental observation of proton bunch modulation in a plasma at varying plasma densities. *Phys. Rev. Lett.* **122**, 054802 (2019) [39].
9. E. Adli, A. Ahuja, O. Apsimon, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration), Acceleration of electrons in the plasma wakefield of a proton bunch. *Nature* **561**, 363 (2018) [35].
10. P. Muggli, E. Adli, R. Apsimon, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration), AWAKE readiness for the study of the seeded self-modulation of a 400GeV proton bunch. *Plasma Phys. Control. Fusion* **60**, 014046 (2018) [32].
11. A. Caldwell, E. Adli, L. Amorim, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration), Path to AWAKE: Evolution of the concept. *Nuclear Instr. Methods A* **829**, 3 (2016) [30].
12. E. Gschwendtner, E. Adli, L. Amorim, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration), AWAKE, The Advanced Proton Driven Plasma

- Wakefield Acceleration Experiment at CERN. Nuclear Instr. Methods A **829**, 76 (2016) [[31](#)].
13. C. Bracco, L.D. Amorim, R. Assmann, ..., **V.A. Minakov**, ..., et al. (The AWAKE Collaboration), AWAKE: A Proton-Driven Plasma Wakefield Acceleration Experiment at CERN. Nuclear and Particle Physics Proceeding **273**, 175 (2016) [[33](#)].

Глава 1. Код LCODE

1.1. Обзор

LCODE — это свободно распространяемый код для моделирования плазменного кильватерного ускорения. Это двумерный (2d3v) код, который может работать как в плоской, так и в осесимметричной геометрии. Окно моделирования движется со скоростью света, и, кроме того, для расчета отклика плазмы используется квазистатическое приближение. Поведение пучка моделируется с использованием полностью релятивистских макрочастиц. Плазма может моделироваться либо макрочастицами (с использованием кинетического солвера), либо электронной жидкостью (с использованием жидкостного солвера). С помощью кинетического солвера возможно промоделировать поперечно-неоднородную плазму, горячую плазму, заряженную плазму и подвижные ионы. Код снабжен разнообразными инструментами диагностики, которые включают возможность графического представления результатов в процессе проведения расчета.

Суть квазистатического приближения иллюстрируется рисунком 1.1. Когда мы вычисляем отклик плазмы, пучок рассматривается как “жесткое” (не эволюционирующее во времени) распределение зарядов и токов, которое распространяется со скоростью света c . Поля, создаваемые этим пучком, зависят от продольной координаты z и времени t только в комбинации $\xi = z - ct$ и могут быть найдены послойно, начиная с головы пучка. Поскольку пучок не меняется, все частицы, стартовавшие из некоторого поперечного положения r_0 , копируют движение друг друга, а их параметры (поперечная координата и импульсы) могут быть найдены как функции от ξ . Таким образом, макрочастица плазмы в квазистатической модели — это не “большая” частица, а “трубка частиц”, то есть группа реальных частиц, стартовавших с заданного радиуса

с заданным начальным импульсом. Это значительно уменьшает объем памяти, необходимый для хранения частиц плазмы.

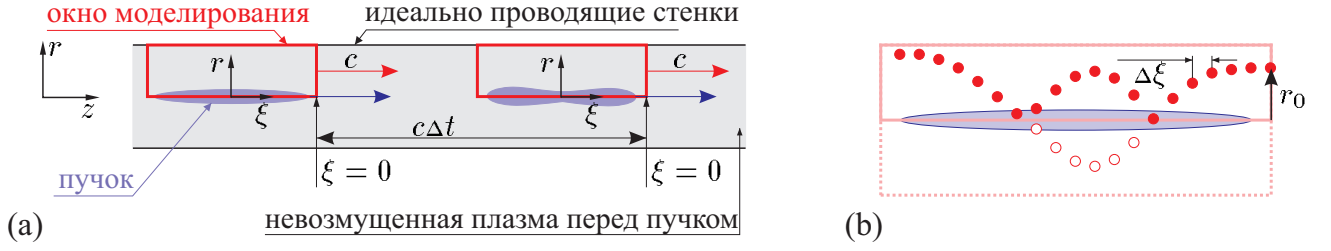


Рисунок 1.1 — Геометрия задачи (a) и траектория частицы плазмы в окне моделирования (b).

Рассчитанные поля затем используются для модификации пучка. Для ультррелятивистских пучков шаг по времени Δt можно сделать большим, что ускоряет моделирование на несколько порядков. Таким образом, квазистатическое приближение полезно тогда и только тогда, когда временной масштаб эволюции пучка намного больше периода плазменной волны.

Различные детали LCODE и лежащей в основе физики описаны в следующих статьях: жидкостная модель плазмы [1], модель пучка и кинетическая модель плазмы [2], потоки энергии в сопутствующем окне [41], обсуждение применимости квазистатических кодов для моделирования длинных пучков [42], улучшения кинетического солвера, необходимые для моделирования длинных пучков [3].

1.2. Обозначения и единицы измерения

Мы используем цилиндрические координаты (r, φ, ξ) для осесимметричной геометрии и декартовы координаты (x, y, ξ) для плоской геометрии. Пучок распространяется в направлении роста ξ .

Код работает с безразмерными величинами. Единицы измерения зависят от некоторой базовой плотности плазмы n_0 . Рекомендуется в качестве n_0 ис-

пользовать начальную невозмущенную плотность плазмы. Используемые обозначения и единицы измерения для различных величин приведены в таблице 1. Здесь $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m}$ — это плазменная частота электрона, e — элементарный заряд, а m — масса электрона.

Таблица 1 — Единицы измерения различных физических величин, используемые в LCODE

Величина	Единица измерения
Время:	ω_p^{-1}
Расстояние:	c/ω_p
Скорость:	c
Импульс:	mc
Момент импульса:	mc^2/ω_p
Масса:	m
Плотность частиц:	n_0
Плотность заряда:	en_0
Плотность тока:	ecn_0
Заряд:	e
Ток:	mc^3/e
Поле:	$E_0 \equiv mc\omega_p/e$
Потенциал:	mc^2/e
Плотность потока энергии:	$n_0 mc^3$
Поток энергии:	$n_0 mc^5/\omega_p^2$
Плотность энергии:	$n_0 mc^2$
Энергия на единицу длины:	$n_0 mc^4/\omega_p^2$
Фокусирующая сила:	$m\omega_p^2$

1.3. Физические модели

1.3.1. Кинетическая модель плазмы

Для того, чтобы найти поля, мы решаем уравнения Максвелла, которые в безразмерных переменных принимают форму

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j} + \vec{j}_b + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho + \rho_b, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.1)$$

В квазистатическом приближении

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (1.2)$$

уравнения (1.1) принимают вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r = \rho + \rho_b - \frac{\partial E_z}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r = -\frac{\partial B_z}{\partial \xi}, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (E_r - B_\varphi) = \rho - j_z, \quad \frac{\partial E_z}{\partial r} = j_r, \quad \frac{\partial B_z}{\partial r} = -j_\varphi, \quad E_\varphi = -B_r. \quad (1.4)$$

Здесь мы пренебрегаем компонентами j_{br} и $j_{b\varphi}$ тока пучка и считаем $j_{bz} = \rho_b$, поскольку предполагается, что частицы пучка движутся, в основном, в z -направлении. Чтобы обеспечить стабильность алгоритма, мы решаем в конечных разностях вместо (1.3) следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r - E_r = \frac{\partial(\rho + \rho_b)}{\partial r} - \frac{\partial j_r}{\partial \xi} - \tilde{E}_r, \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r - B_r = \frac{\partial j_\varphi}{\partial \xi} - \tilde{B}_r, \quad (1.5)$$

где \tilde{E}_r и \tilde{B}_r — некоторые прогнозы для полей E_r и B_r . Эти уравнения получаются дифференцированием (1.3) и подстановкой (1.4) в результат. Вычитание полей (с тильдами или без них) из обеих частей равенств не приводит к большой ошибке, если прогнозы близки к конечным полям. Граничные условия для уравнений (1.4) - (1.5) соответствуют идеально проводящей трубке радиуса r_{\max} :

$$E_r(0) = B_r(0) = B_\varphi(0) = E_z(r_{\max}) = B_r(r_{\max}) = 0, \quad (1.6)$$

$$\int_0^{r_{\max}} 2\pi r B_z dr = \pi r_{\max}^2 B_0,$$

где B_0 — внешнее продольное магнитное поле, если оно есть (наличие этого поля не меняет осевую симметрию системы).

Каждая плазменная макрочастица характеризуется семью величинами: поперечной координатой (r), тремя компонентами импульса (p_r , p_ϕ и p_z), массой M , зарядом q и порядковым номером. Параметры макрочастиц плазмы инициализируются перед пучком (при $\xi = 0$), а затем изменяются послойно в соответствии с уравнениями

$$\frac{d\vec{p}}{d\xi} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\xi} = \frac{q}{v_z - 1} \left(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right), \quad (1.7)$$

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{v_r}{v_z - 1}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{M^2 + p^2}}. \quad (1.8)$$

Если частица соударяется со стенкой (при $r = r_{\max}$), она возвращается в область моделирования неподалеку от стенки с нулевым импульсом. Ток и плотность заряда плазмы получают суммированием по макрочастицам плазмы, лежащим в заданном радиальном интервале:

$$\vec{j} = A \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{1 - v_{z,i}}, \quad \rho = A \sum_i \frac{q_i}{1 - v_{z,i}}, \quad (1.9)$$

где A — нормировочный коэффициент. Знаменатель в (1.9) появляется, поскольку вклад «трубки частиц» в плотность и ток зависит от скорости макрочастиц в окне моделирования.

Отклик плазмы рассчитывается послойно в сторону уменьшения ξ (справа налево на рисунке 1.2). Поскольку для расчета полей нам нужны производные токов по ξ , используется следующая схема предиктор-корректор. Сначала мы перемещаем частицы плазмы из слоя a в слой b с помощью полей слоя a , затем вычисляем токи в слое b , затем вычисляем все поля в слое b , затем перемещаем частицы плазмы из слоя a в слой b средними полями слоев a и b , затем снова рассчитываем токи и поля в слое b , затем снова перемещаем частицы плазмы из слоя a в слой b с помощью средних полей. Когда поля вычисляются впервые, в качестве \tilde{E}_r и \tilde{B}_r используются радиальные поля из предыдущего слоя. Когда поля вычисляются второй раз, ранее найденные средние радиальные поля

используются как \tilde{E}_r и \tilde{B}_r . Также прилагаются особые усилия для подавления мелкомасштабного (масштаба шага сетки) шума плотности плазмы.

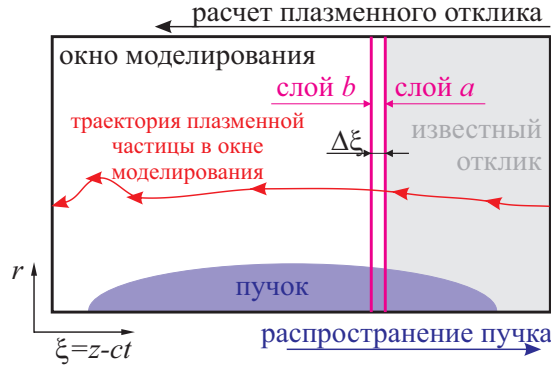


Рисунок 1.2 — Расчет плазменного отклика в квазистатическом приближении.

Алгоритм позволяет легко сократить шаг по ξ в областях с мелкомасштабной структурой поля. Сокращение происходит автоматически, если плотность тока плазмы $|j_z|$ превышает некоторое пороговое значение.

В плоской геометрии вместо уравнений (1.4), (1.5) мы решаем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - E_x = \frac{\partial(\rho + \rho_b)}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial \xi} - \tilde{E}_x, \quad \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} - B_x = \frac{\partial j_y}{\partial \xi} - \tilde{B}_x, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial(E_x - B_y)}{\partial x} = \rho - j_z, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = j_x, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -j_y, \quad (1.11)$$

$$E_y = -B_x, \quad \frac{\partial(E_x - B_y)}{\partial \xi} = j_x.$$

Последнее уравнение используется только при $x = 0.9 r_{\max}$ для нахождения постоянной интегрирования для B_y . Граничные условия в плоском случае

$$E_z(0) = B_x(0) = E_z(r_{\max}) = B_r(r_{\max}) = 0, \quad \int_0^{r_{\max}} B_z dx = r_{\max} B_0. \quad (1.12)$$

1.3.2. Жидкостная модель плазмы

В жидкостном приближении плазма характеризуется плотностью n_e и импульсом \vec{p} электронной компоненты. Ионы плазмы являются неподвижным фо-

ном с плотностью $n_i = 1$. Движение электронной жидкости определяется уравнением

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{p} = -\vec{E} - [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.13)$$

которое вместе с (1.1) и

$$\vec{j} = -n_e \vec{v}, \quad \rho = 1 - n_e, \quad \vec{v} = \vec{p}/\gamma, \quad \gamma = \sqrt{1 + p^2}, \quad (1.14)$$

образует полную систему уравнений. Эта система имеет два интеграла движения. Первый был выведен Худиком и Лотовым [43]:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{p} + n_e B_0 (\vec{e}_z - \vec{v}), \quad (1.15)$$

где B_0 — невозмущенное продольное магнитное поле перед пучком. Второй хорошо известен и связан с сохранением обобщенного импульса:

$$\Phi = \gamma - p_z, \quad (1.16)$$

где Φ — кильватерный потенциал:

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad E_r - B_\varphi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (1.17)$$

Удобно использовать величину $N = n_e(1 - v_z)$ вместо электронной плотности n_e и явно использовать уравнение непрерывности, которое принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r N p_r. \quad (1.18)$$

Окончательный набор решаемых уравнений (в порядке решения) имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -E_z, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial \xi} = \frac{\partial p_z}{\partial r} + B_\varphi + \frac{N p_\varphi B_0}{\Phi}, \quad (1.20)$$

$$N = 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r p_\varphi - \frac{N p_\varphi}{\Phi} = -B_0 \frac{\partial N}{\partial r}, \quad (1.22)$$

$$p_z = \frac{1 + p_r^2 + p_\varphi^2 - \Phi^2}{2\Phi}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{N p_r}{\Phi}, \quad (1.24)$$

$$B_r = -E_\varphi = -\frac{N p_r B_0}{\Phi} - \frac{\partial p_\varphi}{\partial \xi}, \quad (1.25)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r p_\varphi + B_0 N, \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi - \frac{N}{\Phi} B_\varphi &= \frac{\partial j_b}{\partial r} - p_z \frac{\partial}{\partial r} \frac{N}{\Phi} + \\ + \frac{p_r}{\Phi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r N p_r}{\Phi} + \frac{N p_r E_z}{\Phi^2} + \frac{N^2 p_\varphi B_0}{\Phi^2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Уравнения здесь получены следующим образом: (1.19) — это первое уравнение (1.17); (1.20) — это φ -компонента (1.15) в сочетании с (1.16); (1.21) — это первое уравнение (1.4); (1.22) — это z -компонента (1.15), дифференцированная по r и объединенная с третьим уравнением (1.4); (1.23) — это определение Φ из (1.16) с релятивистским фактором, взятым из (1.14); (1.24) — это второе уравнение (1.4); (1.25) — это последнее уравнение (1.4) и r -компонента (1.15); (1.26) — это z -компонента (1.15). Чтобы получить уравнение (1.3.2), мы дифференцируем z -компоненту первого уравнения в (1.1) по r , используя (1.24) и исключая ξ -производные N , Φ и p_r с помощью (1.18) – (1.20).

В уравнениях (1.19) – (1.3.2) только для двух величин (Φ и p_r) нужно найти их значения на следующем слое по ξ , все остальные могут выражаться через Φ и p_r на новом слое. Начальные условия для (1.19) – (1.3.2) следующие: $\Phi = 1$ и $p_r = 0$. Необходимые граничные условия

$$p_\varphi(0) = p_\varphi(r_{\max}) = 0, \quad B_\varphi(0) = E_z(r_{\max}) = 0, \quad \left. \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} \right|_{r=r_{\max}} = 0. \quad (1.28)$$

Уравнения (1.19) - (1.3.2) решаются с помощью схемы предиктор-корректор.

В плоской геометрии решаемые уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -E_z, \quad \frac{\partial p_x}{\partial \xi} = \frac{\partial p_z}{\partial x} + B_y + \frac{N p_y B_0}{\Phi}, \quad (1.29)$$

$$N = 1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 p_y}{\partial x^2} - \frac{N p_y}{\Phi} = -B_0 \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (1.30)$$

$$p_z = \frac{1 + p_x^2 + p_y^2 - \Phi^2}{2\Phi}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{N p_x}{\Phi}, \quad (1.31)$$

$$B_x = -E_y = -\frac{N p_x B_0}{\Phi} - \frac{\partial p_y}{\partial \xi}, \quad B_z = \frac{\partial p_y}{\partial x} + B_0 N, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} - \frac{N}{\Phi} B_y = \frac{\partial j_b}{\partial x} - p_z \frac{\partial N}{\partial x} \frac{1}{\Phi} + \frac{p_x}{\Phi} \frac{\partial N p_x}{\partial x} + \frac{N p_x E_z}{\Phi^2} + \frac{N^2 p_y B_0}{\Phi^2}, \quad (1.33)$$

$$p_y(0) = p_y(r_{\max}) = 0, \quad E_z(0) = E_z(r_{\max}) = 0, \quad (1.34)$$

$$\left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=r_{\max}} = 0. \quad (1.35)$$

1.3.3. Модель пучка

Пучок моделируется макрочастицами. Каждая макрочастица пучка характеризуется своим продольным положением ξ_b , поперечным положением r_b или x_b , тремя компонентами импульса \vec{p}_b , зарядом q_b и массой m_b . Уравнения движения макрочастиц имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dr_b}{dt} &= v_{br}, & \frac{d\xi_b}{dt} &= v_{bz} - 1, \\ \frac{d\vec{p}_b}{dt} &= q_b \vec{E} + q_b \left[\vec{v}_b \times \vec{B} \right], & \vec{v}_b &= \frac{\vec{p}_b}{\sqrt{m_b^2 + p_b^2}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Эти уравнения решаются модифицированным методом Эйлера (методом средней точки). Поля, действующие на макрочастицу, линейно интерполируются на предсказанное местоположение макрочастицы на половинном временном шаге. Если частица имеет небольшой продольный импульс и, следовательно,

высокую частоту бетатронных колебаний, то временной шаг для этой частицы автоматически уменьшается.

При отсутствии внешнего магнитного поля ($B_0 = 0$) угловой момент частиц пучка должен сохраняться, поэтому азимутальная составляющая импульса $p_{b\phi}$ не изменяется согласно (1.36), а восстанавливается из условия $r_b p_{b\phi} = \text{const}$.

1.3.4. Потоки энергии и плотности энергии

При наличии пучков в сопутствующем окне возникают потоки энергии [41]. Эти потоки состоят из потока энергии в лабораторной системе отсчета и передачи энергии за счет движения окна. Мы можем записать возмущение безразмерной плотности потока электромагнитной энергии

$$\vec{S}_e = -\vec{e}_z \frac{E^2 + B^2 - B_0^2}{2} + [\vec{E} \times \vec{B}], \quad (1.37)$$

и полную плотность потока энергии в сопутствующем окне

$$\vec{S} = \vec{S}_e + \sum (\gamma - 1)(\vec{v} - \vec{e}_z), \quad (1.38)$$

где суммирование ведется по частицам плазмы в единице объема. Для жидкостной модели плазмы плотность потока энергии равна

$$\vec{S}_f = \vec{S}_e + n_e(\gamma - 1)(\vec{v} - \vec{e}_z). \quad (1.39)$$

Разница между ними, $\vec{S} - \vec{S}_f$, является мерой энергии, переносимой в форме теплового движения частиц плазмы.

Интегрирование (1.37) – (1.39) по окну моделирования дает нам зависимость потоков энергии от координаты z :

$$\Psi_e = - \int_0^{r_{\max}} S_{ez} 2\pi r dr, \quad \Psi = - \int_0^{r_{\max}} S_z 2\pi r dr, \quad \Psi_f = - \int_0^{r_{\max}} S_{fz} 2\pi r dr. \quad (1.40)$$

Драйвер высаживает энергию в некоторую точку окна моделирования, а затем эта энергия течет назад или в поперечном направлении, пока она не выйдет из окна или её не заберет ускоряемый пучок. Потери энергии через поперечные границы учитываются добавлением интеграла по границе области моделирования:

$$\Psi_w = \Psi + \int_{\xi}^0 2\pi r_{\max} S_r(r_{\max}, \xi') d\xi' \quad (1.41)$$

Величина Ψ_w является мерой обмена энергии пучка и плазмы:

$$\frac{\partial \Psi_w}{\partial \xi} = \int_0^{r_{\max}} j_{bz} E_z 2\pi r dr. \quad (1.42)$$

Производная $\partial \Psi_w / \partial \xi$ должна быть равна нулю при отсутствии пучков; это можно использовать как хороший тест точности моделирования. Разница между Ψ и Ψ_f может служить мерой потерянной энергии, которая не может быть извлечена из плазмы ускоряемым пучком. Формулы (1.40) – (1.42) выписаны для осесимметричного случая, их модификация для плоской геометрии очевидна.

Полная плотность энергии и плотность энергии в жидкостном приближении определяются традиционным образом:

$$W = \frac{E^2 + B^2 - B_0^2}{2} + \sum (\gamma - 1), \quad W_f = \frac{E^2 + B^2 - B_0^2}{2} + n_e (\gamma - 1), \quad (1.43)$$

соответственно; суммирование ведется по частицам плазмы в единице объема.

1.3.5. Реализация параллельной работы

Описанный выше алгоритм проходит вдоль пучка от его головы к хвосту, за один проход послойно рассчитывая отклик плазмы и новое состояние пучка, совершая таким образом шаг по времени. При работе с несколькими вычислительными узлами каждый из них ведет расчет отдельного шага по времени.

Для расчета нового состояния одного слоя по продольной координате требуется знать состояние предыдущего слоя, а также предыдущее состояние рассчитываемого слоя. Первое известно, поскольку алгоритм движется по слоям, а значит состояние предыдущего слоя уже рассчитано. Предыдущее состояние рассчитываемого слоя при параллельной работе кода вычислительный узел получает от предыдущего узла, рассчитывающего соседний временной шаг. Таким образом каждый узел, получая новое состояние очередного слоя, сразу передает эту информацию следующему узлу, а сам ожидает информацию о новом слое, если это необходимо (рисунок 1.3). Расширение этого “конвейера” до N узлов позволяет вычислить $(k + N)$ -ое состояние из k -ого за один проход.

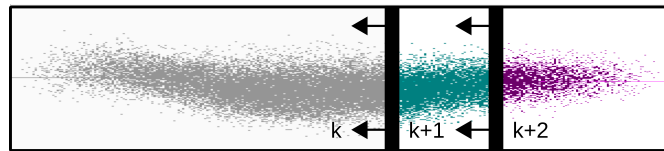


Рисунок 1.3 — Параллельная реализация квазистатического алгоритма. Моделирование $(k + 1)$ -го временного шага может не ждать, пока k -й шаг будет вычислен во всем окне моделирования. Ультрарелятивистское приближение позволяет второму процессу сразу же начать следовать за первым. Таким образом, N процессов могут формировать конвейер, вычисляя N временных шагов пучка за один проход.

Глава 2. Параметрические зависимости амплитуды электрического поля, возбужденного самомодулирующимся протонным пучком

Использование протонных пучков в качестве драйвера для кильватерного ускорителя не рассматривалось до 2009 года. Несмотря на большое количество энергии, запасенной в таких пучках, использовать их мешало то, что скорость протонов заметно ниже скорости света и длина пучков гораздо больше плазменной длины волны. Большая длина не позволяет такому пучку возбудить в плазме волну без дополнительных ухищрений. Низкая же скорость пучка становится проблемой из-за расфазировки. Фазовая скорость плазменной волны близка к скорости драйвера, скорость же витнесса зависит только от его энергии. Почти всегда предполагается ускорение электронного пучка, а значит, его скорость почти сразу будет близка к скорости света. Витнесс окажется быстрее драйвера, а значит, и быстрее волны. Убежав вперед буквально на половину периода плазменной волны, витнесс попадает в замедляющее поле, а значит, длительного ускорения не получится. С запуском БАК в мире появились протонные пучки со скоростью, достаточно близкой к скорости света, чтобы проблема расфазировки пропала. Кроме того, как говорилось во Введении, под действием самомодуляционной неустойчивости длинный пучок разбивается на последовательность коротких сгустков. В «голове» пучка, то есть передней его части, длина которой равна периоду плазменной волны, мало частиц. Их плотности недостаточно, чтобы возбудить достаточно сильное кильватерное поле. Таким образом, неустойчивость будет развиваться из шумовых полей, а значит, фаза волны будет меняться в эксперименте от выстрела к выстрелу случайным образом. Чтобы сделать самомодуляцию контролируемой, необходимо создать затравку для её развития. Подробнее о способах создания затравки будет сказано позднее.

2.1. Эксперимент AWAKE

В ЦЕРНе проводится эксперимент по кильватерному ускорению с протонным драйвером [30–33]. На данный момент завершилось две фазы эксперимента. Последующие фазы будут проводиться, когда ускорители в ЦЕРНе запустятся после профилактики. В качестве драйвера используется протонный пучок из синхротрона SPS с энергией 400 ГэВ.

Первая фаза должна была подтвердить возможность получения контролируемой самомодуляции длинного протонного пучка [44]. Для создания затравки использовалась следующая схема синхронизации пучков (рисунок 2.1). В газовую ячейку с неионизованным рубидием запускается драйвер, примерно в середине которого летит лазерный импульс. Лазер ионизует рубидий, создавая однородную плазму со степенью ионизации 100% [45]. Таким образом, плазма видит только половину пучка, а значит, он как будто бы имеет резкий передний фронт, способный создать электрическое поле, достаточное, чтобы стать затравкой. Поскольку неустойчивость нарастает из этой затравки, фаза волны теперь стабилизирована.



Рисунок 2.1 — Взаиморасположение протонного драйвера и ионизирующего лазерного импульса в эксперименте AWAKE

Во второй фазе эксперимента было показано ускорение электронного сгустка до энергии 2 ГэВ в плазменной секции длиной 10 метров с использованием протонного драйвера [35, 36].

Третья и последующие фазы будут направлена на улучшение качества и энергии ускоренного электронного пучка.

Параметры эксперимента менялись в довольно широких пределах, и почти каждое моделирование, проводимое в рамках работы, относилось к эксперименту AWAKE. Поэтому мы будем указывать параметры для каждого моделирования отдельно.

2.2. Параметрические зависимости

Мы численно изучаем, как реагирует амплитуда кильватерной волны на изменение параметров эксперимента. Базовые параметры представлены в таблице 2. Отклик на небольшие изменения параметра показывает величину вариации ускоряющего поля от выстрела к выстрелу. Изучение больших изменений показывает, какие эффекты могут ограничивать ускоряющее поле или наоборот, какие параметры стоит улучшить для достижения лучшего результата. Ключевым параметром, определяющим поведение волны, является пиковый ток или, что эквивалентно, прирост поля из-за одного микросгустка, сфокусированного до радиального размера $\sigma_{rb} \sim c/\omega_p$ [46]. Этот параметр не сильно различается в современных протонных ускорителях ТэВ-ного класса. Таким образом, количественный результат, полученный для протонного пучка SPS, будет применим к другим установкам.

Мы используем цилиндрические координаты (r, φ, z) , где координата z измеряется от входа в плазму, а также сопутствующую координату $\xi = z - ct$, измеряемую от центра пучка. При анализе амплитуды кильватерной волны используем безразмерный кильватерный потенциал $\Phi(z, \xi)$ на оси:

$$\Phi(z, \xi) = \frac{\omega_p}{cE_0} \int_{\xi}^{\infty} E_z(z, \xi') d\xi', \quad (2.1)$$

где E_z — электрическое поле на оси. Его максимум Φ_{\max} выбирается из всех значений ξ при фиксированном z . Мы используем эту величину по той причине, что кильватерный потенциал менее зашумлен по сравнению с самим полем E_z .

Таблица 2 — Базовые параметры эксперимента AWAKE.

Параметр, обозначение	Величина
Плотность плазмы, n_0	$7 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$
Атомный вес ионов плазмы, M_i	85.5
Число частиц в пучке, N_b	3×10^{11}
Длина пучка, σ_{zb}	12 см
Радиус пучка, σ_{rb}	0.02 см
Энергия пучка, W_b	400 ГэВ
Энергоразброс пучка, δW_b	0.35%
Угловой разброс пучка, $\delta \alpha_b = \varepsilon_b / \sigma_{rb}$,	4.5×10^{-5}
Положение лазера относительно центра пучка, ξ_s	0 см
Скин слой плазмы, c / ω_p ,	0.02 см
Поле опрокидывания, $E_0 = mc\omega_p / e$,	2.54 ГВ/м
Длина взаимодействия, L_{\max}	10 м
Максимальная плотность пучка, n_{b0}	$4 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$
Эмиттанс пучка, ε_b	9 мкм мрад
Нормализованный эмиттанс пучка, ε_{bn}	3.6 мм мрад

Также используем размерную величину $\Phi_m = E_0 \Phi_{\max}$, измеряемую в ГВ/м, чтобы охарактеризовать силу волны в практических единицах.

Основные результаты параметрического поиска показаны на рисунке 2.2. В каждой группе графиков мы варьируем один параметр из таблицы 2, сохраняя значения остальных параметров неизменными, и строим график функций $\Phi_m(z)$.

Зависимость амплитуды кильватерной волны от плотности плазмы [рисунок 2.2(a)], в основном, определена скейлингом $E_0 \propto \sqrt{n_0}$. А именно, чем больше плотность плазмы, тем большие поля она может выдерживать. При высокой плотности плазмы толщина пучка составляет несколько плазменных скин слоев, что может привести к филаментации пучка [47]. Это трехмерное явление, оно не может быть промоделировано осесимметричным кодом. Точная ширина пучка, при которой филаментация начнет преобладать над само-модуляцией, не известна. Поэтому мы строим линии для высокой плотности

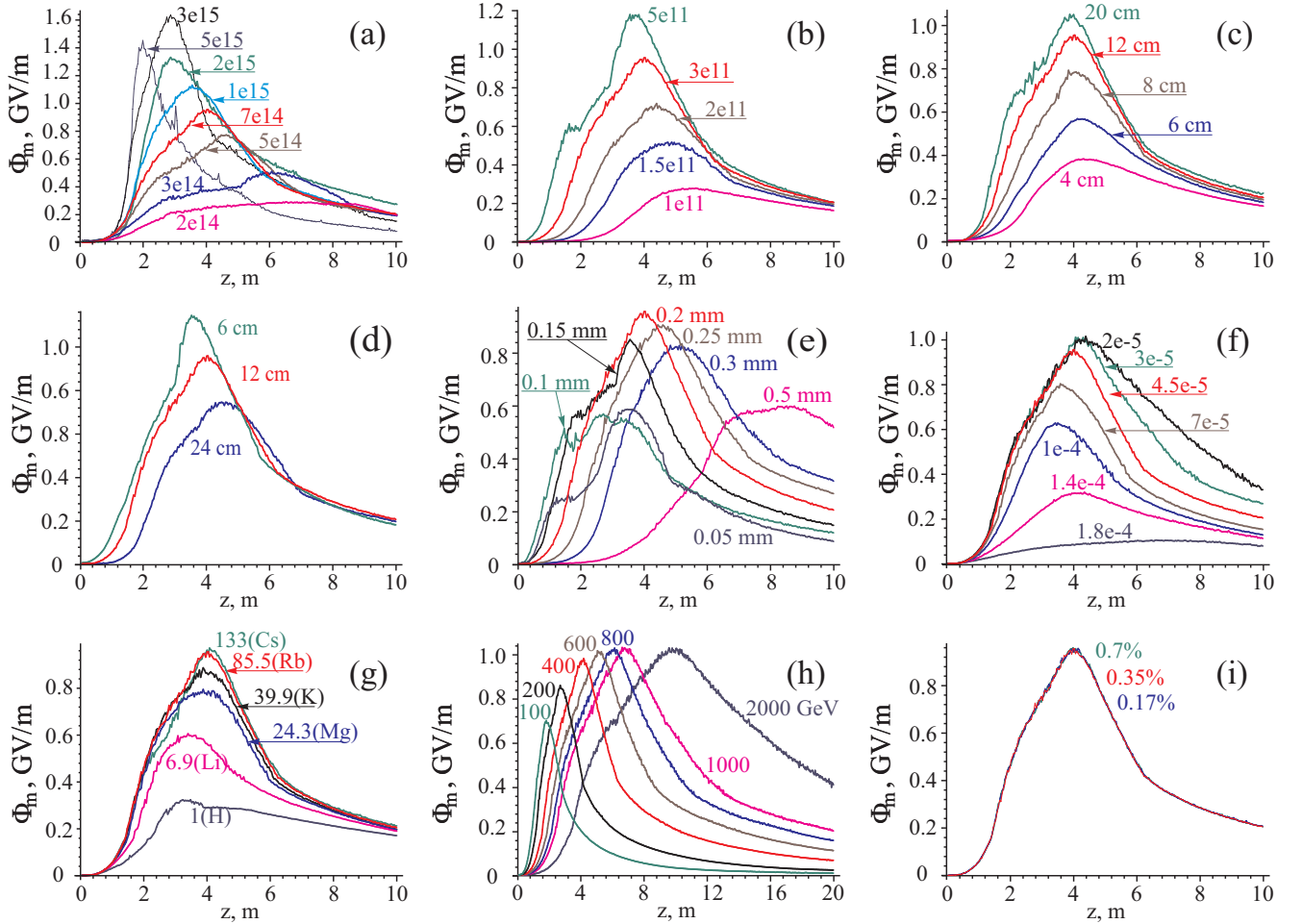


Рисунок 2.2 — Зависимости амплитуды кильватерной волны $\Phi_m(z)$ от длины распространения драйвера в плазме, сгруппированные по варьируемому параметру: (a) плотность плазмы n_0 , (b) число частиц N_b , (c) длина пучка при постоянном пиковом токе σ_{zb} , (d) длина пучка при постоянном числе частиц σ_{zb}^* , (e) радиус пучка σ_{rb} , (f) угловой разброс пучка $\delta\alpha_b$, (g) атомный вес ионов плазмы M_i , (h) энергия пучка W_b , (i) энергоразброс пучка δW_b .

Значения варьированных параметров подписаны около графиков.

($3 \times 10^{15} \text{см}^{-3}$ и $5 \times 10^{15} \text{см}^{-3}$) тонкими линиями, чтобы подчеркнуть, что они могут быть не реалистичными.

Уровень насыщения кильватерной волны можно понять из зависимости безразмерной амплитуды Φ_{\max} от безразмерной координаты (рисунок 2.3). Мы видим, что безразмерная амплитуда максимальна для базовой плотности. При бóльших плотностях кильватерная волна ограничена нелинейным удлинением плазменного периода. Приближенная теория этого эффекта [48] дает следующее выражение для амплитуды кильватерной волны в момент оптимальной

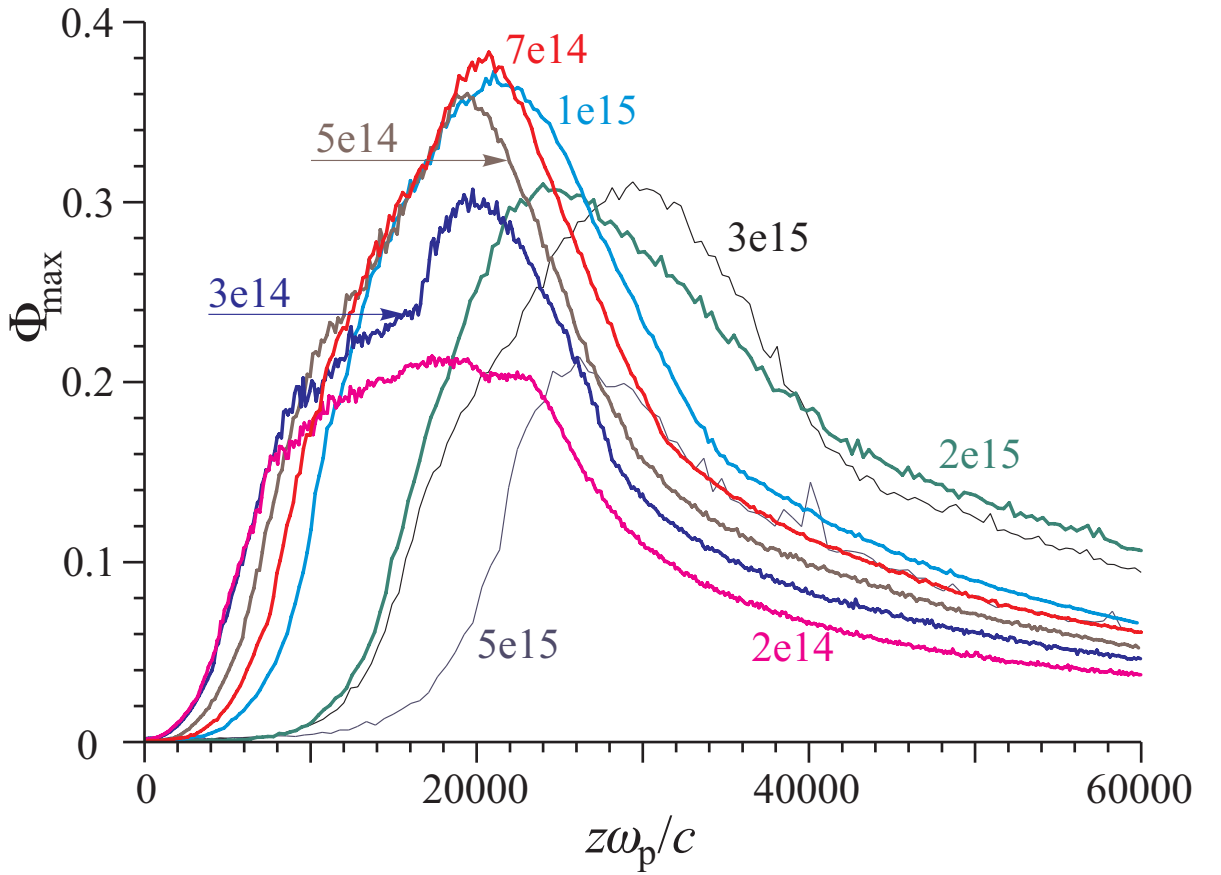


Рисунок 2.3 — Зависимости безразмерной кильватерной амплитуды Φ_{\max} от длины растространения $z\omega_p/c$ для разных плотностей плазмы. Графики окрашены так же, как на рисунке 2.2(a).

группировки микросгустков:

$$\Phi_{\max} = \left(\frac{4\beta\Delta E}{\alpha E_0} \right)^{1/3}, \quad (2.2)$$

где ΔE — это прирост амплитуды кильватерной волны, вызванный одним микросгустком, а $\alpha \approx 0.1$ и $\beta \approx 0.5$ — численные коэффициенты, зависящие от радиуса пучка. Формула (2.2) дает [48] $\Phi_{\max} \approx 0.4$ для базового набора параметров в соответствии с рисунком 2.3. Так как плазменная волна слабонелинейная и пучок шире, чем c/ω_p , вклад ΔE одного микросгустка, в основном, определяется плотностью пучка [46]. Таким образом, при изменении плотности плазмы ΔE почти не меняется. Предельное поле (2.2) зависит от плотности посредством E_0 и α . По сравнению с вариантом с базовой плотностью ($n_0 = 7 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$), у варианта с бóльшей плотностью ($n_0 = 5 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$) E_0 больше приблизительно в 2.7 раза, вдвое больше α , и на 40% меньше Φ_{\max} , в соответствии с рисун-

ком 2.3. Таким образом, амплитуда кильватерной волны на высоких плотностях ограничена нелинейным насыщением роста волны.

Теоретически [48] определено количество микросгустков, которое может когерентно возбуждать волну:

$$N_{\text{eff}} = \left(\frac{4\beta E_0^2}{\alpha \Delta E^2} \right)^{1/3}. \quad (2.3)$$

При умножении на плазменную длину волны $2\pi c/\omega_p$ это число дает длину L_{eff} части пучка, которая эффективно возбуждает волну. Для базовых параметров $N_{\text{eff}} = 130$ и $L_{\text{eff}} = 16$ см, что почти равно всей доступной длине пучка. При более низких плотностях плазмы длина волны увеличивается, число микросгустков в пучке N меньше, чем максимальное число сгустков, которое может когерентно возбуждать волну (2.3), рост поля вдоль пучка не достигает насыщения, и максимальное поле приблизительно равно $N\Delta E \propto \sqrt{n_0}$. Кривые для низких плотностей на рисунке 2.3 хорошо следуют этому скейлингу. Так максимумы кривых для $n_0 = (5,3,2) \times 10^{14} \text{см}^{-3}$ соотносятся друг с другом как $\sqrt{5} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Амплитуда волны для низких плотностей, таким образом, ограничена длиной пучка, а базовая плотность лежит близко к границе между этими режимами.

Зависимость кильватерной амплитуды от числа частиц в пучке как в случае фиксированной длины пучка [рисунок 2.2(b)], так и в случае фиксированного тока [рисунок 2.2(c)], также определяется этими двумя ограничениями. Чтобы это показать, мы построим максимум кильватерной амплитуды Φ_{abs} в зависимости от варьируемых параметров (рисунок 2.4), где Φ_{abs} — это абсолютный максимум $\Phi_m(z)$. Для фиксированной длины пучка $\Delta E \propto N_b$, и формула (2.2) предсказывает скейлинг $\Phi_m \propto \Phi_{\text{max}} \propto N_b^{1/3}$ [тонкая сплошная линия на рисунке 2.4(a)]. Если амплитуда волны ограничена длиной пучка, тогда она прямо пропорциональна числу частиц, возбуждающих волну, и $\Phi_m \propto N_b$ (тонкая пунктирная линия). Случай с базовыми параметрами (на всех рисунках показан красной линией) находится в переходной области.

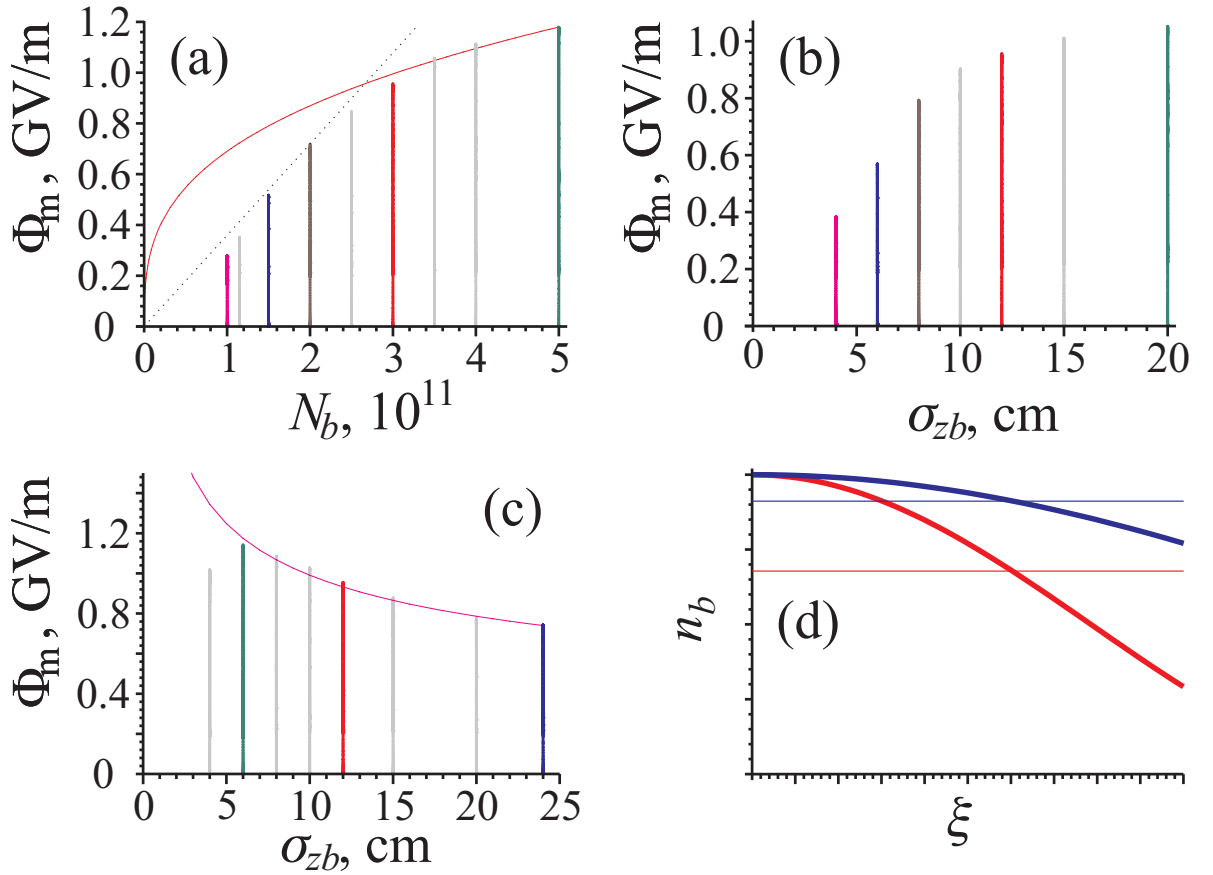


Рисунок 2.4 — Абсолютный максимум кильватерной амплитуды Φ_m (высота столбцов) в зависимости от варьируемых параметров: (а) число частиц в пучке для фиксированной длины пучка, (б) длина пучка для фиксированного пикового тока, и (с) длина пучка для фиксированного числа частиц в пучке. Столбцы покрашены так же, как и на рисунке 2.2(b-d). Тонкими и пунктирной линиями на фрагментах (а) и (с) показаны скейлинги абсолютного максимума кильватерной амплитуды от варьируемого параметра. На фрагменте (d) схематично показано продольное распределение нормального (красный) и удлиненного (синий) пучков. Тонкими линиями показана эффективная плотность обоих пучков.

Для случая фиксированного тока пучка нет простого скейлинга для описания максимальной амплитуды в режиме нелинейного ограничения. Если бы у пучка был постоянный ток, мы могли бы ожидать, что не будет никакой зависимости от длины пучка. Здесь же, однако, распределение плотности близко к гауссовскому, таким образом, эффективная плотность пучка меньше, чем пиковая. Чем длиннее пучок, тем ближе эффективная плотность к максимальной [рисунок 2.4(d)]. Так как средний вклад в поле от одного сгустка ΔE пропорцио-

нален эффективной плотности, мы наблюдаем слабый рост амплитуды с ростом заряда пучка там, где действует нелинейное ограничение [рисунок 2.4(b)]. В той области, где ограничение связано с длиной пучка, $\Phi_m \propto N_b \propto \sigma_{zb}$.

Если мы варьируем длину пучка, сохраняя его заряд постоянным [рисунок 2.2(d)], то результат снова следует скейлингу (2.2). Теперь $\Delta E \propto n_{b0} \propto \sigma_{zb}^{-1}$, и $\Phi_m \propto \sigma_{zb}^{-1/3}$. Этот скейлинг показан на рисунке 2.4(c) тонкой линией. Для маленьких σ_{zb} длина пучка уменьшается быстрее, чем $N_{\text{eff}} \propto \sigma_{zb}^{2/3}$, таким образом, короткие пучки находятся в режиме ограничения по длине с $\Phi_m \approx \text{const}$.

Из рисунка 2.2(e) видно, что базовый радиус пучка является оптимальным для базового набора параметров. Этот оптимум складывается из двух эффектов. При увеличении радиуса пучка вклад в поле ΔE от одного микросгустка уменьшается как σ_{rb}^{-2} . Суммарная амплитуда уменьшается таким же образом, поскольку при $\sigma_{rb} > 0.2$ мм волна возбуждается в режиме ограничения по длине. При уменьшении радиуса у пучка увеличивается угловой разброс, что вызывает быстрый разлет пучка по радиусу и уменьшение максимальной амплитуды [46]. На рисунке 2.5 показано сравнение разлета пучков с малым σ_{rb} и при базовых параметрах.

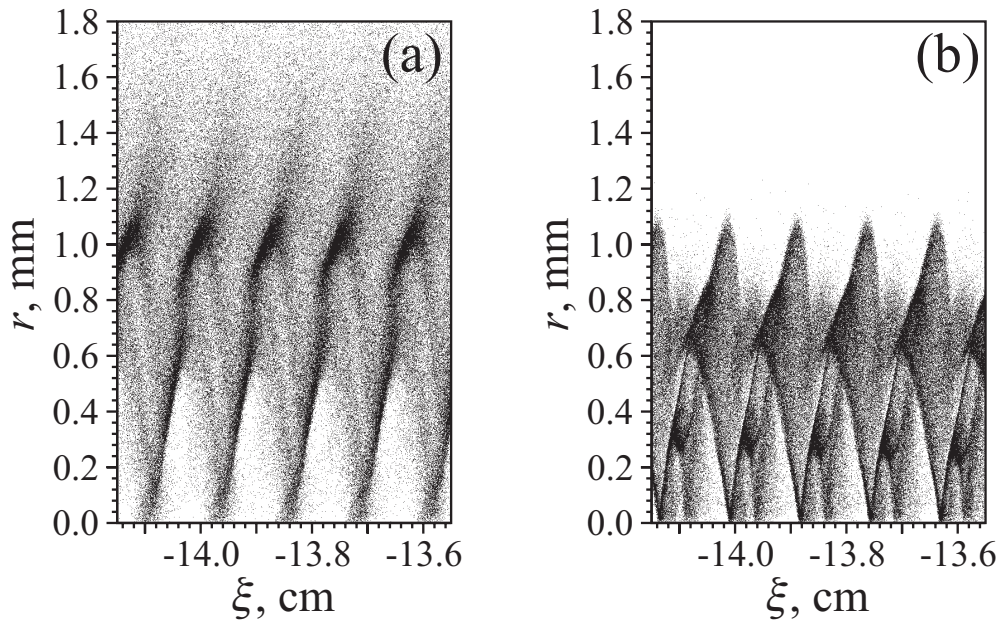


Рисунок 2.5 — Изображение пучка в момент развитой самомодуляции ($z = 3.6$ м) для начальных радиусов 0.05 мм (a) и 0.2 мм (b).

Зависимость кильватерной амплитуды от углового разброса пучка [рисунок 2.2(f)] определяется тем, как быстро разлетается пучок из-за эмиттанса. Уменьшение эмиттанса ниже некоторого порогового значения не влияет на результат, и его значение влияет только на скорость разрушения пучка на стадии полной модуляции [49]. При превышении эмиттансом порогового значения амплитуда поля резко уменьшается.

Зависимость максимальной амплитуды от атомной массы ионов показана на рисунке 2.2(g). Для выбранных параметров пучка уменьшение поля из-за движения ионов является существенным для атомных масс меньше 40. Однако здесь нет большого запаса прочности, для улучшенного набора параметров пучка это может стать проблемой.

Энергия пучка слабо влияет на кильватерную амплитуду [рисунок 2.2(h)], но изменяет временной масштаб процесса. Теория [44] предсказывает, что временной масштаб самомодуляции пропорционален $\sqrt{W_b}$, и этот скейлинг хорошо воспроизводится в моделировании (рисунок 2.6). Видимые отклонения от общей формы кривой на рисунке 2.6, наблюдаемые для самой низкой и самой высокой энергий, обусловлены изменением эмиттанса, которое сопровождает изменение энергии. При низких энергиях амплитуда уменьшается за счет расходимости, вызванной эмиттансом, а при высоких энергиях амплитуда уменьшается медленнее на стадии разрушения пучка.

Разумные изменения разброса энергии не влияют на кильватерную амплитуду [рисунок 2.2(i)].

Амплитуда волны также зависит от точки ξ_s , где будет располагаться ионизирующий лазерный импульс относительно центра протонного пучка (рисунок 2.7). Это расстояние контролируется временной синхронизацией лазерного и протонного пучков. Поскольку скорость обоих пучков близка к скорости света, это расстояние не меняется по ходу развития самомодуляции. Таким образом, отклик плазмы на два этих пучка такой же, как и на один протонный пучок с резким фронтом в точке ξ_s . В моделировании мы рассматриваем второй слу-

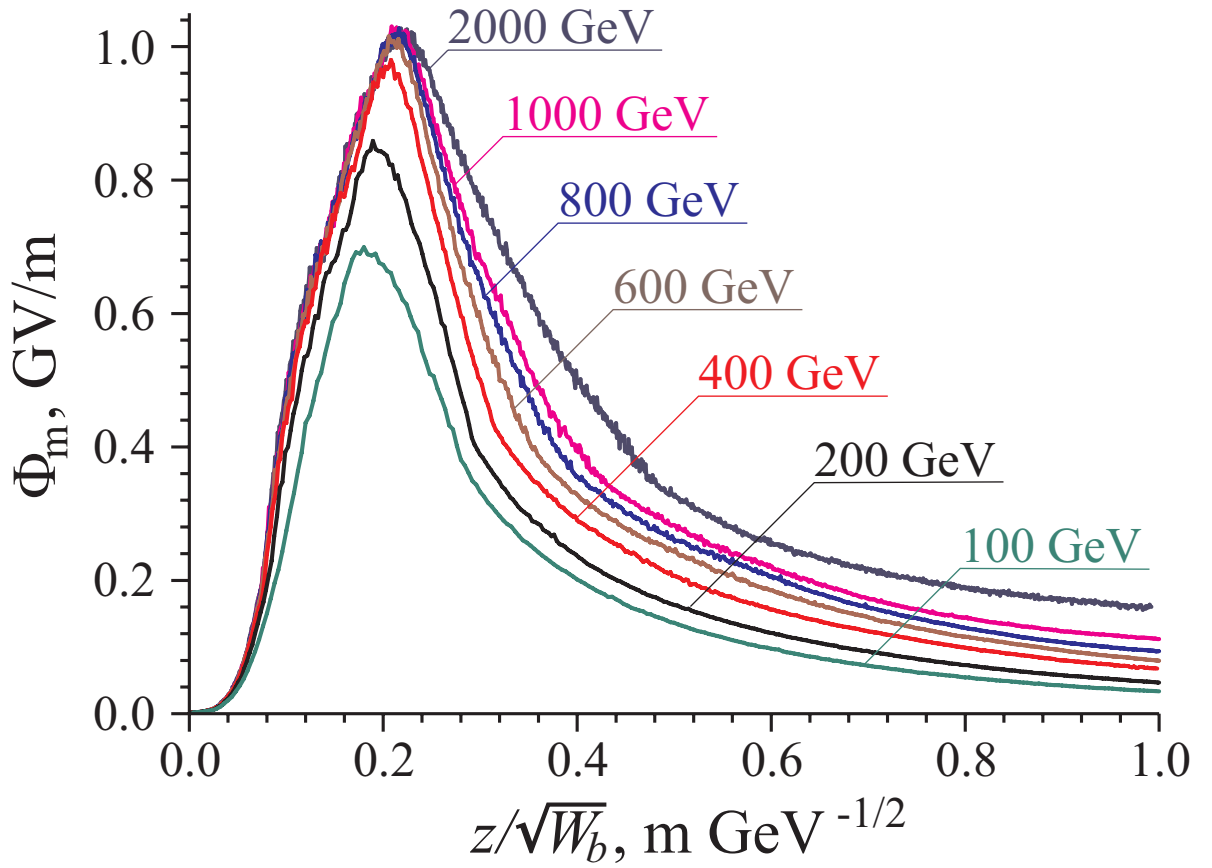


Рисунок 2.6 — Амплитуда кильватерной волны Φ_m в зависимости от $z/\sqrt{W_b}$ для различных энергий пучка.

чай и считаем начальную плотность пучка равной

$$n_b(r, \xi) = 0.5 n_{b0} e^{-r^2/2\sigma_{rb}^2} \left[1 + \cos \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi}{\sigma_{zb}} \right) \right], \quad -\sigma_{zb}\sqrt{2\pi} < \xi < \xi_s. \quad (2.4)$$

Она близка к распределению Гаусса и плавно зануляется при $|\xi| = \sigma_{zb}\sqrt{2\pi}$. При отрицательных ξ_s амплитуда волны ожидаемо мала, так как для возбуждения сильной волны в оставшейся части пучка недостаточно заряда. Наиболее сильное поле наблюдается при $\xi_s \approx \sigma_{zb}$, так как в этом случае затравочное возмущение достаточно большое, и наиболее плотная часть пучка участвует в возбуждении волны. Уменьшение амплитуды при $\xi_s > \sigma_{zb}$ объясняется уменьшением затравки, и, таким образом, более позднему развитию самомодуляции [рисунок 2.7(a)].

После описания зависимости амплитуды кильватерной волны от всех варьируемых параметров мы смогли выявить физические эффекты, которые её ограничивают. Наиболее важным эффектом оказалось нелинейное удлинение

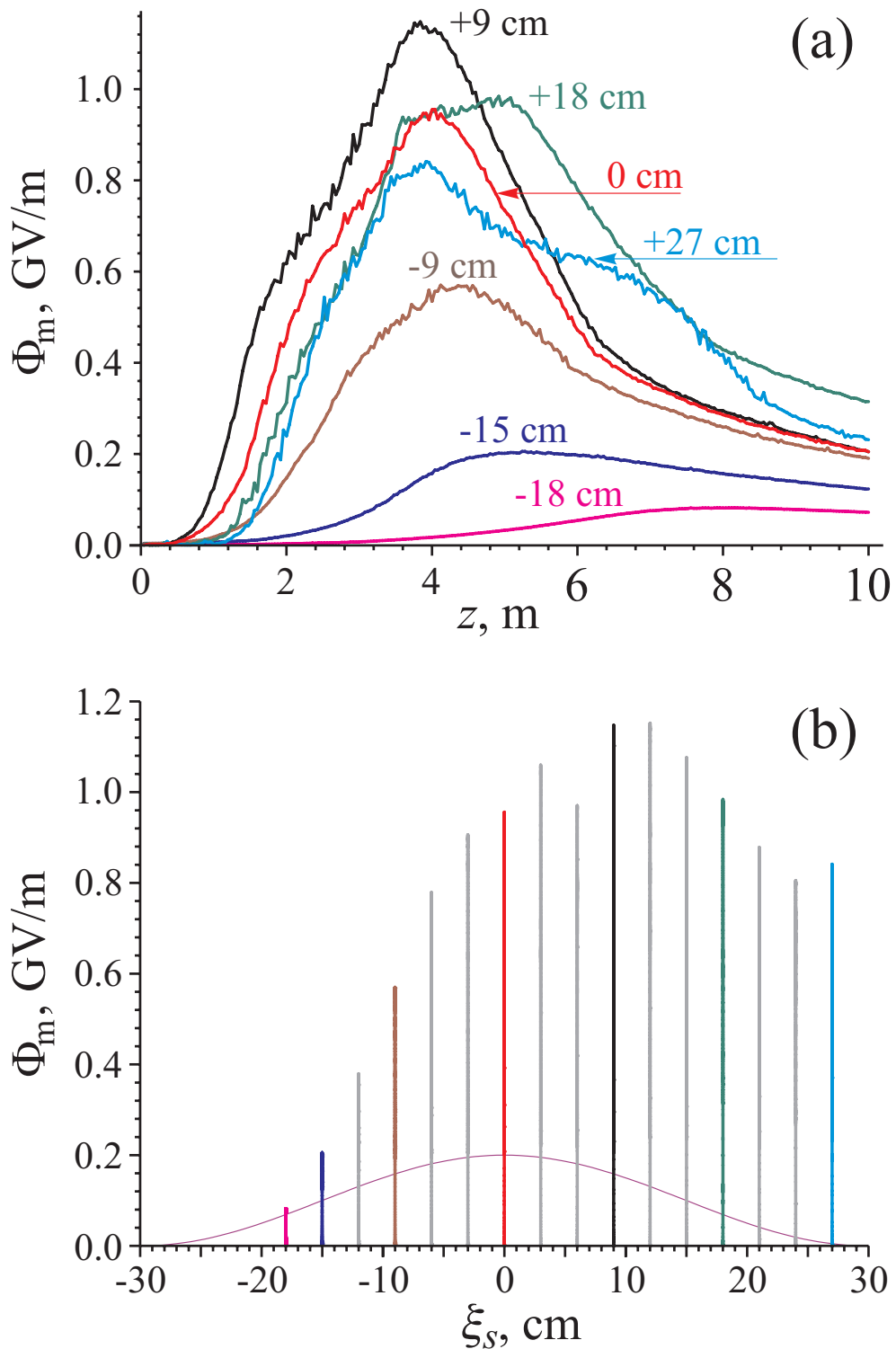


Рисунок 2.7 — (а) Зависимость максимума кильватерной амплитуды $\Phi_m(z)$ от положения ξ_s ионизирующего лазерного импульса (подписаны около кривых) и (б) абсолютный максимум кильватерной амплитуды Φ_m (высота столбца) в зависимости от положения ионизирующего лазерного импульса.

Тонкая кривая на фрагменте (б) показывает форму пучка до обрезки.

волны [48]. До тех пор, пока этот эффект не вступил в игру, кильватерная амплитуда прямо пропорциональна числу протонов, возбуждающих волну. Ес-

Таблица 3 — Чувствительность амплитуды кильватерной волны к параметрам пучка и плазмы.

Параметр	S_a
Плотность плазмы	0.4
Число частиц пучка	0.7
Длина пучка (фиксированный пиковый ток)	0.3
Длина пучка (фиксированное число частиц)	-0.4
Радиус пучка	0
Угловой разброс пучка	-0.3
Атомная масса ионов	0
Энергоразброс пучка	0
Местоположение затравки неустойчивости	0.3

ли же, из-за улучшения какого-либо из параметров, достигается некий предел, то рост амплитуды сильно замедляется. Два других важных эффекта — это разлет пучка из-за эмиттанса и движение ионов. Оба эффекта характеризуются неким граничным значением, или, если быть точным, поверхностью в многомерном пространстве параметров. Если перейти границу, то амплитуда начнет стремительно падать. Иначе эти параметры не влияют на амплитуду волны.

Чтобы подвести итог, мы введем понятие чувствительности амплитуды волны к изменениям параметров драйвера и плазмы. Мы определим чувствительность S_A^X как коэффициент между относительным изменением Φ_m и маленьким относительным изменением параметра X :

$$\delta\Phi_m/\Phi_m = S_a^X \delta X/X. \quad (2.5)$$

Для расчета чувствительности к положению затравки возмущения мы считаем X равным σ_{zb} . Видно, что система не является очень чувствительной ни к одному из параметров, то есть чувствительность всегда меньше единицы (таблица 3).

Глава 3. Рост эмиттанса ускоряемого пучка из-за флуктуаций плотности драйвера в плазменном кильватерном ускорителе

Мы обнаружили эффект, приводящий к росту эмиттанса, когда анализировали один из возможных вариантов улучшения установки эксперимента AWAKE [30–33]. В этой конфигурации, как и в той, что рассмотрена в предыдущей главе, протонный пучок самомодулируется в плазме [44, 50], разбиваясь на последовательность микросгустков, которые резонансно возбуждают волну в плазме. Во время первых экспериментов были продемонстрированы самомодуляция драйвера [38, 39] и ускорение электронов [35, 36]. Будущие фазы эксперимента нацелены на достижение лучших параметров витнесса. Одна из рассматриваемых для этого схем подразумевает использование двух плазменных секций, разделенных небольшим вакуумным промежутком для инъекции электронов (рисунок 3.1) [51, 52]. Первая секция включает в себя “ступеньку” плотности для контроля самомодуляции [49]. Созданная последовательность микросгустков попадает во вторую секцию, возбуждает в ней плазменную волну и ускоряет в ней электроны. В первой секции драйвер не успевает достичь полного радиального равновесия [17], а, пролетая через вакуумный промежуток без фокусировки, еще сильнее отдаляется от равновесного состояния. Поэтому в рассмотренном сценарии флуктуации плотности пучка проявляют себя особенно сильно. Флуктуации плотности драйвера приводят к флуктуациям фокусирующей силы, поскольку волна, возбужденная последовательностью сгустков, всегда существует в слабонелинейном режиме [48], а не в blowout режиме [53].

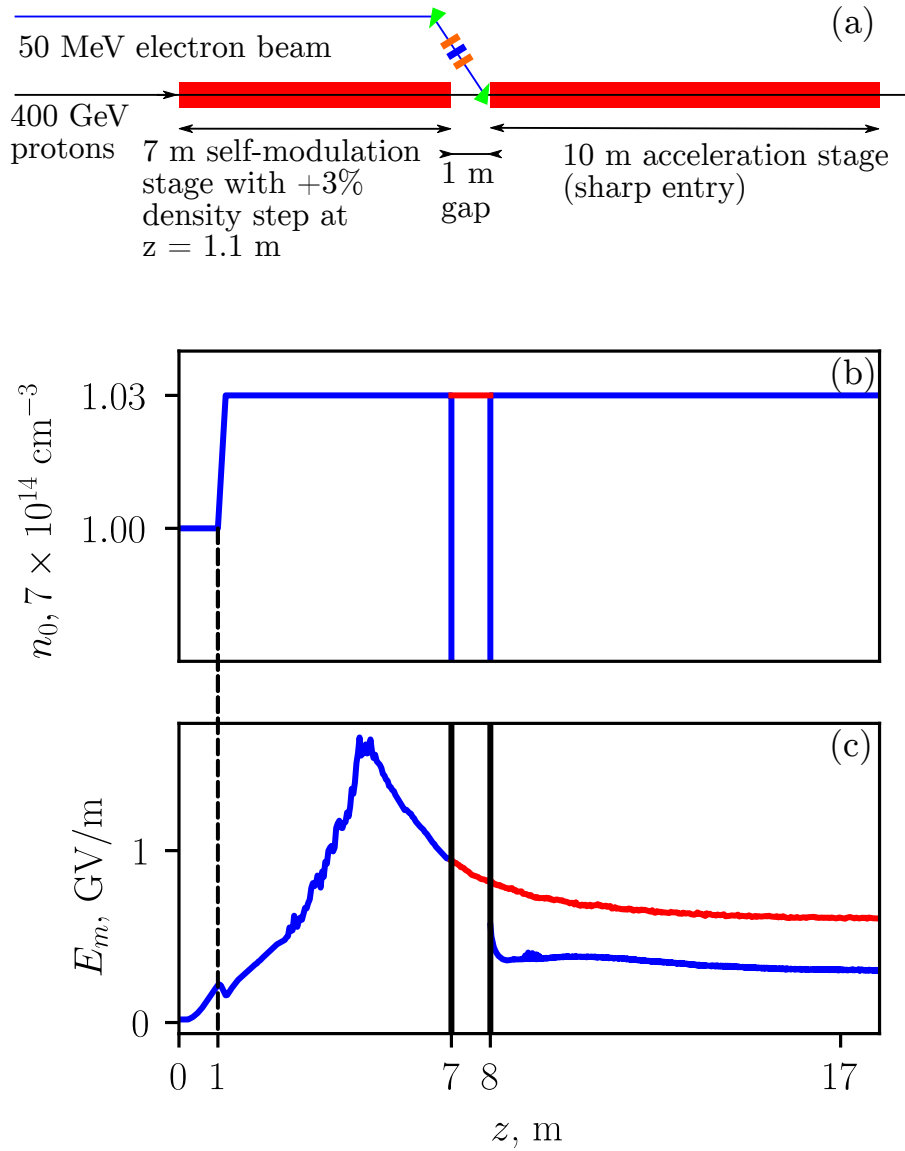


Рисунок 3.1 — Обсуждаемая схема будущей фазы эксперимента AWAKE: общий вид (a), зависимость плотности плазмы n_0 (b) и кильватерной амплитуды E_m (c) с (синяя кривая) и без (красная кривая) вакуумного промежутка от длины распространения пучка.

3.1. Моделирование эксперимента AWAKE

Поскольку набор параметров для будущей серии экспериментов в AWAKE не был точно известен во время нашего исследования, мы взяли один из нескольких обсуждаемых сценариев и оптимизировали его для получения наибольшего поля во второй секции (таблица 4, рисунок 3.1). Оптимизация состояла в нахождении положения и высоты ступеньки плотности плазмы [34]. Мы выбрали дли-

Таблица 4 — Параметры для моделирования эксперимента AWAKE

Параметр и обозначение	Величина
Протонный драйвер:	
Число частиц, N_b	3×10^{11}
Длина, σ_z	6 см
Радиус, σ_r	160 мкм
Энергия, W_b	400 ГэВ
Энергоразброс, δW_b	135 МэВ
Нормализованный эмиттанс, ϵ_b	2 мм мрад
Плазменная секция:	
Длина первой секции	7 м
Длина вакуумного промежутка, L_g	1 м
Длина второй секции	10 м
Радиус плазмы	1.4 мм
Положение ступеньки плотности	1.1 м
Плотность до ступеньки	$7 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$
Плотность после ступеньки	$7.21 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$
Витнесс:	
Длина, σ_{zw}	10 мкм
Радиус, σ_{rw}	20 мкм
Энергия, W_w	50 МэВ
Расстояние до лазерного импульса, $ \xi_w $	$\approx 7.57 \text{ см}$

ну вакуумного промежутка равной 1 м как компромисс между удобством инъекции витнесса и уменьшением кильватерного поля из-за расходимости драйвера в промежутке [51]. Как обычно в моделированиях AWAKE [30], мы считаем, что плазма создается коротким лазерным импульсом, движущимся в центре протонного пучка. Дополнительно предполагаем, что плазменная граница резкая, а ионы неподвижны, чтобы исключить другие возможные причины роста эмиттанса витнесса. Если мы примем в расчет переходную область [54], это приведет к дополнительному ухудшению эмиттанса в ходе инъекции [55] и не позволит точно определить влияние исследуемого эффекта.

Чтобы определить, насколько хороши для ускорения разные периоды плазменной волны, мы помещаем в них маленькие сгустки пробных электронов с нулевыми эмиттансом и энергоразбросом. Начальная энергия электронов равна 50 МэВ, и она достаточно высока, чтобы избежать продольных колебаний электронов внутри периода волны [55]. Таким образом, мы локально характеризуем кильватерное поле около места предполагаемой инъекции электронного пучка. Для выбранного набора параметров это место расположено приблизительно на 60 периодов плазменной волны позади лазера [рисунок 3.2(a)], где кильватерная амплитуда уже достигает своего максимального значения. Витнесс размещается не в максимуме продольного поля [рисунок 3.2(b)], чтобы он был в фокусирующей фазе волны, и продольный профиль поля мог быть выровнен кильватерным полем собственного заряда витнесса [52]. На всех рисунках показано сечение, в котором электроны получают энергию, равную 80% от той, которую мог бы получить пробный электрон в этом периоде волны, если бы находился в максимуме ускоряющего поля.

Обычно моделирование AWAKE проводится с поперечным и продольным шагами $\Delta r = \Delta \xi = 0.01 c/\omega_p = 2 \text{ мкм}$ и шагом по времени, равным $200 \omega_p^{-1}$. В данной задаче такого разрешения оказалось недостаточно (рисунок 3.3). Мы постепенно уменьшали шаги по всем координатам до тех пор, пока результат не перестал зависеть от величины шага. Таким образом мы пришли к более частой сетке с поперечным и продольным шагами $\Delta r = \Delta \xi = 0.005 c/\omega_p = 1 \text{ мкм}$ и шагу по времени, равному $10 \omega_p^{-1}$. Продольная координата z отсчитывается от входа во вторую секцию, а момент времени $t = 0$ соответствует влету лазерного импульса в ячейку. Шаг по времени для протонного пучка определяет шаг $\Delta z = 10 c/\omega_p = 2 \text{ мм}$ для расчета отклика плазмы в квазистатическом приближении. Временной шаг для низкоэнергичных электронов дополнительно уменьшается до $7.8 \times 10^{-2} \omega_p^{-1}$. В протонном пучке 1.2×10^7 макрочастиц с одинаковым зарядом, в электронном пучке около 3×10^4 макрочастиц с разным весом, плазма моделируется 10 частица-

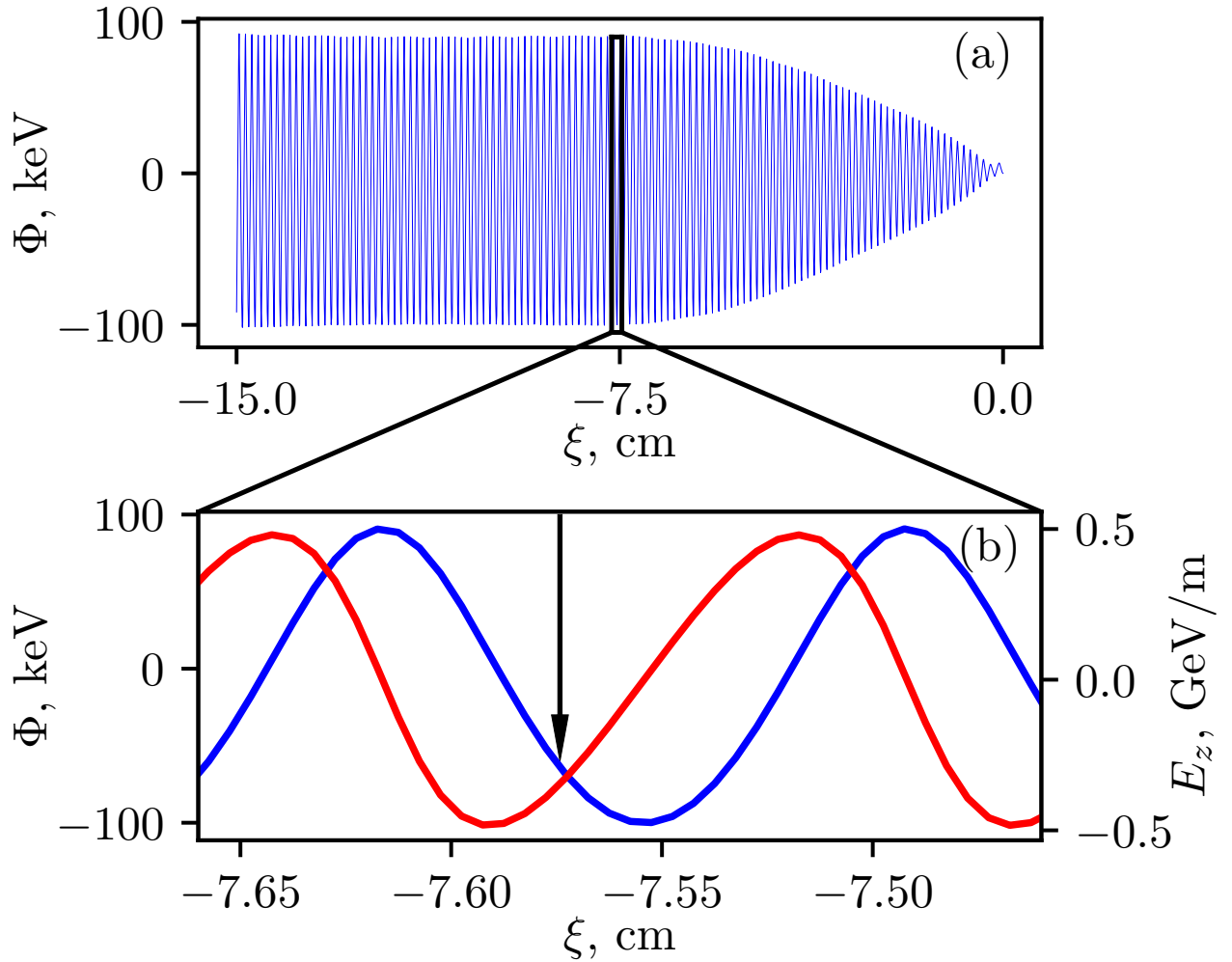


Рисунок 3.2 — Электрическое поле E_z на оси (красная линия) и потенциальная энергия Φ (синяя линия) в начале второй секции. Стрелка показывает положение пробного электронного пучка.

ми на шаг Δr по радиусу. Вес и заряд частицы плазмы пропорциональны её удаленности r от оси.

Рисунок 3.3 иллюстрирует обнаруженный эффект. Почти сразу после входа во вторую секцию нормализованный среднеквадратичный эмиттанс ε быстро достигает некоторого равновесного значения порядка 6 мм мрад, а затем медленно растет, если между секциями нет вакуумного промежутка. При наличии промежутка эмиттанс растет гораздо быстрее. Этот рост не может быть следствием численных ошибок, он обусловлен физическим эффектом. Об этом свидетельствует сравнение с расчетами при меньшем разрешении. Поэтому мы заключаем, что рост эмиттанса, связанный с численными эффектами не может быть

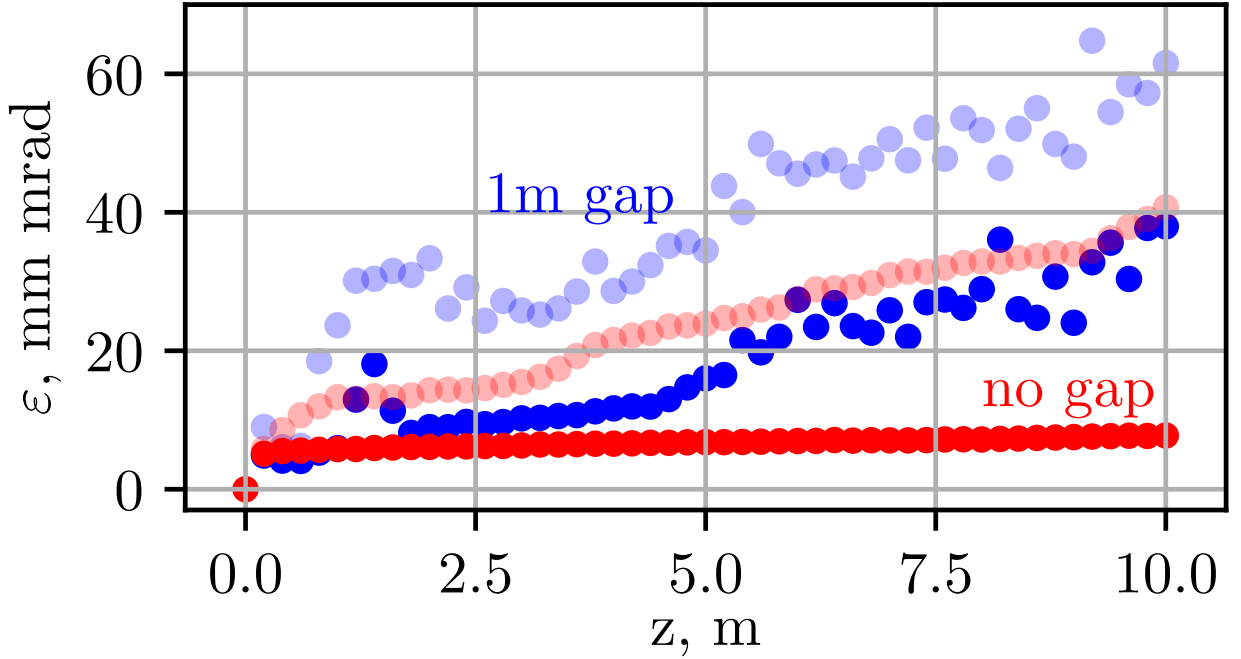


Рисунок 3.3 — Зависимость нормализованного эмиттанса ε от длины распространения во второй плазменной секции z при наличии 1 м вакуумного промежутка между секциями (синий) и без него (красный). Бледные точки соответствуют результатам запусков с низким разрешением:

$$\Delta r = \Delta \xi = 0.01 c/\omega_p = 2 \text{ мкм}, \quad \Delta z = 200 c/\omega_p = 4 \text{ см}.$$

больше, чем рост эмиттанса в расчете без метрового вакуумного промежутка. Этот вклад пренебрежимо мал по сравнению с ростом в случае наличия этого промежутка. Конечный эмиттанс ε_f , набранный витнессом за время пролета 10 метров плазмы, зависит от длины вакуумного промежутка между секциями (рисунок 3.4). Мы видим, что наиболее опасным промежутком является 0.5 м, эффект от более широких промежутков уменьшается непропорционально амплитуде волны.

Чтобы понять, из-за чего электронный пучок набирает эмиттанс, посмотрим на потенциальную энергию Φ (рисунок 3.5), определяющую силу \vec{F} , действующую на электронный пучок. Её компоненты равны

$$F_{\parallel} = -eE_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad F_{\perp} = -e(E_r - B_{\varphi}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (3.1)$$

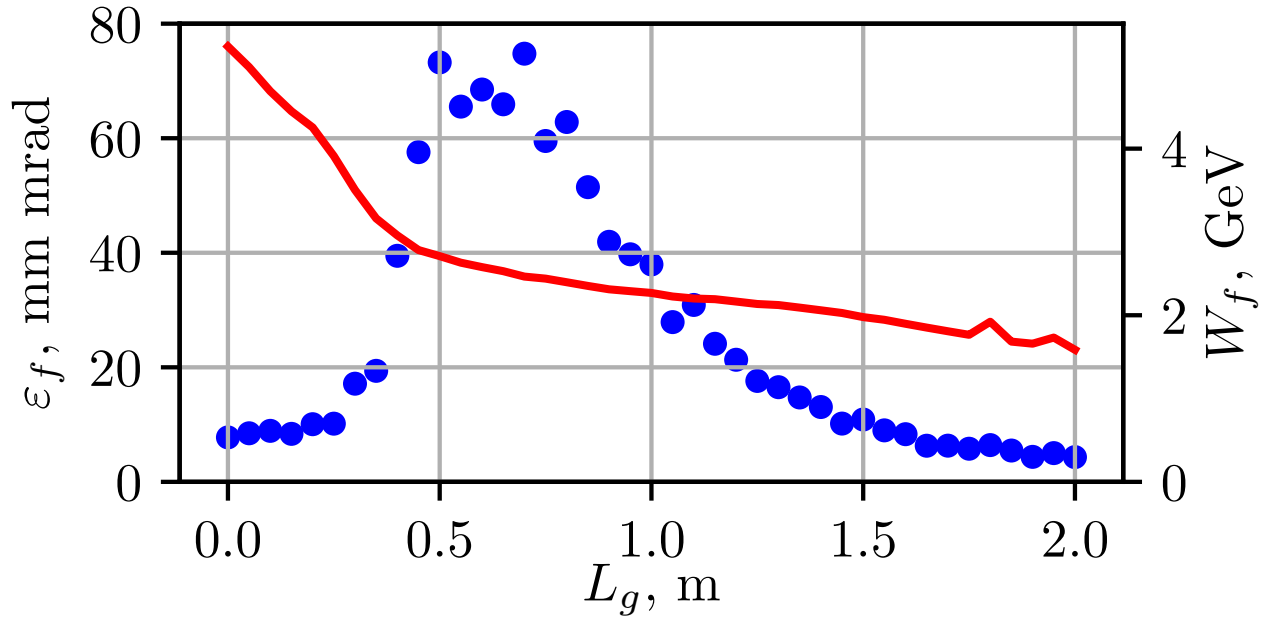


Рисунок 3.4 — Зависимость конечного эмиттанса ϵ_f (синие точки) и энергии W_f (красная кривая) витнесса после прохождения 10 метров в плазме от длины L_g вакуумного промежутка между секциями.

где $e > 0$ — элементарный заряд, \vec{E} и \vec{B} — электрическое и магнитное поля. Мы видим, что потенциальная яма, созданная пучком, расширившимся в вакуумном промежутке, имеет минимум не на оси. Электроны, инжектированные на ось, получают из-за этого поперечный импульс, что приводит к росту эмиттанса. Однако в яме такой формы электроны совершают за время счета порядка 100 колебаний, то есть, сама по себе такая форма потенциальной энергии может привести к тому, что в случае с вакуумным промежутком равновесное значение эмиттанса, набираемое пучком в начале счета, окажется больше, чем в случае без промежутка. К постоянному росту эмиттанса такая форма привести не может.

Чтобы посмотреть на поведение потенциальной энергии во времени, мы взяли её кривую для каждого момента времени, вычли из каждой кривой её значение в нуле и соединили эти кривые, сделав цветную карту (рисунок 3.6). В случае без вакуумного промежутка минимум потенциальной энергии всегда находится на оси. В счете с метровым промежутком на оси расположен локаль-

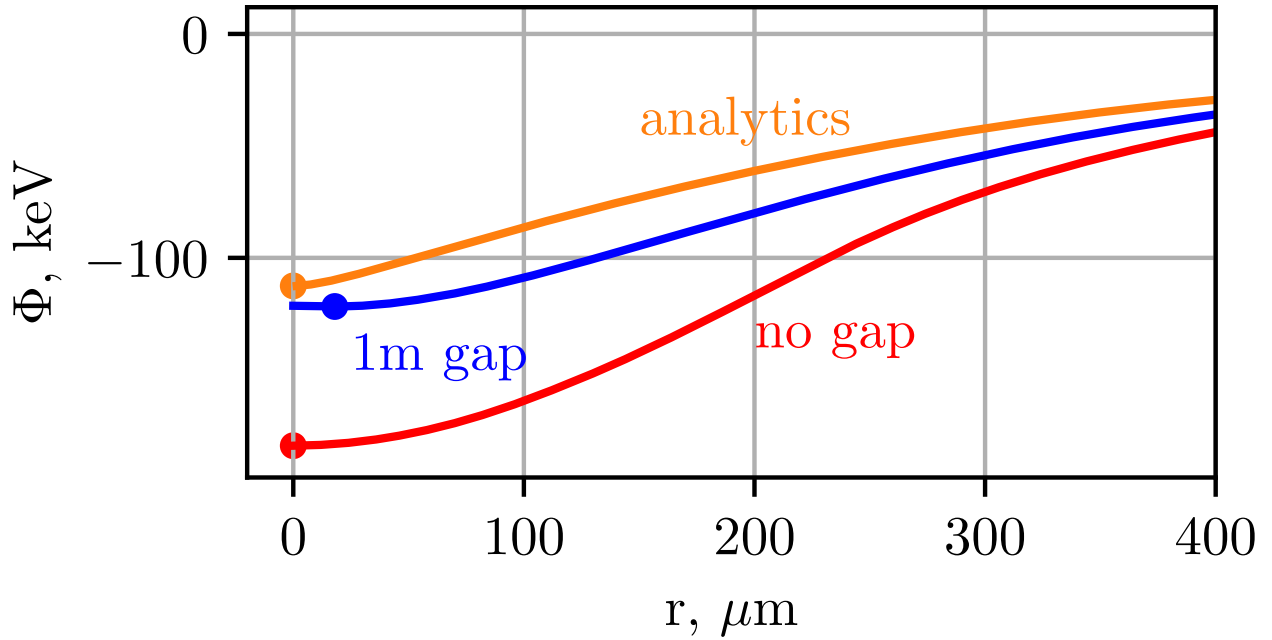


Рисунок 3.5 — Радиальный профиль потенциальной энергии кильватерной волны $\Phi(r)$ в случае с вакуумным промежутком и без него, а также посчитанный аналитически согласно линейной теории отклика плазмы для случая промежутка длиной 1 м. Все профили построены при $z = 4$ см, в точке, где находится витесс. Кружок на линии показывает минимум энергии.

ный максимум. Глубина, ширина и положение центра внеосевой ямы меняется со временем. Именно изменение формы ямы со временем приводит к постоянному росту эмиттанса электронного пучка.

Отметим, что такая форма потенциальной энергии вызвана влиянием нелинейных эффектов. Форма потенциальной ямы, рассчитанная в линейном приближении, которую создает пучок с плотностью, взятой из моделирования (оранжевая кривая на рисунке 3.5), отличается от кривой, полученной в моделировании (синяя кривая на рисунке 3.5). При линейном отклике плазмы [56] минимум потенциальной энергии может образоваться не на оси разве что, если плотность драйвера будет по форме напоминать пузырь, то есть, иметь максимум не на оси. В моделировании форма пучка остается близкой к гауссовской, хоть и расширяется за время пролета промежутка. На портрете пучка до влета в вакуумный промежуток [рисунок 3.7(а)] хорошо видны флуктуации плотно-

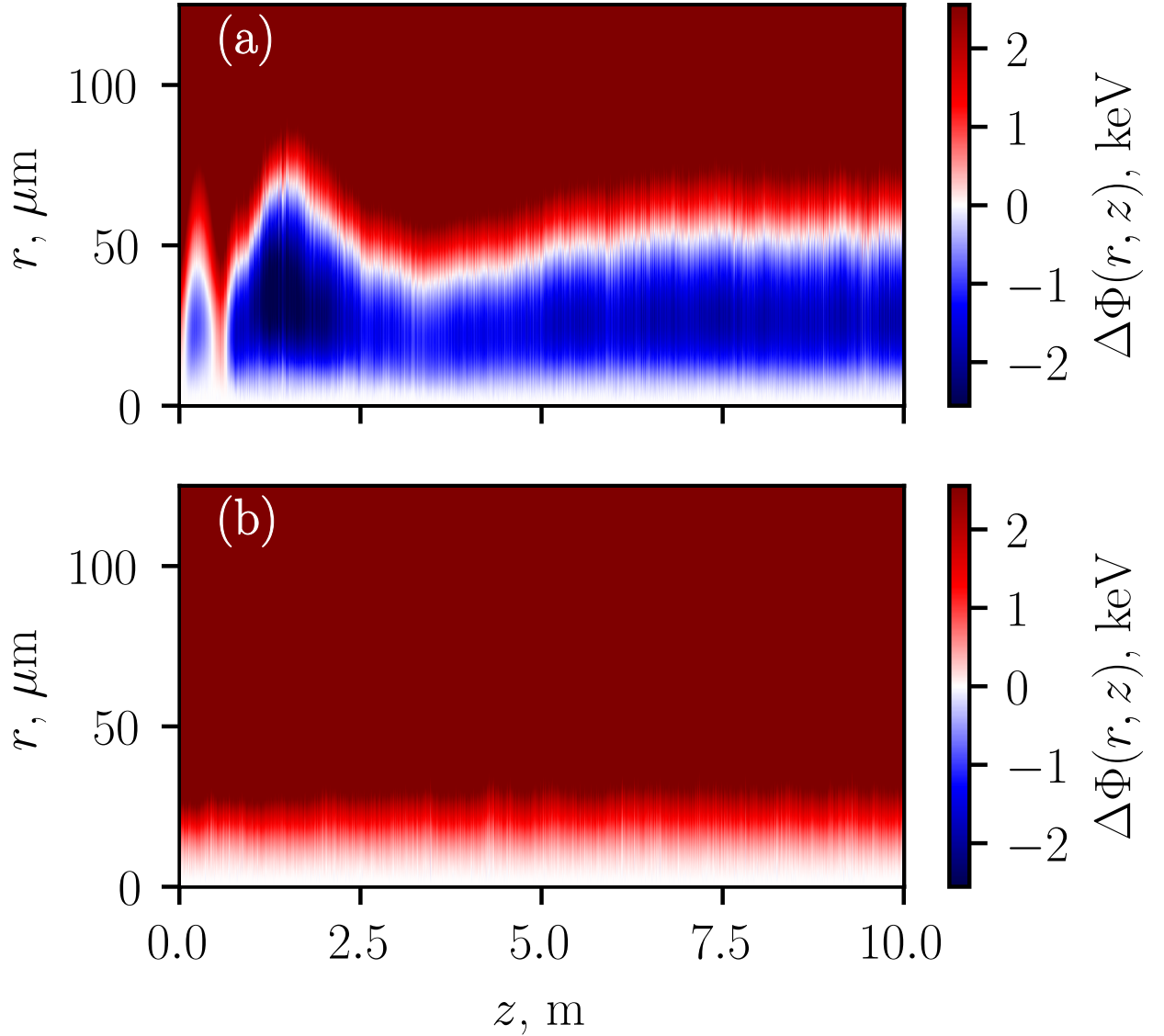


Рисунок 3.6 — Изменение потенциальной энергии в приосевой области во времени с вакуумным промежутком (а) и без него (б). Для того, чтобы лучше видеть потенциальную яму, на рисунке изображена разность

$$\Delta\Phi(r, z) = \Phi(r, \xi_w, z) - \Phi(0, \xi_w, z).$$

сти. После расширения в вакуумном промежутке [рисунок 3.7(b)] эти флуктуации остаются, но их хуже видно на портрете пучка. Локальные флуктуации плотности драйвера создают локальные максимумы и минимумы на относительно плоском дне потенциальной ямы.

Если инжектировать витнесс соосно, но со сдвигом r_0 от оси, то чем больше сдвиг, тем больший эмиттанс набирает пучок, независимо от наличия вакуумного промежутка (рисунок 3.8). График содержит разрыв при $r_0 = 0$.

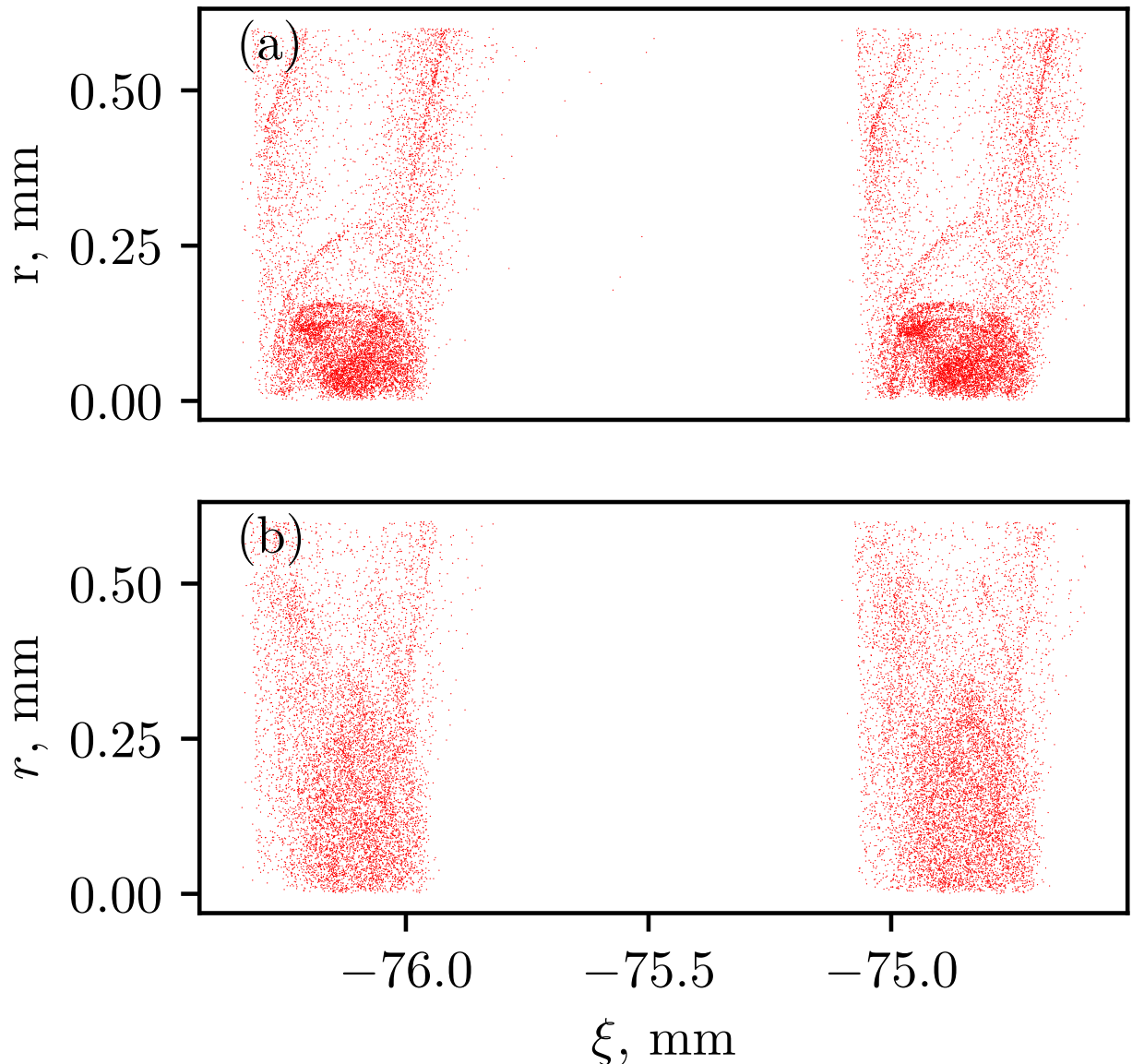


Рисунок 3.7 — Типичная форма протонного сгустка сразу перед (a) и сразу после (b) вакуумного промежутка.

Это происходит потому, что из результатов моделирования осесимметричным кодом мы не можем понять, как распределяются по углу электроны витнеса, покидающие ось из-за наличия там локального максимума потенциальной энергии. Если мы предположим, что электроны покидают локальный максимум осесимметрично, то эмиттанс будет больше. Если они все падают в одну сторону, то эмиттанс ниже. Эти два способа интерпретации результатов моделирования определяют пределы, в которых меняется эмиттанс в реальной трехмерной геометрии. Трехмерным аналогом нестационарной осесимметричной ямы, нахо-

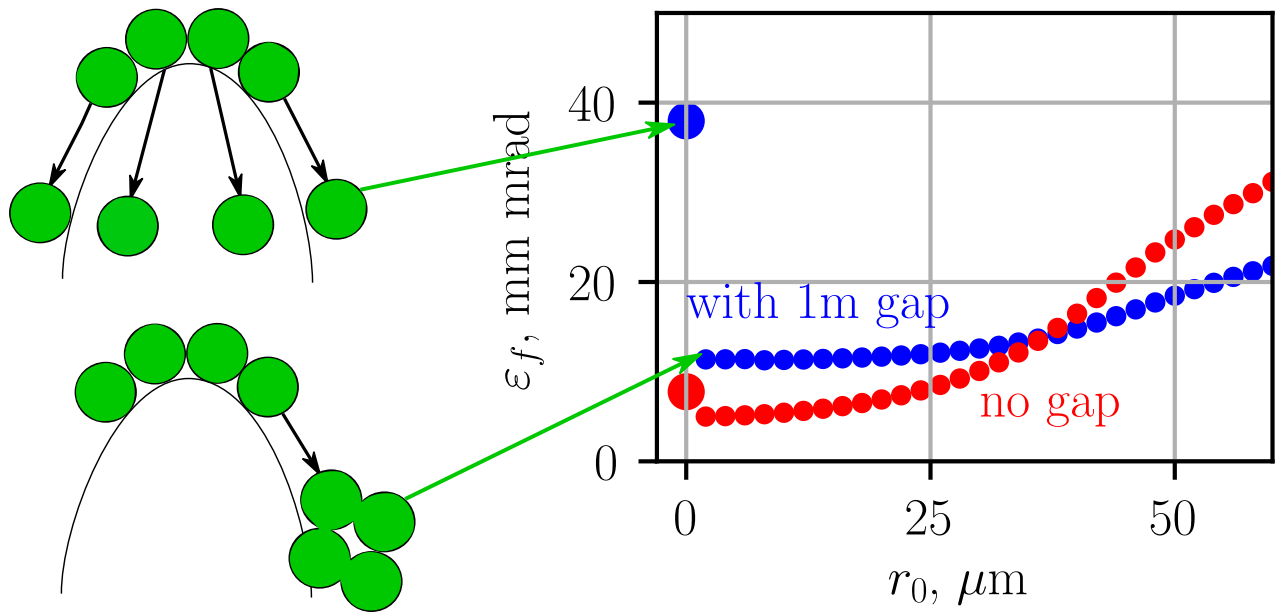


Рисунок 3.8 — Зависимость конечного эмиттанса ϵ_f от начального смещения электронного пучка r_0 с вакуумным промежутком и без него. Вставка слева показывает две возможные интерпретации осесимметричного моделирования.

двигаясь не на оси [рисунок 3.9(a)], является набор хаотично расположенных ямок и холмиков потенциальной энергии, размеры и положения которых меняются со временем [рисунок 3.9(b)]. Когда витнесс пересекает такую структуру, могут происходить обе ситуации, показанные на вставке на рисунке 3.8, таким образом, эмиттанс будет иметь промежуточное значение.

3.2. Моделирование в декартовых координатах

Из сказанного выше следует, что на рост эмиттанса должно влиять искажение кильватерного поля витнессом. Если витнесс имеет достаточный ток, чтобы создать свою собственную потенциальную яму, тогда флуктуации плотности драйвера будут слабо влиять на движение электронов, а значит, эмиттанс не будет так стремительно расти. Осесимметричное моделирование не может учесть поперечное смещение витнесса как целого (вместе с его локальной потенциаль-

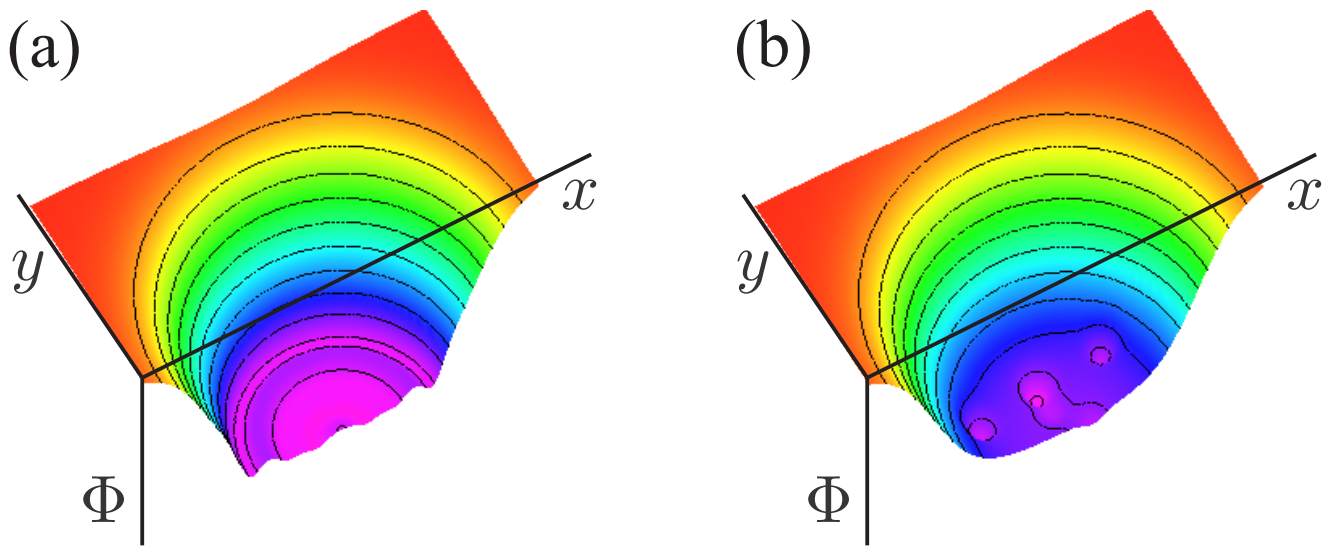


Рисунок 3.9 — Схематичное изображение потенциальной энергии в месте положения витнесса в осесимметричном случае (а) и ожидаемое в 3D геометрии (b).

ной ямой). Выполнить трехмерное моделирование затруднительно, поскольку счет с таким высоким временным и пространственным разрешением находится сейчас за пределами возможностей компьютеров. Так что мы переходим к двумерной плоской геометрии.

Самомодуляция пучка протонов в плоской геометрии происходит количественно иначе, чем в осесимметричном случае. Поэтому мы не делаем расчет самомодуляции, а воспроизводим поведение потенциальной энергии, используя короткий драйвер с контролируруемыми вручную флуктуациями (рисунок 3.10). Такой подход позволяет нам сформулировать обобщенные выводы о динамике электронного пучка в флуктуирующей потенциальной яме, не ограничивая себя экспериментом AWAKE.

Мы составляем кильватерную потенциальную энергию из двух частей: стационарная яма с плоским дном и зависящие от времени возмущения на её фоне (рисунок 3.11). Первая часть создана широким протонным пучком с однородным распределением плотности. Плотность пучка такая, чтобы создавать ускоряющее поле того же масштаба (250 МВ/м), как и в осесимметричном случае (таблица 5). Влияние плазменных полей на этот пучок выключено, он не эволюционирует. Вторая часть создается маленькими локализованными зависящими

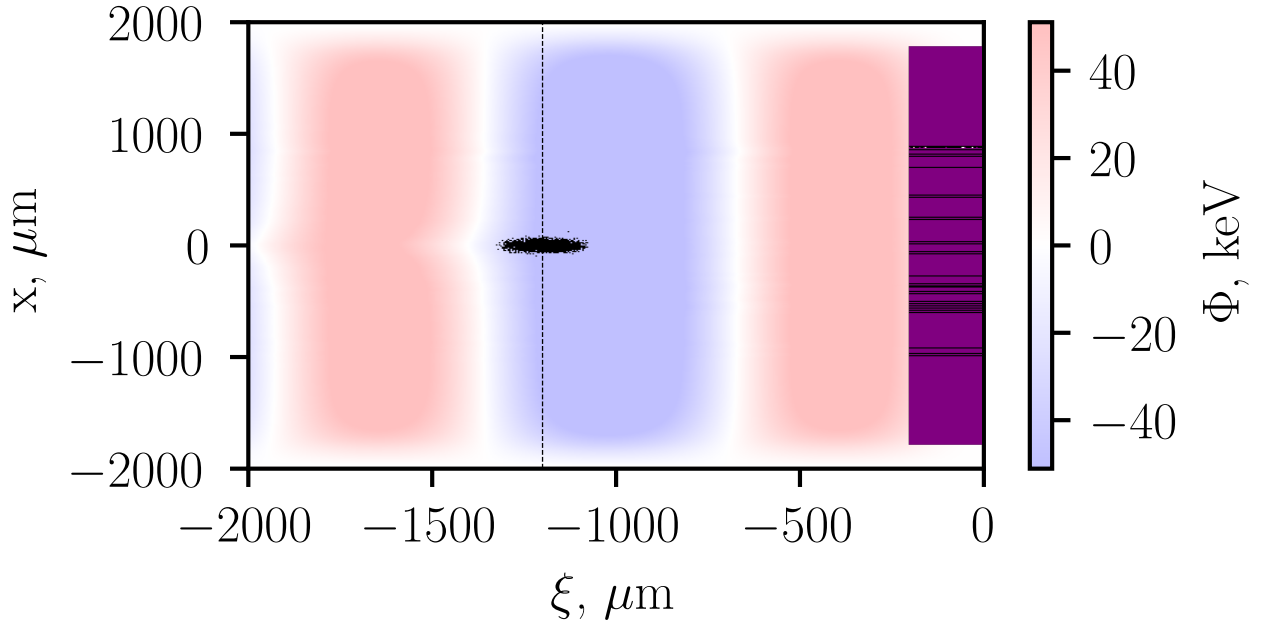


Рисунок 3.10 — Геометрия задачи в плоском случае: бледным цветом показана кильватерная потенциальная энергия, фиолетовый прямоугольник — это протонный драйвер, имеющий равномерное распределение плотности, темные полосы на нем — флуктуации плотности, черные точки — это электронный пучок, а вертикальная пунктирная линия показывает сечение, потенциальная энергия в котором показана на рисунке 3.11.

от времени возмущениями драйвера. Каждое элементарное возмущение имеет форму

$$\delta n_b(x) = \begin{cases} n_f, & |x - x_c| < x_f/3, \\ -n_f/2, & x_f/3 < |x - x_c| < x_f, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Положение x_c возмущения является случайной величиной, равномерно распределенной по поперечной координате x в интервале $|x_c| < 1$ мм. Возмущение плотности такой формы не изменяет средний уровень энергии и создает локализованное возмущение потенциальной энергии поперечного размера x_f . Так мы можем точно контролировать размер маленьких потенциальных ям и выбирать их размер в соответствии с результатами осесимметричного моделирования [рисунок 3.6(а)], т.е. около 10 мкм. В любой момент времени существует 20 элементарных возмущений (3.2): 10 короткоживущих и 10 долгоживущих. Короткожи-

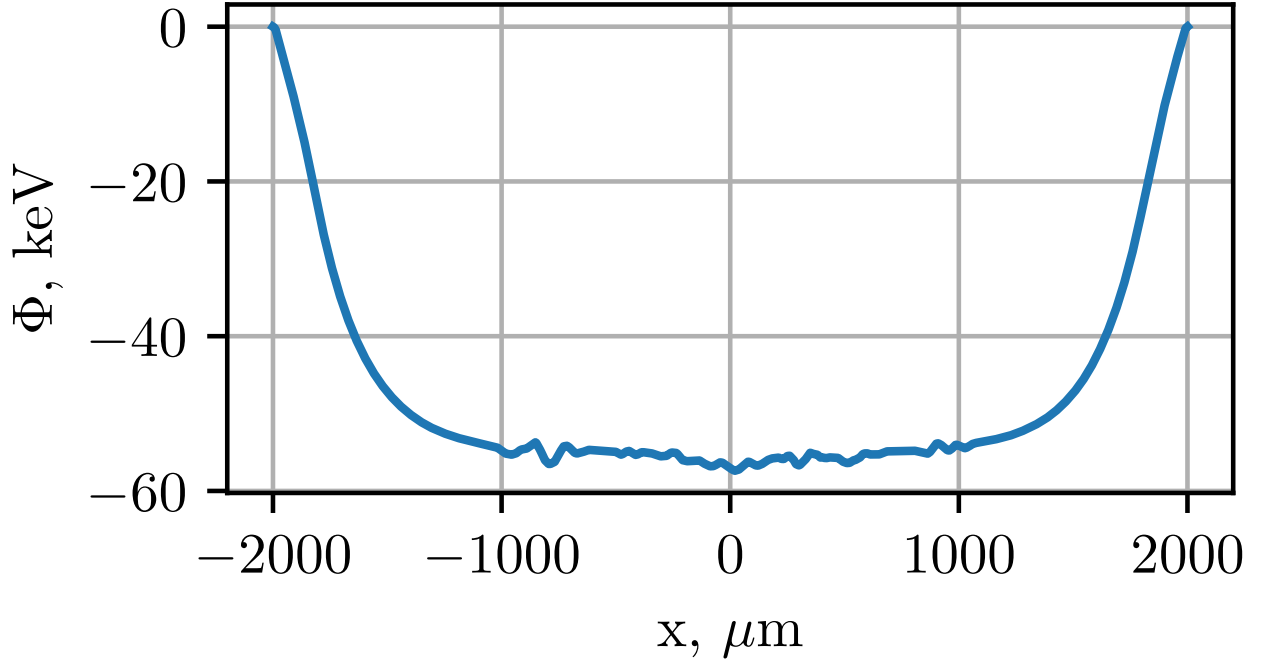


Рисунок 3.11 — Потенциальная энергия в сечении, показанном на рисунке 3.10 вертикальной пунктирной линией. Энергия показана без учета действия электронного пучка.

вущие возмущения возникают в случайном месте на период времени, равный $200 \omega_p^{-1}$, что соответствует 4 см. Долгоживущие возмущения не меняют свое положение, но их амплитуды n_f изменяются пропорционально $|\sin[2\pi(t - t_0)/\tau_f]|$, где $\tau_f = 4000 \omega_p^{-1} = 80 \text{ см/с}$, а t_0 — случайное. Точное значение амплитуд n_f выбрано таким, чтобы скорость роста эмиттанса совпадала с осесимметричным случаем (рисунок 3.3). Параметры витнесса (таблица 5) выбраны таким образом, чтобы он создавал себе глубокую потенциальную яму, но не достигал blowout-режима.

Подобрав с помощью пучка пробных частиц параметры системы, мы переходим к исследованию влияния собственного заряда пучка на рост его эмиттанса. Для этого мы поочередно запускаем в плазму пучок с параметрами, указанными в таблице 5, пучок с зарядом в 10 раз меньше и пробный пучок для сравнения. Для каждого из пучков мы строим зависимость его эмиттанса от длины распространения в плазме (рисунок 3.12). Также мы смотрим на портрет пучка после 5 и 10 метров движения в плазме (рисунок 3.13). Видно, что голова пуч-

Таблица 5 — Параметры пучков и плазмы в плоской геометрии

Параметр и обозначение	Величина
Драйвер:	
Длина, l_{zb}	200 мкм
Ширина, l_{rb}	3.6 мм
Плотность, n_b	$1.73 \times 10^{13} \text{см}^{-3}$
Область моделирования:	
Длина окна	2 мм
Ширина окна	4 мм
Длина распространения пучка	10 м
Плотность плазмы	$7 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$
Витнесс:	
Длина, σ_{zw}	60 мкм
Радиус, σ_{rw}	34 мкм
Пиковая плотность, n_w	$2 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$
Энергия, W_w	50 МэВ
Разброс энергии, δW_e	0
Нормализованный эмиттанс, ϵ	2 мм мрад

ка расширяется, в то время как его хвост остается неизменным. Хвост пучка находится в локальном минимуме потенциальной энергии, созданном головой. Сами же частицы головы не испытывают влияния от самих себя, а значит, движутся в созданной нами потенциальной яме с плоским дном и меняющимися со временем флуктуациями. Видно, что фронт эрозии движется от головы пучка к хвосту по мере того, как разлетевшиеся частицы в голове перестают создавать потенциальную яму, достаточную для фокусировки очередного слоя пучка. Если посмотреть на эмиттанс узкого слоя в центре пучка (зеленая область на рисунке 3.13, непрерывные линии на рисунке 3.12), можно увидеть, что скорость движения фронта эрозии по пучку зависит от его заряда. Если у пучка с полным зарядом эмиттанс слоя в центре почти сохранился, то у пучка с меньшим зарядом мы видим, что примерно через 3 метра после входа в плазму эмиттанс начинает расти. Это происходит в тот момент, когда фронт эрозии

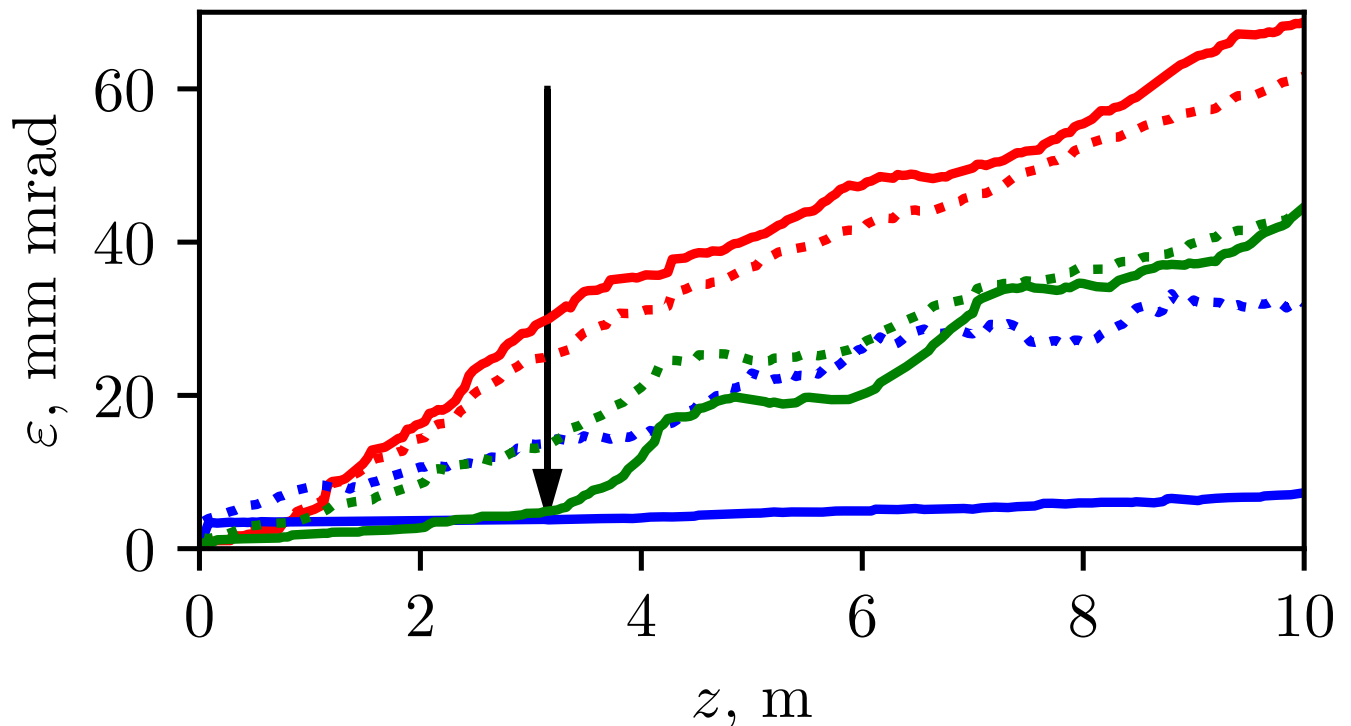


Рисунок 3.12 — Зависимость эмиттанса витнесса ε от длины распространения z для разных зарядов витнесса: полный заряд, как в таблице 5 (синие кривые), 10% полного заряда (зеленые кривые) и пробные электроны с пренебрежимо малым зарядом (красные кривые). Пунктиром показан эмиттанс всего пучка, а непрерывные кривые показывают эмиттанс центрального слоя длиной 40 мкм, как отмечено на рисунке 3.13. Стрелка показывает момент, когда фронт эрозии пришел в начало центрального слоя пучка с неполным зарядом.

добрался до центра пучка. В пучке же с полным зарядом этого не произошло за 10 метров. Таким образом, мы можем сделать вывод. Увеличение собственного заряда пучка приводит к уменьшению роста эмиттанса. По пучку от головы к хвосту движется фронт разрушения, но его скорость тем ниже, чем больше заряд пучка.

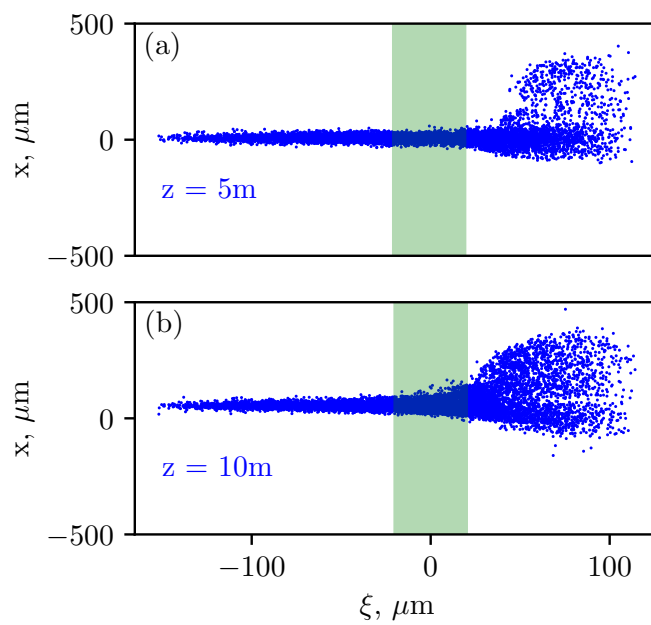


Рисунок 3.13 — Портрет витнесса с полным зарядом после 5 м (а) и 10 м (б) в плазме. Цветные прямоугольники показывают расположение центрального слоя, эмиттанс которого показан на рисунке 3.12 непрерывной линией.

Глава 4. Усиление продольного поля в кильватерном ускорителе из-за движения ионов

Эффект увеличения поля был впервые обнаружен при численном моделировании эксперимента AWAKE [31–33, 35, 36]. Протонный драйвер в этом эксперименте под действием самомодуляционной неустойчивости в плазме [44, 46, 50] становится последовательностью микросгустков, каждый из которых вносит свой вклад в волну [38, 39]. Точное число микросгустков варьируется в зависимости от плотности плазмы. Обычно их около 100, а значит, волна в плазме существует достаточно долго, чтобы успеть сдвинуть ионы рубидия. По этой причине во всех моделированиях для AWAKE мы включаем в рассмотрение движение ионов.

4.1. Увеличение поля

В моделировании различных режимов эксперимента AWAKE продольное электрическое поле E_z на оси достигало наибольших значений, если ионы плазмы могли двигаться (рисунок 12 в [30]). Рисунок 4.1 показывает этот эффект для параметров плазмы и пучка, указанных в таблице 6. Плотность протонного пучка до входа в плазму при $z = 0$ равна

$$n_b(r, \xi) = 0.5 n_{b0} e^{-r^2/2\sigma_{rb}^2} \left[1 + \cos \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi}{\sigma_{zb}} \right) \right], \quad -\sigma_{zb}\sqrt{2\pi} < \xi < 0 \quad (4.1)$$

и нулю иначе. Профиль в форме половины косинуса (4.1) имитирует создание плазмы лазерным импульсом, летящим в центре протонного пучка. Моделиро-

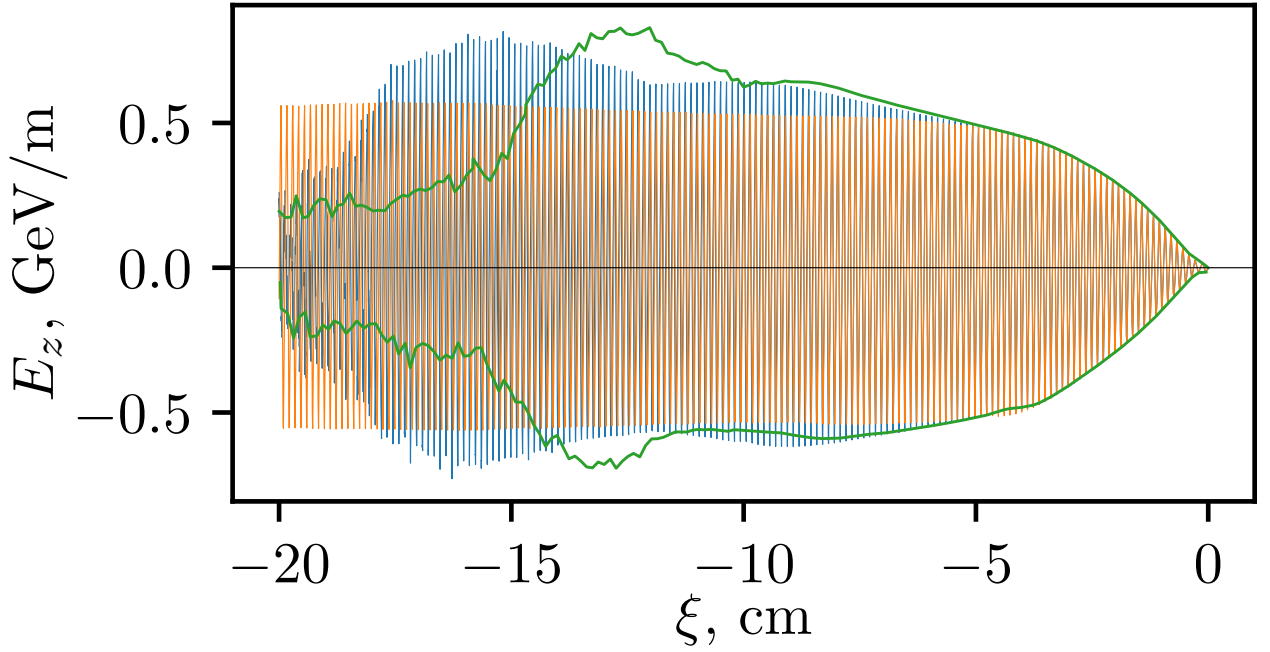


Рисунок 4.1 — Зависимость поля E_z на оси от сопутствующей координаты ξ в точке $z = z_0$ для неподвижных (оранжевая кривая) и подвижных (синяя кривая) ионов рубидия. Зеленая линия показывает огибающую для подвижных ионов калия.

вание выполнено осесимметричным кодом [2, 5] с кинетическим плазменным решателем.

Эффект проявляется после того, как драйвер самомодулируется (рисунок 4.1). Формы отдельных микросгустков и пучка как целого в этот момент типичны для процесса самомодуляции (рисунок 2 в [30], рисунок 1 в [46]). Увеличение поля оказывается наиболее сильным незадолго до опрокидывания волны (рисунок 4.1), сразу после чего продольное поле быстро разрушается в случае подвижных ионов. Эффект не может быть следствием узких пиков поля, поскольку кильватерный потенциал, в котором все локальные пики усредняются, ведет себя так же. Величина эффекта слабо зависит от массы ионов, что видно из сравнения с моделированием для подвижных ионов калия, масса которых примерно вдвое меньше, чем у рубидия (зеленая диния на рисунке 4.1).

Таблица 6 — Параметры иллюстрационного варианта.

Параметр и обозначение	Величина
Плотность плазмы, n_0	$7 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$
Положение точки наблюдения, z_0	5 м
Отношение массы ионов плазмы к массе электрона	157 000
Максимальная плотность пучка, n_{b0}	$6.9 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$
Длина пучка, σ_{zb}	7 см
Радиус пучка, σ_{rb}	0.2 мм
Энергия пучка, W_b	400 ГэВ
Энергоразброс пучка, δW_b	0.35%
Нормализованный эмиттанс пучка, ε_{bn}	3 мм мрад

4.2. Причины увеличения поля

Начало усиления поля коррелирует с видимыми возмущениями ионной плотности n_i (рисунок 4.2). Плотность увеличивается на оси и уменьшается вне оси, что типично для волны, созданной узким драйвером [24, 27–29]. Известно, что этот профиль плотности искажает волновые фронты, что вызывает передачу энергии от продольных колебаний к поперечным [28]. Таким образом, увеличение кривизны волнового фронта не может объяснить рост продольного поля.

Причиной эффекта является пространственное перераспределение энергии волны. Чтобы увидеть это, мы рассмотрим плотность потока энергии в сопутствующем окне [41]

$$\vec{S} = \sum_i (\gamma_i - 1) m_i c^2 (\vec{v}_i - c \vec{e}_z) - c \vec{e}_z \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}], \quad (4.2)$$

где m_i , \vec{v}_i и γ_i — масса, скорость и релятивистский фактор частицы плазмы, суммирование происходит по частицам плазмы в единичном объеме, \vec{E} и \vec{B} — электрическое и магнитное поля, а \vec{e}_z — единичный вектор в направлении оси z . Энергия в сопутствующем окне преимущественно течет против направления

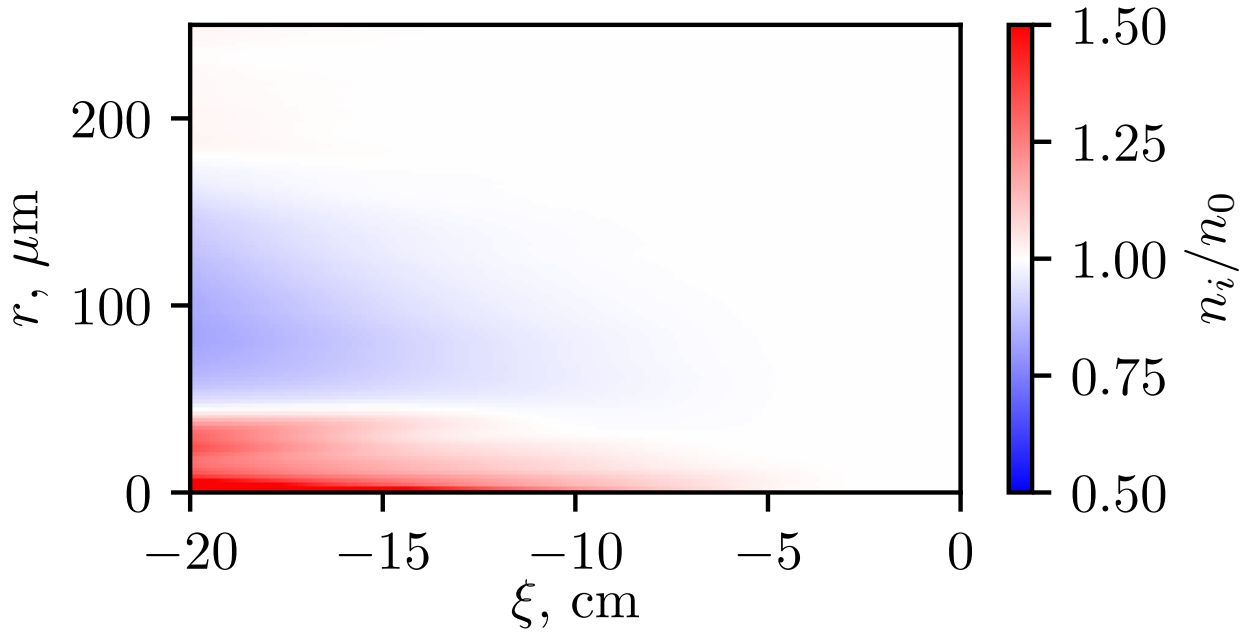


Рисунок 4.2 — Возмущение ионной плотности при $z = z_0$.

оси z . Таким образом, компонента S_z показывает, где находится энергия волны (рисунок 4.3). В отличие от плотности энергии, плотность потока энергии S_z не осцилирует с плазменной частотой [29], что облегчает визуализацию.

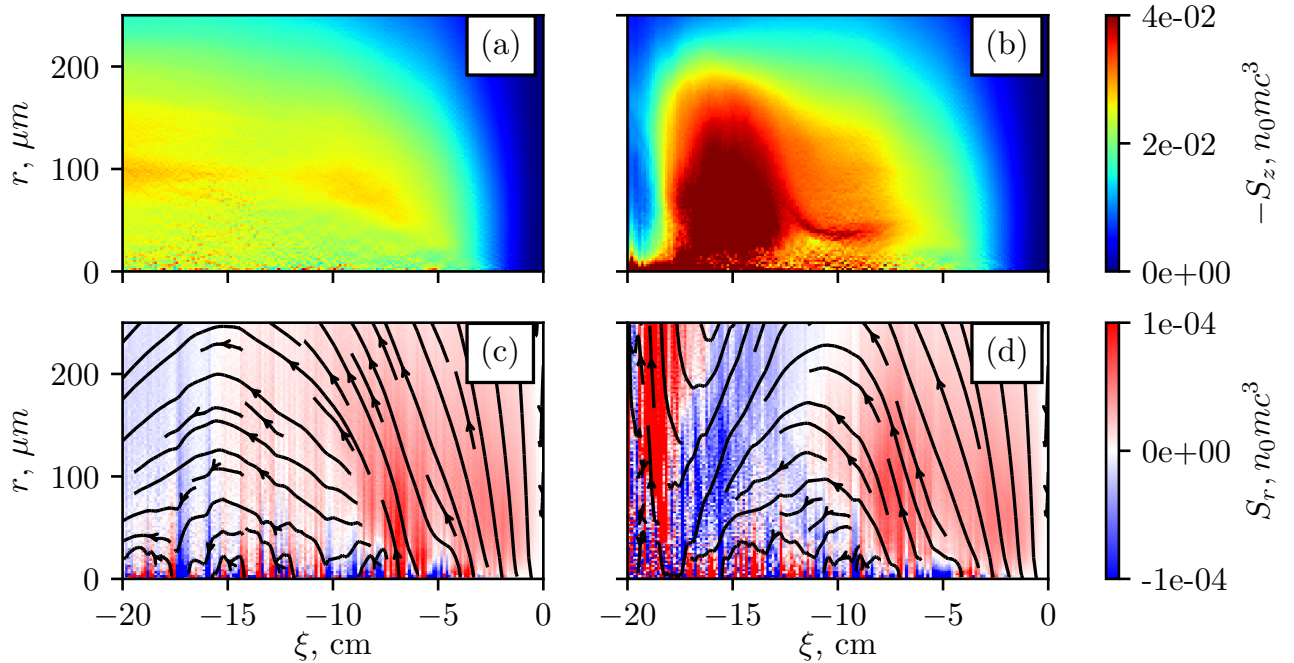


Рисунок 4.3 — Продольные (a,b) и радиальные (c,d) компоненты плотности потока энергии \vec{S} в сопутствующем окне для неподвижных (a,c) и подвижных (b,d) ионов. Черные стрелки показывают направление потока энергии.

В случае неподвижных ионов энергия остается приблизительно на том же радиусе в плазме, куда её высадил пучок [рисунок 4.3(a,c)], что типично для слабонелинейной волны [41]. Если же ионы могут двигаться, энергия перераспределяется по радиусу [рисунок 4.3(b,d)]. Это действительно перераспределение энергии, поскольку в этой области ($|\xi| \gtrsim 14 \text{ см} = 2\sigma_{zb}$) уже почти не осталось частиц пучка, и полный поток энергии

$$\Psi(\xi) = \int_0^\infty S_z 2\pi r dr \quad (4.3)$$

сохраняется. Энергия концентрируется около оси и влияет на амплитуду волны (рисунок 4.4). Кроме того, параллельно происходит процесс перехода энергии из продольной в поперечную компоненту поля. Он вызван изменением плазменной частоты по радиусу. Два эффекта складываются для поперечного поля, приводя к увеличению амплитуды поперечных колебаний в 2.5 раза [рисунок 4.4(d)]. А для продольной компоненты эти эффекты работают друг против друга. В рассмотренном случае приток энергии доминирует, поэтому мы наблюдаем увеличение ускоряющего поля [рисунок 4.4(b)]. Схожее перераспределение может быть ответственным за временное увеличение электрического поля на оси незадолго до опрокидывания волны в случае, если драйвером выступает лазерный импульс (рисунок 1(b) из [29]), что показывает возможность роста поля при использовании драйвера любого типа.

На рисунке 4.3 есть еще одна интересная особенность, не связанная с увеличением амплитуды поля. После того, как волна опрокинется при $|\xi| \approx 18 \text{ см}$, продольный поток энергии исчезает [рисунок 4.3(b)], поскольку энергия волны уходит в радиальном направлении вместе с высокоэнергичными электронами, которые появляются после опрокидывания [рисунок 4.3(d)].

Однако остается вопрос, почему энергия волн дрейфует радиально при таком распределении плотности ионов. У нас пока нет ответа. По-видимому, это не связано с градиентом плотности ионов, так как в системе присутствуют градиенты обоих знаков, и мы не наблюдаем дрейфа энергии в разных направлениях.

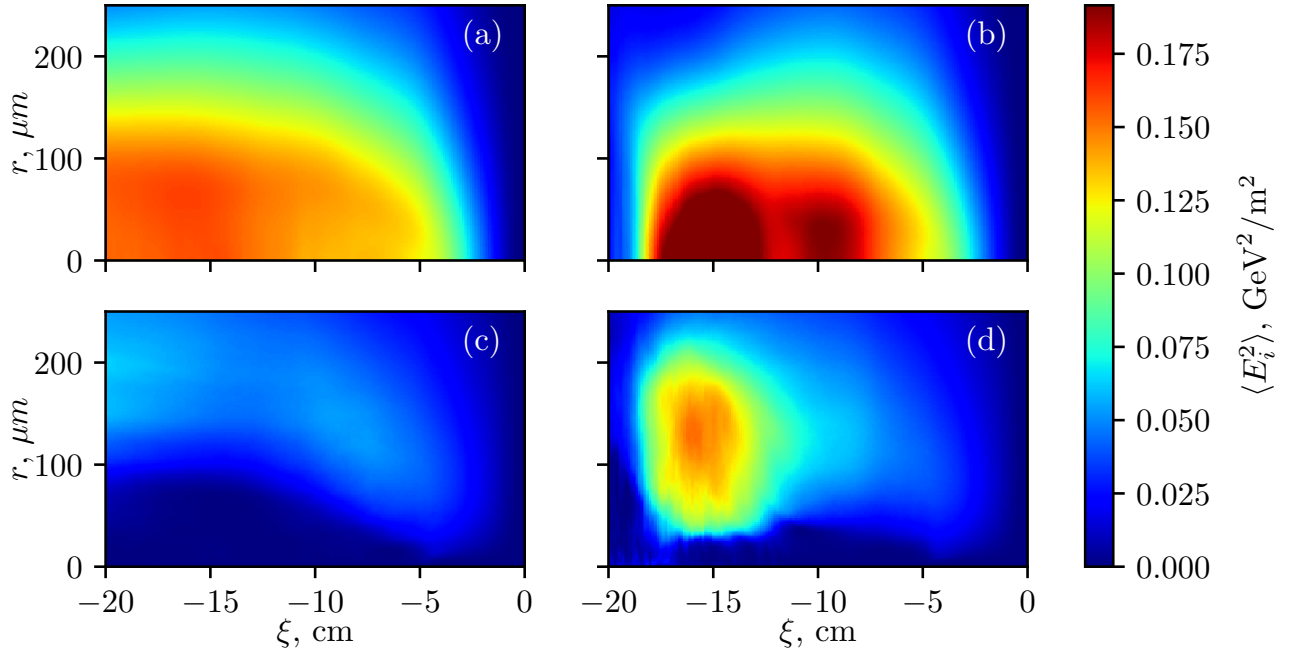


Рисунок 4.4 — Продольные (a,b) и радиальные (c,d) компоненты электрического поля для неподвижных (a,c) и подвижных (b,d) ионов. Поскольку поля осциллируют с плазменной частотой, на рисунке показаны усредненные по периоду квадраты полей $\langle E_z^2 \rangle$ and $\langle E_r^2 \rangle$.

Дополнительным приятным следствием обнаруженного эффекта роста поля является увеличение коэффициента трансформации. Коэффициент трансформации — это параметр схемы ускорения, равный отношению поля, в котором ускоряется витнесс, к полю, в котором замедляется драйвер. В случае, если схема предполагает потерю драйвером всей его энергии, коэффициент трансформации оказывается равен отношению энергии, набранной витнессом в процессе ускорения, к начальной энергии драйвера. Конечно, такой параметр хотелось бы увеличить, однако сделать это довольно сложно. В нашем же случае из-за движения ионов выросла продольная компонента электрического поля. И если в область выросшего поля инжектировать витнесс, то коэффициент трансформации окажется выше, чем в гипотетическом случае, в котором этот эффект не существовал бы. Происходит это потому, что электроны витнесса начинают ускоряться в большем поле, в то время как темп замедления драйвера не изменился. Ведь область роста ускоряющего поля находится на расстоянии $2\sigma_z$ от центра пучка. Частиц драйвера в этой области почти нет. То есть тор-

мозится он электрическим полем, еще не получившим прирост из-за движения ионов.

Заключение

В данной работе изучены эффекты, специфичные для кильватерного ускорения с протонным драйвером. Сформулируем основные результаты, также опубликованные в работах [6, 16, 26]:

1. Проведенное исследование прояснило чувствительность возбужденного кильватерного поля к параметрам пучка и плазмы и помогло выявить физические эффекты, ограничивающие амплитуду кильватерного поля в различных областях пространства параметров. Наиболее важным эффектом оказалось нелинейное удлинение волны [48]. До тех пор, пока этот эффект не вступил в игру, кильватерная амплитуда прямо пропорциональна числу протонов, возбуждающих волну. Если же, из-за улучшения какого-либо из параметров, достигается некий предел числа микросгустков, то рост амплитуды в дальнейшем сильно замедляется. Два других важных эффекта — это разлет пучка из-за эмиттанса и движение ионов. Оба эффекта характеризуются неким граничным значением, или, если быть точным, поверхностью в многомерном пространстве параметров. Если перейти границу, то амплитуда начнет стремительно падать. Иначе эти параметры не влияют на амплитуду волны.
2. Обнаружен новый физический эффект, приводящий к росту эмиттанса витнесса в плазменном кильватерном ускорителе из-за флуктуаций фокусирующей силы. Этот эффект применим ко всем схемам плазменного ускорения, работающим в линейном или слабонелинейном режиме. Blowout режим [53] невосприимчив к этому механизму роста эмиттанса, поскольку фокусирующая сила в каверне полностью определена ионной плотностью и не меняется со временем.

Основной причиной появления поперечной силы, зависящей от времени, является рассогласование драйвера и плазмы. Равновесное состояние пучка в собственном кильватерном поле довольно экзотическое

и заметно отличается от распределения Гаусса по импульсам и координатам [17]. Таким образом, любой драйвер будет менять свою форму после входа в плазму, а значит, создавать зависящий от времени кильватерный потенциал. Даже если радиус пучка подобран точно, все равно будет происходить процесс перехода формы пучка в равновесное состояние. Возможно, инъекция витнесса сбоку [57] в тот момент, когда драйвер уже пришел к равновесию, поможет обойти этот эффект, но это еще предстоит выяснить.

Рост эмиттанса можно замедлить с помощью увеличения заряда витнесса, поскольку он начинает дополнительно фокусироваться своим собственным кильватерным полем. Несмотря на это, голова витнесса все равно будет разваливаться. В процессе ускорения фронт эрозии движется по пучку от головы к хвосту.

3. Найден эффект увеличения амплитуды кильватерной волны из-за движения ионов плазмы. Причиной эффекта становится перераспределение энергии в волне, приводящее к увеличению плотности энергии на оси. Прибавка энергии превышает даже потери, связанные с переходом части энергии колебаний из продольных в поперечные из-за поперечной неоднородности плотности ионов.

Полученные результаты представляют интерес для предсказания и объяснения результатов эксперимента AWAKE и для других экспериментов по кильватерному ускорению. Большую часть результатов можно обобщить, поскольку параметры протонных пучков на многих ускорителях схожи. Кроме того, показано, что некоторые эффекты являются общими и могут проявить себя с драйвером любого типа.

В заключение хотелось бы поблагодарить всех, кто так или иначе помогал в работе над диссертацией:

- В первую очередь хотелось бы поблагодарить Лотова К.В. за научное руководство и помощь на всех этапах работы.
- Хочу сказать спасибо своим родителям и жене за поддержку во время написания диссертации.
- Благодарю своих коллег Спицина Р.И., Туева П.В., Горна А.А. и Соседкина А.П. за плодотворное обсуждение результатов работы и помощь в обработке данных.
- Выражаю огромную признательность всем преподавателям, благодаря которым написание этой диссертации стало возможным, а особенно Мегаевой Л.В., Семеновой И.Ю., Бекешевой А.С. и Дмитриевой Ю.А.
- Хочу выразить благодарность коллективам Сибирского суперкомпьютерного центра и Иркутского суперкомпьютерного центра за помощь в проведении численного моделирования.
- Благодарю Анненкова В.В. и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации.

Список литературы

- [1] K.V.Lotov, Simulation of ultrarelativistic beam dynamics in plasma wake-field accelerator. *Phys. Plasmas* **5**, 785 (1998).
- [2] K.V.Lotov, Fine wakefield structure in the blowout regime of plasma wakefield accelerators. *Phys. Rev. ST - Accel. Beams* **6**, 061301 (2003).
- [3] K.V.Lotov, A.Sosedkin, and E.Mesyats, Simulation of Self-modulating Particle Beams in Plasma Wakefield Accelerators. *Proceedings of IPAC2013 (Shanghai, China)*, p.1238-1240.
- [4] <https://lcode.info/>.
- [5] A.P.Sosedkin, and K.V.Lotov, LCODE: A parallel quasistatic code for computationally heavy problems of plasma wakefield acceleration. *Nuclear Instr. Methods A* **829**, 350 (2016).
- [6] K.V.Lotov, V.A.Minakov, and A.P.Sosedkin Parameter sensitivity of plasma wakefields driven by self-modulating proton beams. *Phys. Plasmas* **21**, 083107 (2014).
- [7] J.B.Rosenzweig, A.M.Cook, A.Scott, M.C.Thompson, and R.B.Yoder, Effects of Ion Motion in Intense Beam-Driven Plasma Wakefield Accelerators. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 195002 (2005).
- [8] N.Kirby, M.Berry, I.Blumenfeld, M.J.Hogan, R.Ischebeck, and R. Siemann, Emittance growth from multiple coulomb scattering in a plasma wakefield accelerator. *Proceedings of PAC2007 (Albuquerque, New Mexico, USA)*, p.3097-3099.
- [9] O.Mete, M.Labiche, G.Xia, and K.Hanahoe, GEANT4 simulations for beam emittance in a linear collider based on plasma wakefield acceleration. *Phys. Plasmas* **22**, 083101 (2015).

- [10] P.Antici, A.Bacci, C.Benedetti, et al, Laser-driven electron beamlines generated by coupling laser-plasma sources with conventional transport systems. *J. Appl. Phys.* **112**, 044902 (2012).
- [11] T.Mehrling, J.Grebenyuk, F.S.Tsung, K.Floettmann, and J.Osterhoff, Transverse emittance growth in staged laser-wakefield acceleration. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **15**, 111303 (2012).
- [12] M.Migliorati, A.Bacci, C.Benedetti, E.Chiadroni, M.Ferrario, A.Mostacci, L. Palumbo, A.R.Rossi, L.Serafini, and P.Antici, Intrinsic normalized emittance growth in laser-driven electron accelerators. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **16**, 011302 (2013).
- [13] X.L.Xu, J.F.Hua, Y.P.Wu, et al, Physics of Phase Space Matching for Staging Plasma and Traditional Accelerator Components Using Longitudinally Tailored Plasma Profiles. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 124801 (2016).
- [14] S.Cheshkov, T.Tajima, W.Horton, and K.Yokoya, Particle dynamics in multistage wakefield collider. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **3**, 071301 (2000).
- [15] C.Chiu, S.Cheshkov, and T.Tajima, High energy laser-wakefield collider with synchronous acceleration. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **3**, 101301 (2000).
- [16] V.A.Minakov, M.Tacu, A.P.Sosedkin, and K.V.Lotov Witness emittance growth caused by driver density fluctuations in plasma wakefield accelerators. *Phys. Plasmas* **25**, 093112 (2018).
- [17] K.V.Lotov, Radial equilibrium of relativistic particle bunches in plasma wakefield accelerators. *Phys. Plasmas* **24**, 023119 (2017).
- [18] R.Gholizadeh, T.Katsouleas, P.Muggli, C.Huang, and W.Mori, Preservation of Beam Emittance in the Presence of Ion Motion in Future High-Energy Plasma-Wakefield-Based Colliders. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 155001 (2010).

- [19] W.An, W.Lu, C.Huang, X.Xu, M.J.Hogan, C.Joshi, and W.B.Mori, Ion Motion Induced Emittance Growth of Matched Electron Beams in Plasma Wakefields. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 244801 (2017).
- [20] C.Benedetti, C.B.Schroeder, E.Esarey, and W.P.Leemans, Emittance preservation in plasma-based accelerators with ion motion. *Phys. Rev. Accel. Beams* **20**, 111301 (2017).
- [21] T.J.Mehrling, C.Benedetti, C.B.Schroeder, E.Esarey, and W.P.Leemans, Suppression of Beam Hosing in Plasma Accelerators with Ion Motion. *Phys. Rev. Lett.* **121**, 264802 (2018).
- [22] V.A.Balakirev, V.I.Karas', and I.V.Karas', Charged Particle Acceleration by an Intense Ultrashort Electromagnetic Pulse Excited in a Plasma by Laser Radiation or by Relativistic Electron Bunches. *Plasma Physics Reports* **28**, 125 (2002).
- [23] S.M.Hooker, R.Bartolini, S.P.D.Mangles, A.Tünnermann, L.Corner, J. Limpert, A.Seryi, and R.Walczak, Multi-pulse laser wakefield acceleration: a new route to efficient, high-repetition-rate plasma accelerators and high flux radiation sources. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **47**, 234003 (2014).
- [24] J.Vieira, R.A.Fonseca, W.B.Mori, and L.O.Silva, Ion Motion in Self-Modulated Plasma Wakefield Accelerators. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 145005 (2012).
- [25] J.Vieira, R.A.Fonseca, W.B.Mori, and L.O.Silva, Ion motion in the wake driven by long particle bunches in plasmas. *Phys. Plasmas* **21**, 056705 (2014).
- [26] V.A.Minakov, A.P.Sosedkin and K.V.Lotov Accelerating field enhancement due to ion motion in plasma wakefield accelerators. *Plasma Phys. Control. Fusion* **61**, 114003 (2019).
- [27] L.M.Gorbunov, P.Mora, and A.A.Solodov, Plasma ion dynamics in the wake of a short laser pulse. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3332 (2001).

- [28] L.M.Gorbunov, P.Mora, and A.A.Solodov, Dynamics of a plasma channel created by the wakefield of a short laser pulse. *Phys. Plasmas* **10**, 1124 (2003).
- [29] R.I.Spitsyn, I.V.Timofeev, A.P.Sosedkin, and K.V.Lotov, Characterization of wavebreaking time and dissipation of weakly nonlinear wakefields due to ion motion. *Phys. Plasmas* **25**, 103103 (2018).
- [30] A.Caldwell, E.Adli, L.Amorim, et al. (The AWAKE Collaboration) Path to AWAKE: Evolution of the concept. *Nuclear Instr. Methods A* **829**, 3 (2016).
- [31] E.Gschwendtner, E.Adli, L.Amorim, et al. (The AWAKE Collaboration) AWAKE, The Advanced Proton Driven Plasma Wakefield Acceleration Experiment at CERN. *Nuclear Instr. Methods A* **829**, 76 (2016).
- [32] P.Muggli, E.Adli, R.Apsimon, et al. (The AWAKE Collaboration) AWAKE readiness for the study of the seeded self-modulation of a 400 GeV proton bunch. *Plasma Phys. Control. Fusion* **60**, 014046 (2018).
- [33] C.Bracco, L.D.Amorim, R.Assmann, et al. (The AWAKE Collaboration) AWAKE: A Proton-Driven Plasma Wakefield Acceleration Experiment at CERN. *NUCLEAR AND PARTICLE PHYSICS PROCEEDINGS* **273** 175 (2016)
- [34] K.V.Lotov and V.A.Minakov, Proton beam self-modulation seeded by electron bunch in plasma with density ramp. *Plasma Phys. Control. Fusion* **62**, 115025 (2020).
- [35] E.Adli, A.Ahuja, O.Apsimon, et al. (The AWAKE Collaboration) Acceleration of electrons in the plasma wakefield of a proton bunch. *Nature* **561**, 363 (2018).
- [36] E.Gschwendtner, M.Turner, E.Adli, et al. (The AWAKE Collaboration) Proton-driven plasma wakefield acceleration in AWAKE. *Phil. Trans. R. Soc. A* **378**, 20180418 (2019).

- [37] A.A.Gorn, M.Turner, E.Adli, et al. (The AWAKE Collaboration) Proton beam defocusing in AWAKE: comparison of simulations and measurements. *Plasma Phys. Control. Fusion* **62**, 125023 (2020).
- [38] M.Turner, E.Adli, A.Ahuja, et al. (The AWAKE Collaboration) Experimental Observation of Plasma Wakefield Growth Driven by the Seeded Self-Modulation of a Proton Bunch. *Phys. Rev. Lett.* **122**, 054801 (2019).
- [39] E.Adli, A.Ahuja, O.Apsimon, et al. (The AWAKE Collaboration) Experimental Observation of Proton Bunch Modulation in a Plasma at Varying Plasma Densities. *Phys. Rev. Lett.* **122**, 054802 (2019).
- [40] В.А.Минаков, Особенности ускорения пучков в плазменной кильватерной волне длинного модулированного драйвера, выпускная квалификационная работа аспиранта, Новосибирск 2020.
- [41] K.V.Lotov, Blowout regimes of plasma wake?eld acceleration, *Phys. Rev.E* **69**, (2004), 046405
- [42] K.V.Lotov, V.I.Maslov, I.N.Onishchenko, and E.N.Svistun, Resonant excitation of plasma wakefields by a non-resonant train of short electron bunches, *Plasma Phys. Control. Fusion* **52** (2010), p.065009.
- [43] V.N.Khudik and K.V.Lotov, Ion channels produced by ultrarelativistic electron beams in a magnetized plasma, *Plasma Physics Reports*, **v.25** (1999), N 2, p.149-159.
- [44] N.Kumar, A.Pukhov, and K.Lotov, Self-modulation instability of a long proton bunch in plasmas. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 255003 (2010).
- [45] E.Öz, and P.Muggli A novel Rb vapor plasma source for plasma wakefield accelerators. *Nuclear Instr. Methods A* **740**, 197 (2014).
- [46] A.Caldwell, and K.V.Lotov, Plasma wakefield acceleration with a modulated proton bunch. *Phys. Plasmas* **18**, 103101 (2011).

- [47] R.Keinigs and M.E.Jones, Two-dimensional dynamics of the plasma wakefield accelerator Phys. Fluids **30**, 252 (1987).
- [48] K.V.Lotov, Excitation of two-dimensional plasma wakefields by trains of equidistant particle bunches. Phys. Plasmas **20**, 083119 (2013).
- [49] K.V.Lotov, Controlled self-modulation of high energy beams in a plasma. Phys. Plasmas **18**, 024501 (2011).
- [50] K.V.Lotov, Physics of beam self-modulation in plasma wakefield accelerators. Phys. Plasmas **22**, 103110 (2015).
- [51] E.Adli, The AWAKE Collaboration, Towards AWAKE applications: Electron beam acceleration in a proton driven plasma wake. Proceedings of IPAC2016 (Busan, Korea), p.2557-2560.
- [52] V.K.Berglyd Olsen, E.Adli, and P.Muggli, Emittance preservation of an electron beam in a loaded quasilinear plasma wakefield. Phys. Rev. Accel. Beams **21**, 011301 (2018).
- [53] J.B.Rosenzweig, B.Breizman, T.Katsouleas, and J.J.Su, Acceleration and focusing of electrons in two-dimensional nonlinear plasma wake fields. Phys. Rev. A **44**, 6189 (1991).
- [54] G.Plyushchev, R.Kersevan, A.Petrenko, and P.Muggli, A rubidium vapor source for a plasma source for AWAKE. J. Phys. D: Appl. Phys. **51**, 025203 (2018).
- [55] K.V.Lotov, A.P.Sosedkin, A.V.Petrenko, L.D.Amorim, J.Vieira, R.A.Fonseca, L.O.Silva, E.Gschwendtner, and P.Muggli, Electron trapping and acceleration by the plasma wakefield of a self-modulating proton beam. Phys. Plasmas **21**, 123116 (2014).
- [56] P.Chen, A possible final focusing mechanism for linear colliders. Part. Accel. **20**, 171 (1987).

- [57] K.V.Lotov, Optimum angle for side injection of electrons into linear plasma wakefields, *J. Plasma Phys.* **78**(4), 455 (2012).

Список рисунков

1	Принципиальная схема плазменного ускорения	5
1.1	Геометрия задачи (а) и траектория частицы плазмы в окне моделирования (b).	14
1.2	Расчет плазменного отклика в квазистатическом приближении.	18
1.3	Параллельная реализация квазистатического алгоритма. Моделирование $(k + 1)$ -го временного шага может не ждать, пока k -й шаг будет вычислен во всем окне моделирования. Ультрарелятивистское приближение позволяет второму процессу сразу же начать следовать за первым. Таким образом, N процессов могут формировать конвейер, вычисляя N временных шагов пучка за один проход.	24
2.1	Взаиморасположение протонного драйвера и ионизирующего лазерного импульса в эксперименте AWAKE	26
2.2	Зависимости амплитуды кильватерной волны $\Phi_m(z)$ от длины распространения драйвера в плазме, сгруппированные по варьируемому параметру: (а) плотность плазмы n_0 , (b) число частиц N_b , (с) длина пучка при постоянном пиковом токе σ_{zb} , (d) длина пучка при постоянном числе частиц σ_{zb}^* , (е) радиус пучка σ_{rb} , (f) угловой разброс пучка $\delta\alpha_b$, (g) атомный вес ионов плазмы M_i , (h) энергия пучка W_b , (i) энергоразброс пучка δW_b . Значения варьированных параметров подписаны около графиков.	29
2.3	Зависимости безразмерной кильватерной амплитуды Φ_{\max} от длины распространения $z\omega_p/c$ для разных плотностей плазмы. Графики окрашены так же, как на рисунке 2.2(а).	30

- 2.4 Абсолютный максимум кильватерной амплитуды Φ_m (высота столбцов) в зависимости от варьируемых параметров: (а) число частиц в пучке для фиксированной длины пучка, (b) длина пучка для фиксированного пикового тока, и (с) длина пучка для фиксированного числа частиц в пучке. Столбцы покрашены так же, как и на рисунке 2.2(b-d). Тонкими и пунктирной линиями на фрагментах (а) и (с) показаны скейлинги абсолютного максимума кильватерной амплитуды от варьируемого параметра. На фрагменте (d) схематично показано продольное распределение нормального (красный) и удлиненного (синий) пучков. Тонкими линиями показана эффективная плотность обоих пучков. 32
- 2.5 Изображение пучка в момент развитой самомодуляции ($z = 3.6$ м) для начальных радиусов 0.05 мм (а) и 0.2 мм (b). 33
- 2.6 Амплитуда кильватерной волны Φ_m в зависимости от $z/\sqrt{W_b}$ для различных энергий пучка. 35
- 2.7 (а) Зависимость максимума кильватерной амплитуды $\Phi_m(z)$ от положения ξ_s ионизирующего лазерного импульса (подписаны около кривых) и (b) абсолютный максимум кильватерной амплитуды Φ_m (высота столбца) в зависимости от положения ионизирующего лазерного импульса. Тонкая кривая на фрагменте (b) показывает форму пучка до обрезки. 36
- 3.1 Обсуждаемая схема будущей фазы эксперимента AWAKE: общий вид (а), зависимость плотности плазмы n_0 (b) и кильватерной амплитуды E_m (с) с (синяя кривая) и без (красная кривая) вакуумного промежутка от длины распространения пучка. 39
- 3.2 Электрическое поле E_z на оси (красная линия) и потенциальная энергия Φ (синяя линия) в начале второй секции. Стрелка показывает положение пробного электронного пучка. 42

- 3.3 Зависимость нормализованного эмиттанса ϵ от длины распространения во второй плазменной секции z при наличии 1 м вакуумного промежутка между секциями (синий) и без него (красный). Бледные точки соответствуют результатам запусков с низким разрешением: $\Delta r = \Delta \xi = 0.01 c/\omega_p = 2$ мкм, $\Delta z = 200 c/\omega_p = 4$ см. 43
- 3.4 Зависимость конечного эмиттанса ϵ_f (синие точки) и энергии W_f (красная кривая) витнесса после прохождения 10 метров в плазме от длины L_g вакуумного промежутка между секциями. 44
- 3.5 Радиальный профиль потенциальной энергии кильватерной волны $\Phi(r)$ в случае с вакуумным промежутком и без него, а также посчитанный аналитически согласно линейной теории отклика плазмы для случая промежутка длиной 1 м. Все профили построены при $z = 4$ см, в точке, где находится витнесс. Кружок на линии показывает минимум энергии. 45
- 3.6 Изменение потенциальной энергии в приосевой области во времени с вакуумным промежутком (а) и без него (б). Для того, чтобы лучше видеть потенциальную яму, на рисунке изображена разность $\Delta\Phi(r, z) = \Phi(r, \xi_w, z) - \Phi(0, \xi_w, z)$ 46
- 3.7 Типичная форма протонного сгустка сразу перед (а) и сразу после (б) вакуумного промежутка. 47
- 3.8 Зависимость конечного эмиттанса ϵ_f от начального смещения электронного пучка r_0 с вакуумным промежутком и без него. Вставка слева показывает две возможные интерпретации осесимметричного моделирования. 48
- 3.9 Схематичное изображение потенциальной энергии в месте положения витнесса в осесимметричном случае (а) и ожидаемое в 3D геометрии (б). 49

- 3.10 Геометрия задачи в плоском случае: бледным цветом показана кильватерная потенциальная энергия, фиолетовый прямоугольник — это протонный драйвер, имеющий равномерное распределение плотности, темные полосы на нем — флуктуации плотности, черные точки — это электронный пучок, а вертикальная пунктирная линия показывает сечение, потенциальная энергия в котором показана на рисунке 3.11. 50
- 3.11 Потенциальная энергия в сечении, показанном на рисунке 3.10 вертикальной пунктирной линией. Энергия показана без учета действия электронного пучка. 51
- 3.12 Зависимость эмиттанса витнесса ϵ от длины распространения z для разных зарядов витнесса: полный заряд, как в таблице 5 (синие кривые), 10% полного заряда (зеленые кривые) и пробные электроны с пренебрежимо малым зарядом (красные кривые). Пунктиром показан эмиттанс всего пучка, а непрерывные кривые показывают эмиттанс центрального слоя длиной 40 мкм, как отмечено на рисунке 3.13. Стрелка показывает момент, когда фронт эрозии пришел в начало центрального слоя пучка с неполным зарядом. 53
- 3.13 Портрет витнесса с полным зарядом после 5 м (a) и 10 м (b) в плазме. Цветные прямоугольники показывают расположение центрального слоя, эмиттанс которого показан на рисунке 3.12 непрерывной линией. 54
- 4.1 Зависимость поля E_z на оси от сопутствующей координаты ξ в точке $z = z_0$ для неподвижных (оранжевая кривая) и подвижных (синяя кривая) ионов рубидия. Зеленая линия показывает огибающую для подвижных ионов калия. 56
- 4.2 Возмущение ионной плотности при $z = z_0$ 58

- 4.3 Продольные (a,b) и радиальные (c,d) компоненты плотности потока энергии \vec{S} в сопутствующем окне для неподвижных (a,c) и подвижных (b,d) ионов. Черные стрелки показывают направление потока энергии. 58
- 4.4 Продольные (a,b) и радиальные (c,d) компоненты электрического поля для неподвижных (a,c) и подвижных (b,d) ионов. Поскольку поля осциллируют с плазменной частотой, на рисунке показаны усредненные по периоду квадраты полей $\langle E_z^2 \rangle$ and $\langle E_r^2 \rangle$ 60