

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет ФИЗИЧЕСКИЙ

Кафедра ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Магистерская программа ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Направление подготовки 03.04.02 ФИЗИКА

Образовательная программа: МАГИСТРАТУРА

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**  
(научно-исследовательский формат)

Байструкова Михаила Андреевича

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Эволюция равновесных пучков заряженных частиц под действием внешних  
кильватерных полей в плазме

**«К защите допущена»**

И. О. заведующего кафедрой

к.ф.-м.н.

с.н.с., ИЯФ СО РАН

Сковородин Д.И./.....  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....2022 г.

**Научный руководитель**

д.ф.-м.н., профессор РАН

г.н.с., ИЯФ СО РАН

Лотов К.В./.....  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....2022 г.

Дата защиты: «.....».....2022 г.

Новосибирск, 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Новосибирский национальный  
исследовательский государственный университет»  
Физический факультет

Кафедра ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Направление подготовки 03.04.02 ФИЗИКА

(код направления и наименование)

**АННОТАЦИЯ**

**К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ**

**Ф.И.О. Байструкова Михаила Андреевича**

**Тема Эволюция равновесных пучков заряженных частиц под действием внешних  
кильватерных полей в плазме**

Пучок ультрарелятивистских заряженных частиц в плазме может достичь равновесия со своим собственным радиальным кильватерным полем и затем распространяться с малым изменением формы. Если впереди пучка появляется какое-то сонаправленное возмущение, оно может разрушить пучок своим кильватерным полем в зависимости от фазы и амплитуды поля этого возмущения, а может и не разрушить. В данной работе в осесимметричной геометрии численно исследуется, какие возмущения могут разрушить одиночный короткий сгусток или последовательность из многих коротких сгустков при параметрах, представляющих интерес для плазменного кильватерного ускорения, и как быстро. Обнаружено, что существуют особенно опасные фазы возмущения, в которых пучок может быть разрушен кильватерной волной очень малой амплитуды. Также обнаружено, что для последовательности сгустков всегда разрушительны возмущения с амплитудой, большей, чем кильватерное поле одного сгустка из этой последовательности.

\_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

# Содержание

1	Введение . . . . .	3
2	Методы . . . . .	6
3	Эволюция пучка . . . . .	15
4	Время отклика пучка . . . . .	21
5	Заключение . . . . .	24
	Список использованных источников . . . . .	26

# 1 Введение

Распространение плотно сфокусированных коротких пучков высокоэнергетических заряженных частиц в плазме активно изучается в рамках новых методов ускорения [1]. Эти пучки могут коллективно взаимодействовать с плазмой, либо создавая сильные электрические поля (называемые «кильватерными полями»), либо ускоряясь или фокусируясь этими полями. Во многих случаях плотность пучка намного меньше плотности плазмы или сравнима с ней. Такой режим взаимодействия называется «линейным» [2] или «слабонелинейным» [3, 4], в отличие от «сильнонелинейного» (в англоязычной литературе «blowout») режима [5, 6].

В линейном или слабонелинейном режиме пучок частиц, попадая в плазму, быстро достигает радиального равновесия с собственным кильватерным полем, гораздо быстрее, чем происходит обмен энергией с плазмой [7, 8]. Равновесное состояние является довольно экзотическим: плотность пучка сильно пикирована вблизи оси, а распределение частиц в пространстве импульсов не является гауссовым [9].

Рассмотрим пучки, которые создают кильватерное поле (их также называют драйверами). В идеале, равновесный драйвер распространяется в невозмущенной плазме, сохраняя свою форму, и только энергия частиц уменьшается. Однако могут быть условия, при которых некоторое возмущение (другой пучок или лазерный импульс) появляется впереди драйвера после достижения им радиального равновесия. Возмущающая кильватерная волна имеет фазовую скорость, равную скорости света  $c$ , к которой

также близка скорость пучка, и поэтому она может сильно изменять его форму, даже если амплитуда её полей мала. Такие ситуации могут возникать в различных схемах плазменного ускорения. Например, если пучок вручную составлен из нескольких сгустков (по английски их также называют «comb» beam) [10–16] и первый из них имеет меньший заряд, чем остальные, этот сгусток достигает равновесия позже остальных, и его кильватерное поле действует на них, как внешнее возмущение. В некоторых экспериментах, запланированных на установке AWAKE [17–19], последовательность сгустков, сформированная путем самомодуляции длинного протонного пучка в первой плазменной секции [20–23], попадает во вторую секцию, где она может быть возмущена либо пучком электронов, инжектированным извне [24, 25], либо головой протонного пучка, прошедшей через первую секцию без самомодуляции [25, 26]. Последнее возможно, если плазма в двух секциях создается по-разному: в первой секции лазерный импульс распространяется вместе с протонным пучком и ионизирует пары рубидия [27, 28] так, что передняя часть протонного пучка («голова» пучка) распространяется в нейтральном газе и не самомодулируется, а вторая секция ионизируется заранее [24, 29, 30]. Гибридные схемы ускорения [31, 32] могут создавать пучки, в которых на один электронный сгусток действует кильватерное поле другого, предшествующего сгустка [33–37]. Кроме того, могут возникать неконтролируемые возмущения, вызванные темновыми токами [38–40].

Из вышесказанного следует, что важно знать устойчивость равновесных пучков к внешним возмущениям. В данной работе исследуется, как внешнее кильватерное поле может изменить одиночный сгусток или последовательность сгустков, какая амплитуда возмущения опасна, и сколько времени требуется для разрушения одиночного сгустка или последовательности сгустков. Чтобы представить результаты в общей форме, используются безразмерные единицы, связанные с параметрами пучка и плазмы.

В разделе 2 описываются методы исследования и представляются количественные характеристики разрушения пучка. В разделе 3 рассматриваются изменения в одиночном сгустке и в последовательности из десяти сгустков, вызванные включением или выключением возмущения; анализируется, почему возмущения с определенными фазами особенно опасны для пучка. Затем, в разделе 4 обсуждается временной масштаб изменений пучка, в разделе 5 резюмируются основные выводы.

Также, основные результаты данной работы можно найти в статье [\[41\]](#).

## 2 Методы

Равновесное состояние пучка в плазме трудно описать аналитически [9], не говоря уже об аналитическом исследовании его отклика на возмущения. Поэтому единственным способом изучения устойчивости пучка является численное моделирование. Для этого используется квазистатический осесимметричный код LCODE [42, 43]. Чтобы создать равновесный пучок, вводим пучок с гауссовым радиальным профилем в плазму и численно моделируем его распространение до тех пор, пока его форма не стабилизируется. Это приближает исследование к экспериментально реализуемым условиям, в которых равновесный пучок не может быть предварительно сформирован вне плазмы. Чтобы создать последовательность из нескольких сгустков, вводим в плазму длинный пучок с постоянным током и позволяем самомодуляции разбить пучок на равновесные микросгустки (рисунок 2.1(a)). Продольный профиль плотности плазмы  $n(z)$  в этом случае должен иметь небольшой положительный скачок на некотором расстоянии  $z_s$  от входа (рисунок 2.1(b)). В противном случае, в плазме постоянной плотности пучок теряет слишком много заряда, превращаясь в последовательность микросгустков [21, 44].

После формирования равновесного пучка вводим внешнее возмущение, добавляя короткий неэволюционирующий идеально соосный сгусток частиц, движущийся впереди пучка (рисунок 2.1(c)). Радиальный профиль возмущающего сгустка такой же, как и у исходного гауссова пучка. Это сужает общность данного исследования до наиболее интересного частного

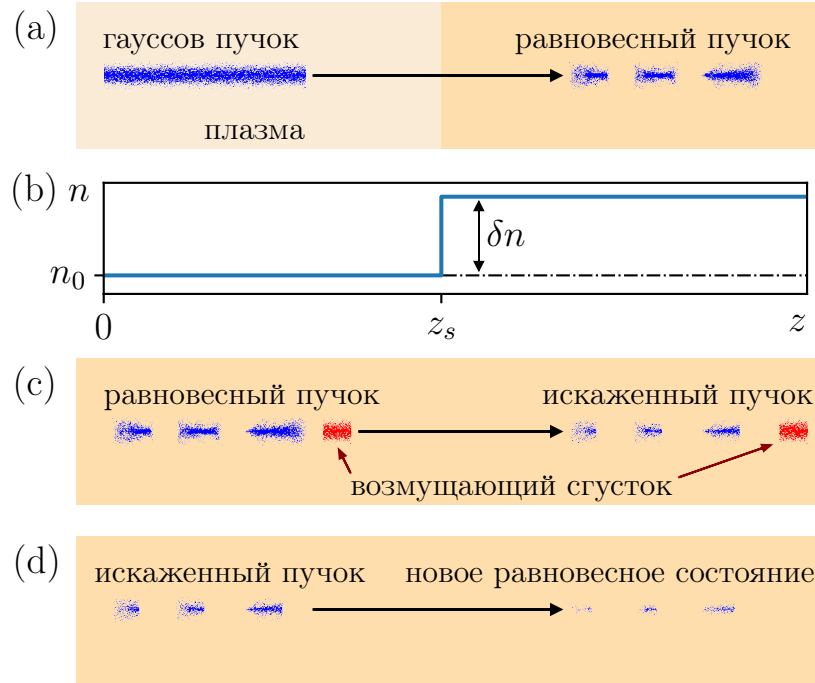


Рисунок 2.1: Моделируемые этапы эволюции пучка: (а) гауссов пучок достигает радиального равновесия, распространяясь в плазме со скачком плотности, схематически показанным на графике (b), (с) равновесный пучок искажается кильватерным полем возмущающего сгустка, и (d) искаженный пучок переходит в новое равновесное состояние после снятия возмущения.

случая, в котором возмущение имеет тот же радиальный пространственный масштаб, что и пучок.

Возможно, что если возмущение действует в течение ограниченного времени, пучок адаптируется к возмущению, но будет деградировать после отключения возмущения. Мы анализируем такой вариант, удаляя возмущение через некоторое расстояние (рисунок 2.1(d)).

В моделировании время измеряется в единицах  $\omega_p^{-1}$ , а расстояние — в единицах  $c/\omega_p$ , где  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$  — плазменная частота,  $n_0$  — начальная плотность плазмы,  $m$  — масса электрона, и  $e$  — элементарный заряд. Начальные параметры пучка (таблица 2.1) выберем такими же, как и в работе [21], потому что в этом случае известен оптимальный профиль плотности плазмы для пучка. Этот набор параметров не соответствует какому-либо эксперименту и выбран для изучения возмущения пучка внешним



Таблица 2.1: Параметры исследования.

Параметры и обозначения	Значения
Пучок:	
Пиковая плотность, $n_{b0}$	$4 \times 10^{-3} n_0$
Радиус, $\sigma_r$	$0.5c/\omega_p$
Релятивистский фактор, $\gamma_b$	1000
Угловой разброс	$2 \times 10^{-4}$
Энергитический разброс	0%
Плазма:	
Скачок плотности, $\delta n$	$0.085 n_0$
Положение скачка плотности, $z_s$	$360c/\omega_p$
Моделирование:	
Размер области по $r$ и $\xi$	$10c/\omega_p$ и $80c/\omega_p$
Шаг сетки и по $r$ , и по $\xi$	$0.01c/\omega_p$
Шаг по времени для пучка	$10\omega_p^{-1}$
Возмущение включается при $z_0$	$10^4 c/\omega_p$
Возмущение выключается при $z_1$	$3 \times 10^4 c/\omega_p$
Окончательная проверка пучка при $z_2$	$5 \times 10^4 c/\omega_p$

кильватерным полем в чистом виде, без осложняющих эффектов. Плотность пучка достаточно мала, чтобы отклик плазмы оставался линейным. Малый угловой разброс исключает влияние эмиттанса на процесс самомодуляции [45]. Релятивистский фактор достаточно велик, чтобы различить временные масштабы радиальной динамики и истощения пучка [8]. Вследствие этого, разброс энергии, полученный пучком на рассматриваемом временном масштабе, мал и не влияет на поперечную динамику. По этой же причине можно пренебречь эффектами дефазировки, которые, в противном случае, могли бы возникнуть из-за отличия продольной скорости пучка от скорости света. Плазма однородна в радиальном направлении, а ионы плазмы неподвижны. Все процессы в линейном режиме симметричны относительно знака заряда пучка, поэтому в качестве драйвера возьмём позитронный пучок. Также используем цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$  и координату  $\xi = z - ct$ . Начальная плотность пучка на входе в плазму

(при  $z = 0$ )

$$n_b = \begin{cases} n_{b0} e^{-r^2/(2\sigma_r^2)}, & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

поэтому в качестве затравки для самомодуляции выступает кильватерная волна, возникающая из-за резкого переднего края пучка. Рассматриваем либо первый сгусток, сформированный в результате самомодуляции, либо последовательность из первых десяти сгустков. Параметры моделирования приведены в таблице 2.1.

Временной масштаб для поперечной динамики пучка

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{m_b \gamma_b}{2\pi n_{b0} e^2}}, \quad (2.2)$$

где  $m_b$  — масса частиц пучка. В нашем случае  $\tau_0 \approx 700\omega_p^{-1}$ . Это также типичное время нарастания самомодуляции [46, 47]. Таким образом, берём  $\tau_0$ , как естественную единицу времени.

Волну удобно характеризовать кильватерным потенциалом  $\Phi$ , градиент которого описывает электромагнитную силу, действующую на частицы пучка:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = E_z, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = E_r - B_\varphi, \quad (2.3)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  — это электрическое и магнитное поля. В линейном режиме кильватерный потенциал на оси связан с плотностью пучка  $n_b$  как [48]

$$\Phi(\xi, z) = -k_p \int_\xi^\infty \sin(k_p(\xi' - \xi)) I_{\text{eff}}(\xi', z) d\xi', \quad (2.4)$$

где

$$k_p = \begin{cases} \omega_p/c, & z < z_s, \\ \omega_p \sqrt{n/n_0}/c, & z \geq z_s \end{cases} \quad (2.5)$$

локальное волновое число, определяемое локальной плотностью плазмы  $n$

(рисунок 2.1(b)),

$$I_{\text{eff}}(\xi, z) = 4\pi e \int_0^\infty K_0(k_p r) n_b(r, \xi, z) r dr \quad (2.6)$$

эффективный ток, который вводится для того, чтобы удобно характеризовать вклад от каждого слоя пучка,  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя. Размерность эффективного тока (2.6) намеренно выбрана равной размерности потенциала, а не тока, чтобы отразить их тесную взаимосвязь.

Передний край пучка (2.1) генерирует кильватерную волну с потенциалом на оси

$$\Phi(\xi, 0) = \Phi_0(\cos(\omega_p \xi / c) - 1), \quad (2.7)$$

где

$$\Phi_0 = 4\pi e n_{b0} \int_0^\infty K_0(\omega_p r / c) e^{-r^2 / (2\sigma_r^2)} r dr \quad (2.8)$$

эффективный ток начального пучка и, одновременно, амплитуда колебаний кильватерной волны, возникающей из-за резкого переднего фронта пучка. Берём  $\Phi_0$ , как естественную единицу измерения и для амплитуды кильватерной волны, и для эффективного тока.

Будем характеризовать эволюцию отдельных сгустков и пучка как целого по изменению создаваемого ими кильватерного потенциала. Изменения и в амплитуде, и в фазе важны. Для того, чтобы учесть их одновременно, вводим комплексную амплитуду  $\Phi_A$  комплексного кильватерного потенциала  $\tilde{\Phi}$ :

$$\tilde{\Phi}(\xi, z) = \Phi_A(\xi, z) e^{ik_p \xi}, \quad (2.9)$$

$$\Phi_A(\xi, z) = -ik_p \int_\xi^\infty I_{\text{eff}}(\xi', z) e^{-ik_p \xi'} d\xi', \quad (2.10)$$

$$\Phi(\xi, z) = \text{Re}(\tilde{\Phi}), \quad E_z(r=0, \xi, z) = k_p \text{Im}(\tilde{\Phi}). \quad (2.11)$$

Подобно [21], определяем границу между сгустками как сечение, в котором кильватерный потенциал имеет локальный максимум и поэтому быстро де-

фокусирует частицы (за время нескольких  $\tau_0$ ). Это определение позволяет нам однозначно определять сгустки, даже если промежутки между ними еще не сформировались.

Во время самомодуляции форма и эффективный ток сгустков сначала быстро изменяются, а затем стабилизируются и изменяются гораздо медленнее. Комплексная амплитуда ведет себя аналогично (рисунок 2.2). Эволюция пучка никогда не прекращается полностью из-за постепенного истощения его энергии и эрозии головы пучка под действием эмиттанта. Поэтому существует определенная свобода в выборе состояния, которое принимается за равновесное. Для определённости, будем рассматривать последовательность при  $z = z_0 \approx 14c\tau_0$ , как равновесную (красная линия на рисунке 2.2). После того, как начальный пучок преодолевает это расстояние, вводим возмущающий сгусток позитронов, который создает киль-

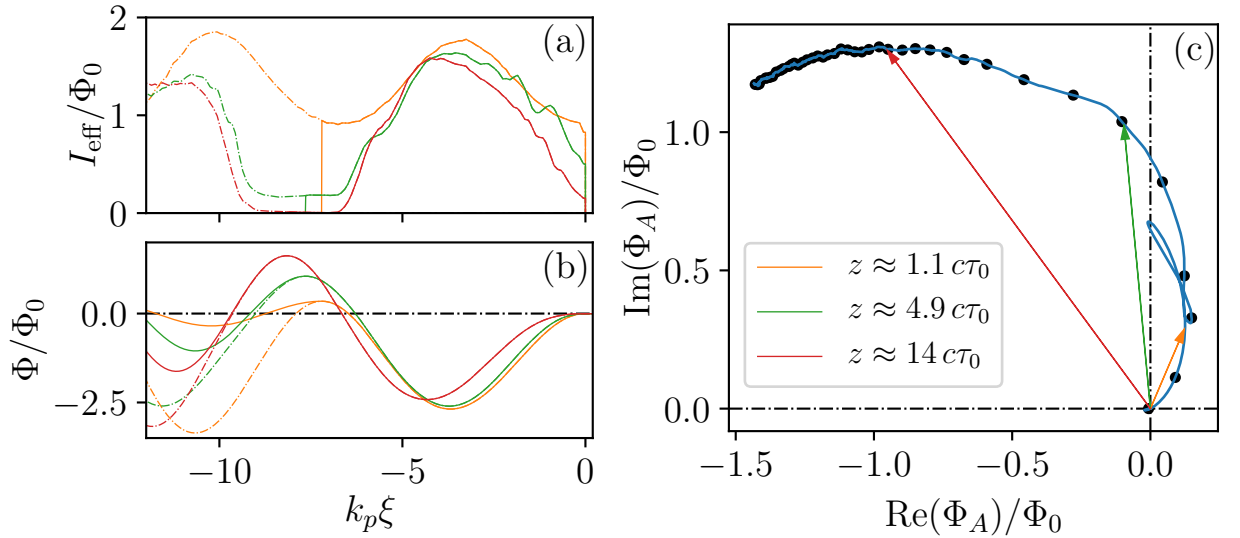


Рисунок 2.2: Переход от начального пучка к равновесному: (a) эффективный ток  $I_{\text{eff}}(\xi)$ , (b) кильватерный потенциал на оси  $\Phi(\xi)$  при разных пройденных расстояниях  $z$  (показаны разными цветами), и (c) комплексная кильватерная амплитуда  $\Phi_A(z)$  после первого сгустка. Сплошные линии на (a) и (b) показывают ток и потенциал только для первого сгустка, а пунктирные линии — для всей последовательности. Чёрные точки на (c) следуют с интервалом  $c\tau_0$  и показывают временной масштаб процесса. Цветные стрелочки на (c) соответствуют случаям на (a) и (b).

ватерную волну с амплитудой  $A$  и относительной фазой  $\varphi$  (рисунок 2.3). Возмущающий пучок имеет длину  $\pi k_p^{-1}$  и тот же радиальный профиль плотности (2.1), как и начальный пучок. Он распространяется строго со скоростью света и не меняет форму. Изменяя продольное положение и плотность этого пучка, можно менять амплитуду и фазу возмущения.

После введения возмущения кильватерное поле, создаваемое пучком, сначала быстро изменяется, поскольку возмущение влияет на форму и плотность пучка, а затем стабилизируется вблизи нового равновесного состояния, которое зависит от фазы и амплитуды возмущения (рисунок 2.4). Это приводит к ненулевому соотношению

$$\delta\Phi = \frac{|\Delta\Phi|}{|\Phi_u|}, \quad (2.12)$$

где  $\Phi_u$  — комплексная кильватерная амплитуда без возмущения, и  $\Delta\Phi$  — разность комплексных амплитуд между возмущенным и невозмущенным случаями; обе амплитуды взяты при одном и том же значении  $z$  для мини-

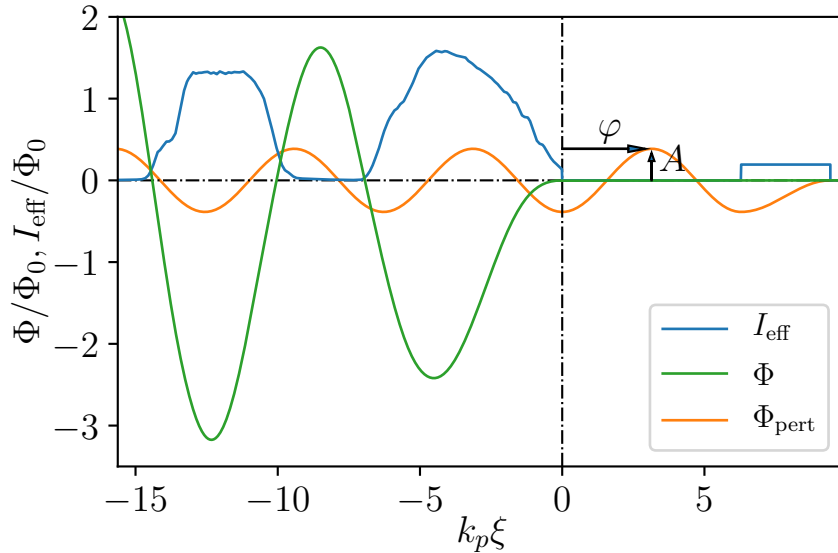


Рисунок 2.3: Эффективный ток  $I_{\text{eff}}$  возмущающего пучка и двух первых равновесных сгустков, кильватерный потенциал  $\Phi$  равновесной последовательности сгустков, и кильватерный потенциал  $\Phi_{\text{pert}} = Ae^{-i\varphi}$  возмущающего пучка.

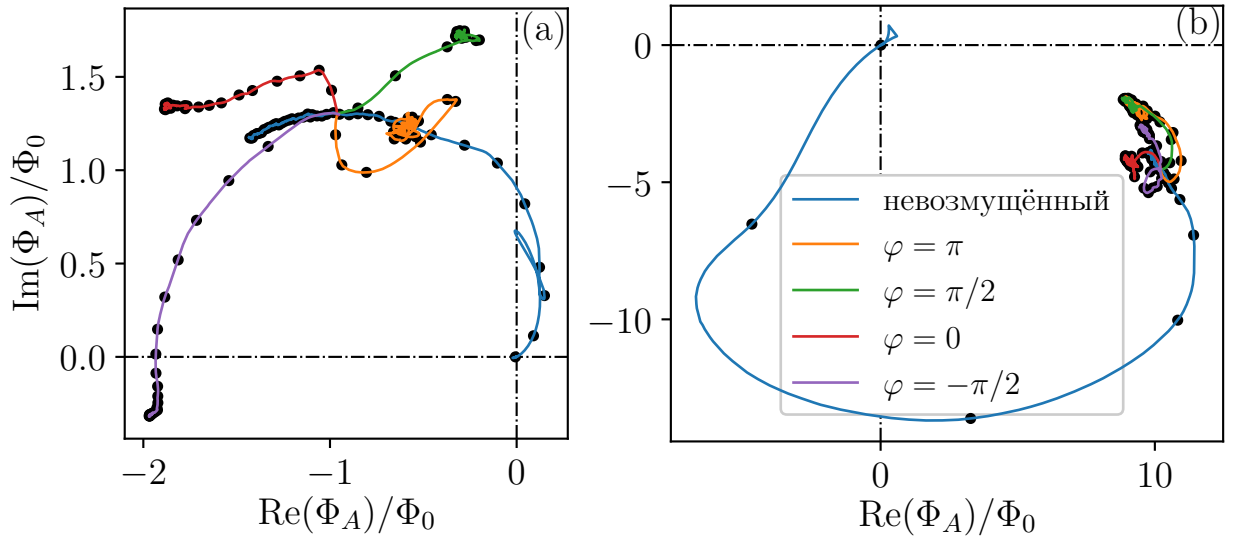


Рисунок 2.4: Комплексная амплитуда  $\Phi_A(z)$  кильватерной волны, создаваемой первым сгустком (а) и последовательностью из 10 сгустков (б). Синие линии соответствуют невозмущённому случаю. Другие цвета соответствуют возмущениям с амплитудой  $A = 0.4\Phi_0$  и разными фазами  $\varphi$ , которые включаются при  $z = 10^4 c/\omega_p$ . Чёрные точки следуют с интервалом  $c\tau_0$ .

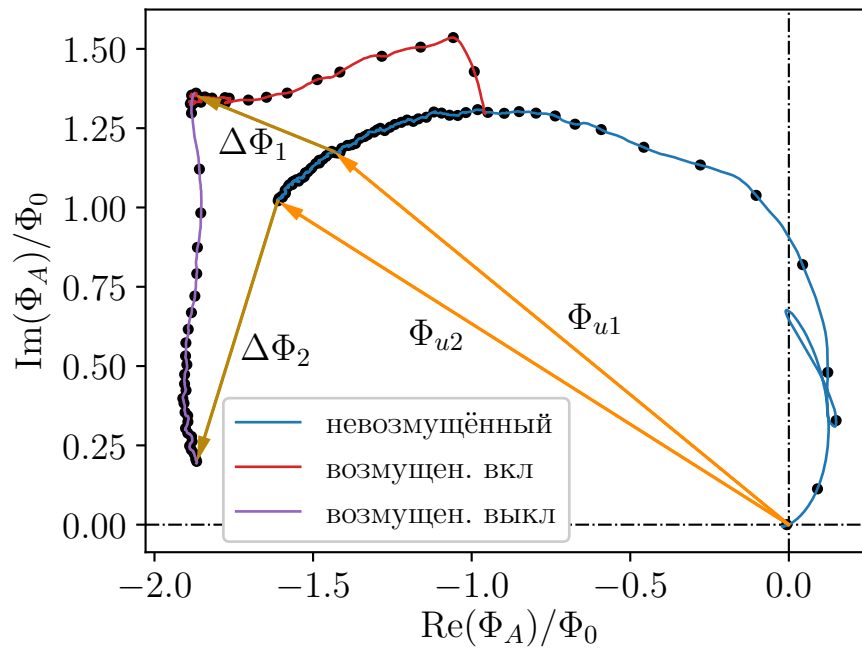


Рисунок 2.5: Иллюстрация изменения комплексной амплитуды на примере одиночного сгустка и возмущения с  $A = 0.4\Phi_0$  и  $\varphi = 0$ .

мизации вклада эволюции пучка под действием других факторов. Чтобы количественно оценить влияние возмущения на пучок, измеряем  $\delta\Phi$  при

$z = z_1 \approx 42c\tau_0$  и обозначаем соответствующие значения индексом «1» (рисунок 2.5). В принципе, как одиночный сгусток, так и последовательность сгустков может не сильно измениться после включения возмущения, но разрушиться после его выключения. Чтобы учесть эту возможность, убираем возмущение при  $z = z_1$  и анализируем  $\delta\Phi$  при  $z = z_2 \approx 71c\tau_0$ , обозначая соответствующие значения подстрочным индексом «2» (рисунок 2.5).

### 3 Эволюция пучка

На рисунке 3.1 показано влияние различных возмущений на одиночный сгусток и последовательность из десяти сгустков. Относительное изменение комплексной амплитуды  $\delta\Phi_i = 0.25$  достаточно велико, чтобы сдвинуть фа-

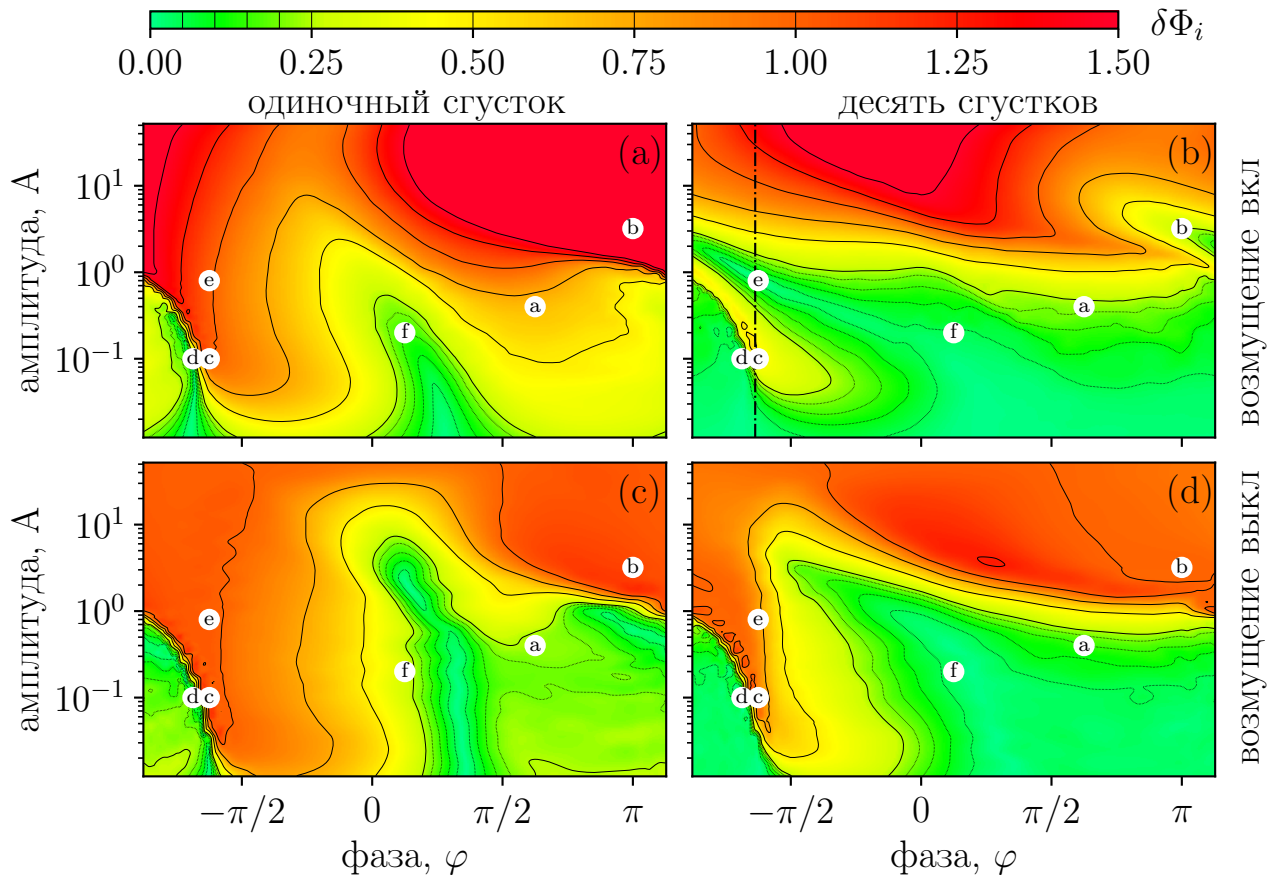


Рисунок 3.1: Относительное изменение комплексной амплитуды  $\delta\Phi_i$  ( $i = 1, 2$ ), вызванное возмущениями с различной амплитудой  $A$  и фазой  $\varphi$  в случаях одиночного сгустка (a), (c) и последовательности сгустков (b), (d) после включения (a), (b) и выключения (c), (d) возмущения. Точки, отмеченные буквами в белых кружках, соответствуют вариантам, показанным на рисунке 3.2. Пунктирная линия на (b) проведена при  $\varphi = -2$ .



зу волны на  $0.25/(\pi/2) \approx 16\%$  интервала, благоприятного для ускорения и фокусировки витнесса (ускоряемого пучка), или изменить амплитуду волны на  $25\%$ . Оба изменения обычно неприемлемы для ускорения качественного витнесса, поэтому только в областях, окрашенных в оттенки зеленого, можно сказать, что пучок выдерживает возмущение. Последовательность из многих сгустков гораздо более устойчива, чем одиночный сгусток, и может выдержать возмущения с амплитудой примерно до  $\Phi_0$ . Однако, существуют особенно опасные фазы, в которых возмущение с очень маленькой амплитудой ( $A \ll \Phi_0$ ) может разрушить пучок.

Рассмотрим подробнее изменения в пучке и создаваемых им кильватерных полях. Для этого, проанализируем несколько характерных случаев, обозначенных на рисунке 3.1 буквами в белых кружках. Если  $A \ll \Phi_0$ , возмущение намного слабее собственного кильватерного поля пучка и способно изменить его структуру только вблизи передней и задней частей сгустков, где фокусирующее поле пучка сменяется дефокусирующим. Поэтому ключ к пониманию рисунка 3.1 лежит в знаке радиальной компоненты возмущающей силы на передних краях сгустков.

В точке  $\xi = 0$  фокусирующая сила возмущающей волны меняет знак при  $\varphi = \pm\pi/2$ . Ток равновесного пучка не возрастает сразу при  $\xi = 0$  (рисунок 2.3), поэтому качественные изменения в отклике пучка происходят при несколько меньших значениях фазы  $\varphi$ , при которых нуль фокусирующей силы возмущения находится при малых отрицательных  $\xi$ .

Фазы  $\varphi \gtrsim \pi/2$  и  $\varphi \lesssim -\pi/2$  на рисунке 3.1 соответствуют возмущениям, которые фокусируют самое начало пучка. Возмущение усиливает фокусировку первого сгустка, и его эффективный ток увеличивается, особенно в передней части, которая была слабо сфокусирована (рисунок 3.2(a)). Это изменяет кильватерное поле первого сгустка (точка «а» на рисунке 3.1(a)) и сдвигает нули поля немного вперед, потому что «центр масс» первого сгустка смещается вперед. Последующие сгустки остаются в фокусирующей

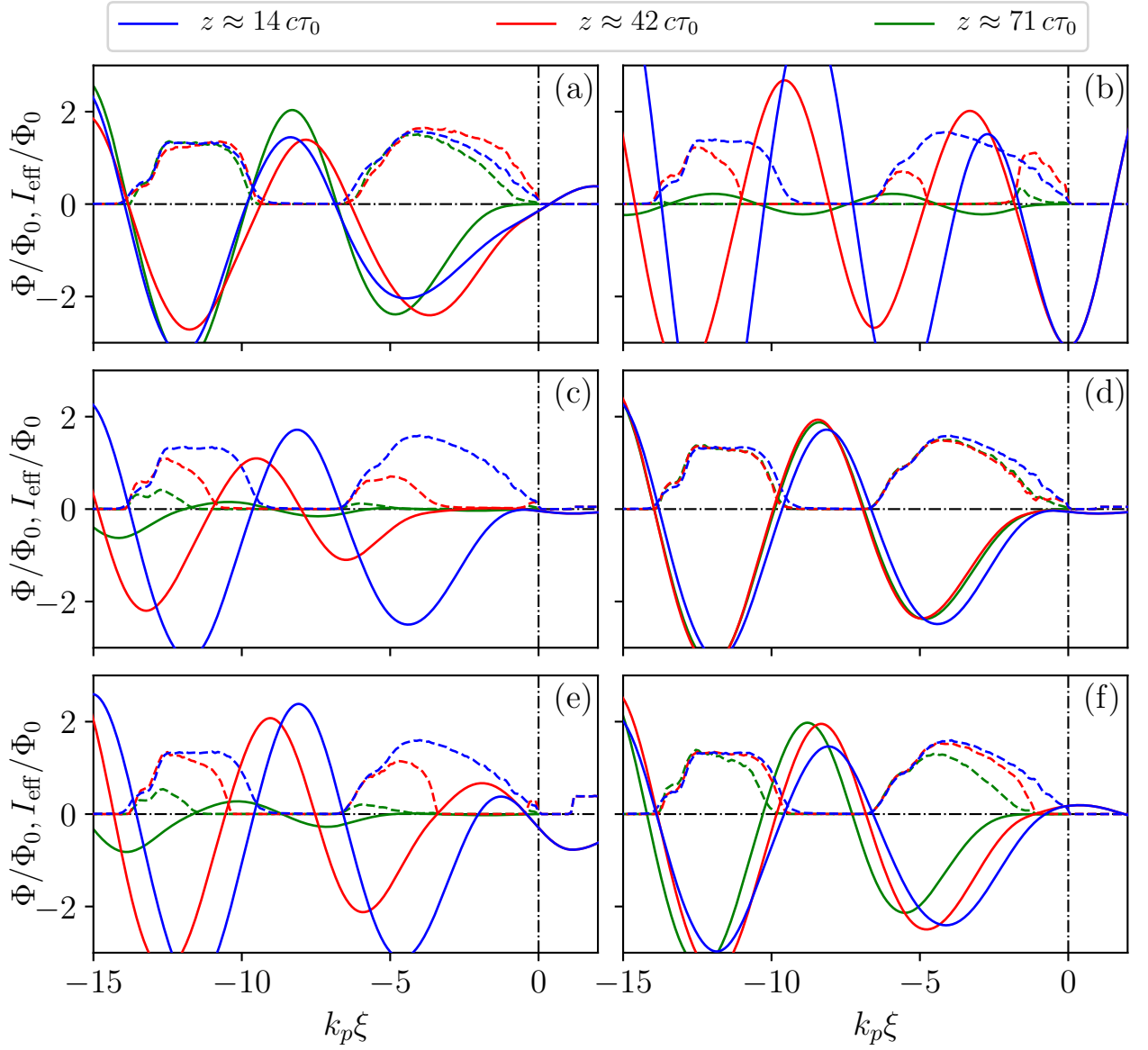


Рисунок 3.2: Эффективный ток  $I_{\text{eff}}$  (пунктирные линии) и кильватерный потенциал  $\Phi$  (сплошные линии) при разных временах (подписаны в легенде) для вариантов, отмеченных на рисунке 3.1. Синие линии соответствуют сечению  $z \approx 14c\tau_0$ , когда возмущение только включилось, и равновесные сгустки еще не изменили форму. Красные линии ( $z \approx 42c\tau_0$ ) соответствуют моменту времени непосредственно перед выключением возмущения и показывают сгустки и поля, измененные возмущением. Зелёные линии ( $z \approx 71c\tau_0$ ) показывают сгустки и поля спустя долгое время после выключения возмущения.

щих фазах, их вклад в волну меняется незначительно, а  $\delta\Phi_1$  становится меньше по мере уменьшения доли первого сгустка в общем кильватерном поле (рисунок 3.1(b)). Аналогично, когда возмущение выключается, киль-

ватерное поле первого пучка изменяется (рисунок 3.1(c)), но не кильватерное поле всей последовательности (рисунок 3.1(d)).

При  $\varphi \approx \pi$  и больших амплитудах возмущения возможно интересное явление (рисунок 3.2(b)). Возмущающее кильватерное поле больше кильватерного поля первого сгустка и, следовательно, сильно разрушает его (точка «b» на рисунке 3.1(a)). Однако возмущение находится в фазе с кильватерным полем других сгустков, поэтому эти сгустки изменяются меньше (рисунок 3.1(b)). Это выглядит так, как будто кильватерное поле возмущения заменяет кильватерное поле первого сгустка. Более серьёзные изменения происходят при выключении возмущения, что приводит к сильному изменению фазы и частичному разрушению всех сгустков в последовательности (рисунок 3.1(d)).

При  $\varphi \approx -2$  область дефокусировки возмущающей волны накладывается на начало первого сгустка и запускает эффект домино (рисунок 3.2(c)). Возмущение дефокусирует слой пучка. Этот слой не создает кильватерное поле, необходимое для сохранения следующего слоя сфокусированным. Следующий слой расширяется, поскольку его поперечное давление больше не уравнивается фокусирующей силой. Его вклад в кильватерное поле исчезает. Затем расфокусируется следующий слой, и так далее. Эрозия первого сгустка заставляет фазу кильватерного поля двигаться назад, что инициирует самоподдерживающуюся эрозию последующих сгустков. В результате даже длинная последовательность сгустков может быть разрушена возмущением очень малой амплитуды (точка «с» на рисунках 3.1(a) и (b)).

Переход между разрушением пучка эффектом домино и почти полным сохранением пучка очень резкий (точки «с» и «d» на рисунках 3.1(a) и (b)). Если возмущение фокусирует самое начало первого сгустка, то этот сгусток полностью остаётся неизменным, даже если сам он находится в дефокусирующей фазе возмущающей волны (рисунок 3.2(d)). Собственное

фокусирующее поле сгустка преодолевает дефокусирующую силу возмущения. Остальная часть пучка также выживает. Чем сильнее возмущение, тем большая часть первого сгустка должна быть сфокусирована возмущением для того, чтобы весь сгусток выжил, и тем ближе переход к  $\varphi = -\pi$  (рисунок 3.1).

Интересно проследить, как режимы взаимодействия сменяют друг друга по мере роста амплитуды при  $\varphi \approx -2$  (пунктирная вертикальная линия на рисунке 3.1(b)). При этой фазе фокусируется передний край первого пучка, за которым следует дефокусирующий полупериод возмущения (рисунок 3.2(e)). При очень малых амплитудах дефокусирующая сила возмущения не может превысить собственную фокусирующую силу первого сгустка, и все сгустки последовательности изменяются незначительно. При большей амплитуде эффект домино разрушает пучок (рисунок 3.2(c)). При еще большей амплитуде первый сгусток разрушается (точка «e» на рисунке 3.1(a)), но его кильватерное поле заменяется полем возмущения, а остальные сгустки последовательности изменяются незначительно (рисунок 3.2(e) и рисунок 3.1(b)). Когда возмущение исчезает — они разрушаются (рисунок 3.1(d)). Наконец, при очень больших амплитудах весь пучок разрушается под действием возмущения (рисунок 3.1(b)).

При фазах  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  голова пучка расфокусируется, первый сгусток частично разрушается, но волна разрушения не распространяется вглубь пучка, так как значительная часть первого сгустка попадает в фокусирующую фазу возмущения, выживает и создает кильватерное поле почти той же фазы, что и без возмущения (рисунок 3.2(f) и точки «f» на рисунке 3.1).

Таким образом, одиночный сгусток легко разрушается возмущениями довольно малой амплитуды, за исключением определенных фаз возмущения, при которых сгусток попадает в фокусирующую фазу и остается почти целым (рисунок 3.1(a)). Последовательность из многих сгустков, в свою

очередь, устойчива к возмущениям с амплитудой  $A \lesssim \Phi_0$ , за исключением возмущений, которые расфокусируют передний край пучка и запускают эффект домино (рисунок 3.1(b)).

## 4 Время отклика пучка

Под действием возмущения пучок изменяется сложным образом и приближается к новому равновесному состоянию не экспоненциально. Возникает вопрос, как охарактеризовать длительность этого процесса? Для этого исследуем, как относительная разность комплексных амплитуд  $\delta\Phi$  приближается к новому равновесному значению. При включении возмущения  $\delta\Phi$  изменяется от нуля до  $\delta\Phi_1$  (рисунок 4.1), а при выключении — от  $\delta\Phi_1$  до  $\delta\Phi_2$ . Время  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ), за которое  $\delta\Phi$  проходит половину пути, является характерным временем процесса.

В большинстве случаев время реакции пучка, нормированное на  $\tau_0$ , рав-

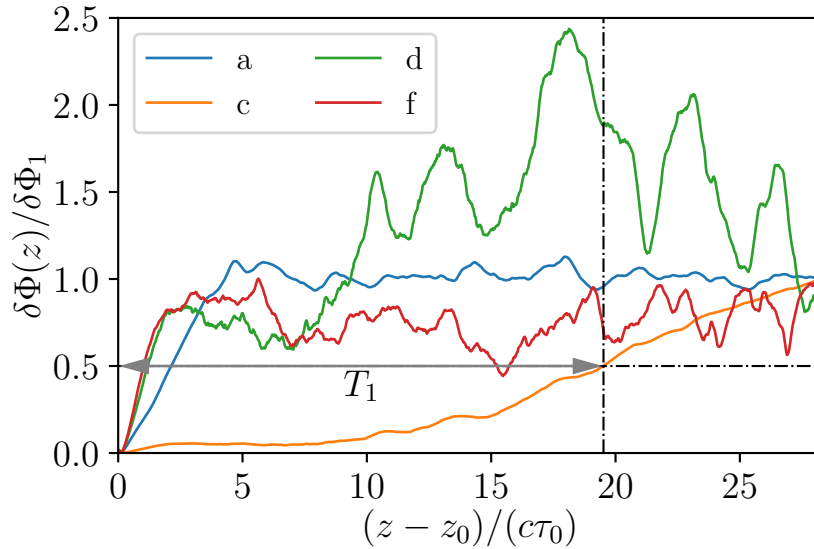


Рисунок 4.1: Иллюстрация вычисления времени отклика пучка на возмущение: как относительная разность комплексных амплитуд  $\delta\Phi$  приближается к  $\delta\Phi_1$  для последовательности из десяти сгустков в нескольких характерных случаях, обозначенных на рисунке 3.1(а) соответствующими буквами. Стрелка показывает время  $T_1$  для варианта «с».

но обратному квадратному корню из нормированной амплитуды возмущения,  $(A/\Phi_0)^{-1/2}$ , умноженному на численный фактор порядка единицы (рисунок 4.2). Это справедливо как для одиночного сгустка, так и для последовательности сгустков. Единственным исключением является эффект домино, который развивается дольше в последовательности сгустков (синяя область на рисунке 4.2(b)). Красные области на рисунке 4.2, которые формально показывают более быстрый отклик, соответствуют почти неизменным пучкам и представляют временные масштабы небольших флуктуаций поля (линии «d» и «f» на рисунке 4.1).

Время отклика пучка особенно важно, если фазовая скорость возмуще-

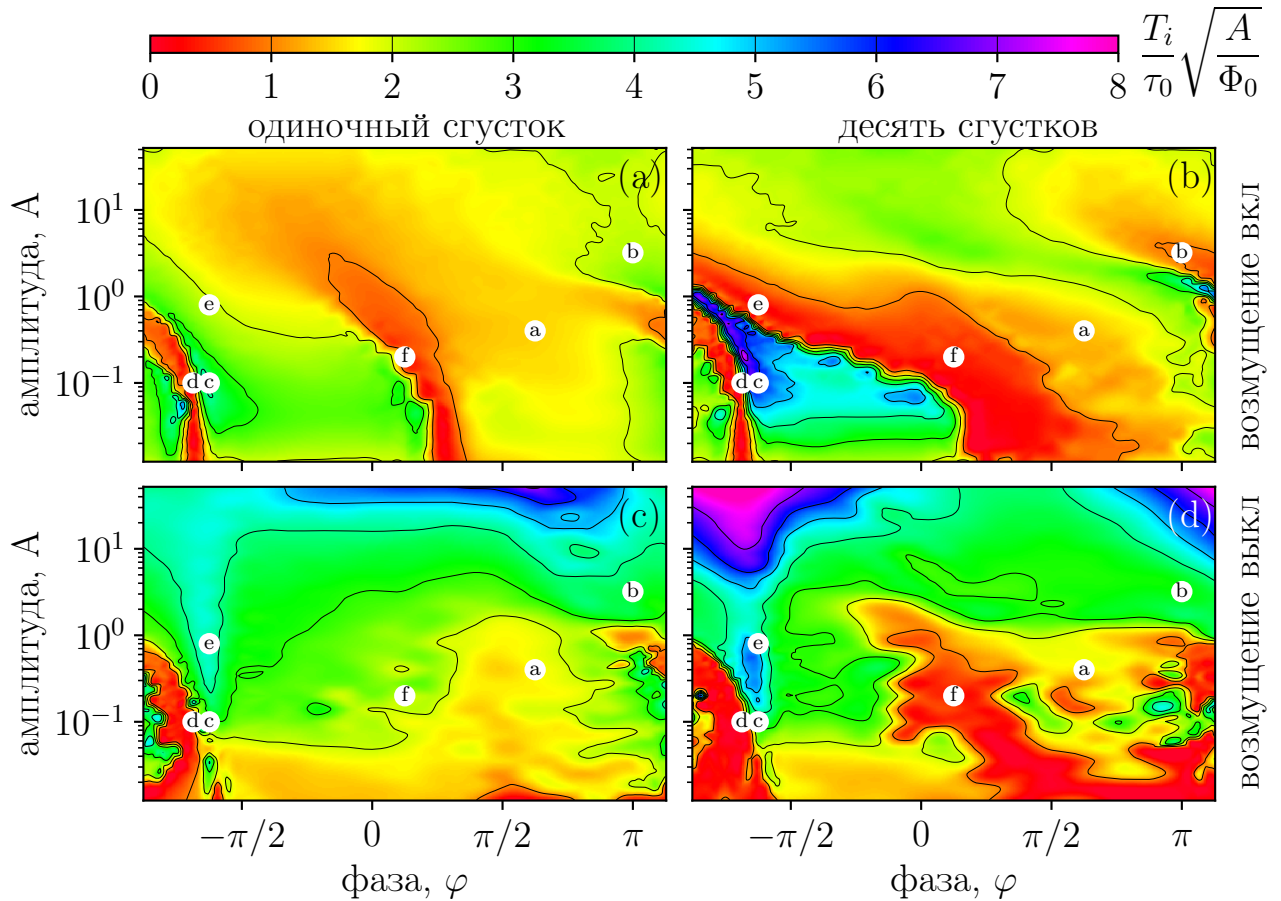


Рисунок 4.2: Время отклика  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) одиночного сгустка (a), (c) и последовательности из десяти сгустков (b), (d) на включение (a), (b) и выключение (c), (d) возмущения. Точки, отмеченные буквами в белых кружках, соответствуют вариантам, показанным на рисунке 3.2.

ния отличается от скорости света. Это происходит, например, если возмущение создается самомодулирующимся пучком заряженных частиц [46,47]. В этом случае, приведенные выше результаты применимы, когда изменение фазы возмущения не приводит к переходу в качественно иной режим взаимодействия за время разрушения пучка.

Исходя из вышеизложенного, следует, что время разрушения пучка имеет порядок времени расфокусировки для отдельных частиц. Это означает, что разрушение пучка не является резонансным процессом, и энергетический разброс пучка может на него повлиять, только если станет порядка 100%.



## 5 Заключение

Ультрарелятивистский пучок заряженных частиц в плазме быстро приходит к радиальному равновесию с кильватерным полем. Когда в плазме возникает внешнее возмущение, созданное, например, сгустком, идущим впереди, изначально равновесный пучок переходит в другое равновесное состояние. Это новое равновесное состояние может быть или не быть близким к начальному состоянию, в зависимости от амплитуды и фазы возмущения. Если оно близко, говорим, что пучок может противостоять возмущению. Если нет, то переход в другое равновесное состояние обычно приводит к частичной потере заряда пучка. Тогда говорим, что пучок разрушен возмущением. Когда возмущающее кильватерное поле исчезает, пучок переходит в другое состояние, отличающееся от исходного равновесного состояния, что также может сопровождаться потерей частиц.

Типичная амплитуда возмущения, выше которой последовательность из множества коротких сгустков всегда разрушается, равна амплитуде кильватерного потенциала, создаваемого резким передним краем пучка. В этой работе она была принята в качестве естественной единицы силы кильватерной волны ( $\Phi_0$ ), приблизительно равной (в пределах коэффициента порядка единицы) кильватерному полю одиночного короткого сгустка «резонансной» длины (около четверти плазменного периода). Одиночный сгусток менее устойчив, чем последовательность из многих сгустков, и существенно меняет свою форму и кильватерное поле при слабых возмущениях. Однако, если возмущение имеет такую фазу, что оно расфокусирует передний

край пучка, то даже длинный пучок может быть разрушен очень слабым полем. В этом случае сгустки разрушаются один за другим, подобно эффекту домино: когда разрушение одного сгустка инициирует разрушение следующего сгустка и так далее.

Типичное время перехода от невозмущённого равновесного состояния к возмущённому пропорционально обратному квадратному корню из амплитуды возмущения. Для амплитуды порядка  $\Phi_0$  оно имеет порядок обратной бетатронной частоты радиальных колебаний частиц пучка (2.2). Единственным исключением является разрушение последовательности сгустков в результате эффекта домино, которое занимает больше времени.

## Благодарности

Расчеты выполнены на оборудовании центра коллективного пользования «Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН» [49].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] 2020 roadmap on plasma accelerators / Félicie Albert, M E Couprie, Alexander Debus et al. // [New Journal of Physics](#). — 2021. — mar. — Vol. 23, no. 3. — P. 031101. — URL: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abcc62>.
- [2] Keinigs Rhon, Jones Michael E. Two-dimensional dynamics of the plasma wakefield accelerator // [The Physics of Fluids](#). — 1987. — Vol. 30, no. 1. — P. 252–263. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.866183>.
- [3] Experimental measurement of nonlinear plasma wake fields / J. B. Rosenzweig, P. Schoessow, B. Cole et al. // [Phys. Rev. A](#). — 1989. — Feb. — Vol. 39. — P. 1586–1589. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.39.1586>.
- [4] Injection, trapping, and acceleration of electrons in a three-dimensional nonlinear laser wakefield / S. Yu. Kalmykov, L. M. Gorbunov, P. Mora, G. Shvets // [Physics of Plasmas](#). — 2006. — Vol. 13, no. 11. — P. 113102. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.2363172>.
- [5] Acceleration and focusing of electrons in two-dimensional nonlinear plasma wake fields / J. B. Rosenzweig, B. Breizman, T. Katsouleas, J. J. Su // [Phys. Rev. A](#). — 1991. — Nov. — Vol. 44. — P. R6189–R6192. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.44.R6189>.

- [6] Plasma-wakefield acceleration of a positron beam / S. Lee, T. Katsouleas, R. G. Hemker et al. // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Sep. — Vol. 64. — P. 045501. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.64.045501>.
- [7] Demonstration of electron beam self-focusing in plasma wake fields / J. B. Rosenzweig, P. Schoessow, B. Cole et al. // *Physics of Fluids B: Plasma Physics.* — 1990. — Vol. 2, no. 6. — P. 1376–1383. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.859559>.
- [8] Lotov K.V. Simulation of ultrarelativistic beam dynamics in the plasma wake-field accelerator // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment.* — 1998. — Vol. 410, no. 3. — P. 461–468. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900298001788>.
- [9] Lotov K. V. Radial equilibrium of relativistic particle bunches in plasma wakefield accelerators // *Physics of Plasmas.* — 2017. — Vol. 24, no. 2. — P. 023119. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4977058>.
- [10] Plasma wake-field accelerator experiments at KEK / K. Nakajima, A. Enomoto, H. Kobayashi et al. // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment.* — 1990. — Vol. 292, no. 1. — P. 12–20. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016890029091729U>.
- [11] Power J. G., Gai W., Kanareykin A. Transformer ratio enhancement using a ramped bunch train in a collinear wakefield accelerator // *AIP Conference Proceedings.* — 2001. — Vol. 569, no. 1. — P. 605–615. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1384388>.

- [12] A TRAIN OF MICRO-BUNCHES FOR PWFA EXPERIMENTS PRODUCED BY RF PHOTOINJECTORS / M. BOSCOLO, M. FERRARIO, C. VACCAREZZA et al. // [International Journal of Modern Physics B](#). — 2007. — Vol. 21, no. 03n04. — P. 415–421. — URL: <https://doi.org/10.1142/S0217979207042197>.
- [13] Generation of Trains of Electron Microbunches with Adjustable Subpicosecond Spacing / P. Muggli, V. Yakimenko, M. Babzien et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2008. — Jul. — Vol. 101. — P. 054801. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.054801>.
- [14] Simple method for generating adjustable trains of picosecond electron bunches / P. Muggli, B. Allen, V. E. Yakimenko et al. // [Phys. Rev. ST Accel. Beams](#). — 2010. — May. — Vol. 13. — P. 052803. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTAB.13.052803>.
- [15] SPARC\_LAB present and future / M. Ferrario, D. Alesini, M. Anania et al. // [Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms](#). — 2013. — Vol. 309. — P. 183–188. — The 5th International Conference “Channeling 2012”, “Charged & Neutral Particles Channeling Phenomena” September 23-28, 2012, Alghero (Sardinia), Italy. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168583X13003844>.
- [16] Generation of ultrafast electron bunch trains via trapping into multiple periods of plasma wakefields / Grigory Golovin, Vojtěch Horný, Wen-chao Yan et al. // [Physics of Plasmas](#). — 2020. — Vol. 27, no. 3. — P. 033105. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.5141953>.
- [17] Path to AWAKE: Evolution of the concept / A. Caldwell, E. Adli, L. Amorim et al. // [Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated](#)

- [Equipment](#). — 2016. — Vol. 829. — P. 3–16. — 2nd European Advanced Accelerator Concepts Workshop - EAAC 2015. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900215016307>.
- [18] AWAKE, The Advanced Proton Driven Plasma Wakefield Acceleration Experiment at CERN / E. Gschwendtner, E. Adli, L. Amorim et al. // [Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment](#). — 2016. — Vol. 829. — P. 76–82. — 2nd European Advanced Accelerator Concepts Workshop - EAAC 2015. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900216001881>.
- [19] AWAKE readiness for the study of the seeded self-modulation of a 400 GeV proton bunch / P Muggli, E Adli, R Apsimon et al. // [Plasma Physics and Controlled Fusion](#). — 2017. — nov. — Vol. 60, no. 1. — P. 014046. — URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/aa941c>.
- [20] Kumar Naveen, Pukhov Alexander, Lotov Konstantin. Self-Modulation Instability of a Long Proton Bunch in Plasmas // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2010. — Jun. — Vol. 104. — P. 255003. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.255003>.
- [21] Lotov K. V. Physics of beam self-modulation in plasma wakefield accelerators // [Physics of Plasmas](#). — 2015. — Vol. 22, no. 10. — P. 103110. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4933129>.
- [22] Experimental Observation of Plasma Wakefield Growth Driven by the Seeded Self-Modulation of a Proton Bunch / M. Turner, E. Adli, A. Ahuja et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2019. — Feb. — Vol. 122. — P. 054801. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.054801>.

- [23] Experimental Observation of Proton Bunch Modulation in a Plasma at Varying Plasma Densities / E. Adli, A. Ahuja, O. Apsimon et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Feb. — Vol. 122. — P. 054802. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.054802>.
- [24] Muggli Patric. Physics to plan AWAKE Run 2 // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2020. — jul. — Vol. 1596, no. 1. — P. 012008. — URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1596/1/012008>.
- [25] Muggli P. *Physics Program and Experimental for AWAKE Run 2* // Proc. IPAC'21. — International Particle Accelerator Conference no. 12. — JACoW Publishing, Geneva, Switzerland, 2021. — 08. — P. 586–589. — URL: <https://jacow.org/ipac2021/papers/mopab173.pdf>.
- [26] Adli E. *Towards Awake Applications: Electron Beam Acceleration in a Proton Driven Plasma Wake* // Proc. of International Particle Accelerator Conference (IPAC'16), Busan, Korea, May 8-13, 2016. — International Particle Accelerator Conference no. 7. — Geneva, Switzerland : JACoW, 2016. — June. — P. 2557–2560. — URL: <http://jacow.org/ipac2016/papers/wepmy008.pdf>.
- [27] Öz E., Muggli P. A novel Rb vapor plasma source for plasma wake-field accelerators // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. — 2014. — Vol. 740. — P. 197–202. — Proceedings of the first European Advanced Accelerator Concepts Workshop 2013. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900213015003>.
- [28] A rubidium vapor source for a plasma source for AWAKE / G Plyushchev, R Kersevan, A Petrenko, P Muggli // *Journal of Physics*

D: *Applied Physics*. — 2017. — dec. — Vol. 51, no. 2. — P. 025203. — URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6463/aa9dd7>.

- [29] Buttenschön B, Fahrenkamp N, Grulke O. A high power, high density helicon discharge for the plasma wakefield accelerator experiment AWAKE // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2018. — may. — Vol. 60, no. 7. — P. 075005. — URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/aac13a>.
- [30] Injection of a LWFA Electron Bunch in a PWFA Driven by a Self-modulated-proton-bunch / P. Muggli, L.D. Amorim, S. Karsch et al. // Proc. 5th International Particle Accelerator Conference (IPAC'14), Dresden, Germany, June 15-20, 2014. — International Particle Accelerator Conference no. 5. — Geneva, Switzerland : JACoW, 2014. — July. — P. 1470–1472. — URL: <http://jacow.org/ipac2014/papers/tupme048.pdf>.
- [31] Monoenergetic Energy Doubling in a Hybrid Laser-Plasma Wakefield Accelerator / B. Hidding, T. Königstein, J. Osterholz et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — May. — Vol. 104. — P. 195002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.195002>.
- [32] Fundamentals and Applications of Hybrid LWFA-PWFA / Bernhard Hidding, Andrew Beaton, Lewis Boulton et al. // *Applied Sciences*. — 2019. — Vol. 9, no. 13. — URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/9/13/2626>.
- [33] Pae K. H., Choi I. W., Lee J. Self-mode-transition from laser wakefield accelerator to plasma wakefield accelerator of laser-driven plasma-based electron acceleration // *Physics of Plasmas*. — 2010. — Vol. 17, no. 12. — P. 123104. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.3522757>.



- [34] Dynamics of electron bunches at the laser–plasma interaction in the bubble regime / V.I. Maslov, O.M. Svystun, I.N. Onishchenko, V.I. Tkachenko // [Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment](#). — 2016. — Vol. 829. — P. 422–425. — 2nd European Advanced Accelerator Concepts Workshop - EAAC 2015. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900216301814>.
- [35] Energy Enhancement and Energy Spread Compression of Electron Beams in a Hybrid Laser-Plasma Wakefield Accelerator / Ying Wu, Changhai Yu, Zhiyong Qin et al. // [Applied Sciences](#). — 2019. — Vol. 9, no. 12. — URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/9/12/2561>.
- [36] Giga-electronvolt electrons due to a transition from laser wakefield acceleration to plasma wakefield acceleration / P. E. Masson-Laborde, M. Z. Mo, A. Ali et al. // [Physics of Plasmas](#). — 2014. — Vol. 21, no. 12. — P. 123113. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4903851>.
- [37] Physics of High-Charge Electron Beams in Laser-Plasma Wakefields / J. Götzfried, A. Döpp, M. F. Gilljohann et al. // [Phys. Rev. X](#). — 2020. — Oct. — Vol. 10. — P. 041015. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.10.041015>.
- [38] Evidence for high-energy and low-emittance electron beams using ionization injection of charge in a plasma wakefield accelerator / N Vafaei-Najafabadi, W An, C E Clayton et al. // [Plasma Physics and Controlled Fusion](#). — 2016. — feb. — Vol. 58, no. 3. — P. 034009. — URL: <https://doi.org/10.1088/0741-3335/58/3/034009>.
- [39] Limitation on the accelerating gradient of a wakefield excited by an ultrarelativistic electron beam in rubidium plasma / N. Vafaei-Najafabadi,

- K. A. Marsh, C. E. Clayton et al. // *Phys. Rev. Accel. Beams.* — 2016. — Oct. — Vol. 19. — P. 101303. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.101303>.
- [40] Producing multi-coloured bunches through beam-induced ionization injection in plasma wakefield accelerator / N. Vafaei-Najafabadi, L. D. Amorim, E. Adli et al. // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 2019. — Vol. 377, no. 2151. — P. 20180184. — URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.2018.0184>.
- [41] Bastrukov M A, Lotov K V. Evolution of equilibrium particle beams in plasma under external wakefields // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2022. — may. — Vol. 64, no. 7. — P. 075003. — URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/ac6ffe>.
- [42] Lotov K. V. Fine wakefield structure in the blowout regime of plasma wakefield accelerators // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2003. — Jun. — Vol. 6. — P. 061301. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTAB.6.061301>.
- [43] Sosedkin A.P., Lotov K.V. LCODE: A parallel quasistatic code for computationally heavy problems of plasma wakefield acceleration // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment.* — 2016. — Vol. 829. — P. 350–352. — 2nd European Advanced Accelerator Concepts Workshop - EAAC 2015. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900215016034>.
- [44] Lotov K. V. Controlled self-modulation of high energy beams in a plasma // *Physics of Plasmas.* — 2011. — Vol. 18, no. 2. — P. 024501. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.3558697>.

- [45] Lotov K. V. Effect of beam emittance on self-modulation of long beams in plasma wakefield accelerators // *Physics of Plasmas*. — 2015. — Vol. 22, no. 12. — P. 123107. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4936973>.
- [46] Phase Velocity and Particle Injection in a Self-Modulated Proton-Driven Plasma Wakefield Accelerator / A. Pukhov, N. Kumar, T. Tückmantel et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Sep. — Vol. 107. — P. 145003. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.145003>.
- [47] Growth and Phase Velocity of Self-Modulated Beam-Driven Plasma Waves / C. B. Schroeder, C. Benedetti, E. Esarey et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Sep. — Vol. 107. — P. 145002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.145002>.
- [48] Chen Pisin. Grand disruption: A possible final focusing mechanism for linear colliders // *Part. Accel.* — 1986. — Vol. 20, no. SLAC-PUB-3823. — P. 171–182. — URL: <https://cds.cern.ch/record/166083>.
- [49] Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН [Электронный ресурс]: сайт. — Иркутск: ИДСТУ СО РАН. — URL: <http://hpc.icc.ru>.