

Криволинейные системы координат

Для исследования равновесия и устойчивости плазмы в магнитном поле применяются специальные криволинейные системы координат. Действительно, в равновесии силовые линии поля лежат на поверхностях равного давления - потоковых поверхностях. Очень удобно ввести метку поверхности, скажем, a , так что все точки на ней будут иметь одну одинаковую координату - a .

Потоковые поверхности часто замкнуты, например в тороидальных ловушках. Это позволяет сделать две дополнительные координаты θ, ζ (размечающие магнитную поверхность) периодическими. В открытых ловушках только одна координата из этой пары - периодическая. Зато появляется возможность пометить каждую силовую линию своей меткой - координатой, а дополнительную координату выбрать вдоль поля. В торе это невозможно из-за различного периода замыкания силовых линий на разных поверхностях.

Допустим, мы поместили все точки пространства с помощью координат x^i :

$$\begin{aligned}a &= x^1, \\ \theta &= x^2, \\ \zeta &= x^3.\end{aligned}$$

Это означает, что можно найти радиус-вектор по координатам

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i), \quad (1)$$

и наоборот, координаты по радиус-вектору

$$x^i = x^i(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Последнее означает, что задание координат фактически осуществляется заданием трёх независимых скалярных функций радиус-вектора.

С помощью координатных функций $x^i(\mathbf{r})$ можно ввести базис, причём даже два. Первый из них связан с направлением вдоль координатной линии. Действительно, вектор смещения между двумя соседними точками при малом изменении координат можно представить в виде

$$d\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i \equiv \mathbf{e}_i dx^i. \quad (3)$$

Базис \mathbf{e}_i составлен из векторов, касательных к координатным линиям. **Он не ортогонален и не нормирован!**

Второй базис построен на нормалях к координатным поверхностям.

Координатная поверхность - поверхность $x^i(\mathbf{r}) = \text{const}$, а нормаль к ней направлена по градиенту:

$$\mathbf{e}^i = \nabla x^i(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Этот базис также не ортогонален и не нормирован. Однако оба базиса оказываются *взаимно ортонормированными*, т.е., скалярное произведение

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i. \quad (5)$$

Понятно, что нормаль к поверхности перпендикулярна двум касательным векторам к координатным линиям на этой поверхности. Ну а при умножении векторов с одинаковым индексом действительно получается

$$\frac{\partial x^i}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \equiv 1. \quad (6)$$

Любой вектор можно разложить по двум базисам

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i = A^i \mathbf{e}_i. \quad (7)$$

По повторяющимся индексам - суммирование. *Координаты с индексом снизу - ковариантные, сверху - контравариантные.*

Скалярные произведения векторов легко вычисляются только если для них известны разные координаты

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i \mathbf{e}^i B^j \mathbf{e}_j = A_i B^i = A^i B_i. \quad (8)$$

Поэтому скалярное произведение - свёртка по верхнему и нижнему индексам, но не по двум верхним или двум нижним. А что делать, если известны только какие-то одни?

Можно воспользоваться разложением векторов одного базиса по другому.
По общему правилу

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i &= g^{ij} \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{e}_i &= g_{ij} \mathbf{e}^j, \end{aligned}$$

где g^{ij} и g_{ij} - соответствующие координаты, называемые метрическими коэффициентами. Если воспользоваться свойством взаимной ортогональности, получим

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j, \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j. \quad (9)$$

С помощью метрических коэффициентов можно опускать и поднимать индексы:

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = A^j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = g_{ij} A^j, \quad (10)$$

$$A^i = g^{ij} A_j. \quad (11)$$

Коэффициенты g_{ij} образуют метрический тензор. С его помощью можно найти расстояние между двумя близкими точками через дифференциалы

$$dl^2 \equiv \mathbf{e}_i dx^i \mathbf{e}_j dx^j = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (12)$$

Смешанные произведения базисных векторов образуют элементарные объёмы, которые естественным образом связаны с якобианом преобразования от декартовых к криволинейным координатам и обратно. Действительно,

$$\mathcal{J} = \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{1x} & \mathbf{e}_{2x} & \mathbf{e}_{3x} \\ \mathbf{e}_{1y} & \mathbf{e}_{2y} & \mathbf{e}_{3y} \\ \mathbf{e}_{1z} & \mathbf{e}_{2z} & \mathbf{e}_{3z} \end{vmatrix} = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \frac{1}{(\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3)}. \quad (13)$$

Кроме того,

$$\det |g_{ij}| \equiv g = \mathcal{J}^2. \quad (14)$$

Поэтому вместо якобиана часто просто пишут $\mathcal{J} = \sqrt{g}$. Матрицы g_{ij} и g^{ij} - взаимно обратные. Это значит, что

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1}. \quad (15)$$

Ещё одна пара полезных соотношений между базисными векторами:

$$\mathbf{e}_i = \sqrt{g} \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k, \quad (16)$$

$$\mathbf{e}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k, \quad (17)$$

где i, j, k образуют правильно упорядоченную тройку различных индексов.

Отсюда сразу следуют выражения для координат векторного произведения

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^i e_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i e^i = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Или можно просто запомнить, что абсолютно антисимметричный тензор Леви-Чивита имеет координаты не 1 и -1 , а \sqrt{g} и $-\sqrt{g}$ (в ковариантном представлении) и $1/\sqrt{g}$ и $-1/\sqrt{g}$ (в контравариантном). Тогда по-прежнему

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]^i = e^{ijk} A_j B_k, \quad [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = e_{ijk} A^j B^k. \quad (20)$$

Ковариантные компоненты векторного произведения выражаются через ковариантные компоненты векторов, и наоборот.

Дифференциальные операторы

Наша цель - записать в криволинейных координатах дифференциальные уравнения. Поэтому интересны координатные представления градиента, дивергенции, ротора.

Проще всего дело обстоит с градиентом скалярной функции:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \nabla x^i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \mathbf{e}^i. \quad (21)$$

Следовательно, ковариантные компоненты градиента - частные производные:

$$(\nabla\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}. \quad (22)$$

Дивергенция выражается чуть сложнее:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot A^i \mathbf{e}_i = \nabla \cdot A^i \sqrt{g} \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k. \quad (23)$$

Вспоминаем, что $\mathbf{e}^j = \nabla x^j$, а $\nabla \cdot [\nabla x^j \times \nabla x^k] = 0$. Поэтому

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k \cdot \nabla) A^i \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\mathbf{e}_i \nabla) A^i \sqrt{g}. \quad (24)$$

Окончательно,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i). \quad (25)$$

Ротор векторной функции естественно представляется как векторное произведение:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]^i \mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \quad (26)$$

Но простое выражение получается только для контрковариантных компонент ротора, так как для градиента просто записываются только ковариантные.

Уравнения равновесия в потоковых переменных

Предположим, что система магнитных поверхностей устроена как система вложенных торов. Пусть $a = \text{const}$ - уравнение магнитной поверхности. Выберем её в качестве координатной. Тогда у магнитного поля будут только две контравариантные компоненты

$$B^i = (0, B^2, B^3), \quad (27)$$

поскольку $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{B} \cdot \nabla a = 0$.

Запишем условие $\text{div} \mathbf{B} = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} B^2 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \sqrt{g} B^3 = 0. \quad (28)$$

Оно автоматически выполняется, если

$$\begin{cases} 2\pi \sqrt{g} B^2 = -\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} - \Psi'(a) \\ 2\pi \sqrt{g} B^3 = \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \Phi'(a) \end{cases} \quad (29)$$

т.е.,

$$B^i = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left(0, -\frac{\partial\eta}{\partial\zeta} - \Psi'(a), \frac{\partial\eta}{\partial\zeta} + \Phi'(a) \right). \quad (30)$$

Здесь η - произвольная функция всех координат, а $\Psi'(a)$, $\Phi'(a)$ - функции потоковой поверхности. Физ. смысл этих функций станет ясен позже.

Введём векторный потенциал поля \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial a} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}, \quad (31)$$

получим

$$A_i = \frac{1}{2\pi} (-\eta, \Phi(a), \Psi(a)). \quad (32)$$

Это решение не единственное, с точностью до калибровки.

Вычислим потоки магнитного поля через дырку тора и вдоль тора.

$$\int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \text{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} dl. \quad (33)$$

Следовательно,

$$\int_{pol} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int A_3 d\zeta = \Psi(a), \quad (34)$$

$$\int_{tor} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int A_2 d\theta = \Phi(a). \quad (35)$$

Таким образом, Φ и Ψ - тороидальный и полоидальный потоки магнитного поля, ограниченные потоковой поверхностью.

Плотность тока в равновесии ведёт себя очень похоже на напряжённость магнитного поля. Действительно, из уравнения равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (36)$$

следует $\mathbf{j} \nabla a = 0$ (т.к. $\mathbf{B} \nabla p = 0 \Rightarrow p = p(a)$, $\mathbf{j} \nabla p = 0 \Rightarrow \mathbf{j} \nabla a = 0$), токи замыкаются, $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, а роль векторного потенциала играет магнитное поле

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (37)$$

Поэтому для плотности тока можно проделать те же выкладки, что и для магнитного поля. По аналогии получим

$$j^i = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left(0, -\frac{\partial \nu}{\partial \zeta} - F'(a), \frac{\partial \nu}{\partial \zeta} + J'(a) \right). \quad (38)$$

Здесь F - полоидальный (через дырку тора), а J - тороидальный ток. Вместо выражения для векторного потенциала получим

$$B_i = \frac{2}{c} (-\nu, J(a), F(a)) + \frac{2}{c} \nabla \varphi. \quad (39)$$

Здесь φ - ещё одна произвольная функция всех трёх координат, имеющая смысл калибровки.

Итак, у нас есть два выражения для ковариантных и контравариантных компонент поля. Осталось сравнить их между собой с помощью формулы $B_i = g_{ik} B^k$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi}{c} \left(-\nu + \frac{\partial\varphi}{\partial a} \right) = -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \left(\Psi' + \frac{\partial\eta}{\partial\zeta} \right) + \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} \left(\Phi' + \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right) \\ \frac{4\pi}{c} \left(J + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) = -\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \left(\Psi' + \frac{\partial\eta}{\partial\zeta} \right) + \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \left(\Phi' + \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right) \\ \frac{4\pi}{c} \left(F + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \right) = -\frac{g_{32}}{\sqrt{g}} \left(\Psi' + \frac{\partial\eta}{\partial\zeta} \right) + \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left(\Phi' + \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right) \end{array} \right. \quad (40)$$

По сути это уравнения Максвелла с учётом уравнения равновесия. Можно рассматривать их как уравнения на η , φ , ν при заданных метрических коэффициентах. Т.е., как бы выглядели поля и токи при заданной форме магнитных поверхностей и заданной потоковой системе координат.

У нас всё ещё есть существенная свобода в выборе координат θ, ζ на магнитной поверхности. Её можно использовать для упрощения системы. Рассмотрим далее более простой случай симметричного тора - токамака. Выберем координату ζ вокруг оси симметрии (тороидальный угол), тогда $\partial/\partial\zeta \equiv 0$. Кроме того, поскольку θ не зависит от тороидального угла, координаты оказываются частично ортогональными: $g_{13} = g_{23} = g_{32} = 0$. Остаётся

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi}{c} \left(-\nu + \frac{\partial\varphi}{\partial a} \right) = -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \Psi' \\ \frac{4\pi}{c} \left(J + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) = -\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \Psi' \\ \frac{4\pi}{c} F = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left(\Phi' + \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right). \end{array} \right. \quad (41)$$

Всё ещё остаётся свобода в выборе координаты θ на окружности сечения магнитной поверхности. Её тоже можно употребить с пользой для упрощения уравнений.

- *Ортогональные координаты (Hamada)*: если координатная система ортогональна, то перекрёстные (недиагональные) метрические коэффициенты - зануляются, $g_{12} = 0$.
- *Координаты с прямыми силовыми линиями (Кадомцев и Погуце)*: пусть они не ортогональны, но g_{33}/\sqrt{g} не зависит от θ . Тогда $\eta = 0$, и

$$\mathbf{B}\nabla = B^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left(\Phi'(a) \frac{\partial}{\partial \zeta} - \Psi'(a) \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (42)$$

Значительно упрощается оператор производной вдоль магнитного поля. Коэффициент запаса устойчивости

$$q(a) = -\Phi'(a) / \Psi'(a). \quad (43)$$

- *Координаты Бузера (Boozer)*: координаты с постоянным якобианом, \sqrt{g} не зависит от θ .

Наконец, вернёмся к собственно уравнению равновесия. Даже в общем случае оно имеет лишь одну нетривиальную компоненту:

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\sqrt{g}}{c} (j^2 B^3 - j^3 B^2), \quad (44)$$

$$4\pi^2 c p' \sqrt{g} = \left(J' + \frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right) \left(\Psi' + \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right) - \left(F' + \frac{\partial \nu}{\partial \zeta} \right) \left(\Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right). \quad (45)$$

В токамаке

$$4\pi^2 c p' \sqrt{g} = \left(J' + \frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right) \Psi' - F' \left(\Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right), \quad (46)$$

так что при усреднении по магнитной поверхности получается

$$4\pi^2 c p' \langle \sqrt{g} \rangle = J' \Psi' - F' \Phi', \quad (47)$$

или

$$c p' V' = J' \Psi' - F' \Phi'. \quad (48)$$

Здесь

$$V(a) = \int \sqrt{g} da d\theta d\zeta = 4\pi^2 \int \langle \sqrt{g} \rangle da \quad (49)$$

- объём ограниченный магнитной поверхностью.

Уравнения Кадомцева

Ещё один пример приложения криволинейных координат - вывод уравнений для дрейфовых поверхностей в открытой ловушке.

В открытой ловушке всегда можно ввести такую систему координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , в которой ξ^3 отсчитывается вдоль силовой линии. Такая система автоматически оказывается потоковой, хотя и не обязательно связанной с поверхностью постоянного давления.

$$B^i = (0, 0, B^3), \quad (50)$$

причём

$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} \sqrt{g} B^3 = 0, \quad (51)$$

$$B = B^3 \sqrt{g_{33}}, \quad (52)$$

так что

$$B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} = \text{const.} \quad (53)$$

Координаты единичного вектора вдоль поля $\tau = \mathbf{B}/B$ оказываются

$$\tau^i = (0, 0, 1/\sqrt{g_{33}}). \quad (54)$$

Запишем уравнения дрейфового движения в нашей системе координат. Будем исходить из представления

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = v_{\parallel} \boldsymbol{\tau} + \frac{v_{\parallel}}{\Omega} \text{rot} (v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}), \quad (55)$$

где v_{\parallel} считается функцией координат, так как она выражается через сохраняющиеся при дрейфе энергию и магнитный момент. Запишем это векторное уравнение в наших координатах.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi^1}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{\Omega\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial\xi^2} v_{\parallel} \tau_3 - \frac{\partial}{\partial\xi^3} v_{\parallel} \tau_2 \right) \\ \frac{d\xi^2}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{\Omega\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial\xi^3} v_{\parallel} \tau_1 - \frac{\partial}{\partial\xi^1} v_{\parallel} \tau_3 \right) \\ \frac{d\xi^3}{dt} = v_{\parallel} \tau^3 + \frac{v_{\parallel}}{\Omega\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial\xi^3} v_{\parallel} \tau_1 - \frac{\partial}{\partial\xi^1} v_{\parallel} \tau_3 \right). \end{array} \right. \quad (56)$$

В последнем уравнении (для продольного движения) пренебрежём скоростью дрейфа по сравнению с тепловой, тогда

$$dt = \frac{d\xi^3}{v_{\parallel} \tau^3} = \frac{\sqrt{g_{33}}}{v_{\parallel}} d\xi^3. \quad (57)$$

Подставим в первые два уравнения системы и проинтегрируем их по баунс-периоду колебаний вдоль ξ^3 :

$$\begin{cases} \Delta\xi^1 = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \int \left(\frac{\partial}{\partial \xi^2} v_{\parallel} \tau_3 - \frac{\partial}{\partial \xi^3} v_{\parallel} \tau_2 \right) d\xi^3 \\ \Delta\xi^2 = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \int \left(\frac{\partial}{\partial \xi^3} v_{\parallel} \tau_1 - \frac{\partial}{\partial \xi^1} v_{\parallel} \tau_3 \right) d\xi^3. \end{cases} \quad (58)$$

Комбинация

$$\frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \propto \frac{1}{B} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \quad (59)$$

и выносятся из-под интегрирования!

Два слагаемых зануляются как интеграл от производной по периоду, и получаются

- *Уравнения Кадомцева*

$$\begin{cases} \Delta\xi^1 = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi^2}, \\ \Delta\xi^2 = -\frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi^1}, \end{cases} \quad (60)$$

где

$$J_{\parallel} \equiv \oint v_{\parallel} \tau_3 d\xi^3 = \oint v_{\parallel} d\ell. \quad (61)$$

Отсюда следует, что частица движется по поверхности $J_{\parallel}(\xi^1, \xi^2) = \text{const}$.

Элементы гамильтоновой динамики частиц

В кинетической теории равновесная функция распределения должна зависеть от интегралов движения частицы. А сколько таких интегралов существует? Поточковые магнитные координаты вводятся при наличии магнитных поверхностей. А всегда ли такие поверхности существуют? Существуют ли в данной системе дрейфовые поверхности? Есть ли траектории частиц, начинающиеся в глубине плазмы и заканчивающиеся на стенке, и сколько их? Ответы на эти важные вопросы можно найти с помощью теории нелинейной динамики.

Известно, что динамика заряженной частицы в постоянном электромагнитном поле описывается как автономная гамильтонова система с тремя степенями свободы. Однако частица может быть не одна, или на её движение могут быть наложены кинематические связи, так что в общем случае число степеней свободы системы - произвольно.

Автономной системе с N степенями свободы соответствует фазовое пространство размерности $2N$.

Сведение системы к автономной

Если система неавтономна, то зависимость от времени можно учесть добавлением одного дополнительного (временного) измерения в фазовое пространство. В таких случаях говорят о системе с полуцелым числом степеней свободы, например, $N = 3/2$. Есть и общее утверждение

- Любая неавтономная гамильтонова система с N степенями свободы может быть сведена к автономной системе с $N + 1$ степенью свободы. Поэтому, без ограничения общности, можно изучать только автономные системы.

Доказательство: Пусть $H(p_1 \dots p_N, q_1 \dots q_N, t)$ - функция Гамильтона исходной системы. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$\hat{H}(p_1 \dots p_N, q_1 \dots q_N, p_{N+1}, q_{N+1}) \equiv H(p_1 \dots p_N, q_1 \dots q_N, p_{N+1}) - q_{N+1}. \quad (62)$$

Для неё все уравнения Гамильтона, кроме последней пары, точно воспроизводят уравнения исходной системы при условии $p_{N+1} \equiv t$. Последняя пара уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_{N+1} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_{N+1}} = \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{t=p_{N+1}}, \\ \dot{p}_{N+1} &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_{N+1}} \equiv 1, \end{aligned}$$

что влечёт $p_{N+1} \equiv t$.

Следовательно, новая автономная система с $N + 1$ степенью свободы воспроизводит поведение исходной неавтономной системы. Обратное тоже верно. Автономную систему можно описать как неавтономную, с числом степеней свободы меньше на единицу.

Магнитное поле как фазовый поток

- Поведение силовых линий магнитного поля в трёхмерном пространстве эквивалентно траекториям динамической гамильтоновой системы в трёхмерном фазовом пространстве ($N = 3/2$, неавтономная система с одной степенью свободы).

Доказательство: Как и фазовый поток гамильтоновой системы (по теореме Лиувилля), напряжённость магнитного поля бездивергентна, поэтому системы оказываются эквивалентными. В явном виде функцию Гамильтона можно найти, следуя, например, работам

- *Boozer*: Запишем магнитное поле через потенциалы

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\phi \times \nabla\chi. \quad (63)$$

Это можно сделать в принципе, и поле будет автоматически бездивергентным. Далее, считаем (ψ, θ, ϕ) координатами, а $\chi(\psi, \theta, \phi)$ - их функцией. Тогда,

$$\nabla\phi \times \nabla\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\theta} \nabla\phi \times \nabla\theta + \frac{\partial\chi}{\partial\psi} \nabla\phi \times \nabla\psi, \quad (64)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\mathbf{e}_\phi - \frac{\partial\chi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\psi + \frac{\partial\chi}{\partial\psi} \mathbf{e}_\theta \right). \quad (65)$$

Сравним выражение для вектора магнитного поля с дифференциалом

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_i dx^i, \quad (66)$$

и потребуем пропорциональности коэффициентов при базисных векторах (тогда они параллельны). Получим, что вдоль силовой линии,

$$\frac{d\psi}{d\phi} = -\frac{\partial\chi}{\partial\theta}, \quad \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\partial\chi}{\partial\psi}, \quad (67)$$

т.е., получились уравнения Гамильтона одномерной неавтономной системы, причём $\chi(\psi, \theta, \phi)$ - *гамильтониан*, а ϕ *играет роль времени*. Это представление широко используется в теории стеллараторов.

- *Cary & Littlejohn*: Предположим, что нам известен векторный потенциал поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Выберем подходящую пространственную координату ξ в качестве эрзац-времени, и составим функционал действия в виде

$$S(p, q, t) = \int_a^b (pdq - Hdt) \equiv \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_a^b (A_i dx^i + A_\xi d\xi). \quad (68)$$

Первые интегралы и переменные действие-угол.

Рассматриваем далее автономные гамильтоновы системы. Они имеют по крайней мере один интеграл движения - энергию. Интегралы движения $F_i(p, q)$, позволяющие понизить порядок гамильтоновой системы уравнений, называются *первыми интегралами*. Они удовлетворяют условию

$$[F_i, H] = 0. \quad (69)$$

Порядок системы понижается, только если добавляемый интеграл движения является независимым и находится в *инволюции* со всеми уже имеющимися,

$$[F_i, F_k] = 0 \quad (70)$$

во всех точках фазового пространства.

Отличительное свойство уравнений Гамильтона (от прочих систем дифф. уравнений) в том, что их можно проинтегрировать в квадратурах, если известно всего лишь N первых интегралов. В общем случае надо $2N$.

Независимых первых интегралов для гамильтоновой системы не может быть более N , и первые интегралы не интегрируют задачу, если их число менее N .

- **Теорема Лиувилля-Арнольда:** Пусть дана гамильтоновская система с N степенями свободы, совершающая финитное движение и имеющая N первых интегралов, линейно независимых и находящихся в инволюции. Тогда:

1. Траектории системы лежат на N -мерном торе,
2. Движение является условно-периодическим и характеризуется N частотами,

$$\omega_i = \omega_i (F_1, F_2 \dots F_N), \quad (71)$$

3. Угловые переменные ϑ_i , характеризующие координаты на торе, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i (F_1, F_2 \dots F_N), \quad (72)$$

так что

$$\vartheta_i = \omega_i t + \text{const.} \quad (73)$$

Поскольку траектории интегрируемой системы лежат на торе, то говорят о существовании *инвариантных торов* в этом случае. (Здесь инвариантность понимается как сохранение при операции продвижения по времени.)

Относительное расположение инвариантных торов, соответствующих разным значениям первых интегралов, определяется размерностью фазового пространства.

- При $N \leq 2$ торы вложены друг в друга и не пересекаются (как магнитные поверхности токамака). Говорят, что торы *делят пространство*.
- При $N > 2$ торы не делят пространство и пересекаются!

Действительно, в $2N$ -мерном фазовом пространстве поверхность постоянной энергии имеет размерность $2N - 1$. Чтобы её разделить на части, нужны границы размерностью $2N - 2$. Поэтому, чтобы торы делили фазовое пространство, их размерность должна быть не меньше,

$$N \geq 2N - 2. \quad (74)$$

Отсюда $N \leq 2$.

Движение на торе характеризуется набором частот ω_i , которые непрерывно зависят от первых интегралов, т.е., меняются при переходе от тора к тору. На некоторых торах траектория замыкается сама на себя, в этом случае говорят о *резонансных торах* (резонансных магнитных поверхностях). Формально, наличие резонанса означает существование ненулевого N - мерного вектора C_i , такого, что

$$\sum C_i \omega_i (F_1, F_2 \dots F_N) = 0. \quad (75)$$

Если таких векторов на торе более одного, то резонанс - вырожденный.

В интегрируемом случае можно ввести очень удобные канонические переменные - *переменные действие-угол*. Угловая переменная ϑ_i уже очень удобна, поэтому задача сводится к отысканию обобщённых импульсов, называемых действиями, канонически сопряжённых ϑ_i . Действительно, пусть такие импульсы - $I_1 \dots I_N$ - найдены. Тогда, согласно уравнениям Гамильтона,

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i (F_1, F_2 \dots F_N) \equiv \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad (76)$$

т.е., все ϑ_i являются циклическими переменными, а гамильтониан и остальные первые интегралы можно выразить как функции только действий. В частности, теперь можно считать

$$\omega_i (I_1, \dots I_N) = \frac{\partial H (I_1 \dots I_N)}{\partial I_i}. \quad (77)$$

Формально, производящая функция

$$S(q, I) = \int \sum p_i(q, I) dq_i \quad (78)$$

реализует каноническое преобразование $(p, q) \rightarrow (I, \vartheta)$. При этом переменные действия

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \sum p_i(q, I) dq_i, \quad (79)$$

причём интегрирование производится по N неприводимым контурам, охватывающим инвариантный тор.

К сожалению, полностью интегрируемых систем в природе довольно мало. Однако все системы с одной степенью свободы - интегрируемы. А в общем случае инвариантных торов может и не быть.

Отображения.

Если всё фазовое пространство разделить на две части с помощью гиперповерхности, то потом вместо слежения за траекторией частицы можно следить только за последовательными точками пересечения траектории с нашей поверхностью. Связь текущего положения точки пересечения и следующего задаёт преобразование поверхности

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) = \hat{T}_n(p_n, q_n). \quad (80)$$

Оператор \hat{T}_n должен определяться с помощью уравнений движения и задаёт *отображение Пуанкаре*. Оно действует в пространстве меньшей размерности, чем фазовое пространство исходной системы. В частности, важный случай $N = 2$ соответствует преобразованию двумерной поверхности. Это проще, чем пытаться рисовать траектории в четырёхмерном или трёхмерном пространстве.

Считается, что отображения обладают определённым классом универсальности. Т.е., если изучить свойства некоторого класса отображений плоскости, то мы многое поймём и о поведении динамических систем.

Следствие: если система имеет инвариантный тор, то отображение Пуанкаре имеет инвариантную кривую.

Теория возмущений

Попробуем исследовать задачу, гамильтониан которой мало отличается от интегрируемого,

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, t). \quad (81)$$

Здесь ε - безразмерный параметр возмущения, а $V(I, \vartheta, t)$ - его потенциал в переменных действие-угол невозмущённой задачи.

Самый простой, но почти никогда не срабатывающий способ решения - искать его в виде ряда по степеням ε . Причина, почему он не срабатывает, заключается в существовании резонансов. Либо между временной зависимостью возмущения и собственными колебаниями, либо между колебаниями по разным степеням свободы. Каким бы малым ни было возмущение, в окрестности резонанса его влияние велико.

Проблема малых знаменателей

Пусть сперва система имеет одну степень свободы, а $V(I, \vartheta, t)$ - периодическая по времени с периодом $2\pi/\Omega$. Тогда

$$V(I, \vartheta, t) = \sum_{n,m} V_{nm}(I) e^{in\vartheta - im\Omega t}, \quad (82)$$

с условием вещественности $V_{-n,-m} = V_{nm}^*$. Уравнения Гамильтона примут вид

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -i\varepsilon \sum_{n,m} n V_{nm}(I) e^{in\vartheta - im\Omega t}, \quad (83)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \sum_{n,m} V'_{nm}(I) e^{in\vartheta - im\Omega t}. \quad (84)$$

В нулевом приближении $I^{(0)} = I_0$, $\vartheta^{(0)} = \omega(I_0)t + \vartheta_0$. Первое приближение получится, если подставить нулевое в правую часть точных уравнений:

$$j^{(1)} = -i\varepsilon \sum_{n,m} nV_{nm}(I_0)e^{i(n\omega_0 - m\Omega)t + in\vartheta_0}, \quad (85)$$

$$\dot{\vartheta}^{(1)} = I^{(1)} \left(\frac{d\omega}{dI} \right)_{I_0} + \varepsilon \sum_{n,m} V'_{nm}(I_0)e^{i(n\omega_0 - m\Omega)t + in\vartheta_0}, \quad (86)$$

где $\omega_0 = \omega(I_0)$.

После интегрирования по времени получим

$$I^{(1)} = -\varepsilon \sum_{n,m} \frac{nV_{nm}(I_0)}{n\omega_0 - im\Omega} e^{i(n\omega_0 - m\Omega)t + in\vartheta_0} + \text{const}, \quad (87)$$

и аналогичное выражение для $\vartheta^{(1)}$.

- Полученные выражения содержат резонансные знаменатели. Они могут не сработать для одной конкретной траектории, но если надо следить за ансамблем частиц, резонансы присутствуют почти всегда.
- В нелинейных системах (напр. нелинейный маятник) частота зависит от траектории $\omega = \omega(I)$, так что резонансы заведомо есть.
- Чем выше порядок приближения, тем больше резонансных частот появляется.
- При малом но конечном ε условие резонанса не должно выполняться точно, чтобы нарушить применимость.

- Резонансы приводят к линейному по времени нарастанию поправок, поэтому наше разложение по степеням ε годится только ограниченный интервал времени: $t < t_\varepsilon \propto 1/\varepsilon$.
- Если не использовать переменные действие-угол, то всё ещё хуже, $t_\varepsilon \propto 1/\sqrt{\varepsilon}$.
- Если система имеет больше одной степени свободы, то даже время-независимое возмущение обычно приводит к резонансным знаменателям на резонансных торах.
- Резонанс с вынуждающей силой - внешний. Между степенями свободы - внутренний.

Метод усреднения

Если в задаче есть два сильно отличающихся временных масштаба, то по “быстрому” времени можно усреднить, и получить новое описание медленной эволюции системы.

- Теорема о усреднении: *Если функция $g(\vartheta)$, определённая на траектории движения достаточно гладкая, а движение происходит на невырожденном торе, то среднее по фазе равно среднему по времени вдоль траектории, $\bar{g} = \langle g \rangle$.*

$$\bar{g} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\vartheta(t)) dt, \quad (88)$$

$$\langle g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} g(\vartheta_1 \dots \vartheta_N) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_N. \quad (89)$$

- метод усреднения работает только вдали от резонансов.

Вихревой дрейф в быстропеременном поле

Запишем уравнение движения заряда в электростатическом поле

$$\mathbf{r}_{tt} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos \omega t. \quad (90)$$

Координата заряда быстро осциллирует со временем относительно медленно меняющегося среднего положения, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \xi(t)$.

Подставим это в уравнение и разложим по степеням ξ :

$$\mathbf{R}_{tt} + \xi_{tt} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cos \omega t + \frac{e}{m} (\xi \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cos \omega t. \quad (91)$$

Отсюда

$$\xi \approx -\frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cos \omega t, \quad (92)$$

$$\mathbf{R}_{tt} = \frac{e}{m} \langle (\xi \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cos \omega t \rangle = -\frac{e^2}{2m^2\omega^2} (\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}). \quad (93)$$

В электростатическом поле $\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{R}) = 0$, поэтому

$$(\mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \nabla \frac{\mathbf{E}^2}{2} \quad (94)$$

так что

$$\mathbf{R}_{tt} = -\frac{e^2}{4m^2\omega^2} \nabla \mathbf{E}^2. \quad (95)$$

Сила Миллера выпихивает частицы из области сильного поля. Если высокочастотное поле имеет неколлинеарные составляющие с разными частотами, то сила Миллера перестаёт быть потенциальной. Действительно,

$$\mathbf{F} = \frac{e}{m} \langle (\xi \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cos \omega t \rangle, \quad (96)$$

где

$$\xi = \frac{e}{m} \int \int dt'' dt' \mathbf{E}(\mathbf{R}, t''), \quad (97)$$

и поэтому $\text{div}\xi = \text{rot}\xi = 0$ как и для \mathbf{E} . В этом случае

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi - \text{rot}\mathbf{A}, \quad (98)$$

где

$$\Phi = -\frac{e}{2m} \langle (\xi \mathbf{E}) \rangle, \quad \mathbf{A} = \frac{e}{2m} \langle \xi \times \mathbf{E} \rangle. \quad (99)$$

Если

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \sum \left(\mathbf{E}_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \right), \quad (100)$$

то

$$\xi = -\frac{e}{4m} \sum \frac{1}{\omega_k^2} \left(\mathbf{E}_k e^{i\omega_k t} + \text{c.c.} \right). \quad (101)$$

После усреднений получим

$$\Phi = \frac{e^2}{8m^2} \sum_{k,k'} \frac{1}{\omega_k^2} \left(\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'}^* e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} + \text{c.c.} \right), \quad (102)$$

$$\mathbf{A} = \frac{e^2}{8m^2} \sum_{k,k'} \frac{1}{\omega_k^2} \left(\mathbf{E}_k \times \mathbf{E}_{k'}^* e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} + \text{c.c.} \right). \quad (103)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi - \text{rot}\mathbf{A}.$$

Адиабатические инварианты

Адиабатическим инвариантом системы с медленно меняющимся параметром является *действие* невозмущённой и невырожденной системы.

- Изменение адиабатического инварианта - экспоненциально мало,

$$\delta I \sim \exp(-c_1 \omega T_0) \sim \exp(-c_2/\varepsilon) \quad (104)$$

так что оно равно нулю в любом порядке по ε , но всё-таки не ноль!

- При $N > 2$ появляется возможность сильного изменения адиабатического инварианта, однако только в узкой зоне фазового пространства. Это связано с тем, что нерезонансные торы не делят пространство.
- Арнольд: "Изменения адиабатических инвариантов малы для множества начальных условий, представляющего всё фазовое пространство, за исключением множества малой меры."

Несохранение адиабатических инвариантов

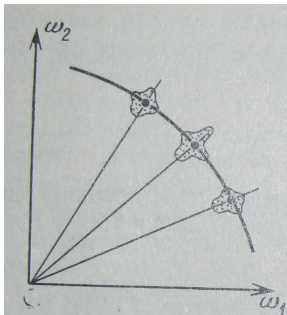


Рис. 2.15. Резонансные точки при $N=2$ и «опасные» области в их окрестности

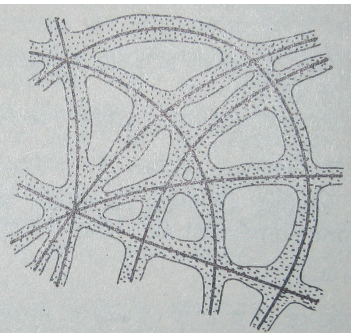


Рис. 2.16. Резонансные кривые при $N=3$ и опасная область

Нелинейный резонанс

Вернёмся к уравнениям теории возмущений, где были резонансы, и рассмотрим окрестность конкретной резонансной точки $k\omega(I_0) = l\Omega$:

$$\dot{I} = \varepsilon V_0 k \sin \psi, \quad (105)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{dV_0}{dI} \cos \psi, \quad (106)$$

где $\psi = k\vartheta - l\Omega t + \phi$. Так что

$$\dot{\psi} = k\omega(I) - l\Omega + \varepsilon \frac{dV_0}{dI} \cos \psi. \quad (107)$$

Это упрощение эквивалентно замене гамильтониана на $H = H_0(I) + \varepsilon V_0(I) \cos \psi$.

Далее разложим $H_0(I)$ в окрестности резонансного значения действия до второго порядка, а зависимость возмущения от действия пренебрежём:

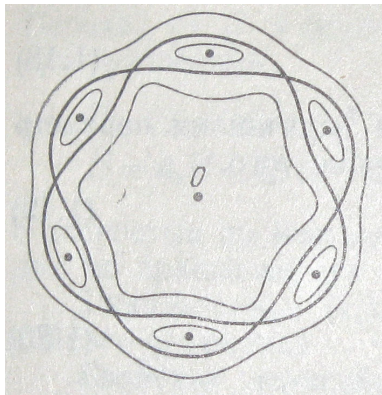
$$H = H_0(I_0) + \omega(I_0) \delta I + 0.5\omega'(I_0) \delta I^2 + \varepsilon V_0(I_0) \cos \psi. \quad (108)$$

Избавиться от линейного члена можно переходом во вращающуюся систему отсчёта (к новым переменным)

$$(I, \vartheta) \rightarrow (\delta I, k\vartheta - I\Omega t) \quad (109)$$

с новым гамильтонианом

$$H' = kH - I\Omega\delta I = \frac{1}{2}k\omega'(I_0)\delta I^2 + \varepsilon V_0(I_0)\cos\psi. \quad (110)$$



Линия уровня гамильтониана H' .
Структура нелинейного резонанса.

- Гамильтониан системы вблизи выделенного нелинейного резонанса эквивалентен гамильтониану нелинейного маятника.
- Эффективная масса маятника растёт с параметром нелинейности

$$\alpha = \frac{l_0}{\omega(l_0)} \frac{d\omega(l_0)}{dl}. \quad (111)$$

- Ширина "острова" нелинейного резонанса

$$\max \delta I = (|\varepsilon V_0 / \omega'|)^{1/2}, \quad (112)$$

а внутри острова система испытывает "фазовые колебания" с частотой

$$\omega_f = (|\varepsilon V_0 \omega'|)^{1/2}. \quad (113)$$

Критерий перекрытия резонансов

- Критерий Чирикова: *движение становится стохастическим, если ширина нелинейных резонансов в системе становится больше расстояния между ними.*

Расстояние между соседними резонансами $l, l + 1$ по частоте $\delta\omega = \Omega$, а по действию -

$$\Delta I = \delta\omega/\omega' = \Omega/\omega'. \quad (114)$$

Поэтому критерий перекрытия резонансов имеет вид

$$K^2 = \left(\frac{\delta I}{\Delta I} \right)^2 = \left| \frac{\omega' \varepsilon V_0}{\Omega^2} \right| = \frac{\omega_f^2}{\Omega^2} > 1. \quad (115)$$

Разрушение интегралов движения

- Теорема КАМ: Если невозмущённая гамильтоновская система не вырождена, то при достаточно малом возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезает, а лишь немного деформируется.
- Вблизи сепаратрис фазового пространства нелинейной системы образуются тонкие стохастические слои. Их ширина экспоненциально мала.
- При $N > 2$ тонкие стохастические слои образуют "паутину Арнольда".



Рис. 3.4. При $N = 2$ разрушенные торы (заштрихованные области) лежат между инвариантными торами

Рис. 3.5. При $N > 2$ области разрушения могут, соединяясь, пронизывать все фазовое пространство



Климонтович Ю.Л. "Статистическая физика" М.: Наука, 1982



Ишимару С. "Основные принципы физики плазмы" М.: Атомиздат, 1975



Галеев А.А., Сагдеев Р.З. "Неоклассическая' теория диффузии в сб. Вопросы теории плазмы т .7, с.205, М.: Атомиздат, 1973



Морозов А.И., Соловьёв Л.С. "Движение заряженных частиц в электромагнитных полях в сб. Вопросы теории плазмы т .2, с.177, М.: Атомиздат, 1963



Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. "Введение в нелинейную физику М.: Наука, 1988



Кадоццев Б.Б. "Турбулентность плазмы" в сб. Вопросы теории плазмы т .4, с.188, М.: Атомиздат, 1964