

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г.И. БУДКЕРА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ
НАУК

На правах рукописи

СКОВОРОДИН ДМИТРИЙ ИВАНОВИЧ

**ВЛИЯНИЕ САМОСОГЛАСОВАННЫХ ПОЛЕЙ НА
ПРОДОЛЬНЫЕ ПОТЕРИ ИЗ ОТКРЫТЫХ
ЛОВУШЕК**

01.04.08 — физика плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Беклемишев Алексей Дмитриевич
кандидат физико-математических наук

Новосибирск — 2014

Содержание

Введение	4
Глава 1. Истечение плазмы из гофрированной ловушки в кинетическом режиме	12
1.1. Постановка задачи	12
1.2. Решение локальной задачи	15
1.3. Решение глобальной задачи	19
1.4. Удержание плазмы в многопробочной ловушке	21
Глава 2. Квазипродольный звук в открытой ловушке с анизотропным давлением	27
2.1. Гидродинамическая модель	28
2.2. Уравнения анизотропной идеальной МГД	32
2.3. Волновое уравнение	34
2.4. Колебания в ловушке с частично заполненным конусом потерь	37
2.5. Колебания в ловушке с плещущимися ионами	40
2.6. Влияние граничных условий	47
Глава 3. Переход от кинетического к газодинамическому режиму продольных потерь из пробочной ловушки	51
3.1. Модель и исходные уравнения	51
3.2. Сравнение результатов моделирования с известными решениями	56
3.3. Продольные потери в переходном режиме	60
3.3.1. Результаты моделирования и качественные рассуждения	60
3.3.2. Вычисление функции распределения	65

3.3.3. Самосогласованное решение	68
3.3.4. Сравнение аналитической теории с результатами моделирования	71
3.4. Подавление продольных потерь амбиполярной пробкой	75
Заключение	78
Приложение А	81
Приложение Б	83
Приложение В	90
Литература	92

Введение

В современных аксиально-симметричных открытых плазменных ловушках продольные потери играют определяющую роль в энергобалансе плазмы. Для того чтобы создать эффективный источник нейтронов или энергетический реактор синтеза на основе линейной системы, требуется разрабатывать способы уменьшения темпа истечения плазмы вдоль магнитного поля. Поэтому исследование режимов продольного удержания плазмы важно для определения термоядерных перспектив таких устройств. Существует ряд теоретических моделей продольного удержания плазмы в открытых ловушках. Однако эти модели учитывают не все факторы, которые оказывают влияние на темп продольных потерь в экспериментах. Ранее не исследовано влияние самосогласованных полей на удержание ионов в переходном режиме от гидродинамического истечения к адиабатическому удержанию, когда $\lambda \sim L$ (λ — длина свободного пробега, L — длина ловушки). Изучение этого режима требуется для трактовки результатов экспериментов на существующих ловушках ГОЛ-3 и ГДЛ [1, 2] и для проектирования перспективных субтермоядерных устройств [3]. Данная диссертация посвящена теоретическому исследованию продольных потерь плазмы в кинетическом режиме из двух классов открытых ловушек: гофрированной ловушки и зеркальной ловушки с большим пробочным отношением.

Гофрированная (многопробочная) ловушка [4] является открытой аксиально-симметричной системой для удержания плотной плазмы ($\lambda < L$). Плазма, истекая вдоль гофрированного магнитного поля, проходит через цепь связанных последовательно пробкотронов. Если длина свободного пробега иона превышает длину ячейки ловушки ($\lambda > l$), частицы можно разделить на пролетные и адиабатически запертые между соседними проб-

ками. За счет столкновений пролетные частицы, которыми определяются продольные потери, захватываются в локальных пробкотронах. После этого частицы, многократно отражаясь от пробок, передают импульс магнитному полю. Столкнувшись еще раз, они могут снова стать пролетными, но начинают двигаться в случайном направлении – к торцу ловушки или обратно к её центру. Таким образом, истечение плазмы приобретает диффузионный характер, а время жизни частиц возрастает по сравнению со случаем однородного магнитного поля, в котором время удержания плазмы совпадает со временем пролета иона через систему. На основе многопробочной ловушки были предложены схемы импульсного и квази-стационарного термоядерных реакторов [3, 5].

Существующая теория истечения плазмы из гофрированной ловушки основана на квази-гидродинамическом подходе. Хотя движение плазмы не подчиняется уравнениям двухжидкостной гидродинамики, условие $\lambda \ll L$ позволяет во многих случаях считать функцию распределения близкой к максвелловской. Поэтому течение плазмы может быть описано макроскопическими уравнениями. В работе [6] были получены уравнения на концентрацию и температуру плазмы, а также вычислены коэффициенты переноса, позволяющие замкнуть эту систему уравнений.

Эксперименты на установке ГОЛ-3 [1, 8] требуют изучения режимов с редкими столкновениями и сильно развитой турбулентностью. Поэтому необходимо развивать кинетические методы описания плазмы в гофрированной ловушке. Переход к кинетическому описанию также оправдан необходимостью исследования стационарного режима истечения в вакуум. В этом случае существенную роль играют граничные условия на торце ловушки, вблизи которого предположения квази-гидродинамической модели нарушаются. Первая глава диссертации посвящена исследованию функции распре-

деления в многопробочной ловушке в случае мелкомасштабной гофрировки, когда длина свободного пробега много больше, чем длина гофрировки магнитного поля.

Эксперименты по измерению времени жизни горячей плазмы в ловушке ГОЛ-3 указывают на аномальную столкновительность ионов при истечении вдоль магнитного поля [7]. Время жизни плазмы в этих экспериментах оказалось неожиданно большим и приближенно соответствовало режиму оптимального удержания $l \sim \lambda$. Однако, рассчитанная по плотности и температуре плазмы кулоновская длина свободного пробега на полтора порядка превышает это значение. Таким образом, парные столкновения не могут объяснить наблюдаемое время жизни плазмы в ГОЛ-3, что указывает на существование механизма коллективного рассеяния в этих условиях.

В многопробочной ловушке ГОЛ-3 [1, 8] на стадии распада плазмы были зарегистрированы продольные колебания в ячейках ловушки на частоте, близкой к локальной баунс-частоте ионов. Точная информация о поперечной структуре моды отсутствует, однако колебания регистрировались при помощи нелокальной нейтронной диагностики, поэтому они предположительно сфазированы на разных силовых линиях (т.е. соответствуют нулевым азимутальному и радиальному волновым числам). Эти колебания были идентифицированы как баунс-неустойчивость продольной звуковой волны [9], которая вызвана инверсным градиентом по продольной энергии функции распределения запертых ионов. Неравновесная функция распределения может формироваться за счет столкновительного «трения» с пролетными ионами [10]. Интерес к этим колебаниям связан с тем, что они могли бы эффективно рассеивать пролетные ионы, так как их частота близка обратному времени пролета иона через ячейку гофрировки.

Недавно подобные звуковые колебания плазмы на средней баунс-

частоте горячих ионов были замечены на установке ГДЛ [11]. Газодинамическая ловушка – это пробочная ловушка с большим пробочным отношением [12, 13]. При помощи нейтральной инжекции в ловушке создается двухкомпонентная плазма: тёплая мишенная плазма и популяция быстрых ионов со средней энергией масштаба 10 кэВ, которые удерживаются адиабатически. В этом эксперименте колебания регистрировались по возмущению магнитного поля, создаваемому диамагнетизмом горячих ионов. Спектр колебания является дискретным, колебания давления плазмы соответствуют первой продольной моде и нулевой азимутальной. Возмущение магнитного поля регистрируется на достаточно большом удалении от плазмы, поэтому колебания, по-видимому, синхронизованы по радиусу, т.е. соответствуют нулевой поперечной моде.

Возбуждение наблюдаемых колебаний может быть связано с кинетической раскачкой за счет неравновесности функции распределения ионов. В многопробочной ловушке неравновесность функции распределения связана с протоком плазмы через ячейку. В случае ГДЛ анизотропное распределение плещущихся ионов в пространстве скоростей также имеет область инвертированного градиента по продольной энергии. Исследование устойчивости колебаний требует кинетических методов, однако их спектр может быть вычислен на основе более простой модели идеальной магнитной гидродинамики. В последнее время МГД модели широко применяются для исследования аналогичных звуковых колебаний плазмы в тороидальных ловушках – геодезических акустических мод (ГАМ). Такие колебания были предсказаны теоретически в работе [14]. Данные колебания наблюдаются на многих крупных токамаках [15–18]. Предполагается, что такие колебания участвуют в насыщении дрейфовой турбулентности плазмы [19, 20]. На данный момент детально разработана теория таких колебаний на основе урав-

нений МГД [21–24]. Гидродинамические расчеты согласуются с кинетической теорией, причем такие эффекты, как бесстолкновительное затухание Ландау, могут быть учтены в виде поправки к дисперсии колебаний [25]. Во второй главе диссертации на основе идеальной МГД Чу-Голдбергера-Лоу исследуются условия существования стоячей звуковой волны в плазме открытой ловушки.

Третья глава диссертации посвящена исследованию продольных потерь плазмы из пробочной ловушки в режиме переходной столкновительности. Аксиально симметричные пробочные ловушки являются базовым элементом для большинства открытых магнитных систем [5], поэтому требуется детальное изучение режимов продольных потерь из таких ловушек. Несмотря на обширные исследования удержания плазмы в открытых ловушках, влияние самосогласованного амбиполярного поля на потери в режиме $\lambda \sim L$ ранее количественно не исследовалось. Интерес к этому режиму вызван, в частности, экспериментами на установке ГДЛ в ИЯФ СО РАН. В недавних экспериментах [2] была изучена эффективность использования амбиполярных пробок для подавления продольных потерь частиц и энергии из газодинамической ловушки. К установке ГДЛ был присоединен компактный пробкотрон с пробочным отношением ~ 2 . При помощи поперечной инжекции нейтральных атомов в нем создавалась популяция глубоко запертых горячих ионов. Горячие ионы создавали амбиполярный барьер для ионов теплой плазмы, вытекающих из основного пробкотрона. При этом наблюдалось неожиданно высокое подавление потока ионов в пробку (более чем в пять раз при плотности горячих ионов всего в полтора-два раза выше фоновой). Такое подавление может объясняться отличием режима истечения от газодинамического: при $\lambda \sim L$ (λ – длина свободного пробега, L – длина ловушки) конус потерь заполнен при низкой энергии и практически пуст при энергии

выше тепловой, поэтому если отсечь ионы с низкой энергией потенциальным барьером, то эффект может быть большим.

Пробочная ловушка представляет собой соленоид с областями сильного магнитного поля вблизи торцов (магнитные зеркала или пробки). Благодаря сохранению адиабатического инварианта $\mu = \frac{mV_{\perp}^2}{2B(z)}$, частицы плазмы отражаются от пробок и удерживаются в ловушке. За счет столкновений они попадают в конус потерь и покидают ловушку. В случае редких столкновений, при $\lambda \gg L$, конус потерь практически пуст, и потери определяются диффузией частиц в фазовом пространстве через границу области удержания. Г.И. Будкер вычислил функцию распределения ионов при изотропной и перпендикулярной инжекции [26], не учитывая влияние амбиполярного потенциала на удержание частиц, и установил зависимость времени жизни иона от пробочного отношения и времени ион-ионных столкновений: $\tau \sim \tau_{ii} \cdot \ln(R)$. Влияние амбиполярного потенциала исследовано аналитически В.П. Пастуховым [27] для частиц, которые удерживаются фиксированным электростатическим барьером (электроны в зеркальной ловушке, либо ионы в амбиполярной ловушке [28]).

Из-за того, что частота столкновений электронов в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз выше частоты столкновений ионов при той же температуре, электроны без участия амбиполярного потенциала удерживаются хуже. Поэтому при условии продольной амбиполярности потерь плазма в пробочной ловушке принимает положительный электростатический потенциал, выравнивающий скорости потерь ионов и электронов. В случае, если за пробкой реализована магнитная конфигурация расширителя, величина амбиполярного потенциала превышает температуру [29]. Из-за этого основная часть электронов электростатически удерживается в ловушке и имеет больцмановское распределение. В этом случае темп продольных потерь определяется условиями удержания

ионов. В кинетическом режиме влияние вытягивающего амбиполярного потенциала на потери ионов исследовалось численно [30] на основе решения столкновительного кинетического уравнения для запертых ионов с пустым конусом потерь.

В газодинамическом пределе [31], при $\lambda \ll L$, функция распределения ионов в центральной части зеркальной ловушки близка к максвелловской, и продольные потери определяются газодинамическим истечением плазмы через магнитную пробку. Перепад плотности плазмы в области пробки вызывает появление вытягивающего амбиполярного потенциала, что делает задачу самосогласованной [31, 32].

В переходном режиме между кинетическим и газодинамическим истечением конус потерь заполнен частично, и для определения продольных потерь необходимо вычислить функцию распределения пролетных частиц. В работе [33] была построена численная кинетическая модель, при помощи которой авторами был исследован переходный режим, однако влияние амбиполярного потенциала на условия удержания не учитывалось. Кроме того, существует модель [34], приближенно учитывающая заполнение конуса потерь при помощи модифицированного баунс-усредненного кинетического уравнения. Однако эта модель тоже не учитывает влияние амбиполярного потенциала плазмы на потери. Третья глава диссертации посвящена исследованию переходного режима между кинетическим и газодинамическим удержанием в пробочной ловушке с учётом влияния самосогласованного амбиполярного потенциала плазмы.

На защиту выносятся следующие положения.

Корректная модель истечения плазмы из гофрированной ловушки в кинетическом режиме.

Волновое уравнение для квазипродольного звука в тонкой анизотропной плазме, учитывающее диамагнетизм и продольную неоднородность плазмы.

Дискретные продольные звуковые моды в многопробочной ловушке с обеднённым конусом потерь и в ловушке с плещущимися ионами, локализующиеся за счет неоднородности плазмы.

Переходный режим истечения плазмы из пробочной ловушки, в котором продольные потери происходят с образованием струи холодных ионов.

Существенное подавление продольных потерь ионов из зеркальной ловушки в переходном режиме $L \sim \lambda$ при помощи амбиполярного барьера $e\Delta\varphi \sim T_e$.

Глава 1

Истечение плазмы из гофрированной ловушки в кинетическом режиме

В данной главе будет исследована функция распределения в многопробочной ловушке в случае мелкомасштабной гофрировки, когда длина свободного пробега много больше, чем длина гофрировки магнитного поля. В первом разделе главы конкретизирована постановка задачи и описан общий метод её решения. Во втором разделе описано решение «локальной» задачи о течении плазмы через отдельный пробкотрон. В третьем разделе описано решение «глобальной» задачи о вычислении функции распределения вдоль всей ловушки. В четвертом разделе представлены результаты решения.

1.1. Постановка задачи

Квази-гидродинамическая теория [6] основана на уравнениях, которые представляют собой законы сохранения вещества и энергии. Они получены интегрированием кинетического уравнения по пространству скоростей и усреднением вдоль длины ячейки гофрировки с весом $1/B(s)$.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{I} \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial nT}{\partial t} + \frac{2}{3I} \frac{\partial Q}{\partial s} \mp \frac{2eB_{max}}{3Il} \int_{s_1}^{s_2} \frac{E_{\parallel}(s')q(s')}{B(s')} ds' = 0, \quad (2)$$

где n — концентрация, T — температура, q — поток частиц, Q — поток энергии, а $I = \frac{B_{max}}{l} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds'}{B(s')}$.

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (1, 2), в работе [6] были вычислены потоки вещества и энергии, которые выражены в виде произведе-

ния градиентов равновесных параметров плазмы вдоль системы и соответствующих коэффициентов переноса. Эти потоки определяются поправкой к максвелловской функции распределения, которая найдена при помощи линеаризованного кинетического уравнения. При этом сделаны следующие предположения:

- Функция распределения близка к стационарной, т.е. $\frac{\partial F}{\partial t} \approx 0$.
- При рассмотрении одной ячейки гофрировки на поправку к функции распределения налагаются периодические граничные условия.

Такая постановка задачи для вычисления поправки к функции распределения в ячейке гофрировки хорошо подходит для рассмотрения периодических систем: например, влияние кулоновских столкновений на нелинейную волну или влияние гофрировки на продольные переносы в тороидальной ловушке [35, 36]. Однако в случае, когда вдоль системы существует градиент равновесных параметров плазмы, который рассматривается в этой работе, такое граничное условие нарушает непрерывность функции распределения вдоль ловушки – она терпит разрывы в пробках.

Кинетическое уравнение является уравнением переноса вдоль траекторий частиц в фазовом пространстве. В правой части этого уравнения находится интеграл столкновений, который описывает диффузию частиц в пространстве скоростей. На самом деле естественная постановка задачи для такого уравнения предполагает задание в пробках распределения частиц, влетающих в ячейку.

В отсутствии столкновений значение функции распределения переносится вдоль траекторий частиц на фазовой плоскости (смотри рисунок 1). При этом в пределе мелкомасштабной гофрировки ($\lambda \gg l$) функция распределения медленно меняется за счет рассеяния на пролетных частицах и на

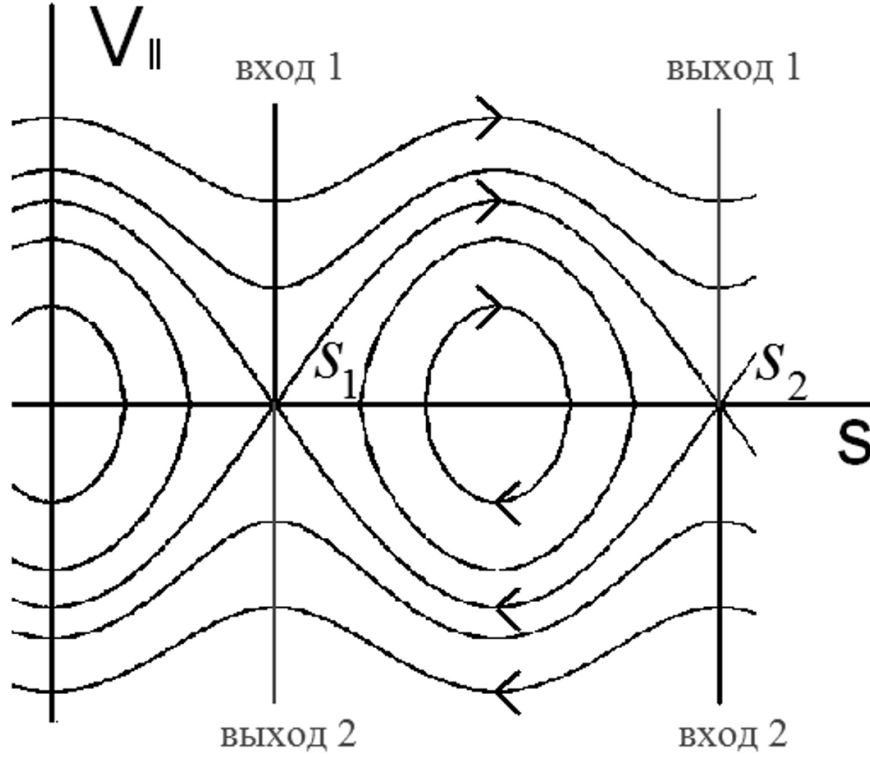


Рис. 1: Фазовый портрет для частиц с определенным μ .

частицах, запертых в ячейке. Поэтому можно выделить в функции распределения часть, появляющаяся в силу столкновений, следующим образом:

$$F^+(s, \epsilon, \mu) = F^+(s_1, \epsilon, \mu) + f^+(s, \epsilon, \mu),$$

где s – координата вдоль силовой линии магнитного поля, s_1 – координата пробки, через которую траектория входит в ячейку, ϵ – кинетическая энергия, $\mu = \frac{mv^2}{2B}$ – магнитный момент частицы, а «+» указывает на знак продольной скорости.

Используя тот факт, что значение поправки на выходе из ячейки равно изменению функции F на длине ячейки и, переходя к пределу $L/l \rightarrow \infty$ (количество ячеек стремится к бесконечности), получаем «глобальное» соотношение, описывающее изменение F вдоль всей ловушки:

$$\frac{f(s_2)}{l} = \frac{\Delta F}{l} \rightarrow \frac{1}{L} \frac{dF}{dz}, \quad (3)$$

где $z = s/L$ — безразмерная координата, s_2 — координата пробки, через которую траектория выходит из ячейки. Если поправка вычислена в линейном приближении по l/λ , то параметр l выпадает из соотношения (3), поэтому при помощи этой модели нельзя исследовать режим $l \sim \lambda$.

Таким образом, здесь и далее речь идет о вычислении стационарной функции распределения в случае мелкомасштабной гофрировки $\lambda \gg l$. Решение задачи можно разделить на две части:

- локальная задача о нахождении функции распределения в одной ячейке гофрировки, решение которой позволит конкретизировать вид «глобального» уравнения (3);
- решение глобальной задачи и вычисление функции распределения вдоль всей ловушки.

1.2. Решение локальной задачи

Будем считать, что магнитное поле достаточно велико, чтобы движение частиц можно было описывать в дрейфовом приближении. Также предположим аксиальную симметрию плазмы, которая позволяет не учитывать азимутальные дрейфы. Кроме того, будем считать, что можно пренебречь амбиполярным потенциалом. Это можно сделать при вычислении функции распределения ионов в случае «холодных» электронов $T_e \ll T_i$. Тогда функция распределения подчиняется стационарному кинетическому уравнению в дрейфовом приближении:

$$v_{\parallel} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)_{\epsilon, \mu} = St(F), \quad (4)$$

где s — координата вдоль силовой линии магнитного поля, ϵ — кинетическая энергия, $\mu = \frac{mv^2}{2B}$ — магнитный момент частицы, а $St(F)$ — интеграл

столкновений с коэффициентами в форме Розенблюта-Трубникова [37, 38].

Считая, что заданы значения функции распределения на границах «вход 1» и «вход 2» (смотри рисунок 1), найдем ее значения на границах «выход 1» и «выход 2».

Разложим кинетическое уравнение (4) по малому параметру l/λ . Как было отмечено выше, разложение функции распределения по этому параметру выглядит следующим образом: переносимое без изменений вдоль траекторий частиц граничное условие (нулевой порядок) и малая поправка, появляющаяся в силу столкновений (первый порядок). Так как интеграл столкновений пропорционален частоте столкновений, в нем нужно удерживать только функцию нулевого приближения. Поэтому в первом порядке по параметру l/λ кинетическое уравнение выглядит следующим образом:

$$v_{\parallel} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{\epsilon, \mu} = St(F_0) \quad (5)$$

Так как функция нулевого приближения сохраняется вдоль траекторий частиц, уравнение (5) содержит в левой части только производную поправки $\frac{\partial f}{\partial s}$, а правая часть содержит только F_0 . Поэтому оно решается интегрированием по s при постоянных ϵ, μ :

$$f = \int_{s_1}^s \frac{ds}{v_{\parallel}} \cdot St(F_0) \quad (6)$$

Будем считать, что пробочное отношение велико $R \gg 1$. Это позволяет использовать существенно упрощенный [6, 39] интеграл столкновений. Суть упрощений состоит в следующем:

- В интеграле столкновений можно пренебречь диффузией по энергии, так как при $R \gg 1$ член, описывающий диффузию по питч-углу, содержит большой параметр $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \propto R$.

- Условие $R \gg 1$ позволяет использовать простую гипотезу относительно функции распределения запертых частиц. Вне пробок преобладают запертые частицы, которые долго живут в отдельных пробкотронах и имеют, следовательно, функцию распределения, близкую к максвелловской. Так как область запертых частиц преобладает в пространстве скоростей, именно они вносят наибольший вклад в потенциалы Розенблюта.

В этих предположениях интеграл столкновений выглядит следующим образом:

$$St(F) = C(\epsilon) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} F, \quad (7)$$

где коэффициент $C(\epsilon)$ (пропорциональный частоте столкновений ионов) определен по максвелловской функции распределения (запертых частиц) и приведен в работе [6]. Параметры максвелловской функции распределения могут быть найдены при помощи сшивки с функцией распределения пролетных частиц на границе «пролетные-запертые». Стоит отметить, что упрощенный интеграл столкновений (7) не учитывает обмен энергией между ионами и электронами, который может существенно повлиять на функцию распределения в случае холодных электронов.

Функции распределения пролетных частиц, двигающихся в разные стороны (F^+ и F^-), не совпадают на границах 1 и 2 (смотри рисунок 2). Скачок между максвелловской функцией и функциями F^+ и F^- сглаживается поправками следующего порядка по l/λ . Однако следует учесть, что граничные условия для частиц, летящих «слева» и «справа», не являются независимыми. На самом деле, граничные условия ставятся не для каждого пробкотрона в отдельности, а для всей ловушки на ее торцах. Граничные условия для локальной задачи определяются в рамках самосогласованной

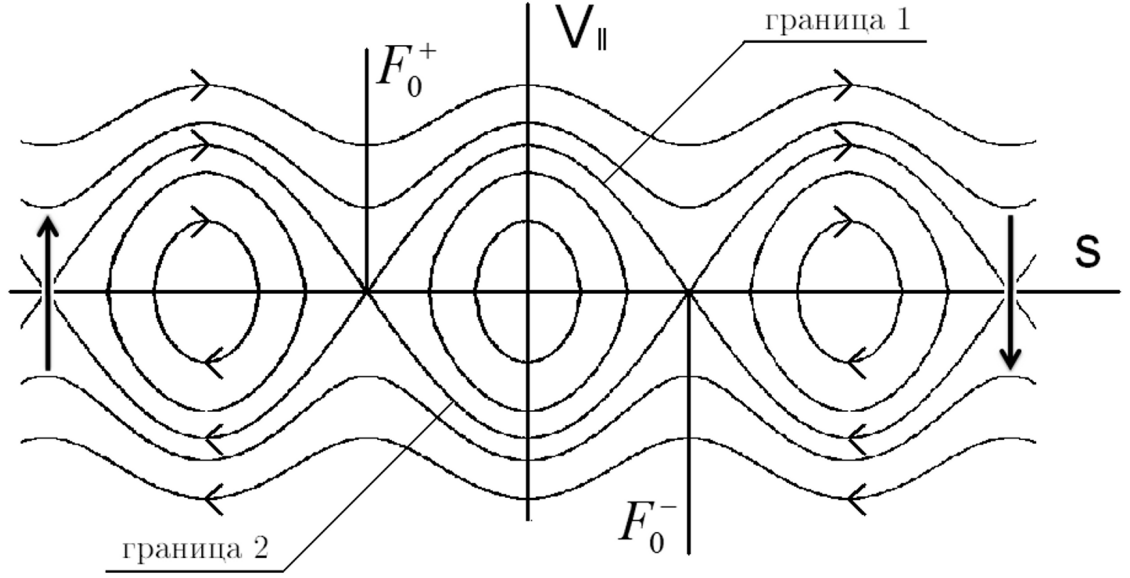


Рис. 2: Фазовый портрет для частиц с определенным μ . Граничные условия F_0^+ и F_0^- не являются независимыми, так как взаимодействие происходит во всех ячейках гофрировки.

глобальной задачи, так как взаимодействие происходит во всех ячейках гофрировки одновременно (рис. 4). В наших предположениях $L \gg \lambda \gg l$ скачок является малой величиной, следовательно, при шивке можно не учитывать поправки к функциям нулевого приближения.

Используя упрощенный интеграл столкновений (7), можно вычислить поправку (6). Для этого перейдем к переменным, являющимся интегралами движения: ϵ , $y = \text{sign}(v_{||}) \cos^2 \theta_0$, где θ_0 – питч-угол частицы в максимуме магнитного поля:

$$f(s) = \frac{4l \cdot C(\epsilon)}{v} \frac{\partial}{\partial y} D(y) \frac{\partial}{\partial y} F_0, \quad (8)$$

где коэффициент $D(y)$:

$$D(y) = (1 - |y|) \int_{s_1}^s \frac{ds}{l} \cdot \sqrt{\frac{B_{max}}{B(s)}} \sqrt{\frac{B_{max}}{B(s)} - (1 - |y|)} \quad (9)$$

1.3. Решение глобальной задачи

Используя решение локальной задачи (8) и соотношение (3), получаем глобальное уравнение, описывающее изменение функции распределения вдоль всей ловушки:

$$\pm \frac{\partial F}{\partial z} = A(\epsilon, z) \frac{\partial}{\partial y} D(y) \frac{\partial}{\partial y} F, \quad (10)$$

где $z = s/L$ — безразмерная координата, ϵ — кинетическая энергия, а $y = \text{sign}(v_{\parallel}) \cos^2 \theta_0$ — угловая переменная в пространстве скоростей. Коэффициент $A(\epsilon)$ выражается через табличные функции:

$$A(\epsilon) = \frac{2\pi L \Lambda e^4 n}{\epsilon^2} \left[\left(1 - \frac{T}{2\epsilon}\right) \text{Erf}\left(\sqrt{\epsilon/T}\right) + \sqrt{\frac{T}{\pi\epsilon}} e^{-\epsilon/T} \right]$$

Вид коэффициента $D(y)$ зависит от профиля магнитного поля. При $R \gg 1$ он имеет простую асимптотику $D(y) \stackrel{R \rightarrow \infty}{\propto} (1 - |y|) \cdot I$, где $I = \frac{B_{max}}{l} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds'}{B(s')}$. Для кусочно-линейного профиля магнитного поля (рисунок 3) коэффициент $I = \ln(R)$. Характер зависимости I от k зависит от профиля магнитного поля. Например, если магнитное поле однородно внутри ячейки, а пробка является точечной, то $I = R$. Как видно из асимптотической формулы для коэффициента D в пределе большого пробочного отношения (который совпадает с областью применимости всей теории), коэффициент I входит в уравнение мультипликативно и может быть, таким образом, устранен перенормировкой эффективной частоты столкновений. Далее расчеты будут вестись для кусочно-линейного профиля магнитного поля, что, учитывая вышесказанное, не нарушает общности задачи. Вывод коэффициентов A и D дан в приложении А.

Левая часть уравнения содержит производную по безразмерной координате, а правая — дифференциальный оператор второго порядка в про-

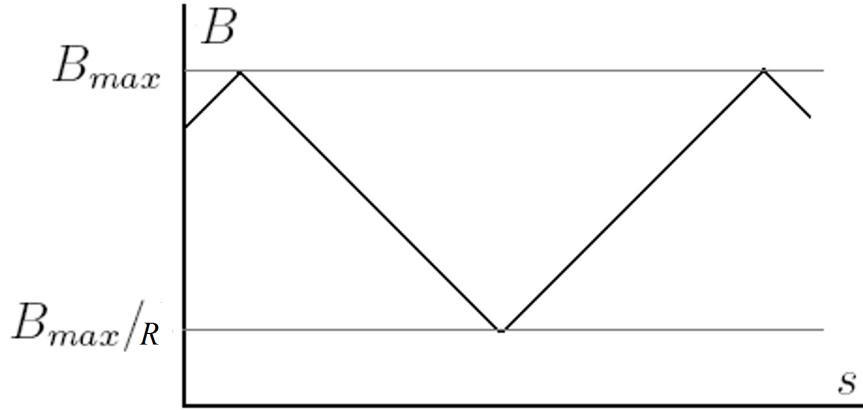


Рис. 3: Кусочно линейный профиль магнитного поля.

странстве скоростей. То есть, уравнение имеет структуру стационарного кинетического уравнения с нелинейным столкновительным членом в правой части (нелинейность вызвана зависимостью $A(\epsilon)$ от концентрации и температуры плазмы).

Решение нелинейного уравнения (10) можно найти при помощи релаксационной численной схемы. Для этого введем в него производную по фиктивному времени τ :

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} \pm \frac{\partial F}{\partial z} = A(\epsilon, z) \frac{\partial}{\partial y} D(y) \frac{\partial}{\partial y} F \quad (11)$$

При условии сходимости схемы, решение уравнения (11) стремится при $\tau \rightarrow \infty$ к решению стационарного уравнения (10). Так как уравнение (11) имеет диффузионный член, его численное интегрирование по фиктивному времени может быть произведено при помощи неявной схемы:

$$\frac{F(\tau_{n+1}) - F(\tau_n)}{\Delta \tau} \pm \frac{\delta F(\tau_n)}{\delta z} = A(\epsilon, z, \tau_n) \frac{\delta}{\delta y} D(y) \frac{\delta}{\delta y} F(\tau_{n+1}), \quad (12)$$

где $\frac{\delta}{\delta z}$ и $\frac{\delta}{\delta y}$ разностные производные.

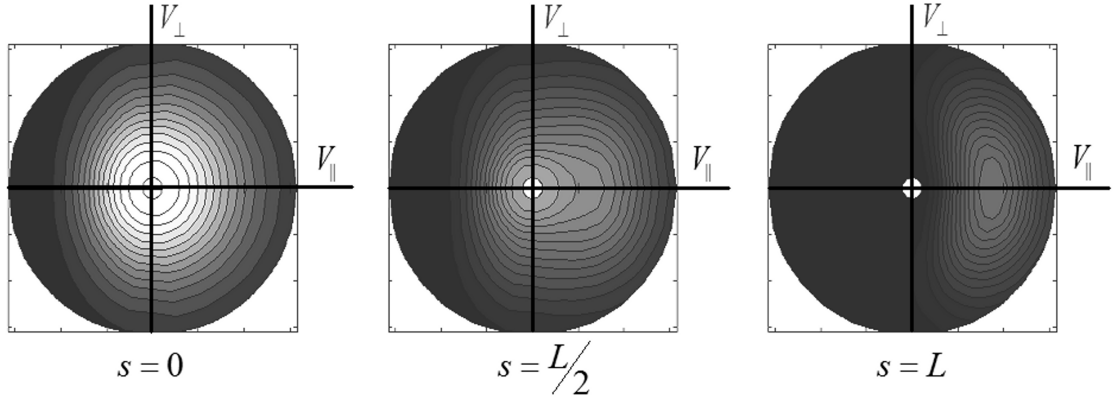


Рис. 4: Функция распределения в левой, центральной и правой пробках в задаче об истечении в вакуум (переменные v_{\parallel} , v_{\perp} измеряются в условных единицах; $R = 10$).

1.4. Удержание плазмы в многопробочной ловушке

На рисунке 4 изображена функция распределения в левой, центральной и правой пробках (т.е. на рисунке нет области запертых частиц) для задачи об истечении в вакуум. Граничные условия заданы следующим образом: слева в ловушку влетают частицы с максвелловским распределением с концентрацией 10^{15}см^{-3} и температурой 1000эВ , а справа плазма истекает в вакуум, то есть частицы только вылетают из ловушки. Такая постановка задачи близка к схеме гипотетического термоядерного реактора. В нем плазма создается и нагревается в центральном пробкотроне, а секции с гофрированным магнитным полем служат для подавления продольных потерь.

Попробуем сравнить результаты кинетической модели с предсказаниями квази-гидродинамической теории [6]. В приближении постоянной температуры уравнения теории [6] могут быть решены точно. Самосогласованная задача об истечении плазмы в вакуум не может быть корректно поставлена в рамках этой теории, так как решение уравнения диффузии требует задания плотности на обоих концах гофрированной секции. Для того чтобы определить эти граничные условия, используем концентрацию плазмы на

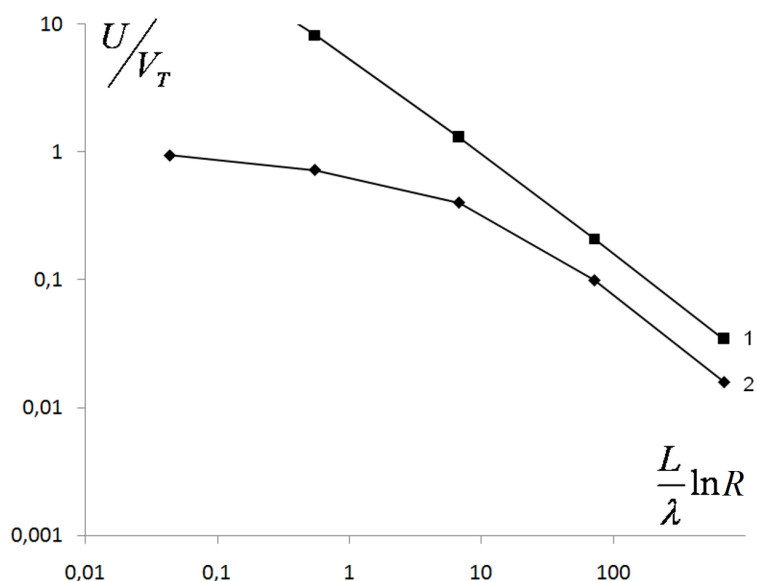


Рис. 5: Зависимость средней направленной скорости течения, деленной на тепловую, от отношения длины ловушки к эффективной длине свободного пробега $(L/\lambda)I$ при истечении в вакуум ($T = 1000\text{эВ}$, $R = 10$). Кривая 1: Предел мелкомасштабной гофрировки (В. В. Мирнов), кривая 2: кинетическая теория.

торцах ловушки, взятую из решения кинетической самосогласованной задачи. Таким образом, можно найти поток частиц, соответствующий чистодиффузионному истечению плазмы. На рисунке 5 представлено сравнение результатов кинетической и квази-гидродинамической теорий для задачи об истечении в вакуум в зависимости от отношения длины ловушки к эффективной длине свободного пробега.

В случае редких столкновений (левая часть рисунка) результаты кинетической теории выходят на разумный предел: частицы пролетают через гофрированную секцию с тепловой скоростью, не рассеиваясь. При $(L/\lambda)I \sim 1$ обе теории предсказывают переход к режиму многопробочного удержания. Переход к этому режиму виден также на рисунке 6, на котором показана зависимость энергетического времени жизни ионов от отношения длины ловушки к эффективной длине свободного пробега.

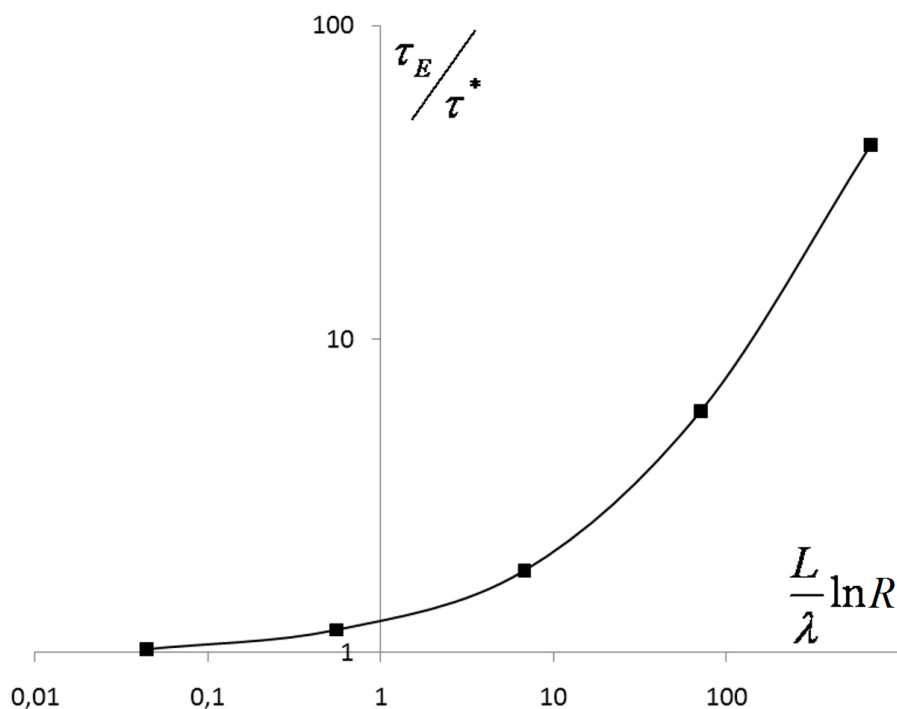


Рис. 6: Зависимость энергетического времени жизни ионов от отношения длины ловушки к эффективной длине свободного пробега $(L/\lambda)I$ при истечении в вакуум ($T = 1000\text{эВ}$, $R = 10$). Время жизни нормировано на величину, соответствующую бесстолкновительному вылету ионов.

Как было показано выше, предсказания квазигидродинамической и развитой в этой работе кинетической моделей относительно потока частиц, теряемых из ловушки, отличаются. В задаче об истечении в вакуум кинетическая теория предсказывает в два раза меньший темп потерь частиц из ловушки. Такое отличие может быть связано с тем, что вблизи торца ловушки плазма с маленькой плотностью имеет существенно немаксвелловскую функцию распределения и квазигидродинамическая модель выходит за свою область применимости. Для того чтобы выяснить, ограничиваются ли отличия между моделями только этим эффектом, были выполнены сравнительные расчеты потока частиц через участок гофрированного поля для широкого диапазона значений градиента плотности вдоль системы – от

истечения в вакуум на торце ловушки до случая, когда перепад плотности составлял всего 0,1%.

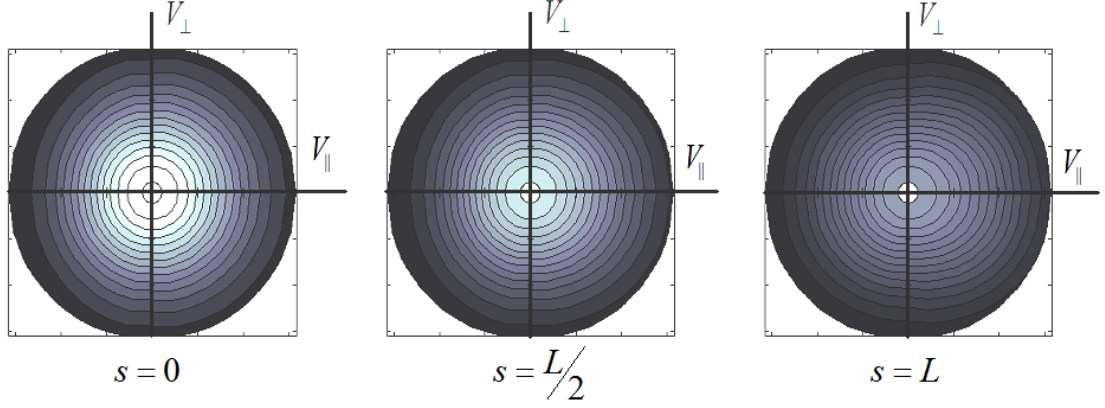


Рис. 7: Функция распределения в левой, центральной и правой пробках в задаче о градиенте плотности (переменные v_{\parallel} , v_{\perp} измеряются в условных единицах; $R = 10$).

На рисунке 7 показана функция распределения ионов для задачи с градиентом плотности. Слева в ловушку влетают частицы с максвелловским распределением с концентрацией $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и температурой 1000эВ, а справа – с в два раза меньшей концентрацией и такой же температурой. Видно, что функция распределения локально близка к максвелловской, но имеет тонкую конусообразную составляющую. На рисунке 8 показано сравнение потока частиц, который предсказывается кинетической и квазигидродинамической теориями при разных значениях градиента плотности. Видно, что при уменьшении градиента отличие потоков уменьшается, но уже при $\Delta n/n = 0.1$ достигает значения 1,5 и при дальнейшем уменьшении перепада плотности практически не меняется. Это отличие может быть связано с тем, что в кинетической модели корректно поставлены граничные условия для локальной задачи (смотри раздел 1.1.).

Совпадение характера зависимости потока частиц от длины системы, вычисленного из квази-гидродинамической (диффузионной) теории и рас-

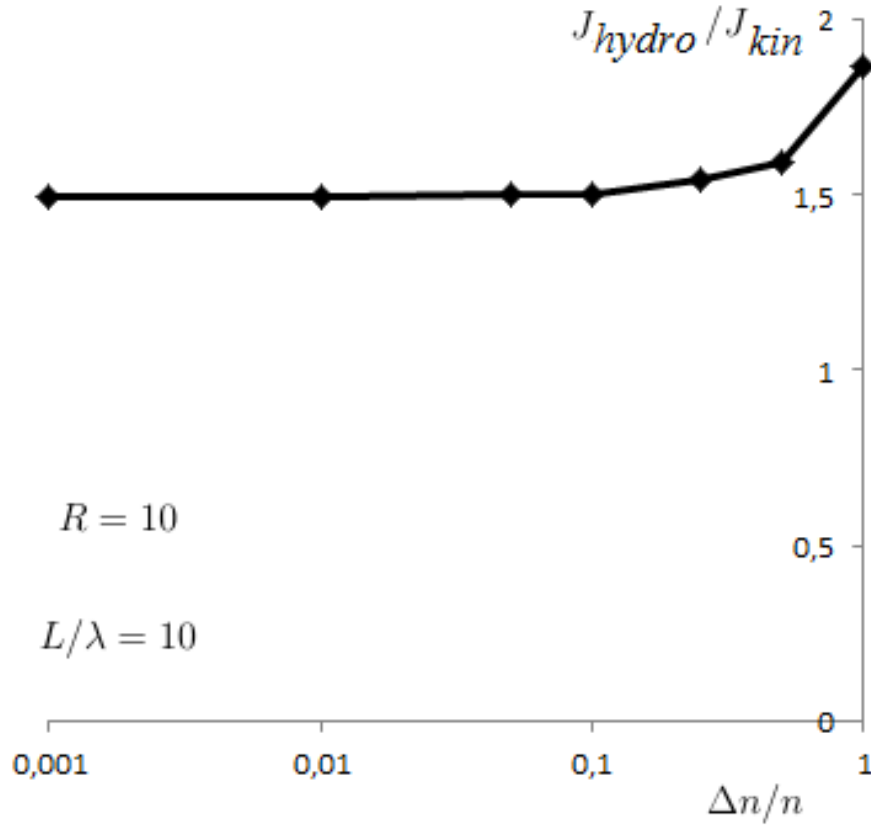


Рис. 8: Зависимость отношения потоков частиц вдоль магнитного поля, вычисленных при помощи квази-гидродинамической и кинетической моделей, от относительного перепада плотности на торцах ловушки.

считанного при помощи кинетической модели, говорит о том, что в пределе мелкомасштабной гофрировки продольное истечение плазмы приобретает диффузионный характер. Однако, так как на торце ловушки поставлено не гидродинамическое граничное условие (истечение в вакуум), на расстояниях, меньших эффективной длины свободного пробега от торца ловушки, функция распределения сильно отличается от максвелловской (рисунок 4 при $s = L$). В этой области нарушаются предположения, на которых основана квази-гидродинамическая модель, и истечение имеет не диффузионный характер. С этим может быть связано существенное численное расхождение (приблизительно в два раза) результатов кинетической теории и чисто диф-

фузионной модели [6]. В случае умеренного перепада плотности плазмы на торцах ловушки сохраняется отличие предсказаний моделей в 1,5 раза, хотя в этой области параметров заведомо выполняются условия применимости квази-гидродинамической теории.

Глава 2.

Квазипродольный звук в открытой ловушке с анизотропным давлением

В данной главе на основе гидродинамического подхода исследуются продольные звуковые колебания плазмы. Эксперименты на ГОЛ-3 и ГДЛ [1, 11] указывают на возможность существования глобальной дискретной моды продольных колебаний плазмы в открытой ловушке с частотой порядка баунс-частоты запертых ионов. Таким образом, требуется исследовать стоячие звуковые волны в плазме пробочной ловушки. Колебания с длиной волны порядка длины ловушки могут отражаться от продольной неоднородности плазмы. Далее будут исследованы условия возникновения стоячих волн при помощи МГД модели. В первой части главы описываются условия, в которых будут исследоваться колебания, качественно анализируются механизмы их локализации и формулируется физическая модель, которая будет рассматриваться в следующих частях. Во второй части рассматриваются уравнения идеальной МГД с адиабатой Чу-Голдберга-Лоу и выводится система уравнений, описывающая продольную динамику плазмы в квази-продольной звуковой волне. В третьей части выполняется линеаризация выведенной системы уравнений, в результате которой получено волновое уравнение. Обсуждается метод анализа волнового уравнения и поиска локализованных решений. В четвертой и пятой частях анализируются колебания в ловушке с частично-заполненным конусом потерь и ловушке с плещущимися ионами. В шестой части главы изучено влияние граничных условий в пробках на решение задачи.

2.1. Гидродинамическая модель

Будем исследовать квазипродольный звук в открытой ловушке в следующих условиях (которые соответствуют экспериментам на ГОЛ-3 и ГДЛ):

- плазма имеет конечное β (отношение давления плазмы к магнитному давлению);
- плазма длинная и тонкая, $L \gg a$ (параксиальность);
- продольная длина волны порядка длины ловушки и много больше, чем диаметр плазмы, $\lambda \gg a$;
- частота колебаний много меньше ионной циклотронной, $\omega \ll \Omega_{ci}$, поэтому будем использовать уравнения идеальной магнитной гидродинамики;
- частота столкновений ниже частоты колебаний (поэтому используем адиабату Чу-Голдбергера-Лоу);
- как равновесие, так и колебания имеют осевую симметрию.

Так как поперечное волновое число определяется радиусом плазмы $k_{\perp} \sim 1/a$, а продольное – её длиной $k_{\parallel} \sim 1/L$, то для рассматриваемых нами колебаний вектор \vec{k} почти ортогонален к магнитному полю. В этом случае существуют две ветви МГД-колебаний – медленный и быстрый магнитный звук. Частота быстрого магнитного звука существенно превышает продольную звуковую частоту, поэтому мы должны рассматривать медленную ветвь. В случае почти поперечного распространения частота медленного магнитного звука определяется следующим уравнением [40]:

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 \cdot \left(3c_{\parallel}^2 - \frac{c_{\perp}^4}{c_A^2 + 2c_{\perp}^2} \right), \quad (13)$$

где $c_{\parallel}^2 = \frac{p_{\parallel}}{\rho}$, $c_{\perp}^2 = \frac{p_{\perp}}{\rho}$, $c_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}$, а p_{\parallel} – продольное давление, p_{\perp} – поперечное давление, ρ – плотность плазмы и B – магнитное поле.

Первый член в выражении для частоты описывает продольную сжимаемость плазменного шнура. Вторым является эффектом конечного β и описывает эффективное снижение продольной упругости за счет того, что плазменный шнур может расширяться поперек магнитного поля. В случае, если второй член доминирует, в плазме развивается диамагнитная неустойчивость. В открытой ловушке неустойчивость стабилизируется продольной неоднородностью магнитного поля [41], однако диамагнитный эффект может существенно «замедлять» квазипродольные звуковые колебания.

В рамках данной работы будут изучены условия возникновения «глобальной» стоячей волны в плазме открытой ловушки. Локализация колебаний может быть связана с продольной неоднородностью, так как её масштаб совпадает с длиной волны, либо с замедлением звука за счет диамагнетизма. В следующих разделах будут последовательно учтены эти два эффекта.

При обсуждении звуковых колебаний в плазме следует уделить внимание затуханию Ландау [42]. В бесстолкновительной плазме колебания могут затухать за счет резонансного взаимодействия с ионами и электронами. Например, при рассмотрении ионного звука обычно предполагают, что плазма является электронно-горячей [43]. Тогда $\omega \approx \sqrt{T_e/M_i} \cdot k$, и скорость волны удовлетворяет условию $V_{Ti} \ll \omega/K \ll V_{Te}$, поэтому фазовый резонанс оказывается невозможным.

Обсудим причины, по которым в нашем случае может быть подавлено затухание Ландау на электронах:

- Если электронная компонента плазмы сильно столкновительная, т.е. $\nu_{ee} \gg \omega$, то затухание Ландау невозможно, так как столкновения выводят электрон из резонанса за время, меньшее периода колебаний. Этот случай соответствует эксперименту на ГДЛ, так как в его условиях электроны имеют температуру порядка $100 - 200 \text{ эВ}$ при плотности $2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и $\lambda_{ee} \ll L$.
- Для глобальных колебаний плазмы в открытой ловушке условие фазового резонанса выглядит, как равенство частоты колебаний и баунс-частоты частицы $\omega = \omega_b$ [9]. В ловушке с обедненным конусом потерь пробки заряжаются отрицательно за счет амбиполярных эффектов, поэтому электроны оказываются электростатически запертыми. Для большинства из них баунс-частота оказывается ограниченной снизу частотой колебаний в электростатической яме. Если эта частота выше частоты звуковых колебаний, то затухание Ландау мало. Этот случай, по-видимому, реализуется в эксперименте на установке ГОЛ-3.

Затухание на ионах может отсутствовать по двум причинам. Во-первых, оно сильно зависит от того, как устроена функция распределения. В обсуждаемых ловушках ионы сильно неравновесны в пространстве скоростей, поэтому фазовый резонанс с ионами может приводить, наоборот, к раскачке колебаний. В многопробочной ловушке неравновесность связана с протоком плазмы через ячейки гофрировки магнитного поля. В эксперименте на ГДЛ плазма имеет две компоненты: тёплая мишенная плазма и популяция быстрых ионов с сильно неравновесной анизотропной функцией распределения. В данной работе мы ограничиваемся исследованием условий возникновения стоячей волны в плазме открытой ловушки, не затрагивая механизмы их раскачки.

Во-вторых, в рассматриваемых далее примерах есть механизмы отстройки частоты колебаний от средней баунс-частоты ионов. В ловушке с плещущимися ионами отстройка определяется плотностью холодной плазмы n_{cold} . Инерция плазмы включает в себя суммарную плотность, в то время как давление определяется горячими ионами. Если $n_{cold} \gg n_{hot}$, то частота колебаний удовлетворяет следующему условию $\omega_{bcold} \ll \omega \ll \omega_{bhot}$, и затухание Ландау на ионах мало. В случае многопробочной ловушки, в ячейках гофрировки могут существовать быстрые запертые электроны, которые вносят вклад в давление плазмы и увеличивают частоту колебаний выше баунс-частоты ионов, что также делает затухание малым.

Кроме того, из кинетической теории известно, что в однородной максвелловской плазме с малым β звуковые волны не могут распространяться при низкой температуре электронов из-за эффекта дебаевской экранировки [44]. Можно показать, что граничное значение T_e равно $3,5 \cdot T_i$. Этот эффект заключается в фазовом перемешивании начального возмущения функции распределения ионов. Если температура электронов плазмы недостаточно велика, амбиполярное поле не способно синхронизировать ионы и самосогласованная звуковая волна не существует. Однако можно привести три обстоятельства, которые не позволяют прямо применить результаты кинетической теории однородной плазмы к рассматриваемым в данной работе ситуациям:

- Продольная неоднородность плазмы. Так как колебания развиваются на запертых ионах, их невозмущенные траектории сильно отличаются от задачи о колебаниях однородной плазмы.
- Эффект конечного β приводит к существенному изменению дисперсии колебаний. Если давление плазмы велико, появляется ещё один

канал обратной связи (через самосогласованное магнитное поле), который может подавить фазовое размешивание и расширить область существования волны.

- Неравновесность функции распределения. Дисперсионная функция плазмы определяется интегралом от функции распределения, который сильно зависит от её профиля в пространстве скоростей. Неравновесность функции распределения сильно влияет на область существования волнового решения.

Таким образом, в данный момент не существует последовательной кинетической теории, которая возволила бы учесть перечисленные обстоятельства и определенно ответить на вопрос о существовании и устойчивости звуковой волны на запертых ионах в плазме открытой ловушки. С этими оговорками, далее на основе более простой МГД модели будет исследоваться возможность локализации дискретной звуковой моды за счет продольной неоднородности плазмы.

2.2. Уравнения анизотропной идеальной МГД

Используя предположения, описанные выше, будем применять для описания плазмы уравнения идеальной МГД с анизотропным давлением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho V &= 0 - \text{уравнение непрерывности;} \\ \rho \frac{dV_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} B \times B]_\alpha - \text{уравнение Эйлера;} \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \operatorname{rot}[V \times B] - \text{уравнение вмороженности.} \end{aligned} \quad (14)$$

Эта система уравнений замыкается при помощи адиабаты Чу-

Голдбергера-Лоу [45]:

$$\frac{p_{\perp}}{\rho B} = const, \quad \frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} = const \quad (15)$$

Так как мы рассматриваем аксиально симметричную задачу, из рассмотрения выпадают альфвеновские волны кручения. В этом случае нетривиальными являются две проекции уравнения Эйлера: на направление магнитного поля и на нормаль к силовой линии:

$$\rho \frac{dV_{\parallel}}{dt} = -B \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial s} - \frac{p_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \quad (16)$$

$$\rho \frac{dV_n}{dt} = \frac{\partial}{\partial n} \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \varkappa \left(p_{\parallel} - p_{\perp} - \frac{B^2}{4\pi} \right) \quad (17)$$

Поперечное уравнение описывает быстрый магнитный звук, частота которого много больше частоты продольных колебаний плазмы в пределе $a \ll L, \lambda$. Поэтому будем считать, что при смещении плазмы вдоль оси ловушки, успевает установиться поперечное параксиальное квазиравновесие (что соответствует медленному магнитному звуку):

$$p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} = const \quad (18)$$

Перейдем от трёхмерной задачи к системе уравнений для параметров плазмы на оси ловушки. Для этого разложим решения в ряд по степеням r :

$$\begin{aligned} \rho(z, r) &= \rho(z) + \Sigma \rho_n(z) \cdot r^n, \\ p_{\parallel}(z, r) &= p_{\parallel}(z) + \Sigma p_{\parallel n}(z) \cdot r^n \\ V_{\parallel}(z, r) &= V_{\parallel}(z) + \Sigma V_{\parallel n}(z) \cdot r^n \\ V_{\perp}(z, r) &= V_{\perp 1}(z) \cdot r + \Sigma V_{\perp n}(z) \cdot r^n \\ B_z(z, r) &= B_z(z) + \Sigma B_{zn}(z) \cdot r^n \\ B_r(z, r) &= B_{r1}(z) \cdot r + \Sigma B_{rn}(z) \cdot r^n \end{aligned} \quad (19)$$

Из-за осевой симметрии разложения V_{\perp} и B_r начинаются с линейного по r члена. Подставив ряды в уравнения (14) и положив $r = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(z)}{\partial t} = & -B(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho(z) V_{\parallel}(z)}{B(z)} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho V_{\perp} = \\ & -B(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho V_{\parallel}(z)}{B(z)} - 2\rho(z) V_{\perp 1}(z) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{dV_{\parallel}(z)}{dt} = -\frac{B_z(z)}{\rho(z)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_{\parallel}(z)}{B_z(z)} - \frac{p_{\perp}(z)}{\rho B_z(z)} \frac{\partial B_z(z)}{\partial z}, \quad (21)$$

Из-за вмороженности магнитного поля в плазму при поперечных смещениях плазмы сохраняется поток магнитного поля через силовую трубку. В параксиальном приближении можно записать это условие следующим образом: $R^2 \cdot B = const$ (где R – радиус силовой трубки). Отсюда следует, что поперечная скорость плазмы связана с изменением магнитного поля следующим условием: $V_{\perp 1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{B}_z(z)}{B_z(z)}$. Подставляя это выражение в уравнение непрерывности (20), получаем уравнение:

$$\frac{\partial \rho(z)}{\partial t} = -B_z(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho(z) V_{\parallel}(z)}{B(z)} + \rho(z) \frac{\dot{B}_z(z)}{B_z(z)}, \quad (22)$$

которое вместе с уравнением (21), параксиальным равновесием (18) и адиабатой ЧГЛ (15) описывает продольную динамику плазмы.

2.3. Волновое уравнение

Для того чтобы исследовать колебания малой амплитуды, линеаризуем систему уравнений (22, 21, 18, 15) относительно отклонения от равновесия. Вводя функцию $U = \frac{\rho \tilde{V}_{\parallel}}{B}$ (где V_{\parallel} – возмущение продольной скорости), которая имеет смысл потока массы плазмы через силовую трубку, получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + K \frac{\partial U}{\partial z} + M \cdot U, \quad (23)$$

где коэффициенты определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
c_s^2 &= 3c_{\parallel}^2 - \frac{c_{\perp}^4}{c_A^2 + 2c_{\perp}^2} \\
K &= 3 \frac{c_{\parallel}^2 c_A^2}{c_{\perp}^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{c_{\perp}^2}{c_A^2} \right) - \frac{B}{\rho} \frac{d}{dz} \left(\frac{\rho c_{\parallel}^2}{B} \right) + \\
&\quad \frac{c_{\perp}^2}{c_A^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{c_A^2 c_s^2}{c_{\perp}^2} \right) + \frac{\rho}{c_A^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{c_A^2 c_{\parallel}^2}{\rho} \right) \\
M &= \frac{dB}{dz} \frac{d}{dz} \left(\frac{c_{\perp}^2}{B} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{\rho}{c_A^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{c_A^2 c_{\parallel}^2}{\rho} \right) \right),
\end{aligned} \tag{24}$$

где, как и во второй части главы, $c_{\parallel}^2 = \frac{p_{\parallel}}{\rho}$, $c_{\perp}^2 = \frac{p_{\perp}}{\rho}$, $c_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}$. Здесь и далее $B = B_z$, ρ , p_{\parallel} и p_{\perp} относятся к равновесному состоянию плазмы, на фоне которого рассматриваются малые колебания.

Если равновесное состояние плазмы однородно по z , коэффициенты K и M равны нулю. Тогда уравнение (23) описывает распространение медленного магнитного звука с законом дисперсии (13) вдоль плазменного шнура.

Нас интересует существование стоячих волн в плазме открытой ловушки. В этом случае, равновесные параметры являются функциями координаты z , причем они должны быть связаны уравнением равновесия:

$$0 = -\frac{B(z)}{\rho(z)} \frac{\partial p_{\parallel}(z)}{\partial z} - \frac{p_{\perp}(z)}{\rho B(z)} \frac{\partial B(z)}{\partial z}, \tag{25}$$

которое получается из уравнения (21), если положить в нем скорость плазмы равной нулю.

Таким образом, нам нужно решить вопрос, существуют ли у уравнения (23) решения, локализованные на длине ловушки для заданного равновесного распределения параметров. Для этой цели мы использовали следующий метод. Предположим, что c_s^2 не равно нулю всюду вдоль плазменного шнура (что выполняется для интересующих нас экспериментов). Тогда можно све-

сти уравнение (23) к уравнению Шрёденгера. Для этого выполним замену:

$$\Psi(z) = D \cdot U(z), \quad D = \exp\left(\frac{1}{2} \int \frac{K(z')}{c_s^2(z')} dz'\right),$$

после которой волновое уравнение приводится к виду:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + W(z) \cdot \Psi &= 0, \\ W &= \frac{1}{D} \frac{d^2 D}{dz^2} - \frac{\omega^2 + M}{c_s^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнение (26) является уравнением Шрёденгера с нулевой энергией, где роль эффективного потенциала играет функция $W(z)$, которую можно рассчитать, зная профили равновесных параметров плазмы. Локализованные решения волнового уравнения могут существовать только если $W(z)$ имеет форму ямы.

В определение функции W входит частота колебаний ω . В пределе $\omega \gg c_s/L$ функция $W \approx -\frac{\omega^2}{c_s^2} < 0$. Это значит, что звук с высокой частотой не локализуется в открытой ловушке, так как его длина волны много меньше масштаба пространственных неоднородностей. В случае, если $\omega \sim c_s/L$, все члены в выражении для W имеют один порядок величины. Если W имеет форму ямы, то можно вычислить уровень энергии, соответствующий связанному состоянию уравнения Шрёденгера. Наше уравнение имеет нулевую «энергию», поэтому нужно подогнать найденный уровень к нулю, меняя единственный параметр – ω . Если можно найти такое значение ω , значит в плазме может существовать стоячая волна с этой частотой.

Для поиска решения уравнения Шрёденгера используется стандартный сеточный метод. Введем сеточную координату z_n и функцию Ψ_n по правилу:

$$z_n = L \frac{n-1}{N-1} \quad \Psi_n = \Psi(z_n)$$

Тогда уравнение Шредингера с эффективной энергией ε можно аппроксимировать разностной схемой:

$$-\frac{\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n}{\delta z^2} + W(z_n) \cdot \Psi_n = S_{nm} \Psi_m = \varepsilon \Psi_n,$$

$$S = \begin{pmatrix} 2/\delta z^2 + W(z_1) & -1/\delta z^2 & 0 & \dots & 0 \\ -1/\delta z^2 & 2/\delta z^2 + W(z_2) & -1/\delta z^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1/\delta z^2 & 2/\delta z^2 + W(z_N) \end{pmatrix} \quad (27)$$

Значения эффективной энергии ε являются собственными числами матрицы S , а отвечающие им сеточные функции Ψ_n – собственными векторами.

Для уравнения (26) следует сформулировать граничные условия на концах ловушки. Вообще говоря, звуковая волна может вытекать из ловушки, унося с собой энергию колебаний. В этом случае колебания затухают и частота оказывается комплексной. В следующих двух разделах для исследования дисперсии колебаний будет использоваться отражающее граничное условие в пробках, чтобы обеспечить существование вещественного решения уравнения (26). Вопрос о влиянии граничных условий будет подробно обсуждаться в разделе 2.6..

2.4. Колебания в ловушке с частично заполненным конусом потерь

Рассмотрим модель плазменного равновесия, которая может реализовываться в ячейке многопробочной ловушки. В ячейках гофрировки кроме запертых ионов присутствуют пролетные, которые появляются из-за столкновительной диффузии в пространстве скоростей и прилетают из соседних ячеек. Этими пролетными ионами определяются продольные потери плазмы

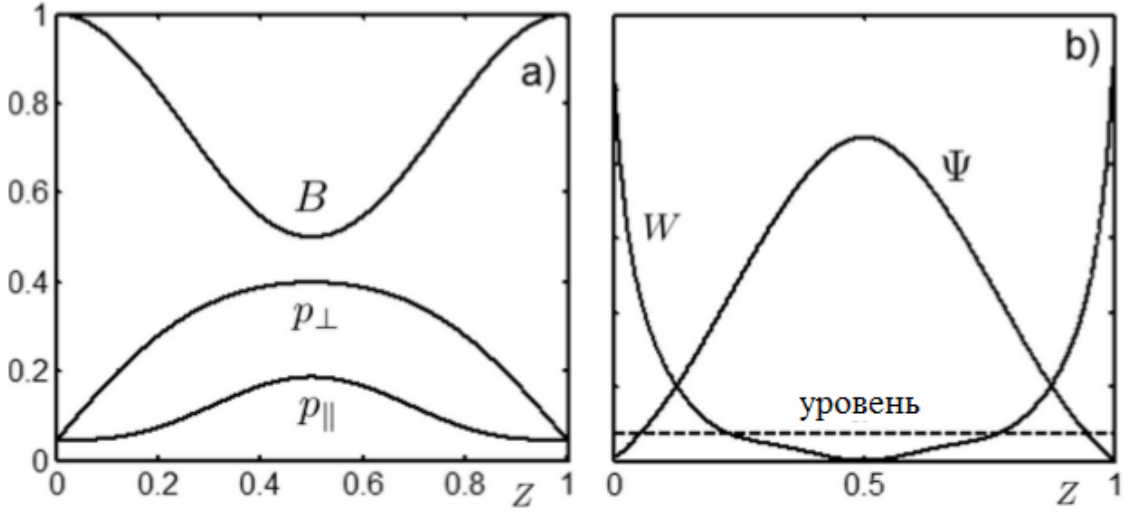


Рис. 9: Результат вычисления собственной функции Ψ для ячейки многопробочной ловушки при $R = 2$, $\beta_{\perp} = 0,1$ и $\gamma = 0,1$. а) профили магнитного поля B , поперечного давления $p_{\perp}(z)$ и продольного давления $p_{\parallel}(z)$, б) профили эффективного потенциала W и собственной функции Ψ . Координата Z нормированна на L , магнитное поле B нормировано на поле в пробке, $W(z)$, $p_{\perp}(z)$, $p_{\parallel}(z)$ и $\Psi(z)$ показаны в условных единицах ($p_{\perp}(z)$ и $p_{\parallel}(z)$ имеют один масштаб).

из ловушки. В случае редких столкновений $L \sim \lambda_{ii} \gg l$ конус потерь обеднен [7], что приводит к анизотропии давления и неоднородности параметров плазмы вдоль системы. Будем рассматривать следующую идеализованную модель: запертые и пролетные ионы имеют максвелловское распределение, но для пролетных перед экспонентой стоит коэффициент $\gamma < 1$.

$$f(\varepsilon, \mu) = \begin{cases} f_M(\varepsilon), & \text{для запертых частиц;} \\ \gamma \cdot f_M(\varepsilon), & \text{для пролетных частиц.} \end{cases}$$

Так как эта функция распределения постоянна вдоль траекторий ионов в фазовом пространстве, она удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению и, автоматически, условию равновесия (25).

Удобно обезразмерить частоту колебаний на среднюю баунс-частоту

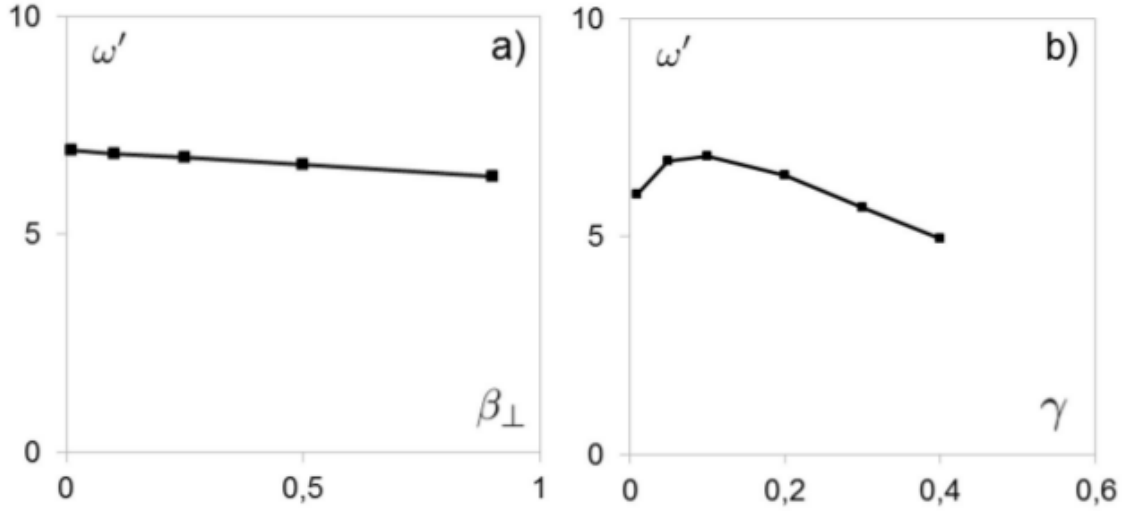


Рис. 10: Зависимость безразмерной частоты ω' колебаний плазмы в ячейке многопробочной ловушки от β_{\perp} (a) и γ (b) при пробочном отношении $R = 2$.

ионов следующим образом:

$$\omega' = \frac{\omega L}{\sqrt{p_{\parallel}/\rho}}$$

В этом случае в задаче можно выделить следующие безразмерные параметры: магнитное пробочное отношение R , отношение поперечного давления плазмы к давлению магнитного поля в центре ловушки β_{\perp} и коэффициент «обеднения» конуса потерь γ .

На рисунке 9 показаны результаты расчета функции Ψ для случая, когда $R = 2$, $\beta_{\perp} = 0, 1$ и $\gamma = 0, 1$. Видно, что дискретная мода сосредоточена в центре ячейки и её амплитуда сильно спадает вблизи пробок.

На рисунке 10 показана зависимость безразмерной частоты от параметров β_{\perp} и γ при $R = 2$. Видно, что частота колебаний слабо зависит от β_{\perp} , причем стоячая волна образуется даже при малом диамагнитизме. Это означает, что локализация колебаний связана с продольной неоднородностью параметров плазмы. Значение частоты также слабо зависит от величины параметра γ , однако при превышении некоторого значения, близкого

к 0,45, решение в виде стоячей волны с максимумом амплитуды в центре ловушки исчезает. Это связано с тем, что при увеличении γ уменьшаются продольные градиенты параметров плазмы (если $\gamma = 1$, то плазма максвелловская и $p_{\perp}, p_{\parallel}, \rho = const$).

2.5. Колебания в ловушке с плещущимися ионами

В этом разделе мы рассматриваем колебания на фоне равновесия, которое приближенно соответствует эксперименту на ГДЛ [11]. В этом эксперименте плазма состоит из двух компонент – теплая мишенная плазма и популяция быстрых плещущихся ионов. Теплая компонента столкновительна, и поэтому её функция распределения изотропна, т.е. для неё $p_{\parallel} = p_{\perp}$. Быстрые ионы имеют анизотропную функцию распределения, сосредоточенную в пространстве скоростей в центральной плоскости вблизи угла инжекции 45° . Поэтому они занимают ограниченную область пространства по z , не заходя за точку, в которой магнитное поле возрастает относительно своего значения в центре в 2 раза. Вообще говоря, их функция распределения уширяется за счет рассеяния на ионах мишенной плазмы и, возможно, в следствии коллективных процессов. Кроме того, так как они имеют большое давление ($\beta \sim 0,5$), их диамагнитизм заметно влияет на продольный профиль магнитного поля, и для отыскания профиля давления ионов следует решать сложную самосогласованную задачу.

Мы рассмотрим упрощенную модель продольного плазменного равновесия:

- будем использовать вакуумный профиль магнитного поля на оси установки ГДЛ, рассчитанный по токам в катушках;
- вблизи пробки давление плазмы изотропно и равно давлению теплой

компоненты $p_{\parallel} = p_{\perp} = p_{cold}$;

- модельный профиль вклада плещущихся ионов в поперечное давление плазмы пикирован вблизи точек остановки (пробочное отношение от центра 2) и быстро спадает при движении от этих точек в сторону пробок;
- суммарное продольное давление плазмы рассчитывается при помощи условия равновесия (25);
- профиль плотности считается однородным, так как в условиях эксперимента на ГДЛ изменение плотности вдоль системы пренебрежимо мало по сравнению с изменением давления плазмы.

В данной задаче, как и в предыдущем разделе, удобно обезразмерить частоту колебаний на среднюю баунс-частоту ионов следующим образом:

$$\omega' = \frac{\omega L}{\sqrt{p_{\perp}^{tp}/\rho}},$$

где p_{\perp}^{tp} – это максимальное значение поперечного давления плазмы вблизи точки остановки. Величина $M_i \cdot p_{\perp}^{tp}/\rho$ является мерой средней энергии горячих ионов, а $\frac{1}{L}\sqrt{p_{\perp}^{tp}/\rho}$ – их средней баунс-частоты.

В изложенной выше модели можно выделить следующие безразмерные параметры, от которых зависит решение задачи: отношение поперечного давления плазмы к давлению магнитного поля в точке остановки β_{\perp} и отношение давления теплой плазмы к давлению горячих ионов p_{cold}/p_{\perp}^{tp} .

На рисунке 11 показаны результаты расчета функции Ψ для случая $\beta_{\perp} = 0,5$ и $p_{cold}/p_{\perp}^{tp} = 0,1$. Эти значения соответствуют условиям эксперимента на ГДЛ. По профилям функций Ψ и W видно, что звук частично

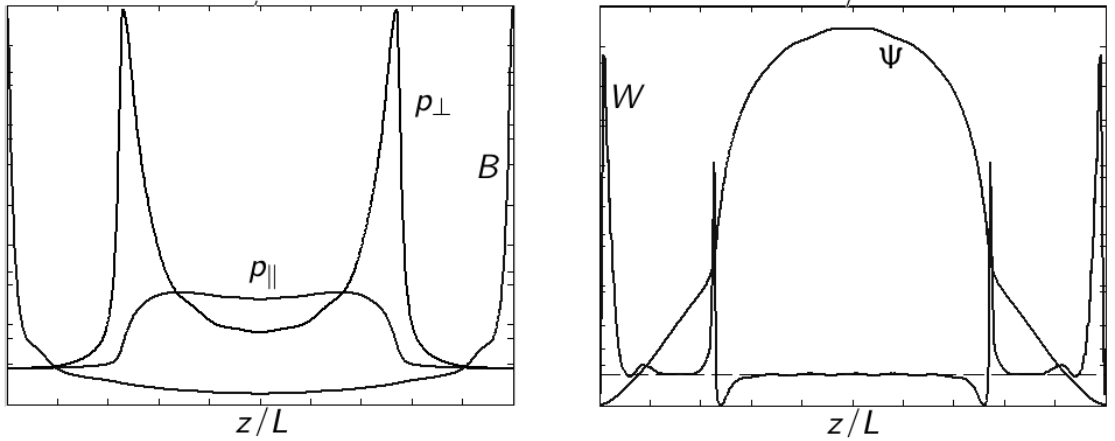


Рис. 11: Результат вычисления собственной функции Ψ для ловушки с плещущимися ионами при $\beta_{\perp} = 0,5$ и $p_{cold}/p_{\perp}^{tp} = 0,1$. а) профили магнитного поля B , поперечного давления $p_{\perp}(z)$ и продольного давления $p_{\parallel}(z)$, б) профили эффективного потенциала W и собственной функции Ψ . Координата Z нормированна на L , магнитное поле B нормировано на поле в пробке, $W(z)$, $p_{\perp}(z)$, $p_{\parallel}(z)$ и $\Psi(z)$ показаны в условных единицах ($p_{\perp}(z)$ и $p_{\parallel}(z)$ имеют один масштаб).

отражается от границы области занятой быстрыми ионами и от «крутой» пробки.

На рисунке 12 показана зависимость безразмерной частоты от параметров β_{\perp} и p_{cold}/p_{\perp}^{tp} . Видно, что частота колебаний слабо зависит от β_{\perp} , и, как и в случае многопробочной ловушки (предыдущий раздел), локализация не зависит от величины диамагнетизма. Значение частоты ω' увеличивается с ростом p_{cold}/p_{\perp}^{tp} , так как добавка продольного давления теплой плазмы увеличивает скорость звука. Однако при увеличении этого параметра уменьшаются градиенты параметров плазмы вблизи точек остановки горячих ионов и при значениях $p_{cold}/p_{\perp}^{tp} > 0,3$ исчезает решение волнового уравнения, соответствующее локализации колебаний в центре ловушки.

Недавно глобальные колебания плазмы на звуковой частоте были замечены в экспериментах на установке ГДЛ в ИЯФ СО РАН [11]. В этих экспе-

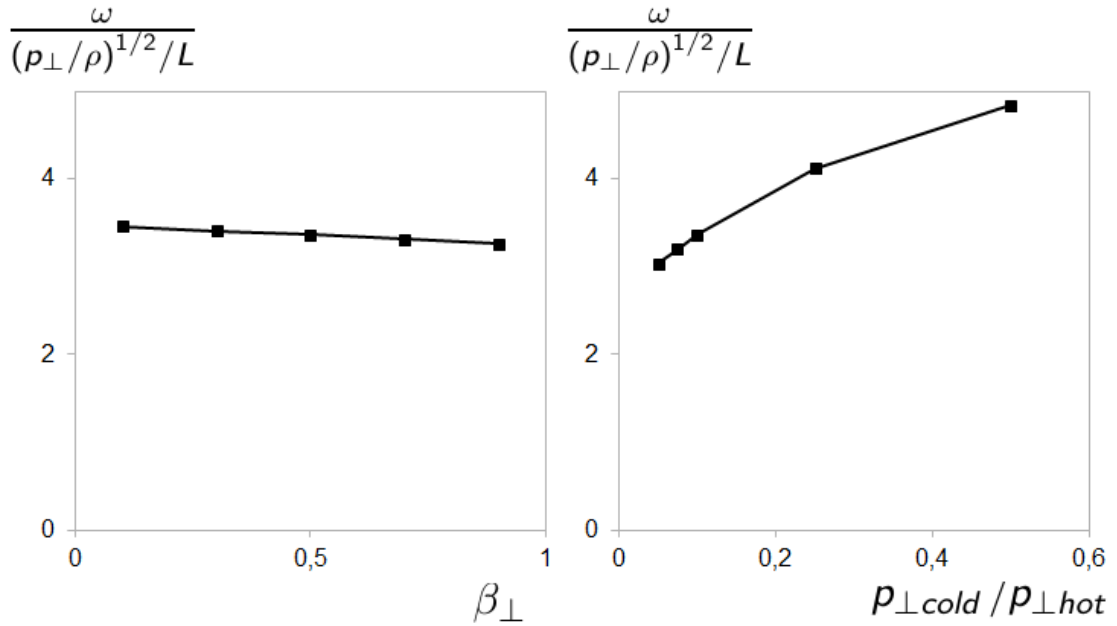


Рис. 12: Зависимость безразмерной частоты ω' колебаний плазмы в ловушке с плещущимися ионами от β_{\perp} (a) и p_{cold}/p_{\perp}^{tp} (b).

риментах была использована низкочастотная диагностика, которая основана на измерении радиального магнитного поля при помощи магнитных катушек. Эта диагностика включала в себя линейную и азимутальную сборки и отдельный датчик. Линейная сборка включает в себя 18 датчиков, расположенных вдоль оси установки вблизи одной из точек остановки горячих ионов с шагом 100 мм. Азимутальная сборка состоит из 16-ти датчиков, которые симметрично расположены вокруг плазмы. Отдельный датчик установлен вблизи противоположной точки остановки. Датчики регистрируют возмущения магнитного поля, которые возникают преимущественно за счет диамагнетизма горячих ионов.

При помощи анализа Фурье сигналов с азимутальной сборки была выделена мода аксиально симметричных колебаний с частотой порядка 90-100 кГц. Временная зависимость спектра и синхронная эволюция параметров

плазмы (диамагнитный сигнал и линейная плотность электронов) приведены на рисунке 13. Так как диагностика регистрирует колебания радиального магнитного поля вдали от центра плазмы, где сосредоточены горячие ионы, разумно предположить, что они синхронизованы по радиусу. Анализ фазового сдвига сигналов с датчиков на линейной сборке и отдельно стоящего датчика вблизи противоположной точки остановки показывает, что наблюдаются колебания давления плазмы с продольной модой $N=1$.

В эксперименте при помощи измерения радиального магнитного поля наблюдаются возмущения поперечного давления плазмы с $N=1$. В то же время, в изложенной выше теории исследовалась собственная мода величины $U(z)$ (перенормированная продольная скорость плазмы) с продольным волновым числом $N=0$. Следует отметить, что хотя в линейном приближении возмущения всех параметров плазмы однозначно связаны между собой, номер моды возмущения \tilde{p}_\perp и $U(z)$ оказывается разным, так как \tilde{p}_\perp пропорционально дивергенции скорости плазмы. Линеаризуя уравнения (18, 15, 22), можно получить следующее соотношение между \tilde{p}_\perp и $U(z)$:

$$\tilde{p}_\perp = \frac{-i}{\omega} \frac{c_\perp^2 c_A^2}{c_A^2 + 2c_\perp^2} \cdot B(z) \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \quad (28)$$

В соответствии с соотношением (28), если колебания соответствуют нулевой моде $U(z)$, т.е. эта функция является четной, то возмущение давления \tilde{p}_\perp будет, наоборот, нечетным, как и наблюдается в эксперименте. Плазма колеблется как целое вдоль оси ловушки, при этом плотность и давление возрастают то с одной, то с другой стороны от центральной плоскости. Таким образом, можно заключить, что колебания, наблюдаемые в эксперименте [11], соответствуют по своей структуре моде, которая исследована теоретически выше.

Как видно из рисунка 12, частота колебаний, согласно предсказаниям

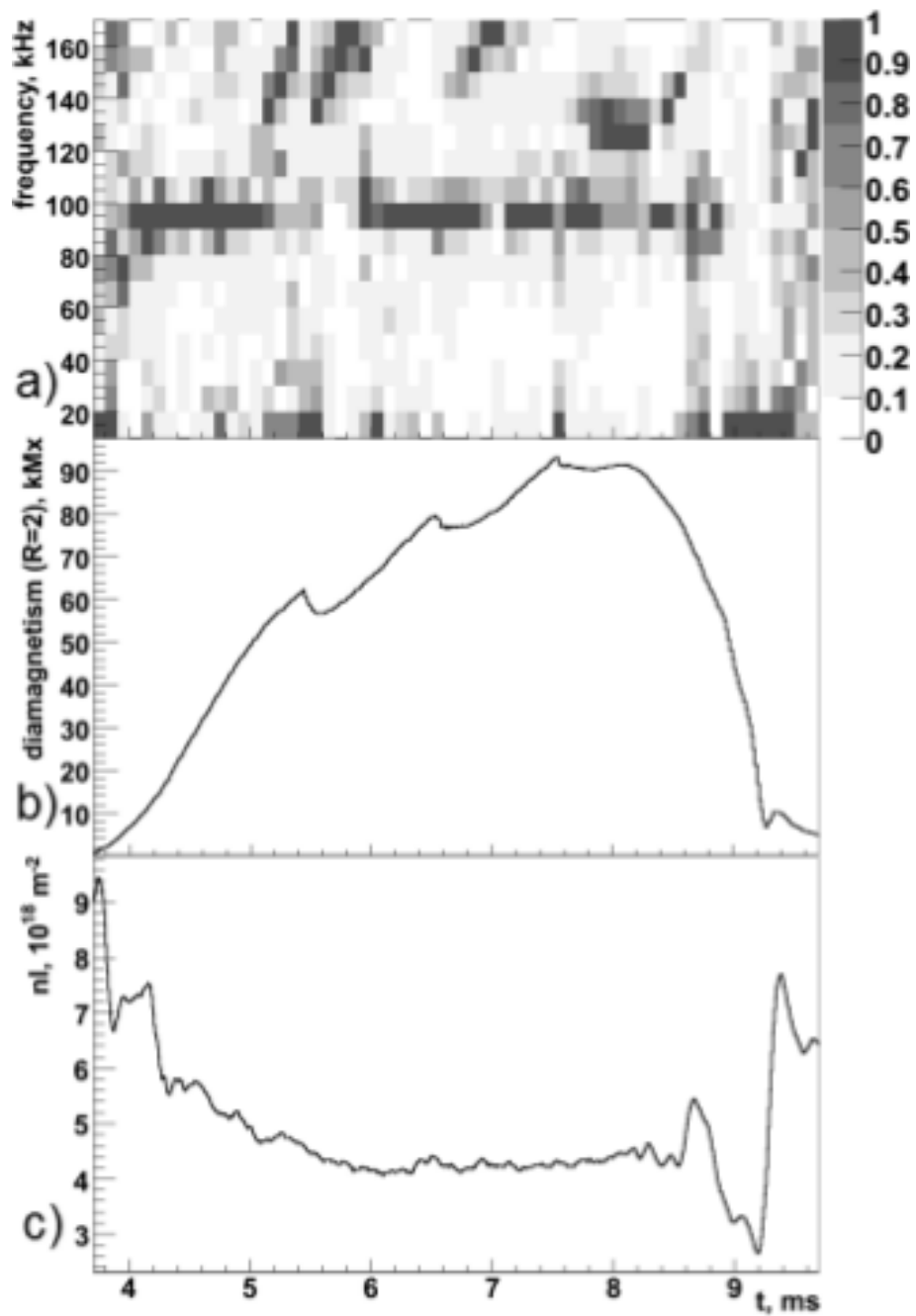


Рис. 13: Результаты наблюдений продольных колебаний плазмы на установке ГДЛ (рисунок из работы [11]). На рисунке в единой шкале времени показаны а) частотный спектр колебаний с модой $m=0$, б) диамагнитный сигнал в точке останова горячих ионов, в) линейная плотность электронов в центральной плоскости ловушки. Левый край рисунка соответствует началу инжекции атомарных пучков.

теории, определяется средней энергией плещущихся ионов и слабо зависит от других параметров плазмы. В условиях эксперимента быстрые ионы захватываются при энергии 22-25 КэВ. После этого они тормозятся за счет столкновений с электронами мишенной плазмы, слабо рассеиваясь по углу. Чем сильнее затормозились ионы, тем большую роль начинает играть рассеяние, и при энергии порядка 1 КэВ они попадают в конус потерь и теряются из ловушки. Значение минимальной энергии зависит от температуры электронов плазмы, однако оно слабо влияет на среднюю энергию популяции [46]. Поэтому наблюдаемая частота колебаний должна слабо меняться в течении разряда. Как видно из спектра на рисунке 13, частота наблюдаемых возмущений быстро устанавливается и остается в пределах 90-100 кГц до момента отключения инжекторов. В начальной и конечной стадии разряда, когда нестационарность функции распределения могла бы привести к сдвигу частоты, колебания не наблюдаются. По-видимому отсутствие сигнала можно объяснить тем, что в этих стадиях диамагнитизм плазмы не достаточен, чтобы зарегистрировать возмущение радиального магнитного поля при помощи имеющейся диагностики.

Для сравнения с экспериментом рассчитаем частоту колебаний для условий установки ГДЛ. Используя результаты расчетов безразмерной частоты (рисунок 12) и следующие параметры:

$$\begin{aligned}
 \beta_{\perp} &\approx 0,5 \\
 p_{cold}/p_{\perp}^{tp} &\approx 0,1 \\
 B^* &\approx 7\text{кГс} \\
 n &\approx 1,5 \cdot 10^{13}\text{см}^{-3},
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

получаем частоту $f \approx 110\text{кГц}$, что удовлетворительно согласуется с результатами эксперимента.

2.6. Влияние граничных условий

В разделе 2.3. было отмечено, что в случае, когда плазма за пробками прозрачна для звуковых волн, стоячая волна затухает за счет выноса энергии из резонатора, образованного ловушкой. В разделах 2.4., 2.5. колебания исследовались при помощи отражающих граничных условий в пробках. Для уравнения (26) можно поставить два типа граничных условий, которые гарантируют существование вещественного уровня – это отражающие барьеры и периодические граничные условия. Первый случай соответствует ловушке, за пробкой которой нет плазмы. Второй тип соответствует бесконечной цепочке из одинаковых ловушек. Так как в рассмотренных нами случаях барьер W внутри ловушки является конечным, волна может частично проникать за пробку, и уровень на самом деле не является изолированным идеально. Это значит, что истинная частота волны является комплексной. Полученное решение позволяет оценить реальную часть частоты для вытекающей волны. Оно имеет смысл, если добротность резонатора достаточно высока.

Для того чтобы оценить добротность резонатора можно сравнить результаты вычислений с отражающими и периодическими условиями на границах. Если соседние ямы слабо связаны, то уровень изолированной ямы расщепляется при рассмотрении бесконечной цепочки. Величина расщепления пропорциональна коэффициенту туннелирования. Поэтому оценить «качество» локализации волны можно сравнивая частоту колебаний, рассчитанную при помощи первого типа граничных условий, и при помощи второго. Чем меньше их разница, тем лучше добротность резонатора, так как большая часть энергии отражается внутри ловушки, а не за счет модельного условия на краю.

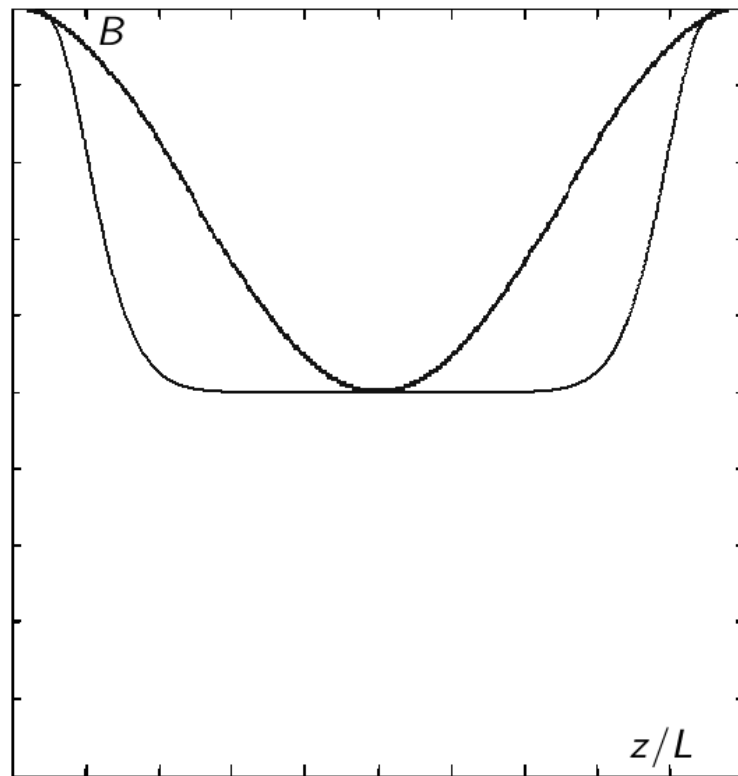


Рис. 14: Модельные профили магнитного поля для расчетов влияния граничных условий в пробках на локализацию звуковой волны в пробочной ловушке с обедненным конусом потерь.

Для рассматриваемого в разделе 2.5. случая ловушки с плещущимися ионами (моделирующего условия эксперимента на установке ГДЛ) отличие частот составляет 3%, что означает, что добротность достаточно высока. Отражение волны обеспечивается за счет резкого градиента равновесных параметров плазмы вблизи точки остановки горячих ионов и в крутой пробке. В ситуации, которая изучается в разделе 2.4., изоляция уровня сильно зависит от коэффициента γ , который задает количество частиц в конусе потерь и, таким образом, управляет анизотропией плазмы и продольными градиентами её параметров. Увеличение коэффициента γ приводит к росту градиентов и улучшению локализации звука. В разделе 2.4. вычисления выполнены с использованием плавного синусоидального профиля продольного

изменения магнитного поля (см. рисунок 14, кривая а). Локальные значения градиентов параметров плазмы можно увеличить при том же пробочном отношении и коэффициенте γ , рассматривая профиль магнитного поля с более крутыми пробками (см. рисунок 14, кривая b).

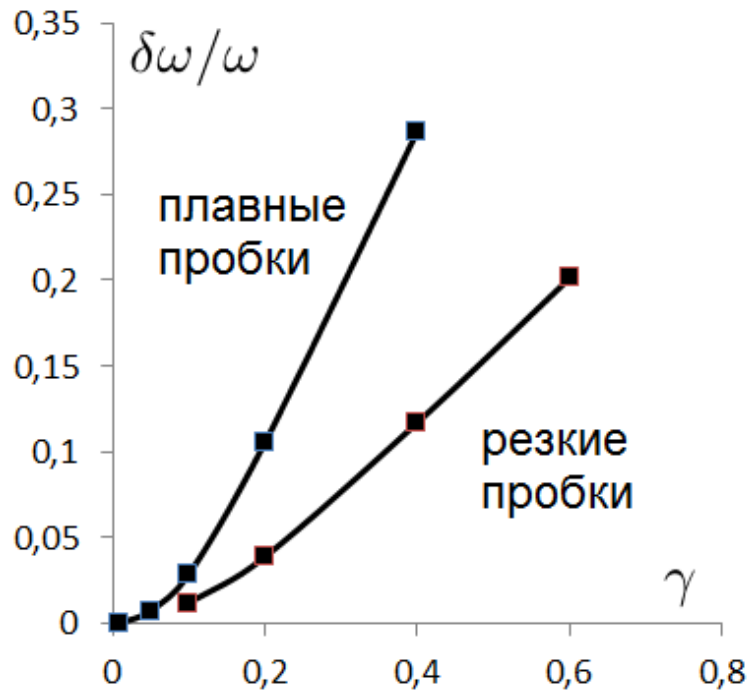


Рис. 15: Зависимость относительной отстройки частоты колебаний для расчета с отражающими и периодическими граничными условиями в задаче о стоячей звуковой волне в пробочной ловушке с обедненным конусом потерь. Расчет выполнен для двух модельных профилей магнитного поля.

На рисунке 15 показаны результат расчета расщепления уровня в цепи пробкотронов с обедненным конусом потерь в зависимости от коэффициента γ для двух профилей магнитного поля, показанных на рисунке 14. В случае плавного изменения магнитного поля в пробках высокая степень локализации колебаний, при которой $\delta\omega/\omega$ оказывается порядка нескольких процентов, достигается при $\gamma \approx 0,1$. При $\gamma > 0,4$ решение, сосредоточенное в центре ловушки, исчезает. В случае резкого изменения магнитного поля

в пробках, соответствующего профилю, показанному на рисунке 14-b значение $\delta\omega/\omega$ оказывается меньшим в 2-3 раза при любом γ , при этом уровень существует до $\gamma \approx 0,6$.

Даже небольшое вытекание энергии из резонатора приводит, вообще говоря, к затуханию колебаний. Однако, как указывалось ранее, в условиях экспериментов на открытых ловушках ГОЛ-3 и ГДЛ, по-видимому, есть и источники раскачки колебаний, которые могут компенсировать или перекрыть затухание.

В заключение этой главы следует ещё раз подчеркнуть, что рассмотренная МГД-модель не отвечает на вопросы о кинетических эффектах: о возможности синхронизации движения ионов и о затухании Ландау. Поэтому однозначная идентификация наблюдаемых в ГДЛ колебаний с результатами теории станет возможна только после дополнительных исследований.

Глава 3

Переход от кинетического к газодинамическому режиму продольных потерь из пробочной ловушки

Эксперименты на установке ГДЛ [2] по подавлению продольных потерь амбиполярной пробкой показали необычно высокую для газодинамического режима истечения эффективность электростатического запираия ионов. Поток ионов из ловушки уменьшался в несколько раз при высоте барьера $e\Delta\varphi \sim T_e$. Этот эксперимент может служить косвенным свидетельством отличия режима потерь плазмы в ГДЛ от газодинамического. Поэтому требуется исследовать продольное удержание ионов в пробочной ловушке в режиме $L \sim \lambda$. В первом разделе главы описана использованная модель и исходные уравнения. Второй посвящён алгоритму численной модели и сравнению результатов моделирования с известными решениями в предельных случаях. В третьем разделе приведены результаты моделирования потерь в переходном режиме от кинетического к газодинамическому истечению и построена аналитическая теория, учитывающая самосогласованный амбиполярный потенциал. Четвертый раздел посвящён моделированию подавления продольных потерь амбиполярной пробкой.

3.1. Модель и исходные уравнения

Будем считать, что магнитное поле достаточно велико, чтобы движение частиц можно было описывать в дрейфовом приближении. Также предположим аксиальную симметрию плазмы, которая позволяет не учитывать ази-

мутальные дрейфы. Тогда в стационарном случае функция распределения ионов подчиняется одномерному кинетическому уравнению:

$$V_{\parallel} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{\varepsilon, \mu} = St(f) + Q, \quad (30)$$

где s – координата вдоль силовой линии магнитного поля, ε – кинетическая энергия, $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ – магнитный момент частицы, а $St(f)$ – интеграл столкновений с коэффициентами в форме Розенблюта-Трубникова [37, 38], Q – источник.

Для упрощения задачи предположим, что пробочное отношение велико. В этом случае в интеграле столкновений можно пренебречь диффузией по продольной скорости и ограничиться рассмотрением диффузии по μ :

$$St_{\mu}(f) = -\frac{\partial}{\partial \mu} J_{\mu}, \quad J_{\mu} = \left(\frac{1}{2} \mu \frac{\partial^2 g}{\partial v_{\perp}^2} \left(\frac{1}{B(s)} \frac{\partial f}{\partial \mu} + f \right) \right), \quad (31)$$

где g – потенциал Розенблюта, а магнитный момент нормирован на температуру ионов. Упрощенный интеграл столкновений (31) сохраняет форму дивергенции потока частиц в пространстве скоростей. Первый член в выражении для потока частиц $\sim \frac{\partial f}{\partial \mu}$ содержит в себе большой параметр R (пробочное отношение) и отвечает за диффузию частиц по μ . В случае конечных R интеграл столкновений, в котором сохранен только этот член, приводит в тому, что равновесное решение кинетического уравнения при $L \gg \lambda$ не зависит от μ . Однако в этом пределе функция распределения должна стремиться к максвелловской, поэтому к потоку частиц добавлен член, пропорциональный f , который не содержит большого параметра, и пренебрежимо мал всегда, когда функция распределения далека от равновесной, и его присутствие могло бы ухудшить точность вычислений. Кроме того, используем приближение коротких пробок $\lambda \gg L_m$ [31]. В этом случае ионы не успевают столкнуться за время пролета через пробку. Следовательно, в районе

пробки можно использовать бесстолкновительное кинетическое уравнение.

Так как подавляющая часть электронов заперта в ловушке амбиполярным потенциалом, они термализуются и имеют больцмановскую функцию распределения. Тогда при помощи условия квазинейтральности можно выразить амбиполярный потенциал через плотность плазмы стандартным образом:

$$\phi = T_e \cdot \ln(n/n_0) \quad (32)$$

Цель данной работы заключается в исследовании особенностей заполнения конуса потерь в случае не слишком редких столкновений, то есть, когда $R \cdot L/\lambda \lesssim 1$. Постараемся выделить эффекты, не связанные с конкретными особенностями газонапуска и подпитки плазмы. Поэтому будем рассматривать случай, в котором подпитка плазмы, поддерживающая стационарное состояние, производится в области запертых частиц. В качестве «подпитки» имеется в виду не инжекция быстрых атомарных пучков, а источник тепловых ионов, поскольку источник частиц от инжекции в реальных экспериментах много меньше продольных потерь и не может обеспечить стационарность. Например, в установке ГДЛ источник дополнительных тепловых ионов существует в виде системы газонапуска, хотя газонапуск, конечно, создаёт источник не только в запертых частицах.

Заполнение конуса потерь происходит в результате диффузии ионов в фазовом пространстве под действием столкновений (при большом пробочном отношении - преимущественно по поперечной скорости). Диффузия (интегралы Розенблюта) зависит не от конкретного вида источников частиц, а только от вида функции распределения во всём фазовом пространстве. Так как мы рассматриваем случай большого пробочного отношения, будем вычислять их приближённо, предполагая, что функция распределения в обла-

сти запертых частиц близка к максвелловской, а конус потерь – узкий. В случае большого пробочного отношения, время жизни иона в ловушке существенно превышает время между столкновениями (в газодинамическом пределе $\tau_i \approx \tau_{ii} \cdot R \gg \tau_{ii}$, а в кинетическом $\tau_i \approx \tau_{ii} \cdot \ln R \gg \tau_{ii}$). Поэтому будем предполагать, что вдали от конуса потерь ионы успевают максвеллизироваться. Таким образом, будем решать кинетическое уравнение только вблизи конуса потерь, подшивая максвелловское распределение при больших μ .

Максвелловская функция распределения зануляет интеграл столкновений и «левую часть» кинетического уравнения $V_{\parallel} \cdot \frac{\partial f}{\partial s}$. Значит, если за пределами расчетной области функция распределения равна максвелловской, то фазовая плотность источника там также равна нулю. Поэтому использованное нами граничное условие на значение функции распределения формально означает, что источник частиц сосредоточен на границе расчетной области при $\mu = \mu_{bound}$. При этом само значение функции источника не задается, оно пропорционально разрыву производной от функции распределения. То есть эффективный источник подстраивается под решение так, чтобы обеспечить заданные параметры плазмы.

На рисунке 16 показана зависимость потока частиц в пробку от размера расчетной области. Видно, что при изменении μ_{bound} в 2,5 раза значение потока изменяется на 20%. Приведенный график, конечно, не означает, что при дальнейшем увеличении μ_{bound} ответ перестает зависеть от положения границы, потому что перенос границы означает, что источник ионов отодвигается еще дальше от конуса потерь. Слабая зависимость результата расчетов от положения границы сетки подтверждает корректность сделанных предположений.

Для решения кинетического ионного уравнения в описанных выше

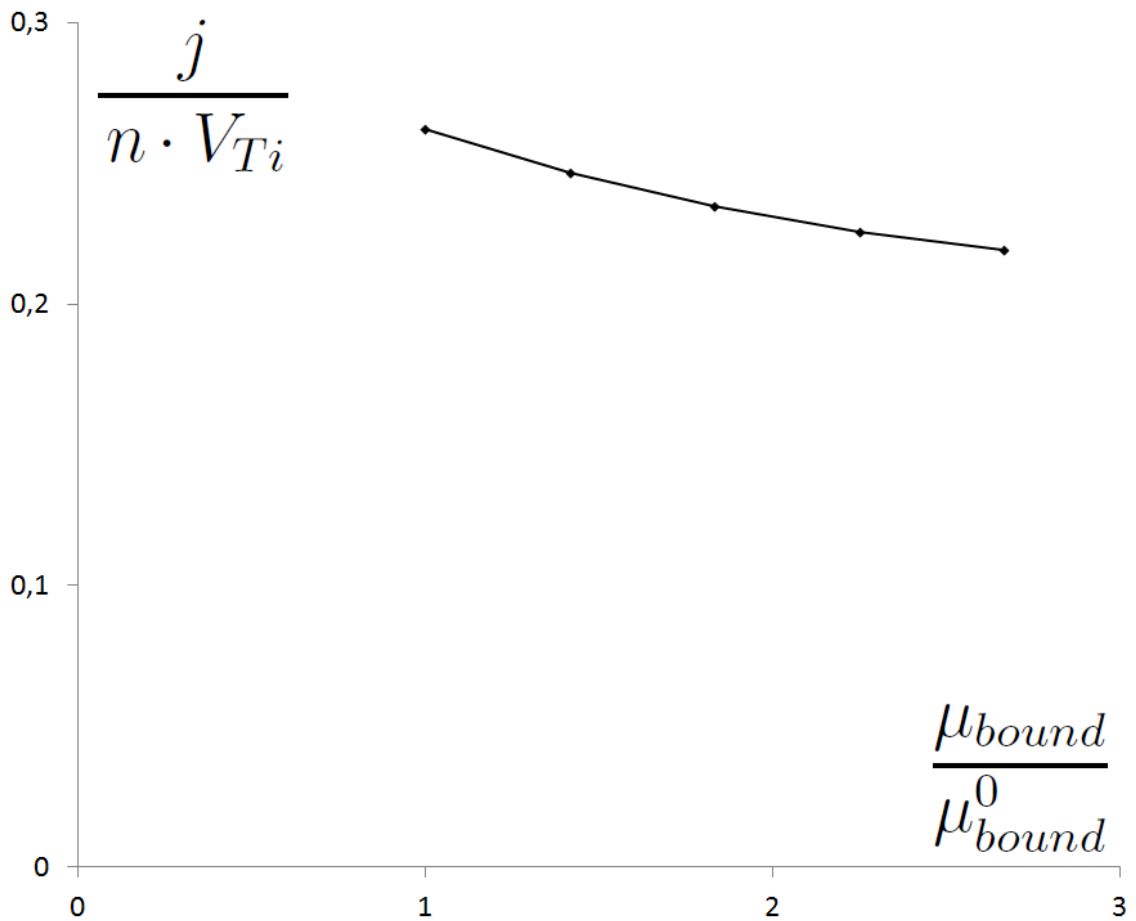


Рис. 16: Зависимость потока частиц в пробку, нормированного на произведение тепловой скорости и плотности в центре ловушки, от размера расчетной области μ_{bound} ($R = 100$, $L/\lambda = 1/100$, $T_e = T_i$).

предположениях был разработан численный код, который применялся для компьютерного моделирования продольного истечения плазмы из пробочной ловушки (результаты моделирования приводятся в следующих разделах). Алгоритм вычислений подробно описан в приложении Б.

3.2. Сравнение результатов моделирования с известными решениями

В газодинамическом режиме ($R \cdot L/\lambda \gg 1$) функция распределения в центре ловушки близка к максвелловской. В этом пределе рассчитываемый поток ионов, вытекающих из ловушки, должен согласовываться с результатами полуаналитической модели [32]. В этой модели рассматривается бесстолкновительное течение ионов через пробку в эффективном потенциале $\psi = e\phi + \mu B$. Зафиксировав функцию распределения на границе пробочной области, авторы получили выражение для профиля плотности ионов в пробке $n(z)$, которое является функционалом от амбиполярного потенциала ϕ . Используя это выражение и условие квазинейтральности плазмы, они получили интегральное уравнение на самосогласованный амбиполярный потенциал, которое решалось методом последовательных приближений. На границе центральной части и бесстолкновительной пробки функция распределения ионов задавалась равной максвелловской с вырезанной областью, соответствующей траекториям, начинающимся снаружи ловушки.

В отличие от модели [32], численный кинетический код учитывает эффект заполнения этой области на длине свободного пробега, из-за которого между границей бесстолкновительной области и центром ловушки, где функция распределения близка к максвелловской во всем пространстве скоростей, появляется перепад амбиполярного потенциала и плотности плазмы порядка $10\% \cdot n_0$. Поэтому для верификации результатов численного моделирования относительно модели Мирнова-Ткаченко в формулы, представленные в работе [32], подставлялось значение плотности не в центре ловушки, а на границе бесстолкновительной области.

На рисунке 17 показана зависимость потока ионов через пробку от отно-

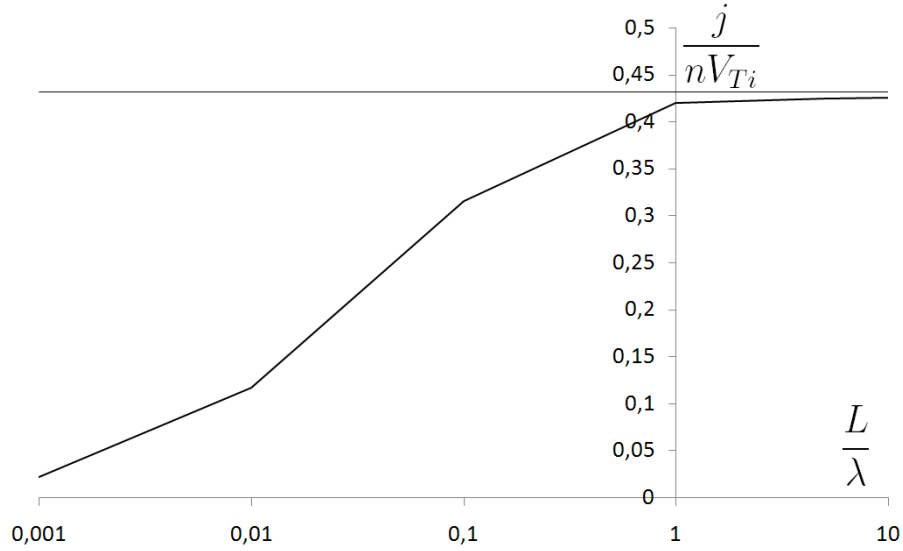


Рис. 17: Зависимость безразмерного потока ионов через пробку (здесь и далее $V_{Ti} = \sqrt{\frac{2T_i}{M_i}}$) от отношения длины ловушки к длине свободного пробега ($T_e/T_i = 1$, $R = 30$). Горизонтальной линией показан поток, предсказываемый моделью Мирнова-Ткаченко [32].

шения длины ловушки к длине свободного пробега. В случае частых столкновений результаты хорошо согласуются с полуаналитической моделью [32]. На рисунке 18 показана зависимость потока ионов через пробку от отношения электронной температуры к ионной. В диапазоне $0 < T_e/T_i < 2$ зависимость потока от температуры близка к линейной, и отличие в предсказаниях моделей не превышает 3%.

В случае редких столкновений продольные потери определяются диффузионным уходом частиц через границу области удержания в фазовом пространстве. При этом профиль функции распределения и темп потери частиц определяются функцией источника частиц. Без учета влияния амбиполярного потенциала ($T_i \gg T_e$) функция распределения ионов для двух конкретных видов источников (перпендикулярная инжекция и изотропный источник) была вычислена Г.И. Будкером [26]. При изменении функции источни-

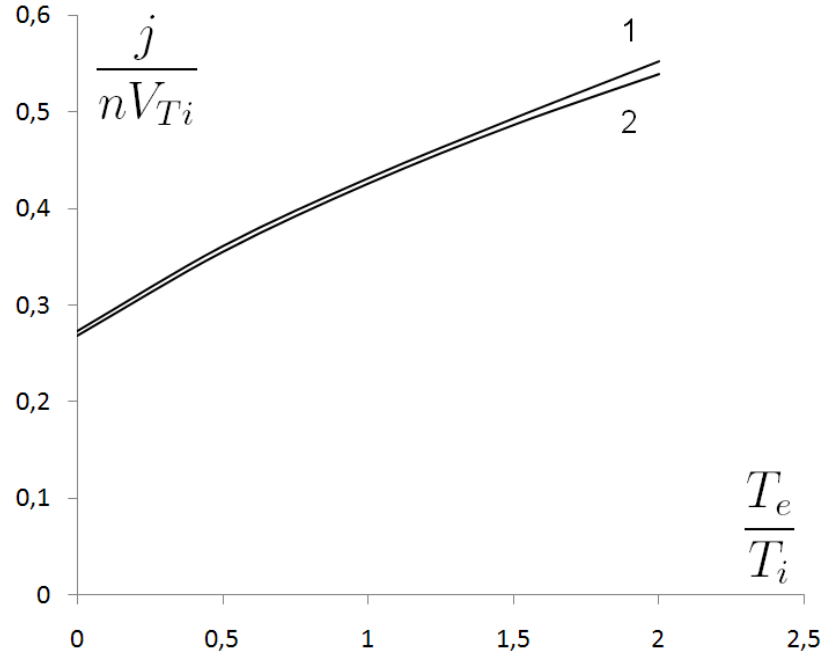


Рис. 18: Зависимость безразмерного потока ионов через пробку от отношения температуры электронов к температуре ионов. 1 — результаты модели Мирнова-Ткаченко [32]. 2 — результаты численного моделирования ($L/\lambda = 10$, $R = 30$).

ков время жизни иона в ловушке [47] сильно изменяется, однако характер зависимости от пробочного отношения и времени ион-ионных столкновений сохраняется:

$$\tau \sim \tau_{ii} \cdot \ln(R) \quad (33)$$

На рисунке 19-а показаны результаты моделирования зависимости времени жизни иона в ловушке от пробочного отношения в случае редких столкновений без амбиполярного потенциала ($T_e = 0$). Логарифмическая зависимость согласуется с формулой Будкера (33). На рисунке 19-б показана зависимость времени жизни иона в ловушке от времени ион-ионных столкновений. В случае частых столкновений τ не зависит от τ_{ii} , а в случае редких столкновений выходит на линейную асимптотику, согласующуюся с формулой Будкера (33).

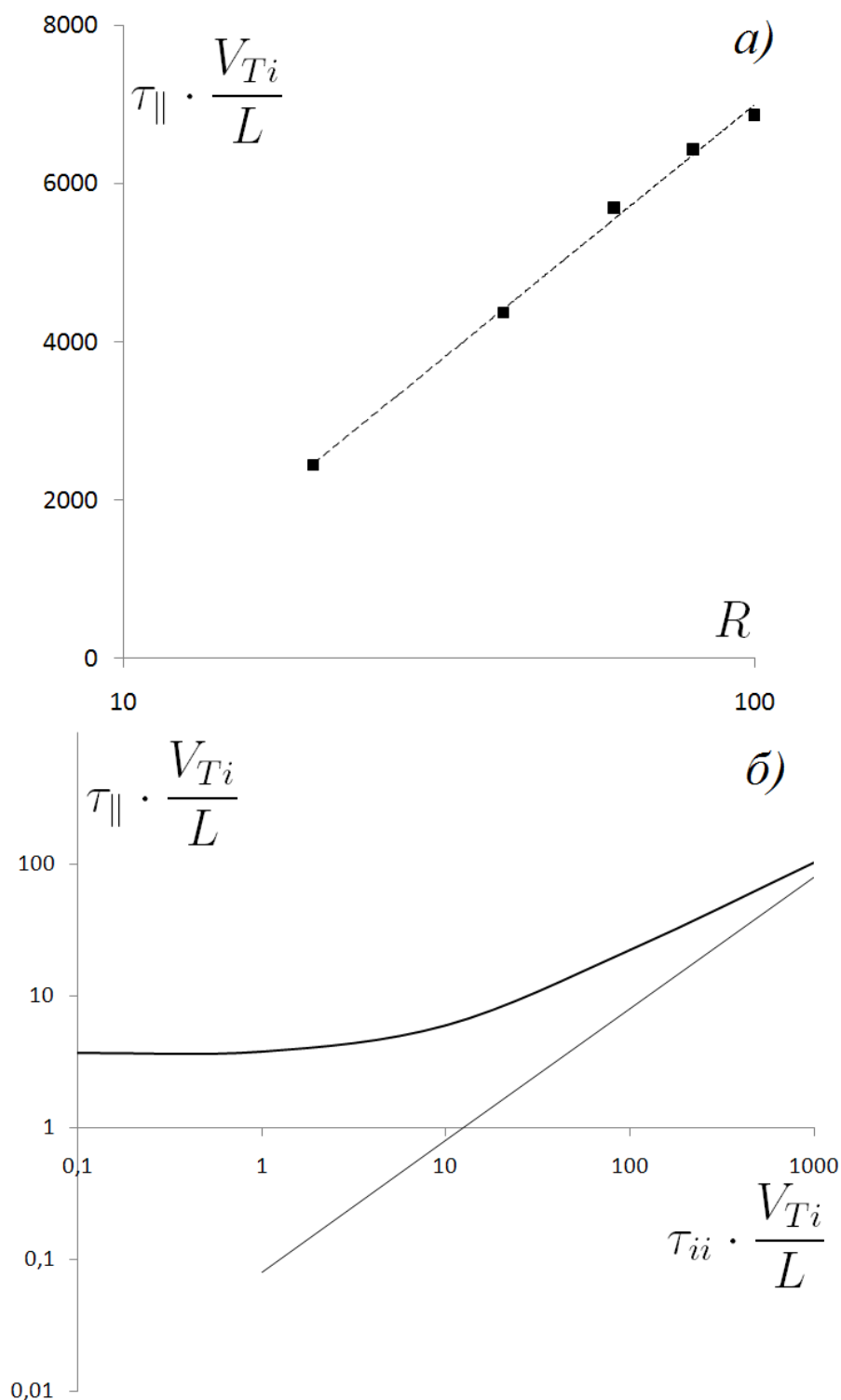


Рис. 19: а) зависимость времени жизни иона в ловушке от пробочного отношения в полулогарифмическом масштабе ($L/\lambda = 10^{-3}$, $T_e = 0$). Пунктиром показана аппроксимация логарифмической зависимостью.

б) Зависимость времени жизни иона в ловушке от времени ион-ионных столкновений в логарифмическом масштабе ($T_e/T_i = 0$, $R = 30$). Прямой линией показана линейная зависимость.

3.3. Продольные потери в переходном режиме

3.3.1. Результаты моделирования и качественные рассуждения

При рассмотрении режима редких столкновений ($\lambda \gg L$) обычно считают, что конус потерь пуст. Так как ионы попадают в запретный конус из области удержания за счет столкновений с темпом, пропорциональным ν_{ii} , и после этого быстро покидают ловушку за одно время пролета L/V_{Ti} , в этом режиме значение функции распределения в пределах конуса потерь мало по сравнению со значением в области запертых частиц. Поэтому обычно кинетическое уравнение решается только для запертых частиц, а на границе конуса потерь устанавливается нулевое граничное условие, соответствующее моментальной потере частиц, продиффундировавших в пространстве скоростей до этой области. Тем не менее, всегда существует часть конуса потерь, которая заполнена частицами, так как существуют траектории, соответствующие частицам с очень маленькой продольной скоростью. Как бы ни было велико время между столкновениями, всегда найдется такое V_{\parallel} , чтобы выполнялось условие $\tau_{ii} < L/V_{\parallel}$. На рисунке 20 показан конус потерь в простой пробочной ловушке и затемнением выделена часть, заполненная ионами. Если частота столкновений мала, то мала и область заполненная частицами, а, следовательно, и её влияние на темп потерь. Поэтому этот эффект обычно не учитывается при исследовании кинетического режима потерь.

Следует отметить, что ионы, попавшие в эту область, будут рассеиваться, ускоряясь по продольной энергии. Этот эффект приводит к уменьшению значения функции распределения, но его можно сделать сколь угодно малым, увеличивая пробочное отношение. При большом R затемненный треугольник на рисунке 20 становится сильно вытянутым горизонтально, т.е. частицам нужно рассеяться на меньшую энергию, чтобы попасть в этот тре-

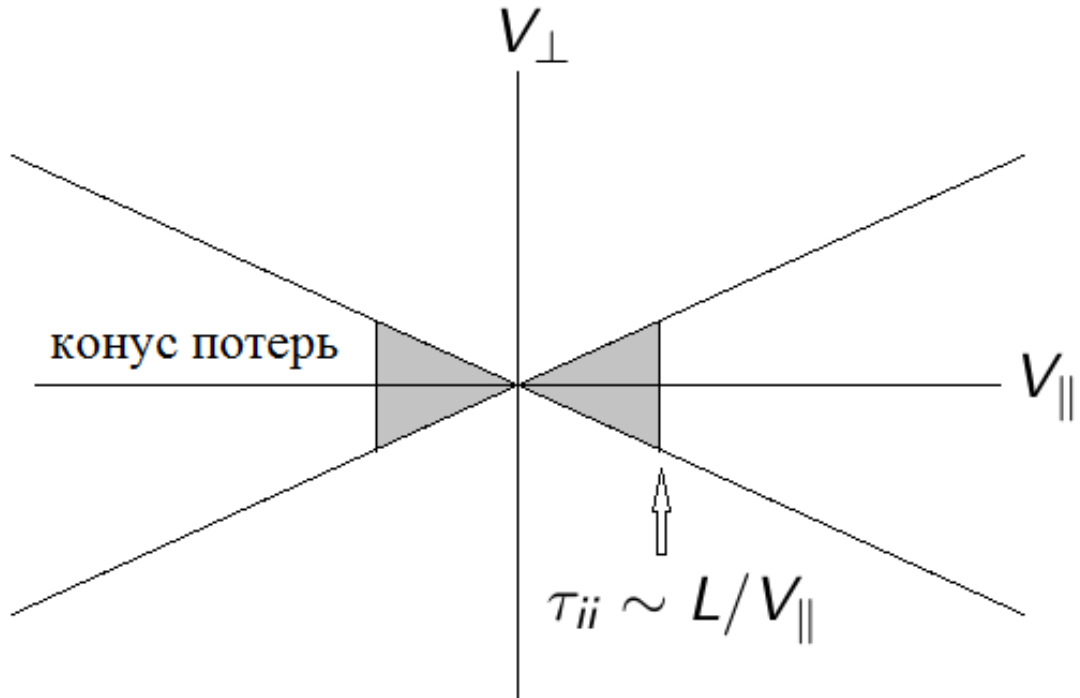


Рис. 20: Конус потерь в простой пробочной ловушке. Затемнена область, в которой не применимо приближение пустого конуса потерь.

угольник из запертой области, чем для того, чтобы попасть из треугольника в незатемненную область конуса потерь. В этом случае можно не учитывать рассеяние по продольной скорости, исследуя функцию распределения этих ионов, и считать что ионы попадают в эту область за счет диффузии по поперечной скорости (что в приближении большого R эквивалентно диффузии по питч-углу) и покидают её за счет вылета из ловушки.

При увеличении частоты столкновений размер заполненной частицами доли конуса потерь увеличивается, и в пределе $\lambda \ll L$ функция распределения во всем пространстве скоростей приближается к максвелловской, а потери переходят в газодинамический режим. Между газодинамическим и кинетическим режимами область потерь частично заполнена. Для вычисления потерь в этом режиме требуется точное вычисление функции распре-

деления в запретном конусе. Так как конус потерь начинает заполняться, начиная с малых продольных энергий, на этот процесс сильно влияют продольные электрические поля, которые могут тормозить и ускорять ионы.

Обычно в плазме устанавливается положительный электрический потенциал, который вытягивает ионы из ловушки и тормозит электроны, таким образом выравнивая амбиполярность потерь. Наличие амбиполярного потенциала, вытягивающего ионы из ловушки, приводит к тому, что частицы с низкой поперечной энергией (граничная энергия $\sim T_e/(R - 1)$) не удерживаются в ловушке. Для таких частиц эффективный Юшмановский потенциал имеет не яму, а горб в центре ловушки. При этом на фазовой плоскости (см. рисунок 21) для таких частиц существует четыре области: частицы, которые могут пролететь через всю ловушку, перевалив горб (области AOB и COD), и частицы, которые не могут перевалить через горб потенциала и попасть из левой части ловушки в правую и наоборот (области AOD и BOC). Эти области разделены сепаратрисой, на которой существует x -точка.

Если потенциал гладкий, время движения частиц по сепаратрисе равно бесконечности. Поэтому именно окрестность сепаратрисы первой заполняется частицами при увеличении частоты столкновений. Сепаратриса и ближайшие к ней траектории даже при небольшой частоте столкновений эффективно заполняются частицами. Частицы, продиффундировавшие в область потерь вблизи x -точки ускоряются потенциалом, двигаясь вдоль сепаратрисы к торцам ловушки. Таким образом, формируется струя холодных ионов, которая определяет продольные потери ионов в этом режиме. Ширина струи определяется равенством характерного времени диффузии частиц в конус потерь и времени пролета частицы по траектории:

$$\tau_{diff} \approx \tau_{trans} \quad (34)$$

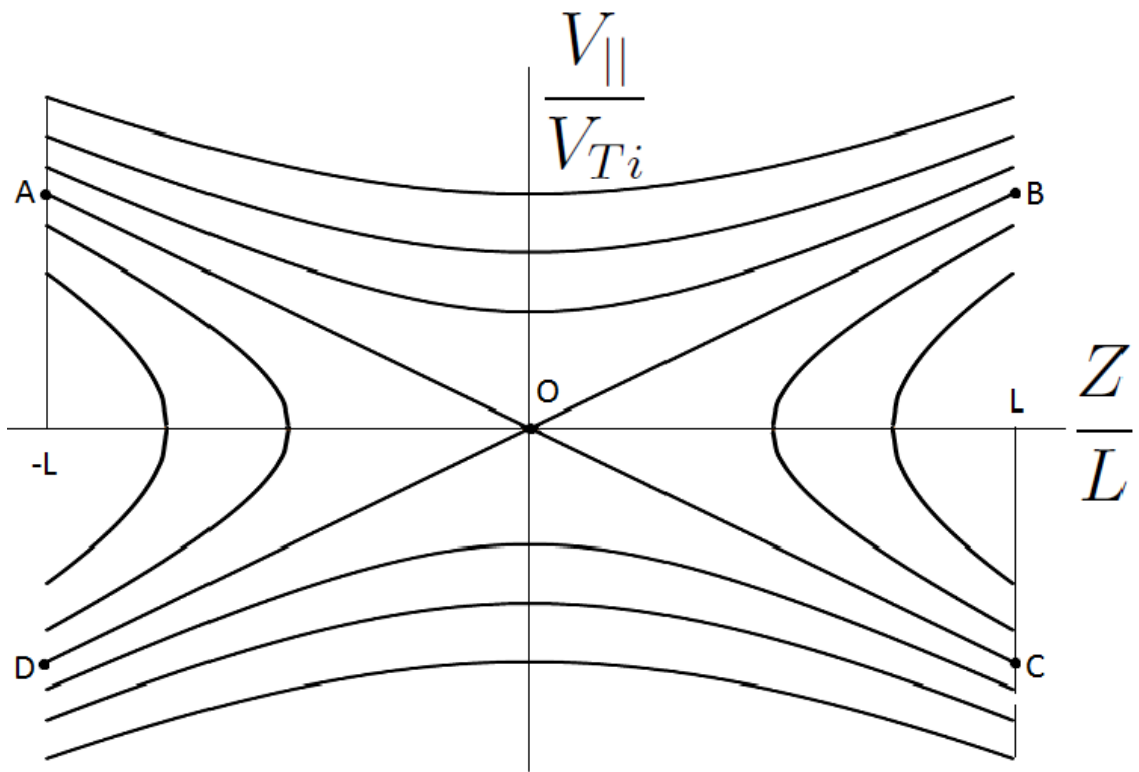


Рис. 21: Фазовая плоскость пролетных частиц.

На рисунке 22-а показана рассчитанная функция распределения ионов в центральном сечении ловушки. Пунктирными линиями обозначена граница расчетной сетки, за пределами которой функция распределения считается максвелловской, сплошными – граница области удержания ионов. Видно, что хотя область удержания при энергиях порядка T_i практически пуста, при низких энергиях за счет диффузии по поперечной скорости конус потерь заполнен. На рисунке 22-б показана рассчитанная функция распределения ионов на некотором удалении от центра ловушки. Видно, что заполнившие конус потерь холодные ионы ускоряются амбиполярным потенциалом и вылетают из ловушки, формируя струю. На рисунке 23 показана функция распределения на плоскости V_{\parallel} - Z . Видно, что в области x -точки образуется струя частиц, вылетающая вдоль сепаратрисы.

При уменьшении частоты столкновений (при фиксированном значении

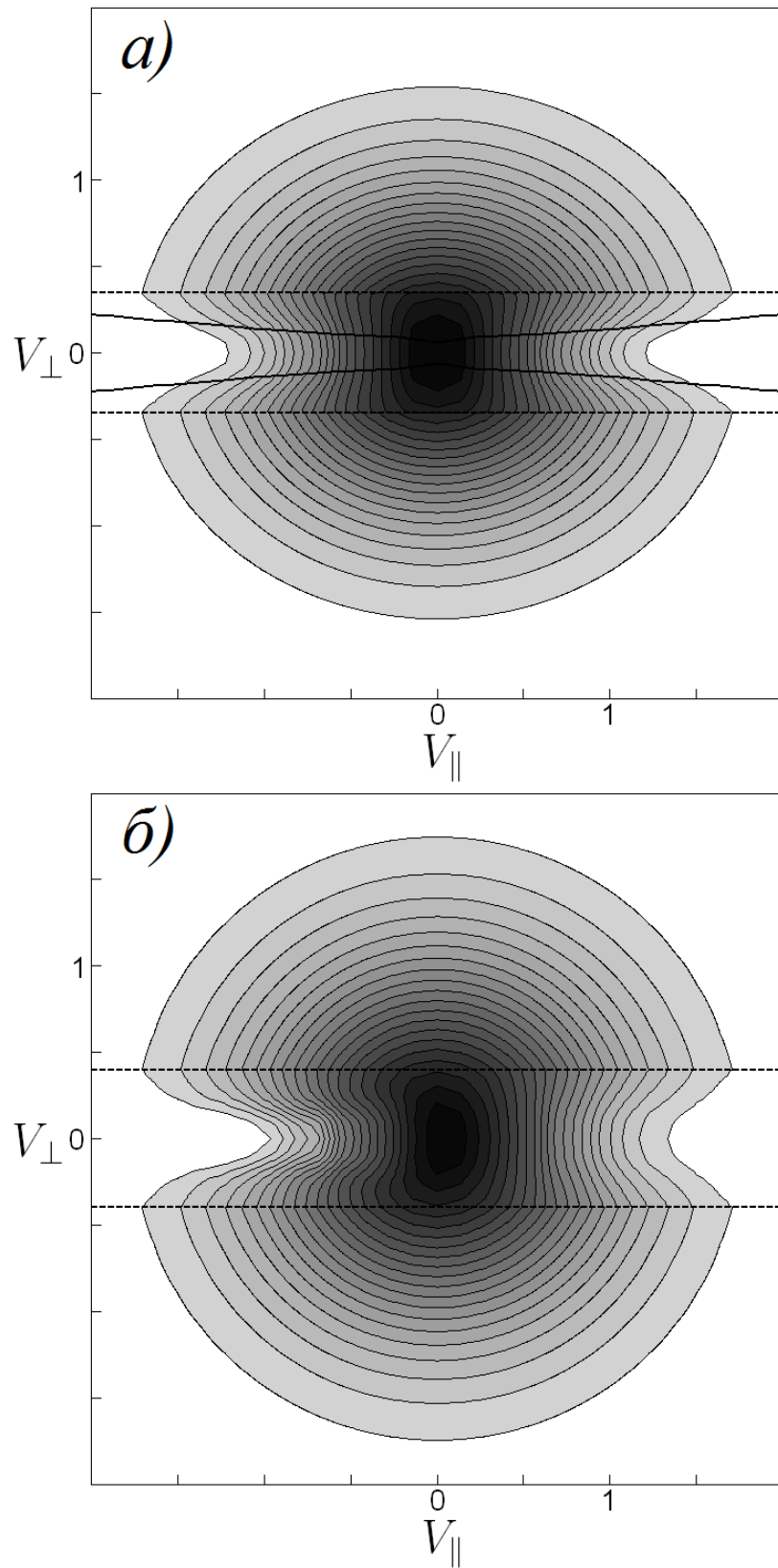


Рис. 22: Функция распределения ионов в переменных V_{\parallel} , V_{\perp} а) в центре ловушки б) на расстоянии $L/4$ от центра ловушки ($R = 100$, $L/\lambda = 1/60$, $T_e = T_i$). Скорость нормирована на тепловую. Затенение пропорционально значению функции распределения.

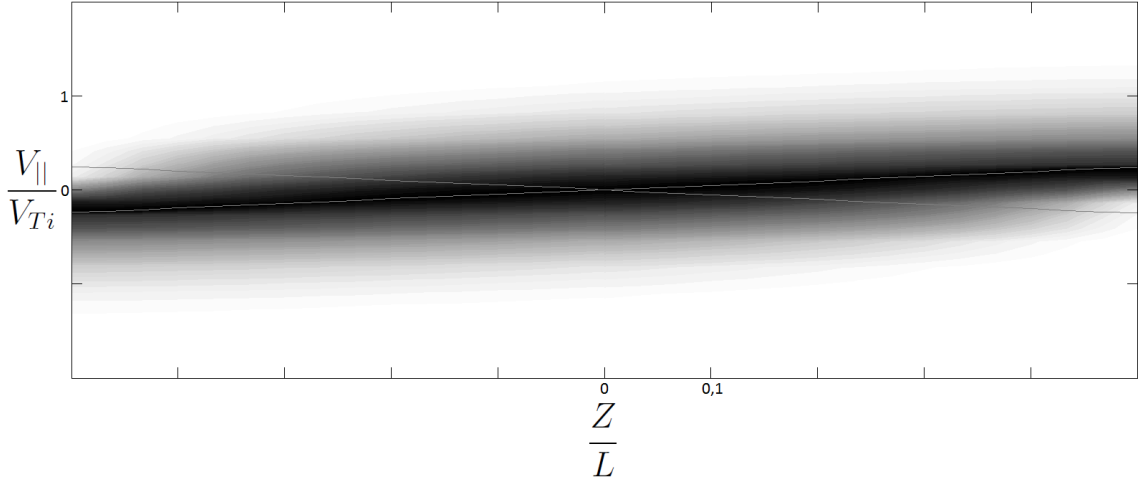


Рис. 23: Функция распределения на фазовой плоскости V_{\parallel} - Z в центральной части ловушки ($R=20$, $L/\lambda = 0,05$, $T_e = T_i$). Серой линией показана сепаратриса, проходящая через x -точку в центре ловушки.

пробочного отношения), согласно условию (34), ширина струи по продольной скорости уменьшается. Когда она становится равной ширине струи по поперечной скорости, должна вступить в действие диффузия по продольной скорости, которой мы изначально пренебрегли. При этом количество частиц в струе уменьшается, и потери переходят в режим, аналогичный рассмотренному Г.И. Будкером [26].

3.3.2. Вычисление функции распределения

В случае точечных пробок (стандартный профиль магнитного поля, рассматриваемый в аналитических работах) переходный режим, в котором потери определяются струёй холодных ионов, может быть приближенно описан аналитически. В этом случае движение пролётных ионов в центральной части ловушки происходит под действием амбиполярного электрического поля, при этом точечные пробки удерживают запертые частицы в ловушке. Это означает, что в центральной части ловушки траектории частиц не

зависят от значения их магнитного момента, и стационарное кинетическое уравнение можно привести к виду классического уравнения диффузии, заменив координату s на время пролета частицы вдоль траектории $d\tau = ds/V_{\parallel}$. Пренебрегая диффузией по продольной скорости и используя модельный интеграл столкновений, получаем упрощенное кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = D_{\perp} \frac{\partial^2 f}{\partial V_{\perp}^2}, \quad (35)$$

где коэффициент диффузии $D \approx \nu_{ii} \cdot V_{Ti}^2$. Чтобы найти при помощи уравнения (35) функцию распределения пролетных частиц, нужно задать значение функции распределения на границе области удержания. Точный профиль функции распределения запертых частиц определяется видом функции источника, и его вычисление в рассматриваемом режиме довольно затруднительно. Воспользуемся свободой выбора функции источника и поставим приближенное граничное условие:

$$f(V_{\perp} = V_{bound}) = f_t = \frac{n_0}{\pi^{3/2} \cdot V_{Ti}^3} \quad (36)$$

Так как нас интересует случай, когда струя относительно узкая $\delta V_{\parallel} < V_{Ti}$, будем приближенно считать границу области удержания не зависящей от продольной скорости:

$$V_{bound} \approx \sqrt{\frac{2}{M_i} \frac{\phi_m}{R-1}},$$

где ϕ_m – вытягивающий потенциал в пробке.

Все траектории пролетных частиц приходят снаружи ловушки. Пусть длина ловушки от пробки до пробки равна L . Рассмотрим траектории, приходящие слева, и определим время пролета по траектории $\tau(Z, V_{\parallel})$ так, чтобы $\tau(-L/2, V_{\parallel}) = 0$, тогда начальное условие при $Z = -L/2$ (см. рис. 21) должно ставиться при $\tau = 0$:

$$f(\tau = 0, V_{\perp}) = 0$$

Сформулированная математическая задача является задачей о диффузии частиц в изначально пустую область $V_{\perp} < V_{bound}$, на границе которой поддерживается постоянная концентрация. Будем искать функцию распределения $F(\tau(Z, V_{\parallel})) = 2\pi \int f V_{\perp} dV_{\perp}$, свернутую по поперечной скорости.

Так как нас интересует, в конечном счете, плотность, создаваемая частицами, продиффундировавшими в конус потерь, найдем асимптотику при $\tau \gg \tau_{diff}$ (заполненная область). Для этого можно воспользоваться методом Фурье, представив решение в следующем виде:

$$f(\tau, V_{\perp}) = f_t - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{V_{\perp}}{V_{bound}}\right) \cdot e^{-D_{\perp} \left(\frac{\pi \cdot n}{2V_{bound}}\right)^2 \cdot \tau}$$

Так как нас интересует асимптотика при $\tau \gg \tau_{diff}$, можно ограничиться в разложении членом с $n = 1$, содержащим экспоненту с наименьшим декрементом. Тогда:

$$F(\tau) = 2\pi \int f \cdot V_{\perp} dV_{\perp} \approx f_t \cdot V_{bound}^2 (C_0 - C_1 e^{-\Lambda \tau / \tau_{diff}}), \quad (37)$$

где $\tau_{diff} = V_{bound}^2 / D_{\perp}$, а C_0 , C_1 и Λ безразмерные константы порядка единицы. При использовании другого вида модельного интеграла столкновений (в виде линейного оператора, имеющего диффузионный характер) вид асимптотики сохранится, однако коэффициенты C_0 , C_1 и Λ поменяют свои значения. По этой причине далее мы не конкретизируем их.

Будем считать, что амбиполярный потенциал гладкий и имеет отличную от нуля вторую производную в центре ловушки. Так как наиболее интенсивно область потерь заполняется вблизи х-точки в центре ловушки, можно приблизить потенциал параболой:

$$\phi(Z) = -\frac{\alpha \cdot M_i \cdot Z^2}{2}, \quad (38)$$

где α – коэффициент, отвечающий за крутизну потенциала, равный квадрату обратного характерного времени разгона ионов в этом потенциале. Функ-

ция $\tau(Z, V_{\parallel})$ может быть найдена элементарным интегрированием уравнений движения:

$$\begin{aligned}\tau(Z, V_{\parallel}) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{arcsch} \left(\frac{\sqrt{\alpha}Z}{U} \right) + \operatorname{arcsch} \left(\frac{\sqrt{\alpha}L}{2 \cdot U} \right) \right), \\ U &= \sqrt{V_{\parallel}^2 - \alpha Z^2}, \quad V_{\parallel}^2 > \alpha Z^2 \\ \tau(Z, V_{\parallel}) &= \frac{-1}{\sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{arcch} \left(-\frac{\sqrt{\alpha}Z}{U} \right) - \operatorname{arcch} \left(\frac{\sqrt{\alpha}L}{2 \cdot U} \right) \right), \\ U &= \sqrt{\alpha Z^2 - V_{\parallel}^2}, \quad V_{\parallel}^2 < \alpha Z^2\end{aligned}\tag{39}$$

Подставляя формулу (39) для τ в асимптотику (37), можно получить функцию распределения $F(Z, V_{\parallel}) = F(\tau(Z, V_{\parallel}))$, график которой показан на рисунке 24. Функция F очевидно непрерывна, а ее первая производная по продольной скорости непрерывна при условии:

$$\frac{\sqrt{\alpha}\tau_{diff}}{\Lambda} < 1\tag{40}$$

В противном случае первые производные от F терпят разрыв и обращаются в бесконечность на лучах сепаратрисы OB и OD (см. рисунок 21). Это означает, что, когда условие (40) нарушается, диффузия по продольной скорости начинает оказывать заметное влияние на функцию распределения струи, и найденное решение не применимо.

3.3.3. Самосогласованное решение

В рассматриваемом случае квадратной магнитной ямы амбиполярный потенциал должен быть самосогласованным с самой струей. Для этого рассмотрим условие квазинейтральности (32), представив плотность ионов как сумму плотности запертых ионов и пролетных:

$$\phi = T_e \cdot \ln(n/n_0) = T_e \cdot \ln((n_{pass} + n_{tr})/n_0),$$

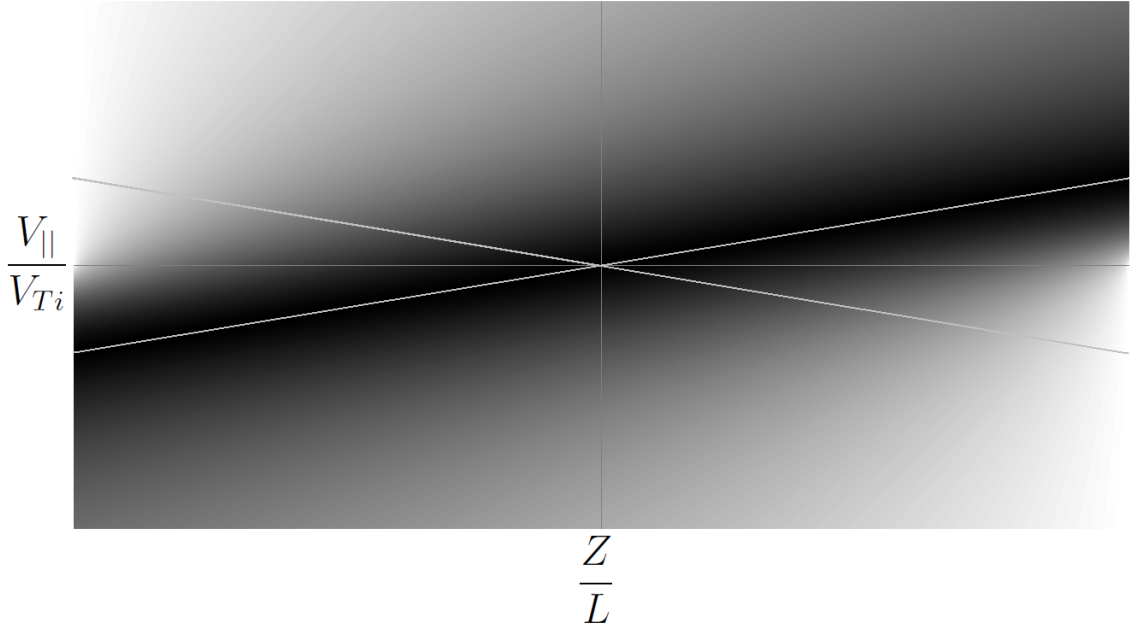


Рис. 24: Функция распределения F струи холодных пролетных ионов в переменных Z , v_{\parallel} . Светло-серым цветом показана сепаратриса.

где n_{pass} – плотность, создаваемая пролетными частицами, а n_{tr} – плотность, создаваемая запертыми частицами.

Вообще говоря, самосогласованный потенциал не является параболическим на всей длине ловушки, однако, нас интересует область в непосредственной близости от центра ловушки, поэтому мы разлагаем условие квазинейтральности в ряд, удерживая только квадратичные по Z члены.

Так как при $Z \ll L$ отношение n/n_0 близко к единице, можно ограничиться только линейным членом в разложении логарифма:

$$\phi = T_e \cdot (n_{pass} + n_{tr} - n_0)/n_0$$

Подставляя в левую часть равенства выражение для потенциала и учитывая, что первые производные по Z равны нулю из соображений симметрии ловушки относительно центра, получаем:

$$-\frac{\alpha \cdot M_i \cdot Z^2}{2} = \frac{T_e}{2 \cdot n_0} \left(\frac{d^2 n_{pass}}{dZ^2} + \frac{d^2 n_{tr}}{dZ^2} \right) \cdot Z^2$$

Учитывая, что распределение запертых ионов близко к больцмановскому ($n_{tr} \sim n_0 \cdot e^{-\phi/T_i} \approx 1 - \phi/T_i$), получаем:

$$T_e \frac{1}{n_0} \frac{d^2 n_{pass}}{dZ^2} + \frac{T_e}{T_i} M_i \alpha C_2 = -M_i \alpha, \quad (41)$$

где C_2 – коэффициент порядка единицы, зависящий от распределения запертых частиц.

Для того чтобы найти из условия (41) коэффициент α , нужно вычислить вторую производную плотности струи. Для этого нужно вычислить следующий интеграл:

$$\frac{d^2 n_{pass}}{dZ^2} = \frac{d^2}{dZ^2} \int F(Z, V_{\parallel}) dV_{\parallel} \quad (42)$$

Используя определенную в предыдущем разделе асимптотику функции распределения ионов в струе можно вычислить интеграл (42) аналитически. Интегрирование подробно описано в приложении В. Подставляя результат интегрирования в уравнение (41), полученное выше из условия квазинейтральности, получаем:

$$M_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} C_2 \right) \alpha = T_e \cdot \frac{1}{n_0} \cdot 2 \cdot f_t \cdot V_{bound}^2 \cdot C_1 \cdot \frac{2 \cdot \Lambda}{L \cdot \tau_{diff}}$$

Подставив в уравнение выражения для констант, входящих в него, получаем:

$$\frac{\tau_{diff}^2 \alpha}{\Lambda} = A \quad (43)$$

$$A = \frac{2 \cdot C_1}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{\tau_{diff}}{L/V_{Ti}} \cdot \frac{\phi_m T_e}{T_i^2 (R-1) (1 + C_2 T_e/T_i)} \approx \frac{\lambda}{(R-1)L} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^3 \frac{1}{R-1},$$

если $\frac{\tau_{diff}^2 \alpha}{\Lambda} < 1$. В противном случае самосогласованного решения не существует, так как интеграл расходится. Поэтому следует сразу заметить, что для самосогласованного решения условие непрерывности первых производных F (40) выполняется всегда.

Таким образом, самосогласованное решение существует при $A < 1$. Первый множитель в выражении для коэффициента A должен быть больше единицы, иначе режим истечения будет газодинамическим, и решение со струей не будет иметь смысла. Однако при достаточно большом пробочном отношении и не слишком горячих электронах, существует интервал частот столкновений, в котором самосогласованное решение существует.

При уменьшении частоты столкновений амбиполярный потенциал становится более пологим, и при достижении коэффициентом A значения 1 самосогласованное решение пропадает, а продольные потери, по-видимому, переходят в режим, аналогичный будкеровскому (так как скачек потенциала в пробках при этом сохраняется, область потерь все же будет отличаться от будкеровского конуса).

3.3.4. Сравнение аналитической теории с результатами моделирования

Для того чтобы сравнить выводы предыдущего раздела с результатами моделирования, выделим характер зависимости (43) коэффициента α от основных параметров задачи:

$$\alpha \propto \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{T_e}{T_i} \quad (44)$$

Согласно выражению (44), коэффициент α линейно зависит от частоты столкновений и от температуры электронов в пределах применимости теории, изложенной в предыдущем разделе. При помощи разработанной численной кинетической модели были выполнены расчеты продольного распределения параметров плазмы в пробочной ловушке с плоским дном и резкими пробками. Результаты моделирования показали формирование струи холодных ионов (см. рисунок 23) и образование самосогласованного распре-

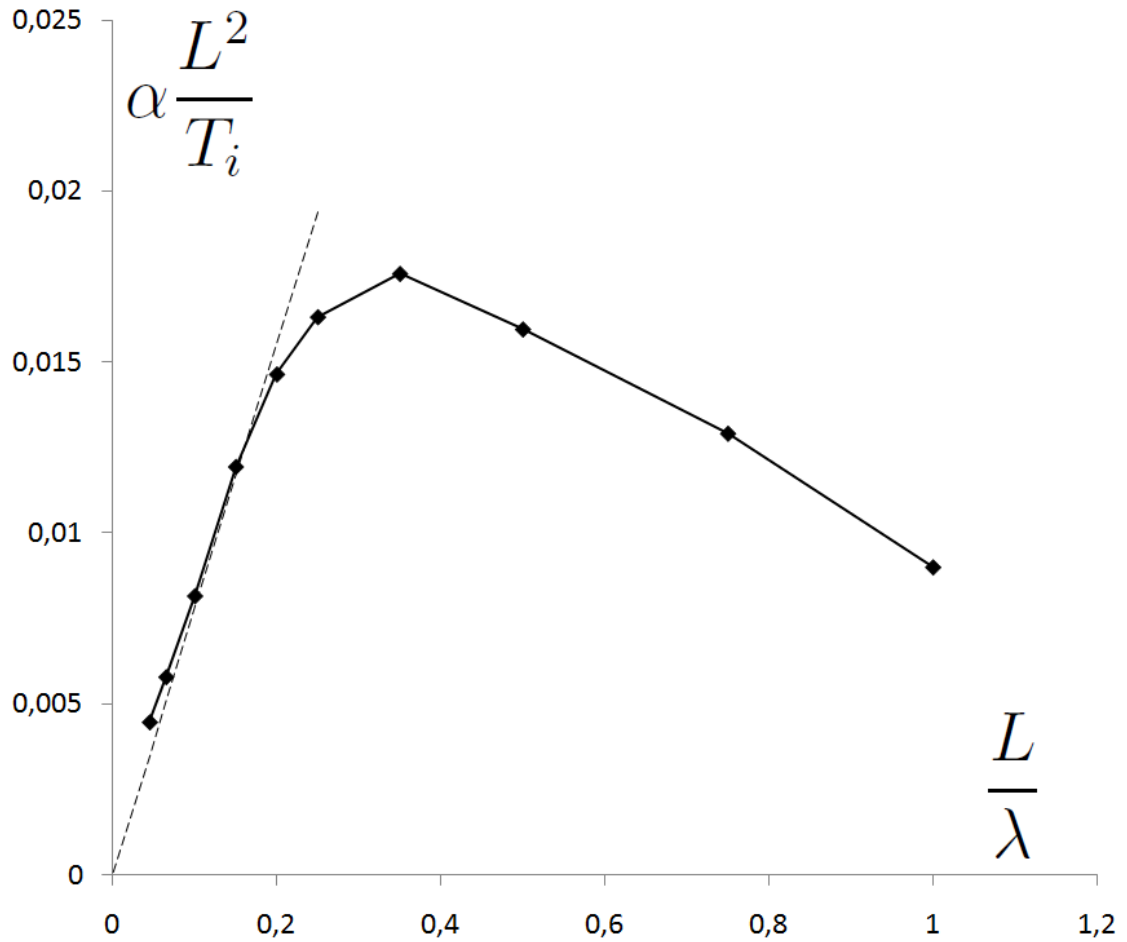


Рис. 25: Зависимость второй производной потенциала в центре ловушки от частоты столкновений.

деления потенциала с максимумом в центре. Продольный профиль потенциала аппроксимировался параболой, и определялось значение коэффициента α .

На рисунке 25 показана зависимость коэффициента α , рассчитанного при помощи кинетического кода, от частоты столкновений. В случае промежуточной столкновительности воспроизводится линейная зависимость (44) от частоты столкновений. При увеличении частоты столкновений коэффициент α уменьшается. Эта область параметров соответствует переходу к газодинамическому режиму. В этом режиме конус потерь заполнен частицами

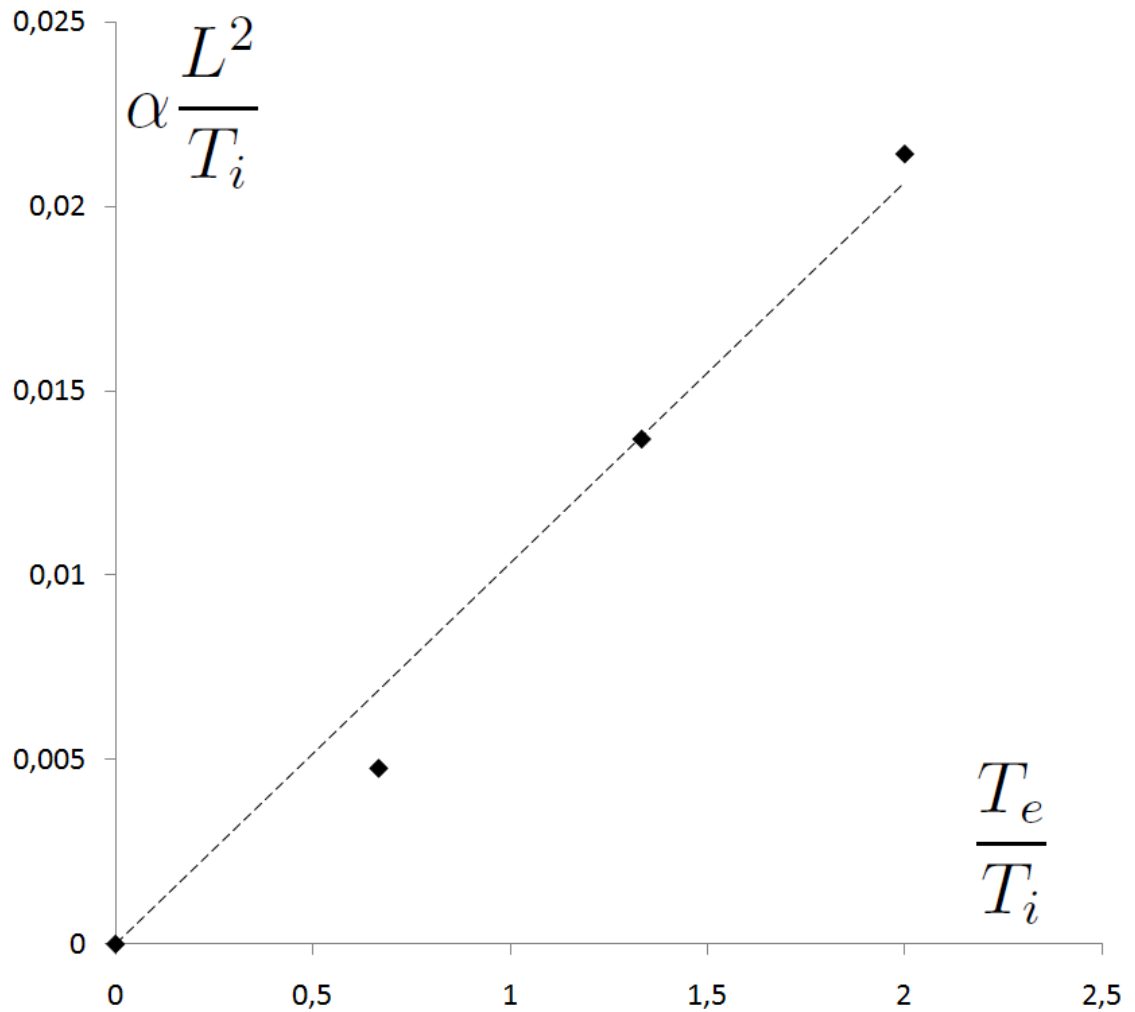


Рис. 26: Зависимость второй производной потенциала от температуры электронов.

полностью и функция распределения близка к максвелловской. При этом продольный градиент плотности и потенциала в центральной части ловушки отсутствует, и коэффициент $\alpha \rightarrow 0$. Также хорошо воспроизводится линейная зависимость от температуры электронов (рисунок 26).

Следует отметить, что подобные струи ионов могут образовываться не только в самосогласованном режиме, который аналитически исследован выше. В случае, если в плазме существуют продольные пики потенциала, вызванные другими причинами, на фазовой плоскости пролетных ионов также могут появляться х-точки, которые будут источниками струй. Напри-

мер, если в плазме создана популяция плещущихся ионов, вблизи своих точек остановки они будут создавать пики амбиполярного потенциала. Тогда теплые ионы можно разделить на четыре сорта: ионы, запертые магнитными пробками, ионы запертые электростатически между пиками потенциала; пролётные ионы, которые могут пролететь через всю ловушку и пролетные ионы, которые существуют за пиками амбиполярного потенциала и не обладают достаточной продольной энергией, чтобы залететь в центр ловушки. В этом случае сепаратриса между электростатически-запертыми и пролетными ионами на плоскости $Z - V_{\parallel}$ будет иметь две x -точки, которые служат источниками струй. На рисунке 27 показаны результаты численного расчета функции распределения ионов в этом случае. Влияние плещущихся ионов учитывалось при помощи модельной добавки к плотности плазмы при расчете амбиполярного потенциала из условия квазинейтральности. Видно, что область амбиполярно запертых частиц заполняется за счет столкновений, и из x -точек выходят струи пролетных ионов.

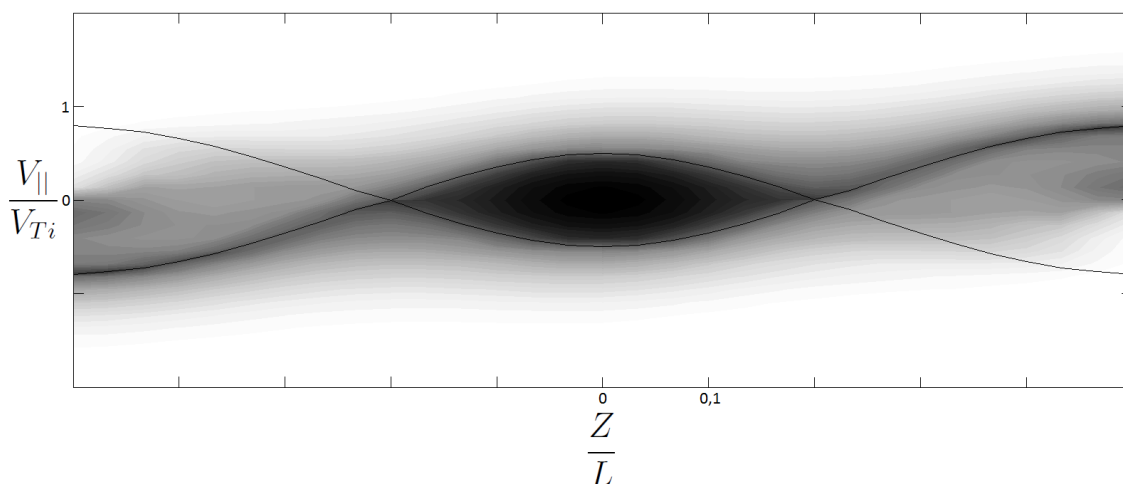


Рис. 27: Функция распределения на фазовой плоскости V_{\parallel} - Z при наличии двух максимумов потенциала ($L/\lambda = 0,1$, $T_e = T_i$). Черной линией показана сепаратриса с двумя x -точками.

3.4. Подавление продольных потерь амбиполярной пробкой

При помощи кинетического кода проведено моделирование амбиполярного подавления продольных потерь из зеркальной ловушки в условиях, приближенных к экспериментам на установке ГДЛ [2]. В этих экспериментах была изучена эффективность использования амбиполярных пробок для подавления продольных потерь частиц и энергии из газодинамической ловушки. Для этого к одной из сторон установки был присоединен компактный пробкотрон с пробочным отношением ~ 2 . При помощи поперечной инжекции нейтральных атомов в нем создавалась популяция глубоко запертых горячих ионов, которая создавала амбиполярный барьер для ионов теплой плазмы, вытекающих из основного пробкотрона.

При выполнении расчётов использовался профиль магнитного поля, качественно повторяющий экспериментальный. Для того чтобы учесть влияние горячих ионов на амбиполярный потенциал плазмы, к плотности тепловых ионов прибавлялся модельный профиль горячих ионов в компактном пробкотроне. Кроме того, в центральном пробкотроне ГДЛ присутствует популяция горячих ионов, которые удерживаются в адиабатическом режиме и создают около своих точек остановки пики амбиполярного потенциала. Так как эти пики влияют на истечение теплой плазмы (смотри предыдущий раздел), наличие горячих ионов в центральном пробкотроне также учитывалось в расчётах.

На рисунке 28 показана зависимость плотности потока ионов из ловушки от отношения плотности горячих частиц в компактном пробкотроне к плотности теплой плазмы в основной ловушке. Видно, что эффективность подавления продольных потерь растет при уменьшении частоты столкнове-

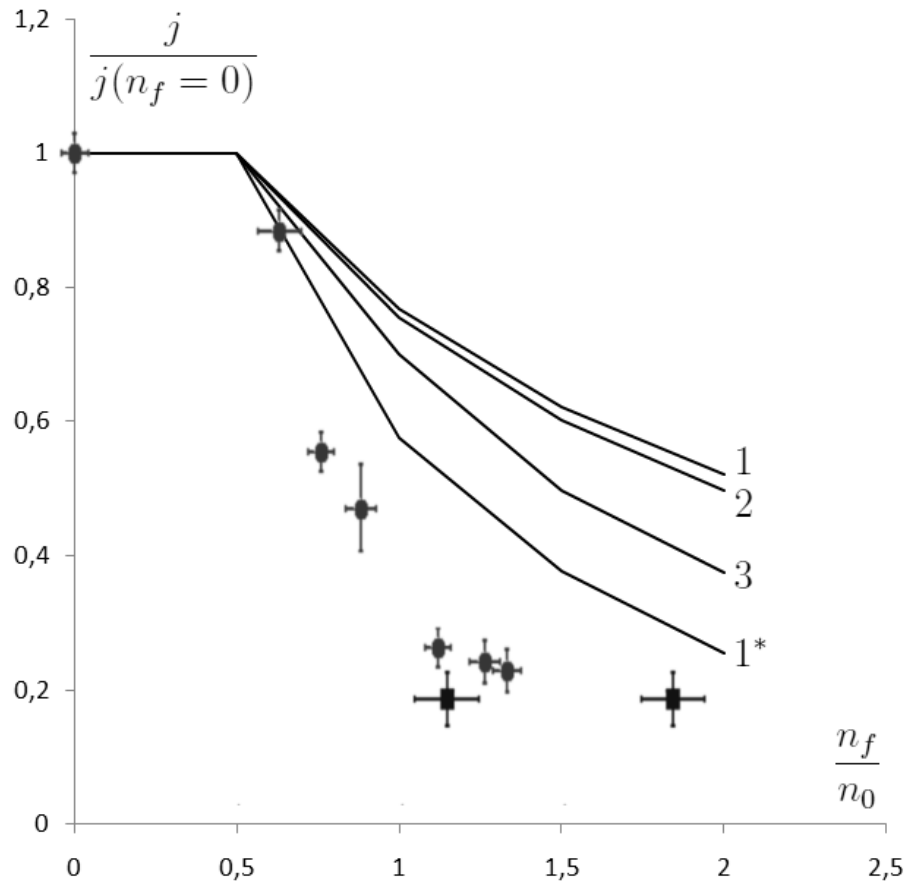


Рис. 28: Зависимость коэффициента подавления потока ионов от отношения плотности горячих ионов к плотности теплой плазмы. 1 – при $L/\lambda = 10$, $T_e = T_i$; 2 – при $L/\lambda = 1$, $T_e = T_i$; 3 – при $L/\lambda = 0,1$, $T_e = T_i$; 1* – при $L/\lambda = 10$, $T_e = 2 \cdot T_i$. Отдельными точками показаны результаты экспериментов на установке ГДЛ (из работы [2]).

ний и увеличении температуры электронов.

Согласно данным, приведённым в работе [2], эксперименту на ГДЛ соответствуют значения $L/\lambda \sim 3$, $T_e \sim T_i$. К этим условиям наиболее близка кривая 2 на рисунке 28. Видно, что в этом случае расчёты предсказывают подавление продольных потерь всего в 2 раза при $n_f/n_0 = 2$. Однако в условиях установки ГДЛ тепловые ионы нагреваются за счёт столкновений с электронами, поэтому их температура должна быть ниже электронной. Например, моделирование при помощи упрощенной нуль-мерной модели, опи-

сывающей баланс энергии между компонентами плазмы, предсказывает, что в условиях экспериментов на ГДЛ отношение T_e/T_i находится в диапазоне от 1,5 до 2 [48]. Так как характерная энергия вылетающих ионов, приведенная к центральной плоскости ловушки, ограничена T_i , а величина запирающего перепада потенциала между центральной плоскостью и амбиполярной пробкой $e\Delta\varphi$ пропорциональна T_e , увеличение отношения T_e/T_i позволяет запереть больше ионов при том же значении n_f/n_0 . Результаты моделирования для случая $T_e \sim 2 * T_i$, $L/\lambda \sim 10$ показаны кривой 1* на рисунке 28. При $n_f/n_0 = 2$ продольные потери подавляются в 4 раза, что близко к результату экспериментов. Тем не менее все же наблюдаются отличия между экспериментальными точками и результатами моделирования. Эти отличия могут быть связаны с особенностями подпитки плазмы на ГДЛ. В эксперименте для этой цели применяется напуск газа, который создает источник ионов не только в области запертых частиц, но и в конусе потерь. Часть из этих ионов вылетает из ловушки, не успев нагреться, и может быть эффективно заперта низким барьером.

Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

- Построена корректная модель истечения плазмы из гофрированной ловушки в кинетическом режиме.
- Численное моделирование подтверждает переход к многопробочному удержанию при $L \gg \lambda$.
- Уточнённый темп продольных потерь частиц из ловушки в пределе мелкомасштабной гофрировки в 1,5 – 2 раза ниже предсказаний квазигидродинамической теории.
- Получено волновое уравнение для квазипродольного звука в тонкой анизотропной плазме, учитывающее диамагнетизм и продольную неоднородность плазмы.
- Звук может отражаться от неоднородности плазмы или от областей, в которых он замедляется из-за диамагнетизма.
- Обнаружены дискретные продольные звуковые моды в многопробочной ловушке с обеднённым конусом потерь и в ловушке с плещущимися ионами, локализующиеся за счет неоднородности.
- Создана численная кинетическая модель истечения плазмы из открытой ловушки, описывающая переход к газодинамическому режиму. Модель согласуется с известными пределами.
- Исследован переходный режим истечения плазмы, в котором продольные потери происходят с образованием струи холодных ионов. Получено самосогласованное аналитическое решение для струи в ловушке

с «плоским дном», существующее при не слишком редких столкновениях.

- Проведено моделирование подавления продольных потерь ионов при помощи амбиполярной пробки. Обнаружено существенное подавление продольных потерь ионов из зеркальной ловушки в переходном режиме $L \sim \lambda$ при помощи амбиполярного барьера $e\Delta\varphi \sim T_e$.

В заключение я хочу выразить благодарность всем, кто помогал мне при работе над диссертацией.

В первую очередь я благодарю своего научного руководителя А.Д. Беклемишева за регулярные обсуждения моей работы, его заботу и терпение.

Благодарю Ю.А. Цидулко за его внимание к работе, конструктивную критику, которая помогла мне установить границы применимости используемых моделей, и замечания к черновику диссертации, К.В. Зайцева за помощь в сравнении предсказаний теории с экспериментом на ГДЛ, Д.В. Юрова за полезные обсуждения и предоставленные им результаты расчетов энергобаланса плазмы в ГДЛ, А.Л. Соломахина за внимание к работе и помощь в расчёте магнитного поля в ГДЛ, А.С. Аракчеева, А.В. Судникова, И.С. Черноштанова за регулярные полезные обсуждения моей работы.

Благодарю И.А. Котельникова, А.В. Бурдакова, А.А. Иванова, П.А. Багрянского, Т.Д. Ахметова, В.В. Приходько, В.В. Поступаева, А.В. Аникеева, К.В. Лотова, И.В. Тимофеева, И.Е. Карпова, Е.И. Солдаткину, М.В. Иванцовского и всех сотрудников плазменных лабораторий ИЯФ СО РАН за их интерес к моей работе.

Также я благодарю преподавателей НГУ за знания и опыт, которые я получил во время обучения, особенно А.С. Золкина, С.Ю. Таскаева,

С.Л. Синицкого, В.Г. Черняка, А.И. Парфенова, Д.А. Шапиро, А.И. Черных, А.В. Резниченко, В.А. Александрова.

Я благодарю мою семью за поддержку в течение всего времени работы над диссертацией. Отдельно благодарю мою жену за помощь в редактировании черновика диссертации.

Приложение А

В приложении приведены формулы для коэффициентов D и A в уравнении (10).

Подставляя в формулу (9) кусочно линейный профиль магнитного поля $B(s)$ и интегрируя по s , получаем коэффициент $D(y)$:

$$D = \frac{2x \left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x/R} \right) + x \ln \left(\frac{(1+\sqrt{1-x/R})(1-\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x/R})(1+\sqrt{1-x})} \right)}{1 - 1/R} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} x \ln(R),$$

где $x = 1 - |y|$

На рисунке 29 показана зависимость коэффициента D от y при различных значениях пробочного отношения $R = 1 - 10$ и асимптотическое выражение при $R = 10$. Видно, что асимптотика хорошо работает при $R > 10$.

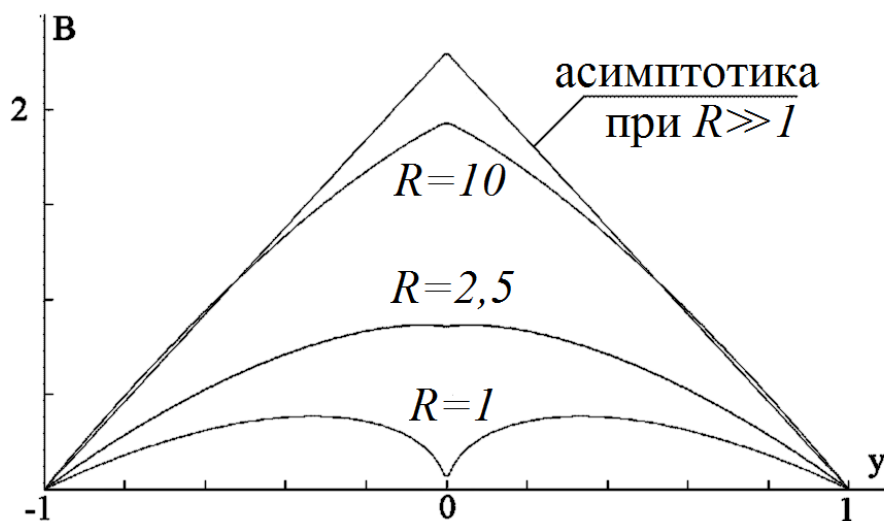


Рис. 29: Коэффициент $D(y)$ в случае кусочно линейного профиля магнитного поля для R равного 1, 2,5 и 10.

Коэффициент $C(\epsilon)$ в интеграле столкновений равен $\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \nu \alpha(v)$. Функции $\nu(v)$ и $\alpha(v)$ приведены в работе [6] на странице 630. Умножив $C(\epsilon)$ на $4L/v$, получаем коэффициент $A(\epsilon)$. После элементарных преобразований вы-

ражаем его через табличные функции:

$$A(\epsilon, s) = \frac{2\pi L\Lambda e^4 n}{\epsilon^2} \left[\left(1 - \frac{T}{2\epsilon}\right) \operatorname{Erf}\left(\sqrt{\epsilon/T}\right) + \sqrt{\frac{T}{\pi\epsilon}} e^{-\epsilon/T} \right]$$

Приложение Б

Для исследования продольных потерь из пробочной ловушки в переходном режиме разработан численный кинетический код, который основан на решении кинетического уравнения (30) для ионов. Кинетическое уравнение интегрируется на сетке в переменных Z , V_{\parallel} , μ .

Для упрощения расчетов использовано приближение коротких пробок $\lambda \gg L_m$, позволяющее использовать бесстолкновительное кинетическое уравнение вблизи пробок. В центральной части функция распределения рассчитывается при помощи столкновительного кинетического уравнения. Таким образом, пространство условно разделено на три области: левая «пробка», центральная часть и правая «пробка».

Кинетическое уравнение (30) интегрируется вдоль характеристик, которые являются траекториями движения частиц в эффективном потенциале Юшманова:

$$\psi = e\phi + \mu B \quad (45)$$

$$V_{\parallel}(Z) = \sqrt{(V_{\parallel}(Z_0))^2 + \psi(Z_0) - \psi(Z)}$$

Самосогласованный амбиполярный потенциал определяется стандартным образом из условия квазинейтральности:

$$\phi = T_e \cdot \ln(n/n_0) \quad (46)$$

Наличие самосогласованного амбиполярного потенциала делает задачу существенно нелинейной (амбиполярный потенциал влияет на движение ионов, а их плотность в свою очередь определяет потенциал), поэтому для ее решения использован итерационный подход. Последовательность выполнения итерационной процедуры проиллюстрирована на рисунке 30. На первом этапе кинетическое уравнение (30) интегрируется вдоль характеристик в

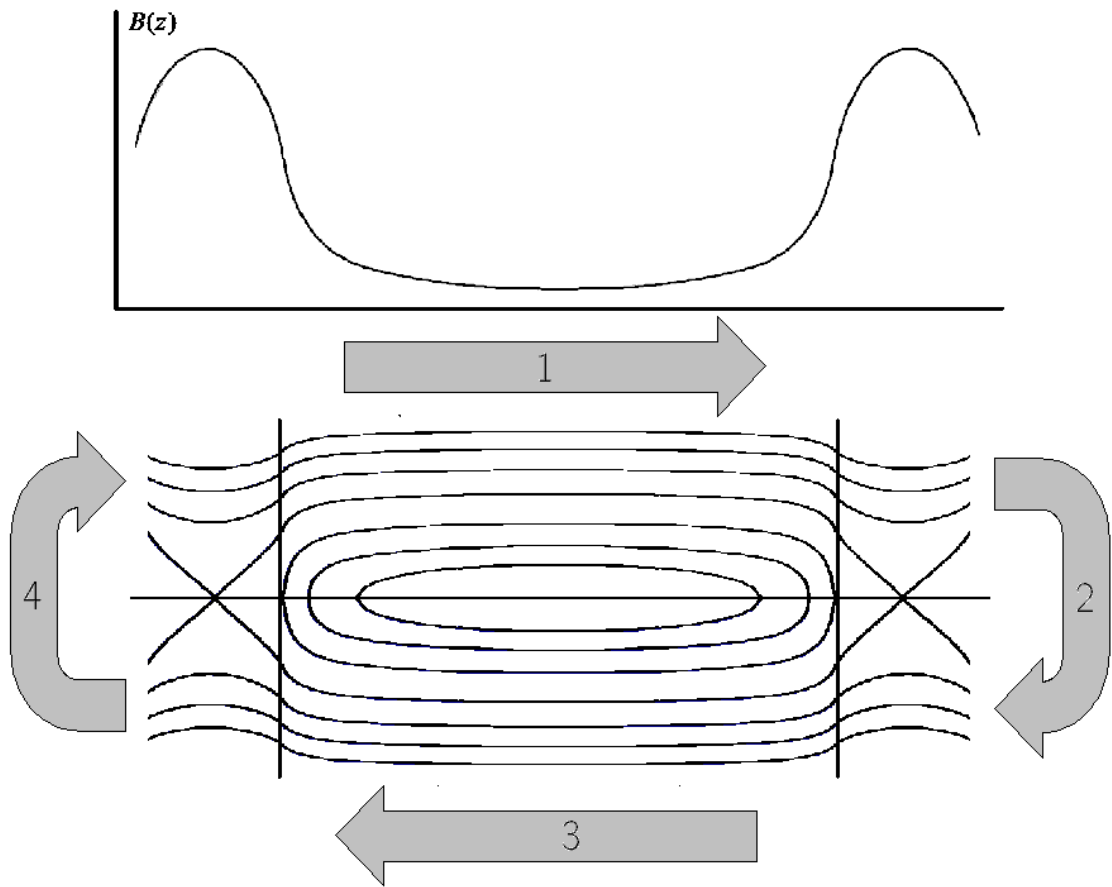


Рис. 30: Профиль магнитного поля и фазовый портрет частиц в зеркальной ловушке в переменных Z, V_{\parallel} (в эффективном потенциале $\psi = e\phi + \mu B$).

столкновительной области для частиц с $V_{\parallel} > 0$. При этом в качестве условия на границе $V_{\parallel} = 0$ используется значение функции распределения с предыдущей итерации. На втором этапе рассчитывается функция распределения в правом пробочном узле. После этого кинетическое уравнение интегрируется в столкновительной области для частиц с $V_{\parallel} < 0$, и рассчитывается левый пробочный узел. Такая последовательность выбрана из соображений соответствия принципу причинности. В конце итерации из условия квазинейтральности (32) определяется новый амбиполярный потенциал, после чего итерационная процедура повторяется.

Интегрирование кинетического уравнения в области пробок

Если длина пробочной области много меньше, чем длина свободного пробега, функция распределения в ней подчиняется бесстолкновительному кинетическому уравнению:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\varepsilon, \mu} = 0 \quad (47)$$

Из уравнения (47) следует, что значение функции распределения сохраняется вдоль характеристик, которые представляют собой траектории движения частиц в эффективном потенциале Юшманова. Граничным условием служит значение функции распределения на стыке столкновительной и бесстолкновительной областей. Вторым граничным условием является наличие неотражающей стенки за пробкой (на характеристиках пришедших «снаружи» ловушки функция распределения равна нулю).

На рисунке 31 изображены характеристики уравнения (47) на фазовой плоскости в переменных z, ε (ε – полная энергия частицы) для фиксированного μ в модельном потенциале Юшманова $\psi = e\phi + \mu V$ (показан сплошной линией). Так как магнитная часть эффективного потенциала в зеркальной ловушке имеет форму «ямы», а электрическая – «горба», в результате потенциал ψ кроме главного максимума, отвечающего магнитной пробке, может иметь локальные максимумы и минимумы. Доступная частицам часть фазовой плоскости, расположенная выше кривой потенциала Юшманова, на рисунке 31 разбита на четыре области. Область 1 занята частицами, полная энергия которых выше главного максимума потенциала Юшманова. Функция распределения в этой области определяется интерполированием с границы, при этом отраженные частицы (с $V_{\parallel} < 0$) отсутствуют. В области 2, закрытой главным максимумом, все характеристики начинаются на «стенке»,

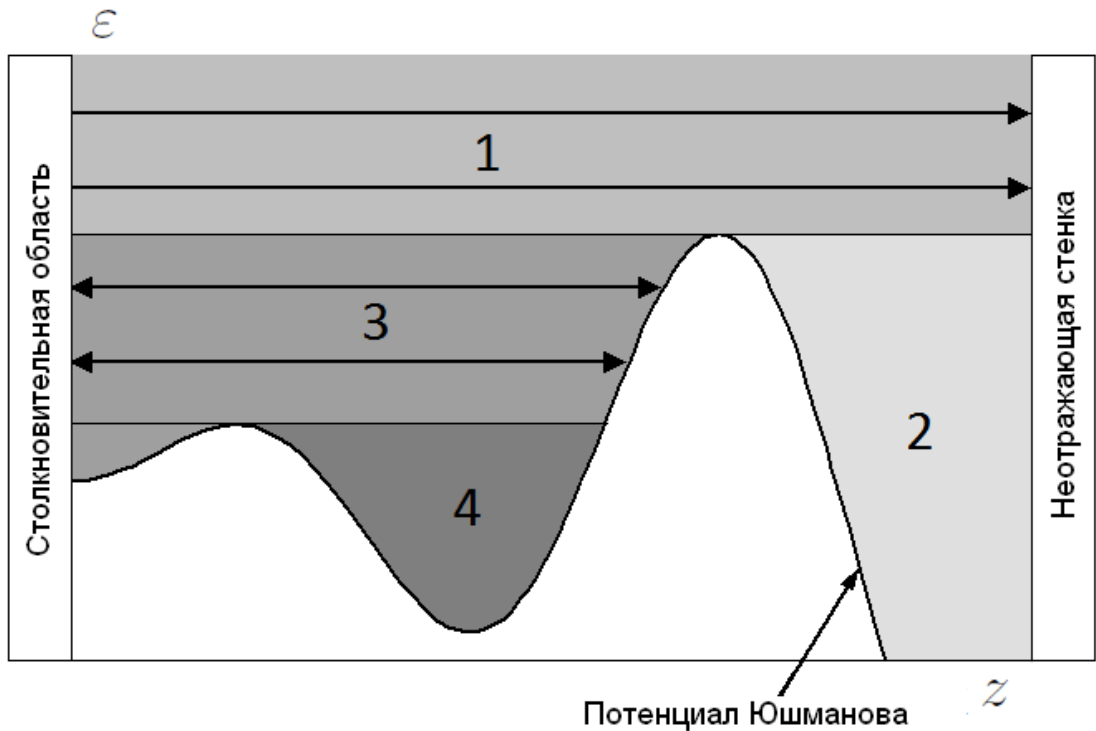


Рис. 31: Фазовая плоскость движения частиц в модельном потенциале Юшманова вблизи пробки в переменных z, ε .

поэтому функция распределения равна нулю. Область 3 заполнена частицами, пришедшими из ловушки, причем, так как их энергия меньше главного максимума потенциала ψ , эти частицы отражаются, и область $V_{\parallel} < 0$ заполнена. В области 4 (локальная яма) характеристики замкнуты, так как частицы осциллируют в яме, поэтому уравнение (47) не определяет значение функции распределения на них. При рассмотрении стационарной задачи естественно считать, что яма заполняется столкновениями. Функция распределения в этой области считается равной максвелловской, нормированной из условия непрерывности на сепаратрисе. Это приближение справедливо, если яма достаточно «мелкая», т.е. $T_i \gg \delta\psi$, что подтверждается результатами моделирования.

Интегрирование столкновительного кинетического уравнения

В центральной части ловушки столкновительное кинетическое уравнение (30) интегрируется на сетке в переменных Z , V_{\parallel} , μ в узкой полосе, содержащей конус потерь. Функция распределения глубоко запертых ионов за сеткой считается максвелловской. Предполагается, что пробочное отношение достаточно велико, чтобы можно было пренебречь диффузией по продольной скорости. Так как в случае $R \gg 1$ большая часть пространства скоростей занята запертыми максвелловскими частицами, можно использовать линеаризованный интеграл столкновений (31), в котором потенциалы Розенблюта вычисляются по максвелловской функции распределения.

Кинетическое уравнение (30) с интегралом столкновений (31) является параболическим дифференциальным уравнением. Диффузионная правая часть делает его схожим с уравнением теплопроводности. Отличие состоит в том, что вместо простой производной по времени в левой части этого уравнения стоит производная по ds вдоль траекторий частиц в Юшмановском потенциале (45). Из аналогии с уравнением теплопроводности следует, что для интегрирования этого уравнения по ds необходимо применить неявную схему:

$$\frac{f_+ - f^*}{\delta Z} = \frac{1}{V_{\parallel}} \hat{S}t f_+, \quad (48)$$

где f_+ – искомая функция распределения на новом слое по Z , $\hat{S}t$ – сеточный оператор столкновений [?], а f^* – значение функции распределения на предыдущем слое по Z , взятое вдоль характеристики уравнения. Так как характеристики уравнения не совпадают с линиями сетки $Z - V_{\parallel} - \mu$, в определении величины f^* заключается некоторая трудность. Если опреде-

лать его, интерполируя функцию распределения на предыдущем слое по Z (рис. 32 а), в схеме появится член первого порядка малости по δV_{\parallel} :

$$\sim \delta V_{\parallel} \frac{\partial^2 f}{\partial V_{\parallel}^2}$$

Этот член вызывает паразитную численную диффузию по продольной скорости. Для того чтобы исследовать случай редких столкновений, нужно обеспечить малость коэффициента паразитной диффузии по сравнению с физической частотой столкновений. Природа появления численной диффузии в схеме (48) характерна для всех численных схем для уравнений переноса на эйлеровой сетке. Численная диффузия может быть устранена только в схемах на лагранжевой сетке, у которой линии сетки совпадают с характеристиками уравнения, однако эти схемы неприменимы в прямом виде к уравнению (30) из-за наличия в нем сложной правой части.

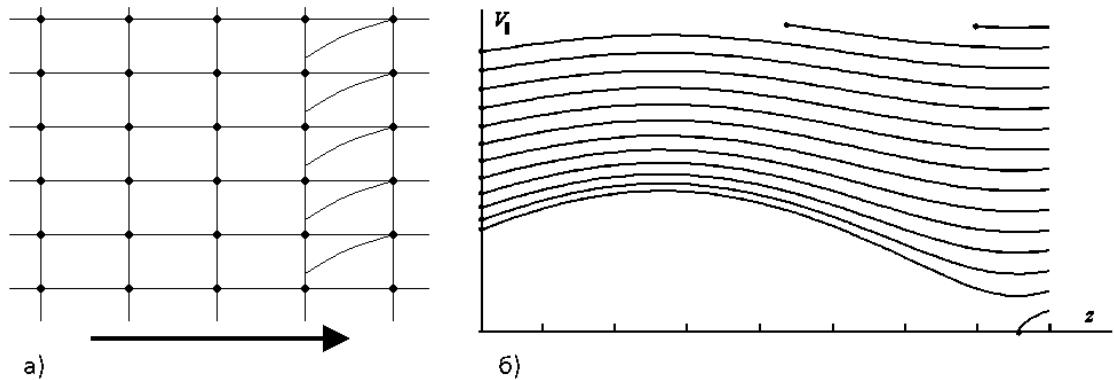


Рис. 32: Иллюстрации к численным схемам интегрирования уравнения (30): а – схема с паразитной диффузией, б – схема с интегрированием вдоль лагранжевых характеристик.

Для подавления паразитной численной диффузии была разработана особая численная схема. Когда функция распределения вычисляется на некотором слое, ее значение, а значит и значение интеграла столкновений

на предыдущих слоях, уже известно. Проведя из интересующей нас точки характеристику вплоть до границы сетки (рис. 32 б), мы можем вычислить значение f^* , проинтегрировав кинетическое уравнение:

$$f^* = f_{bound} + \int \frac{1}{V_{\parallel}} \hat{S} t f ds,$$

где f_{bound} – значение функции распределения на границе, а интеграл столкновений рассчитывается по уже известным значениям функции распределения. Так как в этой схеме необходимо интерполировать значения интеграла столкновений, в ней тоже появляется паразитная диффузия, однако она пропорциональна $\delta V_{\parallel} \cdot \nu$ (ν – частота столкновений), поэтому ее коэффициент всегда меньше, чем коэффициент физической диффузии.

Схема (48) применима везде, где продольная скорость отлична от нуля. В точках разворота зависимость скорости от координаты на траектории частиц всегда может быть приближена асимптотикой $V_{\parallel} \sim \sqrt{\frac{d\psi}{dZ}} \sqrt{Z - Z_0}$. Используя эту асимптотику, можно перейти в окрестности точки разворота к переменной $dZ/\sqrt{Z - Z_0}$. В новых переменных точка становится регулярной, и эффективная «продольная скорость», пропорциональная $\sqrt{\frac{d\psi}{dZ}}$, отлична от нуля.

Приложение В

Для того чтобы вычислить крутизну профиля плотности пролетных ионов для задачи о самосогласованном режиме потерь со струёй для заданного значения коэффициента α , требуется определить значение интеграла (42). Будем рассматривать случай, когда условие (40) выполняется, и функция F имеет непрерывные производные. Тогда дифференцирование по параметру Z может быть занесено под знак интеграла:

$$\frac{d^2 n_{pass}}{dZ^2} = \int \frac{\partial^2 F(Z, V_{\parallel})}{\partial Z^2} dV_{\parallel} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 F(Z, V_{\parallel})}{\partial Z^2} dV_{\parallel}$$

Для того чтобы вычислить интеграл, используем асимптотику функции распределения (37), в которую подставим формулу (39) для $\tau(Z, V_{\parallel})$:

$$F(Z, V_{\parallel}) = \dots$$

$$f_t \cdot V_{bound}^2 \left(C_0 - C_1 e^{-\frac{\Lambda}{\tau_{diff} \sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{arcsch} \left(\frac{\sqrt{\alpha} Z}{\sqrt{V_{\parallel}^2 - \alpha Z^2}} \right) + \operatorname{arcsch} \left(\frac{\sqrt{\alpha} L}{2 \cdot \sqrt{V_{\parallel}^2 - \alpha Z^2}} \right) \right)} \right)$$

Подставляя в интеграл эту формулу для $F(Z, V_{\parallel})$, получаем:

$$\frac{d^2 n_{pass}}{dZ^2} = \dots$$

$$-2 \cdot f_t \cdot V_{bound}^2 \cdot C_1 \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial Z^2} e^{-\frac{\Lambda}{\tau_{diff} \sqrt{\alpha}} \left(\operatorname{arcsch} \left(\frac{\sqrt{\alpha} Z}{\sqrt{V_{\parallel}^2 - \alpha Z^2}} \right) + \operatorname{arcsch} \left(\frac{\sqrt{\alpha} L}{2 \cdot \sqrt{V_{\parallel}^2 - \alpha Z^2}} \right) \right)} \right) dV_{\parallel} \Big|_{Z=0}$$

Переходя к безразмерным переменным $\tilde{Z} = \frac{2}{L} \cdot Z$, $\tilde{V} = \frac{2}{L\sqrt{\alpha}} \cdot V_{\parallel}$ и $a = \frac{\tau_{diff}^2}{\Lambda^2} \cdot \alpha$, получаем:

$$\frac{d^2 n_{pass}}{dZ^2} = \dots$$

$$-2 \cdot f_t \cdot V_{bound}^2 \cdot C_1 \cdot \frac{2 \cdot \Lambda}{L \cdot \tau_{diff}} \cdot \sqrt{a} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{Z}^2} e^{-\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\operatorname{arcsch} \left(\frac{\tilde{Z}}{\sqrt{\tilde{V}^2 - \tilde{Z}^2}} \right) + \operatorname{arcsch} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{V}^2 - \tilde{Z}^2}} \right) \right)} \right) d\tilde{V} \Big|_{\tilde{Z}=0}$$

Продифференцировав дважды по \tilde{Z} и положив $\tilde{Z} = 0$, получаем следующий интеграл:

$$\frac{d^2 n_{pass}}{dZ^2} = -2 \cdot f_t \cdot V_{bound}^2 \cdot C_1 \cdot \frac{2 \cdot \Lambda}{L \cdot \tau_{diff}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{a}} \text{arcsch}(\frac{1}{\tilde{V}})} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha} \tilde{V}^2} - \frac{1}{\tilde{V}^3 \sqrt{1 + 1/\tilde{V}^2}} \right) d\tilde{V}$$

Обозначим безразмерный интеграл буквой I . Для того чтобы вычислить его, следует произвести две последовательные замены переменных. Сначала введем переменную $q = 1/V$:

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{a}} \text{arcsch}(q)} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{q}{\sqrt{1 + q^2}} \right) dq,$$

а затем $\eta = \text{arcsch}(q)$:

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{a}} \eta} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{sh(\eta)}{\sqrt{1 + sh^2(\eta)}} \right) ch(\eta) d\eta = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{a}} \eta} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} ch(\eta) - sh(\eta) \right) d\eta$$

После этого, представив $sh(\eta)$ и $ch(\eta)$ в виде соответственно разности и суммы экспонент, можно взять интеграл по η :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\eta(\frac{1}{\sqrt{a}}-1)} + e^{-\eta(\frac{1}{\sqrt{a}}+1)}}{\sqrt{\alpha}} - e^{-\eta(\frac{1}{\sqrt{a}}-1)} + e^{-\eta(\frac{1}{\sqrt{a}}+1)} \right) d\eta = 1$$

Литература

- [1] A.V. Arzhannikov, A.M. Batrakov, A.V. Burdakov et.al, Experimental Study of the Dynamics of Neutron Emission from the GOL-3 Multimirror Trap// Plasma Physics Reports. -2006. -V.32. -p. 94-102.
- [2] А.В. Аникеев, П.А. Багрянский, А.Д. Беклемишев et. al. Подавление продольных потерь в газодинамической ловушке при помощи амбиполярной пробки// Физика плазмы. -2010.- Т.36. -с.413-422.
- [3] A.D. Beklemishev, Novosibirsk Project of Gas-Dynamic Multiple-Mirror Trap// Fusion Science and Technology. -2013. -V.63 (1T). -p.46-51.
- [4] Г.И.Будкер, В.В.Мирнов, Д.Д.Рютов, Влияние гофрировки магнитного поля на расширение и остывание плотной плазмы// Письма в ЖЭТФ. -1971. -Т.14. -С.320-322.
- [5] Д.Д.Рютов, Открытые ловушки// Успехи физических наук.-1988. - Т.154. С.565-614.
- [6] V.V.Mirnov, D.D.Ryutov, Gas-Dynamic Description of a Plasma in a Corrugated Magnetic Field// Nuclear Fusion. -1972. -V.12. -p.627-636.
- [7] I.A.Kotelnikov, New Results in the Theory of Multiple Mirror Plasma Confinement// Fusion Science and Technology. -2007. -V.51(2T). -p.186-189.
- [8] A.V.Burdakov A.A.Ivanov, E.P.Kruglyakov, Axially Symmetric Magnetic Mirror Traps: Status and Prospects// Fusion Science and Technology. - 2007. -V.51(2T). -p.17-22.

- [9] A.D. Beklemishev, Bounce Instability in a Multiple-Mirror Trap// Fusion Science and Technology. -2007. -V.51(2T). -p.180.
- [10] D.I. Skovorodin, A.D.Beklemishev, Flow-Driven Drift Instability in a Multiple-Mirror Trap// Fusion Science and Technology. -2013. -V.63(1T). -p.256-258.
- [11] D. I. Skovorodin, K.V. Zaytsev, A. D. Beklemishev, Global sound modes in mirror traps with anisotropic pressure// Physics of Plasmas. 2013. -V.20. -N.10. p.102123-1–102123-9.
- [12] A.A. Ivanov, V.V. Prikhodko, Gas-dynamic trap: an overview of the concept and experimental results// Plasma Phys. Control. Fusion. -2013. -V.55, -p.063001-1-063001-31.
- [13] D. D. Ryutov, H. L. Berk, B. I. Cohen et.al, Magneto-Hydrodynamically Stable Axisymmetric Mirrors// Phys. Plasmas. -2011. -V.18. -p. 092301-1 - 092301-25.
- [14] N. Winsor, J.L. Johnson, J.M. Dawson, Geodesic Acoustic Waves in Hydromagnetic Systems// Phys. Fluids. -1968. -V.11. -p.2448.
- [15] N. N. Gorelenkov, M. A. Van Zeeland, H. L. Berk et.al. Beta-induced Alfvén-acoustic eigenmodes in National Spherical Torus Experiment and DIII-D driven by beam ions// Phys. Plasmas. -2009. -V.16. p.056107.
- [16] W. W. Heidbrink, E. Ruskov, E. M. Carolipio et.al. What is the “beta-induced Alfvén eigenmode?”// Phys. Plasmas. -1999. -V.6. -1147.
- [17] S. E. Sharapov, D. Testa, B. Alper et.al. MHD spectroscopy through

- detecting toroidal Alfvén eigenmodes and Alfvén wave cascades// Phys. Lett. A. -2001. -V.289. -p.127.
- [18] A. G. Elfimov, R. M. O. Galvao, and S. E. Sharapov, Determination of the minimum value of the safety factor from geodesic Alfvén eigenmodes in Joint European Torus// Phys. Plasmas. -2010. -V.17. -p.110705.
- [19] P. H. Diamond, S.-I. Itoh, K. Itoh et.al. Zonal flows in plasma—a review// Plasma Phys. Controlled Fusion. -2005. -V.47. -p.R35.
- [20] K. Hallatschek, Nonlinear three-dimensional flows in magnetized plasmas// Plasma Phys. Controlled Fusion. -2007. -V.49. -p.B137.
- [21] V. P. Lakhin, V. I. Ilgisonis, Continuum modes in rotating plasmas: General equations and continuous spectra for large aspect ratio tokamaks // Phys. Plasmas. -2011. -V.18. -p.092103.
- [22] S. Wang, Zonal Flows in Tokamak Plasmas with Toroidal Rotation// Phys. Rev. Lett. -2006. -V.97. -p.085002.
- [23] C. Wahlberg, Geodesic Acoustic Mode Induced by Toroidal Rotation in Tokamaks// Phys. Rev. Lett. -2008. -V.101. -p.115003.
- [24] B. van der Holst, A.J.C. Belien, J.P. Goedbloed, Low frequency Alfvén waves induced by toroidal flows// Phys. Plasmas. -2000. -V.7. -p.4208.
- [25] A.I. Smolyakov, C. Nguyen, X. Garbet, Kinetic theory of electromagnetic geodesic acoustic modes// Plasma Phys. Control. Fusion. -2008. -V.50. -p.115008.
- [26] Г.И.Будкер, Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в элек-

трическую// Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. -1958. -Т.3. -С.3-31.

- [27] V.P. Pastukhov, Collisional Losses of Electrons from an Adiabatic Trap in a Plasma with a Positive Potential// Nucl. Fusion. -1974. -V.14. -P.3-6.
- [28] R.H.Cohen, M.E.Rensink, T.A.Cutler, A.A.Mirin, Collisional Loss of Electrostatically Confined Species in a Magnetic Mirror// Nucl. Fusion. - 1978. -V.18. -P.1229-1243.
- [29] И.К.Конкашбаев, И.С.Ландман, Ф.Р.Улинич, О возможности уменьшения электронного потока тепла из открытых ловушек// ЖЭТФ. -1978. -Т.74. С.956-963.
- [30] K.D.Marx, Effects of Spatial Variations on Collisional Losses in a Mirror-Confined Plasma// Phys. of Fluids. -1970. -V.13. -p.1355-1371.
- [31] В.В. Мирнов, Д.Д. Рютов, Газодинамическая ловушка// Итоги науки и техники: физика плазмы. -1988. -Т.8. -С.77-130.
- [32] В.В. Мирнов, О.А. Ткаченко, Распределение электростатического потенциала в газодинамической ловушке// Новосибирск: Препринт ИЯФ СО АН СССР №86-28. -1986.
- [33] В.В. Мирнов, М.С.Пеккер, Переход от кинетического к газодинамическому режиму удержания плазмы в пробкотроне// ПМТФ. -1984. №6. -С.3-9.
- [34] A. Yu. Chirkov et.al. Plasma Kinetics Models for Fusion Systems Based on the Axially-Symmetric Mirror Devices// Fusion Science and Technology. -2011. -V.59. -p.39-41.

- [35] В.Е.Захаров, В.И.Карпман, К нелинейной теории затухания плазменных волн// ЖЭТФ. -1962. -Т.43. С.491-499.
- [36] Б.Н.Брейзман, В.В.Мирнов, Д.Д.Рютов, Омическое сопротивление неоднородной плазмы// ЖЭТФ. -1970. -Т.58. С.1771-1783.
- [37] M.N.Rosenbluth, W.McDonald, D.Judd, Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force// Phys. Rev. -1957. -V.107. -N.1. p.
- [38] Б.А.Трубников, Приведение кинетического уравнения в случае кулоновских столкновений к дифференциальному виду// Журн. эксперим. и теор. физ. -1958. -В.34. -С.1341-1343.
- [39] V.V.Mirnov, Skin Effect in a Corrugated Magnetic Field// Nuclear Fusion. -1971. -V.11. -p.221-230.
- [40] Yusuke Kato, Masayoshi Tajiri, Tosiya Taniuti, Propagation of Hydromagnetic Waves in Collisionless Plasma. I// J. Phys. Soc. Jpn. -1966. V.21. p.765-777.
- [41] I.A.Kotelnikov, Equilibrium of a High- β Plasma with Sloshing Ions above the Mirror Instability Threshold// Fusion Science and Technology. -2011. -V.55(2T). p.47-50.
- [42] Л.Д.Ландау. О колебаниях электронной плазмы// ЖЭТФ. -1946. -Т.16. -С.574.
- [43] I.V.Bernstein, Waves in a Plasma in a Magnetic Field// Phys. Rev. -1958. -V.109. -p.10-21.
- [44] А.Ф.Александров, Л.С.Богданкевич, А.А.Рухадзе, Основы электродинамики плазмы. М: Высшая школа, 1988

- [45] C.F.Chew, M.L.Goldberger, F.E.Low, The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions// Proc. Roy. Soc. -1956. -V.A236. p.112-118.
- [46] В.П.Мирнов, В.П.Нагорный, Д.Д.Рютов, Газодинамическая ловушка с двухкомпонентной плазмой// Новосибирск: Препринт ИЯФ СО АН СССР №84-40. -1984.
- [47] Д.В.Сивухин, Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме// Вопросы теории плазмы. -1964. -В.4. С.81-187.
- [48] Д.В. Юров// Частное сообщение. -2011.