МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра **ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки **03.04.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **МАГИСТРАТУРА**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Христо Михаил Сергеевич

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Моделирование диамагнитного удержания в осесимметричной открытой ловушке

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой	**Научный руководитель**
д-р. физ.-мат. наук,	канд. физ.-мат. наук,
профессор	в.н.с. ИЯФ СО РАН
Иванов А. А/…………..	Беклемишев А. Д./…………..
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)	(фамилия И., О.) / (подпись, МП)
«……»………………20…г.	«……»………………20…г.

Дата защиты: «……»………………20…г.

Новосибирск, 2019

Оглавление

1. Введение

Быстро развивающиеся линейные системы, такие как открытые ловушки [1, 2] и конфигурации с обратным полем (Field-reversed configuration, FRC) [3, 4], в последнее время все чаще рассматриваются в качестве прототипа компактного термоядерного реактора с высокой плотностью энергии и относительно простой конструкцией. Газодинамическая ловушка (ГДЛ) [5] является одним из претендентов на эту роль. Однако теоретические оценки показывают, что для достижения реакторных параметров в ГДЛ установка должна быть чрезвычайно длинной. Недавно предложенный режим диамагнитного удержания [6] позволит существенно уменьшить длину реактора за счет значительного увеличения энергетического времени жизни.

Пусть плазма закачивается в магнитную трубку быстрее, чем теряется через концы, тогда поперечное сечение трубки будет расти из-за диамагнитного ослабления поля при постоянном магнитном потоке, причем, в основном в области слабого вакуумного магнитного поля. Увеличение поперечного сечения приводит к росту объема силовой трубки V, тогда как потери плазмы через концы почти не меняются. В результате продольное время жизни частиц в такой магнитной трубке увеличивается, действительно

$$\tau_{\|} \sim \frac{Vn}{2 \times nv_m \times S_m} \sim \frac{LR_v}{2v_m}\frac{1}{\sqrt{1-\beta}},$$

где n – плотность плазмы, L - расстояние между магнитными пробками, R_v – вакуумное пробочное отношение, S_m и v_m – площадь поперечного сечения силовой трубки и скорость потока плазмы в пробках, $\beta = 8\pi p/B_v^2$ – относительное давление плазмы, B_v – вакуумное магнитное поле в центре ловушки. Можно заметить, что в пределе высокого давления $\beta \to 1$ продольное время жизни частиц $\tau_{\|}$ в магнитной трубке формально стремится к бесконечности.

Основная идея диамагнитного удержания заключается в создании «пузыря» плазмы предельного давления с $\beta \simeq 1$ в открытой ловушке. Внутри такого «пузыря» поперечный перенос значительно возрастает, поскольку магнитное поле практически полностью вытеснено плазмой. При этом снаружи «пузыря» поле близко к вакуумному, следовательно плазма быстро теряется вдоль через пробки за время газодинамического удержания. На границе «пузыря», в переходном слое толщины λ, поперечный $\Phi_\perp$ и продольный $\Phi_\parallel$ потоки плазмы должны сравниваться, откуда получаем

$$\Phi_\perp \sim \Phi_\parallel, \quad \Phi_\perp \sim D_M \frac{n}{\lambda} \times 2\pi a L, \quad \Phi_\parallel \sim 2 \times n v_m \times \frac{2\pi a \lambda}{R_v},$$
$$\Rightarrow$$
$$\lambda \sim \sqrt{\frac{D_M L R_v}{2 v_m}}, \tag{1}$$

где $D_M = c^2/4\pi\sigma$ – коэффициент диффузии плазмы сквозь магнитное поле, a – радиус «пузыря». Схожим образом можно оценить время жизни частиц в «пузыре». Для этого нужно полное число частиц Vn разделить на поток через торцы ловушки $\Phi_\parallel$.

$$\tau_n \sim \frac{Vn}{2 \times n v_m \times 2\pi a \lambda / R_v} \sim \tau_{GDT} \frac{a}{\lambda} \sim \sqrt{\tau_\perp \tau_{GDT}}, \tag{2}$$

где $\tau_{GDT} = L R_v / 2 v_m$ – газодинамическое время жизни, $\tau_\perp = a^2/D_M$ – характерное время просачивания плазмы сквозь магнитное поле. В широком диапазоне физических параметров толщина переходного слоя λ мала по сравнению с радиусом «пузыря» a. Это означает, что время жизни в режиме диамагнитного удержания должно значительно возрасти по сравнению с газодинамическим, так как оно пропорционально отношению a/λ. Качественно это объясняется тем, что сечение торцов, через которые теряется плазма, эффективно уменьшается.

Перспектива существенного улучшения удержания плазмы в диамагнитном «пузыре» подтолкнула исследователей к проведению более глубокого теоретического и экспериментального анализа данного режима. В частности, диамагнитная ловушка рассматривается в качестве части программы ГДМЛ [7]. Настоящая же работа посвящена теоретическому исследованию режима диамагнитного удержания.

Аналитическая модель равновесия плазмы в режиме диамагнитного удержания в цилиндрической геометрии была представлена в работе [6]. Однако было также установлено, что в равновесии с предельным β на торцах «пузыря» возникают непараксиальные области, где цилиндрическое приближение перестает работать, и аналитическая теория выходит за рамки своей применимости. В связи с этим возникла потребность в создании более точной непараксиальной модели равновесия.

Одной из целей настоящей работы является разработка теории непараксиального равновесия плазмы в режиме диамагнитного удержания в осесимметричной открытой ловушке. Для этого была построена модель, состоящая из уравнения Грэда-Шафранова [8, 9] и уравнения переноса частиц, описывающего диффузионное просачивание плазмы поперек магнитного поля и газодинамические потери через пробки. Сильная нелинейность системы уравнений в непараксиальном случае требует применения численных методов, в частности, в работе были использованы сеточные и итерационные методы. Были получены численные решения, соответствующие режиму диамагнитного удержания. Также было исследовано влияние гофрировки вакуумного магнитного поля на равновесие в режиме диамагнитного удержания. Это позволяет сформулировать требования к амплитуде модуляции поля при конструировании будущих экспериментальных установок. Также были найдены равновесные решения для проектируемых установок, таких как САТ [10] (в режиме диамагнитного удержания) и ГДМЛ [7]. Эти расчеты могут быть, например, применены для исследования неустойчивостей, анализа эффективности удержания отдельных частиц в «пузыре» и оптимизации магнитной системы.

Следующий шаг – переход от стационарной задачи к динамической. Ранее была построена модель, дающая качественное представление о начальной стадии формирования «пузыря», кода можно пренебречь поперечным переносом [6] . В данной работе была построена динамическая модель диамагнитного удержания в осесимметричной открытой ловушке в цилиндрическом приближении с учетом поперечного переноса. Для этого использовались классические уравнения баланса вещества и энергии [11], причем, как и в стационарной задаче, считалось, что продольные потери газодинамические, а поперечный перенос представляет из себя диффузию плазмы сквозь магнитное поле. Также предполагалось, что в каждый момент времени плазма находится в квазиравновесии. В качестве приложения была получена аналитическая оценка пороговой мощности нагрева, требуемой для перехода в режим диамагнитного удержания. Показано, что результаты расчетов находятся в хорошем согласии с данной оценкой.

Глава 2 посвящена стационарной задаче, в ней приводится краткий вывод основных уравнений, результаты численного моделирования и их анализ, а также обсуждается влияние гофрировки вакуумного магнитного поля на равновесие в режиме диамагнитного удержания. В конце главы представлено возможное расширение модели на случай анизотропного давления плазмы. Глава 3 повествует о динамике формирования «пузыря», обсуждается постановка задачи и результаты численного моделирования, в том числе приводится оценка критической мощности, необходимой для формирования «пузыря».

2. Стационарная задача

2.1. Равновесие

Для описания равновесия плазмы будем использовать уравнение Грэда-Шафранова, которое часто применяется при рассмотрении осесимметричных задач. Данное уравнение можно получить в рамках одножидкостной магнитной гидродинамики (МГД) в случае изотропного давления плазмы p. Его вывод в общем случае тороидальных систем приведен в [8, 9]. Аналогичным образом уравнение может быть получено для случая осесимметричной открытой ловушки

$$\Delta^*\psi = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -16\pi^3 r^2\frac{dp}{d\psi} - \frac{8\pi^2}{c} r j_v, \tag{3}$$

где j_v – плотность тока во внешних проводниках, p – давление плазмы, ψ – магнитный поток через сечение πr^2, который в цилиндрических координатах (r, θ, z) можно определить как

$$[\mathbf{B}\times\mathbf{e}_\theta] = -\frac{1}{2\pi r}\nabla\psi. \tag{4}$$

Граничные условия

Часто предполагается, что плазма заключена в идеально проводящий кожух [12]. В общем случае, когда кожух не совпадает с магнитной поверхностью, на временах порядка времени скин-эффекта граничное условие можно сформулировать следующим образом

$$\psi(r, z) = \psi_0(r, z), \qquad (r, z) \in \gamma_s.$$

где γ_s – кривая в пространстве (r, z), совпадающая с проводящим кожухом, $\psi_0(r, z)$ – заданная функция, которая определяется внешними полями и формой кожуха.

В настоящей работе предполагается, что кожух отсутствует, а плазма удерживается токами внешних проводников. В этом случае граничные условия задаются следующим образом

$$\psi(r,z)|_{r=0} = 0, \qquad \lim_{r,z\to\infty} |\psi(r,z)| \leqslant \text{const} < \infty. \tag{5}$$

Упрощенный метод задания граничного условия по z – периодичность решения:

$$\psi(r,z) = \psi(r, z+L). \tag{6}$$

Такая постановка позволяет применять дискретное преобразование Фурье, что значительно упрощает численное моделирование. Решения для ловушки конечной длины L и периодической близки, если расстояние от пробки до центра ловушки много больше радиуса плазмы a, т.е. $L/2 \gg a$.

2.2. Перенос

В правой части уравнения Грэда-Шафранова (3) содержится давление плазмы p, которое в изотропном случае является функцией магнитного потока ψ. Часто в качестве $p(\psi)$ выбирается некоторая модельная зависимость, например, полученная из аппроксимации экспериментальных данных. Однако, вообще говоря, профиль давления должен самосогласованно определяться из уравнения переноса. Оно может быть получено из закона сохранения вещества с источником

$$\frac{d}{d\psi}\left(\Phi_{\parallel}+\Phi_{\perp}\right)=\frac{dQ}{d\psi}, \tag{7}$$

где $\Phi_{\parallel}$, $\Phi_{\perp}$ – поток плазмы через торцы и поверхность силовой трубки, соответственно, Q – внутренний источник частиц.

Диффузионная скорость просачивания плазмы поперек магнитного поля определяется проводимостью и может быть найдена из закона Ома

$$\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]+\mathbf{E}=\frac{\mathbf{j}}{\sigma}. \tag{8}$$

Можно показать, что в стационаре азимутальная составляющая электрического поля равна нулю. Тогда, подставляя в (8) магнитное поле, выраженное из (4), имеем

$$\mathbf{v}_{\perp}=-\frac{2\pi rc}{\sigma}j_{\theta}\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^{2}}. \tag{9}$$

В свою очередь, из уравнения баланса сил

$$\nabla p=\frac{1}{c}\left[\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right],$$

вместе с (4), получаем

$$j_{\theta}=2\pi rc\frac{dp}{d\psi}. \tag{10}$$

В итоге, подставляя азимутальный ток (10) в выражение (9), находим

$$\Phi_{\perp}=\int\limits_{S_{\perp}(\psi)}n\mathbf{v}d\mathbf{S}=-\frac{4\pi^{2}c^{2}}{\sigma}n\frac{dp}{d\psi}\int\limits_{\gamma_{\perp}(\psi)}\frac{r^{2}dz}{B_{z}}, \tag{11}$$

где B_z – проекция магнитного поля на ось z, интегрирование ведется вдоль силовой линии $\psi = \mathrm{const}$. Продольный поток через концы магнитной трубки определяется газодинамическими потерями

$$\Phi_{\|} = 2 \int\limits_{S_{\|}(\psi)} n\mathbf{v}d\mathbf{S} = 4\pi \int\limits_{0}^{r_m(\psi)} n v_m r dr, \tag{12}$$

где r_m, v_m – радиус силовой трубки и скорость потока плазмы в пробках.

Если время удержания плазмы достаточно велико, можно считать, что источник частиц Q успевает «растечься» вдоль магнитного поля, и, следовательно, является функцией магнитной поверхности, то есть $Q = Q(\psi)$. Если плотность источника задана как функция координат (r, z), то

$$\frac{dQ}{d\psi} = 2\pi \frac{d}{d\psi} \int\limits_{\Gamma(\psi)} q(r, z) r dr dz,$$

где $\Gamma(\psi)$ – площадь сечения магнитной трубки $\psi = \mathrm{const}$ в плоскости (r, z).

Для простоты считаем, что температура электронов постоянна $T = \mathrm{const}$, тогда (7) вместе с уравнением состояния $p = nT$ при учете равенств (11) и (12) сводится к уравнению переноса

$$2v_m \frac{p}{B_{mz}} - 2(2\pi)^3 D_M \frac{d}{d\psi} \left(p \frac{dp}{d\psi} \int\limits_{\gamma_{\perp}(\psi)} \frac{r^2 dz}{B_z} \right) = \frac{dW}{d\psi}, \tag{13}$$

где $W = TQ$ – источник энергии, B_{mz} – значение B_z в пробке.

Граничные условия

Пусть плазма ограничена лимитером радиуса a_{lim}. Тогда давление плазмы за ним равно нулю

$$p(r \geqslant a_{lim}) = 0.$$

Заметим, что наличие лимитера не противоречит предположению об отсутствии внешнего проводящего кожуха (см. раздел 2.1), поскольку его можно разомкнуть, разрезав на секции.

Граничное условие на оси ставится следующим образом

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=0} = 0.$$

Если же источник локализован вблизи оси, а его радиус меньше некоторого a_s, это условие можно заменить приближенным. Пренебрегая продольными потерями, имеем

$$\left.\frac{dp^2}{d\psi}\right|_{r=a_s} \simeq -W \left.\left((2\pi)^3 D_M \int\limits_{\gamma_\perp(\psi)} \frac{r^2 dz}{B_z} \right)^{-1} \right|_{r=a_s}.$$

Такая постановка граничного условия может быть особенно полезна для численных расчетов, если размер источника сопоставим с шагом дискретной сетки.

2.3. Численное моделирование

В связи с тем, что система уравнений (3) и (13) является существенно нелинейной, для ее решения мы пользовались численными методами. На рисунке 1 представлена упрощенная блок-схема итерационного алгоритма.

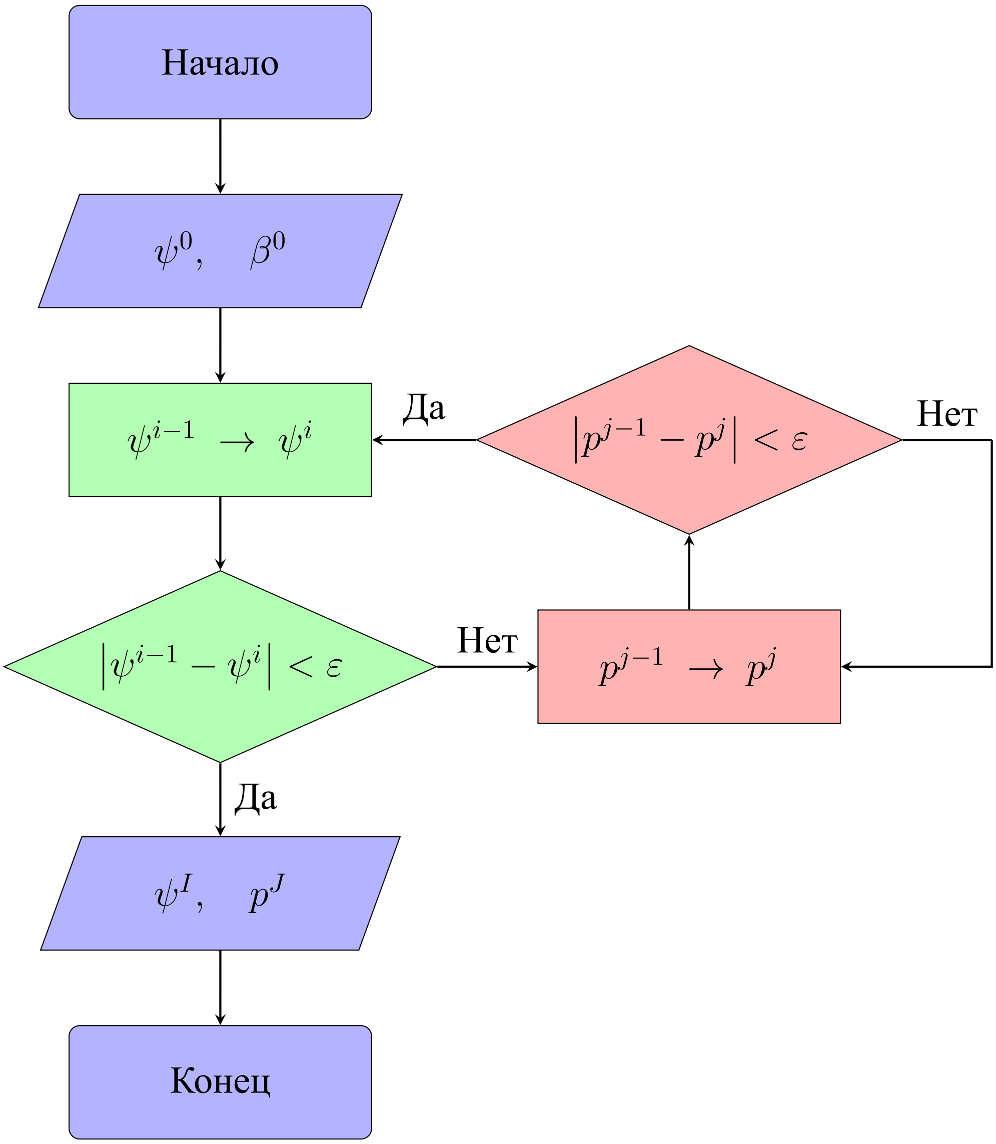

Рис. 1. Блок-схема итерационного алгоритма.

Граничное условие на бесконечности

Внешнее граничное условие (5) уравнения Грэда-Шафранова ставится на бесконечности и не приспособлено к использованию в численных расчетах непосредственно. Поэтому следует заменить его эквивалентным условием при конечном радиусе. Для этого нужно найти решение уравнения (3) во внешней области, где нет токов проводников и плазмы, и, следовательно, правая часть равняется нулю, а затем сшить его с внутренним решением.

Периодическое граничное условие (6) удовлетворяется автоматически, если искать решение в виде разложения в ряд Фурье. Пусть сетка по z содержит N точек, тогда

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{\psi}_k \exp\left[-\frac{2\pi ikn}{N}\right],$$

где ψ_n – значение ψ в n-том узле, $\hat{\psi}_k$ – k-тая гармоника дискретного преобразования Фурье. После подстановки данного разложения в уравнение (3) с нулевой правой частью, учитывая ортогональность Фурье гармоник, получаем N одномерных независимых уравнений

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\psi}_k}{\partial r}\right) - \nu_k^2\hat{\psi}_k = 0, \qquad \nu_k = 2\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right),$$

причем они имеют аналитическое решение

$$\hat{\psi}_k = C_1 r K_1(\nu_k r) + C_2 r I_1(\nu_k r), \tag{14}$$

где I_n и K_n – модифицированные функции Бесселя.

Граничное условие на бесконечности можно удовлетворить, если положить $C_2 = 0$. В конечном итоге получаем условие сшивки

$$\frac{1}{\hat{\psi}_k}\frac{\partial\hat{\psi}_k}{\partial r} = \frac{1}{rK_1(\nu_k r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[rK_1(\nu_k r)\right] = -\frac{\nu_k K_0(\nu_k r)}{K_1(\nu_k r)},$$

которое может выступать в роли конечного эквивалента граничному условию (5) и применяться для нахождения численного решения уравнения (3) во внутренней области.

Проблема малого знаменателя

Как было сказано ранее, внутри «пузыря» магнитное поле близко к нулю. Коэффициент поперечного переноса в уравнении (13), в свою очередь, содержит в знаменателе B_z. Это приводит к тому, что в процессе вычисления равновесных конфигураций с $\beta \simeq 1$ мы неизбежно будем сталкиваться

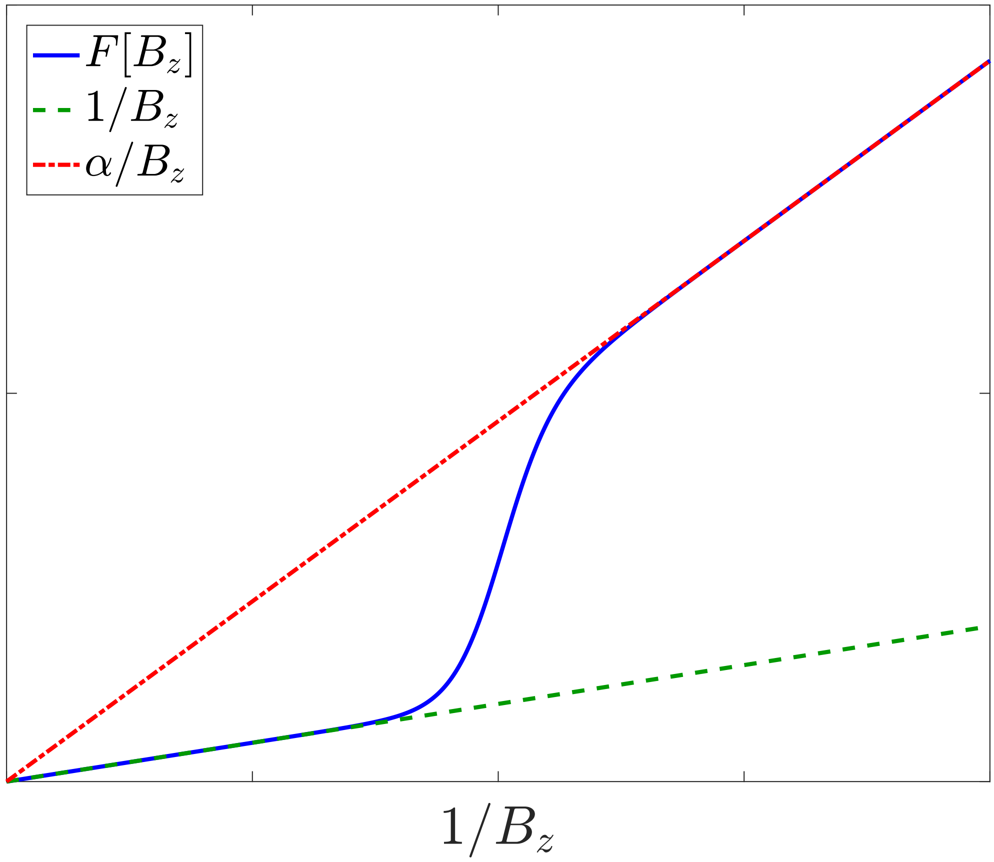

Рис. 2. Модельная зависимость коэффициента поперечного переноса $F\,[B_z]$ (синяя сплошная), а также ее асимптотики при $B_z \ll B_\varepsilon$ (зеленый пунктир); при $B_z \gg B_\varepsilon$ (красный штрихпунктир).

с проблемой деления на число близкое к нулю, что может спровоцировать возбуждение численных неустойчивостей и нарушение общей сходимости алгоритма.

Из физических соображений ясно, что магнитное поле в действительности отклоняется от идеального значения, полученного в рамках МГД, поскольку всегда испытывает малые флуктуации. При приближении к нулю эти флуктуации могут стать доминирующими и превысить само значение магнитного поля. В этом случае поперечный транспорт перестанет определяться классической зависимостью (11), а будет иметь хаотический характер, что должно привести к увеличению коэффициента поперечного переноса.

Для того чтобы учесть данный эффект на качественном уровне, в уравнении (13) в слагаемом, отвечающем за поперечный перенос, вводится следующая модельная замена

$$\frac{1}{B_z} \to F\left[B_z\right], \quad F\left[B_z\right] = \frac{1}{B_z}\left(1 + \frac{\alpha - 1}{2}\left(1 + \tanh\left[\frac{B_\varepsilon/B_z - 1}{\Delta}\right]\right)\right).$$

Функция $F\left[B_z\right]$ (рис. 2) при $B_z \ll B_\varepsilon$ приближенно описывается зависимостью $\propto 1/B_z$, соответствующей классическому диффузионному переносу, при $B_z \gg B_\varepsilon$ коэффициент переноса эффективно увеличивается в α раз, то есть становится пропорциональным $\propto \alpha/B_z$.

Численные решения

Рассмотрим примеры равновесных численных решений системы уравнений переноса и равновесия в режиме диамагнитного удержания и сравним их с аналитическими оценками, а также обсудим некоторые практические приложения алгоритма.

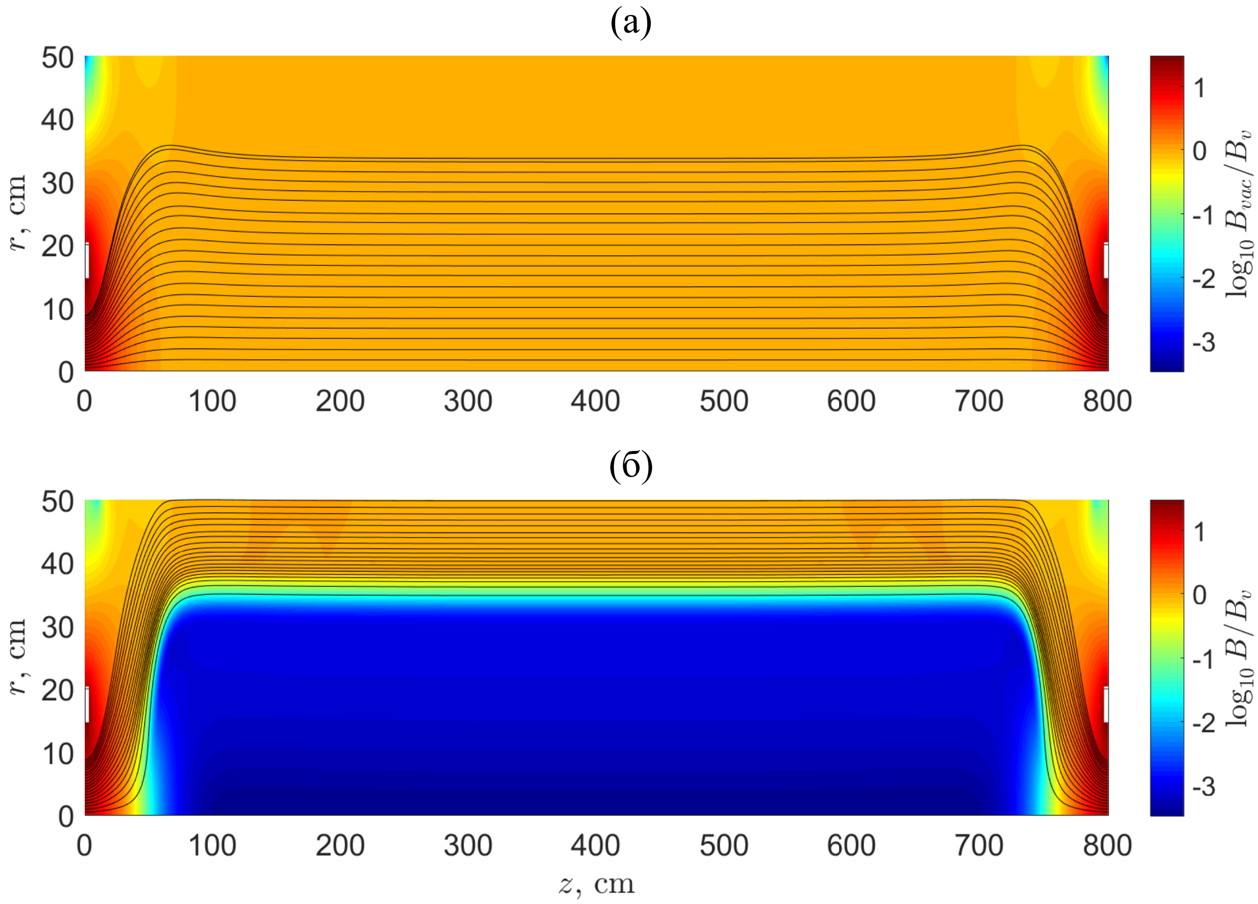

Рис. 3. Пример численного решения. Распределение магнитного поля в плоскости (r, z). (а) вакуумное поле; (б) поле с плазмой. Черным цветом обозначены силовые линии магнитного поля.

Распределение магнитного поля в режиме «пузыря» и соответствующая вакуумная конфигурация представлены на рисунке 3, радиальный профиль относительного давления плазмы $\beta(r) = 8\pi p(r)/B_v^2$ (B_v – величина вакуумного поля на оси в центре ловушки) изображен на рисунке 4. Как и ожидалось, внутри «пузыря» магнитное поле практически полностью вытеснено плазмой и близко к нулю ($B \sim 10^{-3} B_v$), а давление, в свою очередь, близко к предельному ($\beta \simeq 1$).

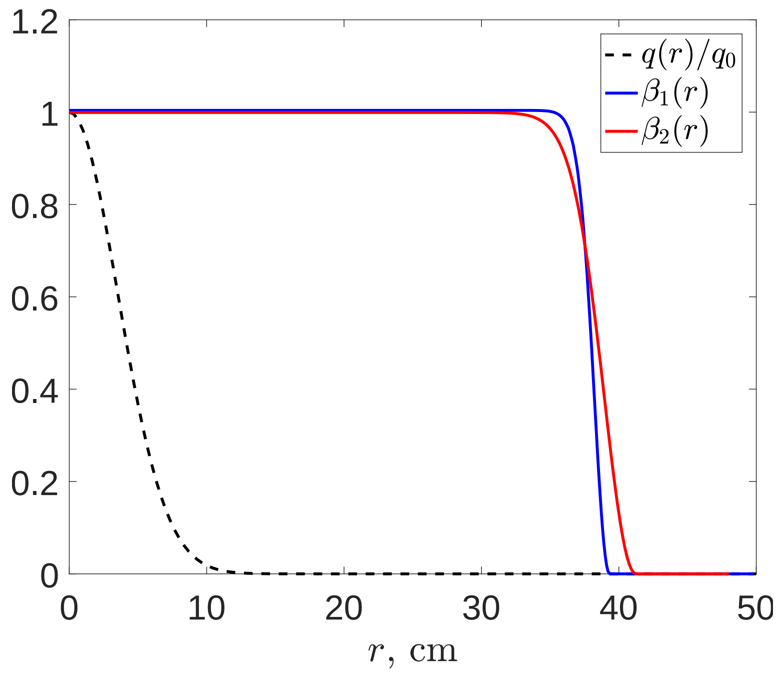

Рис. 4. Радиальный профиль $\beta(r)$ для двух разных решений (красная и синяя сплошная) и форма профиля плотности источника $q(r)$ (черный пунктир) в центральном сечении ловушки.

В работе [6] были получены аналитические оценки толщины переходного слоя λ и радиуса «пузыря» a.

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{D_M L R_v}{2 v_m}}, \qquad a \sim \frac{Q}{2\pi D_M n/\lambda}. \tag{15}$$

С целью верификации численного решения на основе этих оценок были исследованы его масштабные характеристики. В частности, на рисунке 4 представлены профили давления двух численных решений для одной и той же вакуумной конфигурации, но при разных D_M и v_m. В результате сравнения было обнаружено хорошее согласие численных решений с оценками (15).

Диамагнитное поле

Для стабилизации непараксиальных концов «пузыря» можно использовать проводящие пластины. В работе [13] в случае осесимметричной открытой ловушки было показано, что стабилизация проводящей стенкой возможна для плазмы с горячими ионами, если β превышает некоторое пороговое значение.

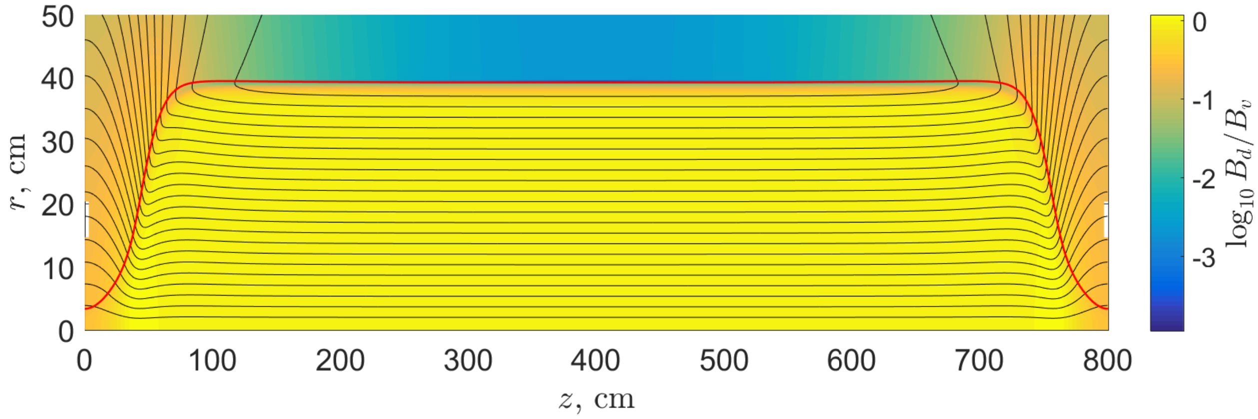

Рис. 5. Распределение диамагнитного поля $\mathbf{B}_d = \mathbf{B} - \mathbf{B}_v$ в плоскости (r, z). Красным цветом обозначена граница плазмы ($\beta \sim 0.01$).

С целью оптимизации положения стабилизирующих пластин было также построено распределение диамагнитного поля (рис. 5). Для достижения наибольшей эффективности стабилизации их следует устанавливать в области наиболее интенсивного диамагнитного поля, достаточно близкого к границе плазмы. Так как стабилизирующий эффект достигается за счет генерации в пластинах токов Фуко, они не обязаны быть замкнутыми и могут быть разрезаны на отдельные сегменты.

Расчет полей для проектируемых установок

В качестве одного из приложений алгоритма были также рассчитаны равновесные конфигурации для проектируемых установок, таких как САТ в режиме «пузыря» и ГДМЛ (рис. 6). Эти расчеты могут быть применены, в частности, для исследования неустойчивостей, анализа эффективности удержания и оптимизации магнитной системы установок.

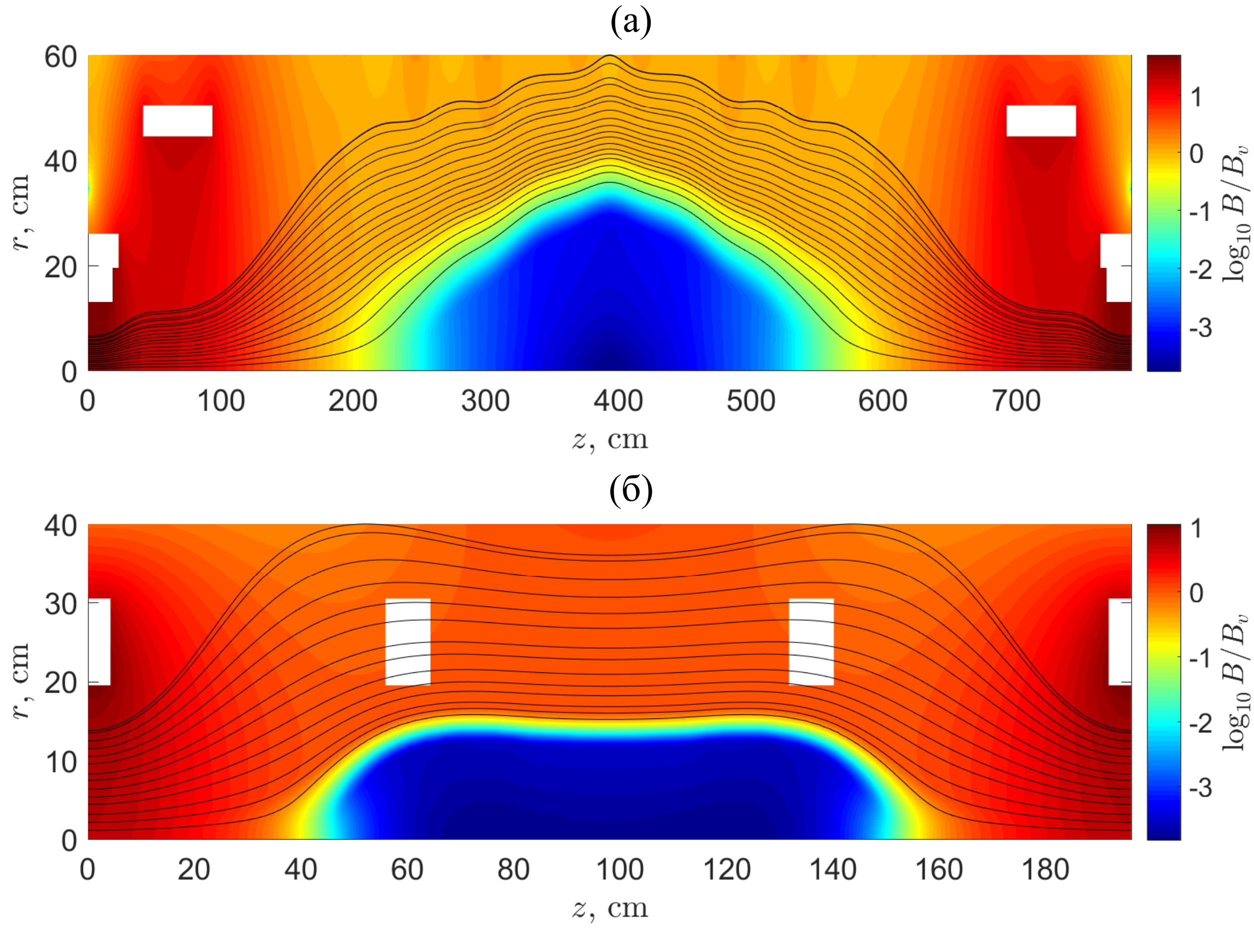

Рис. 6. Пример расчета конфигурации магнитного поля для проектируемых установок: (а) ГДМЛ; (б) САТ в конфигурации «пузыря».

2.4. Гофрировка магнитного поля

В реальном эксперименте магнитное поле почти всегда модулировано, поскольку формируется дискретно расположенными проводниками. В связи с этим полезно исследовать влияние гофрировки магнитного поля на равновесие диамагнитного «пузыря».

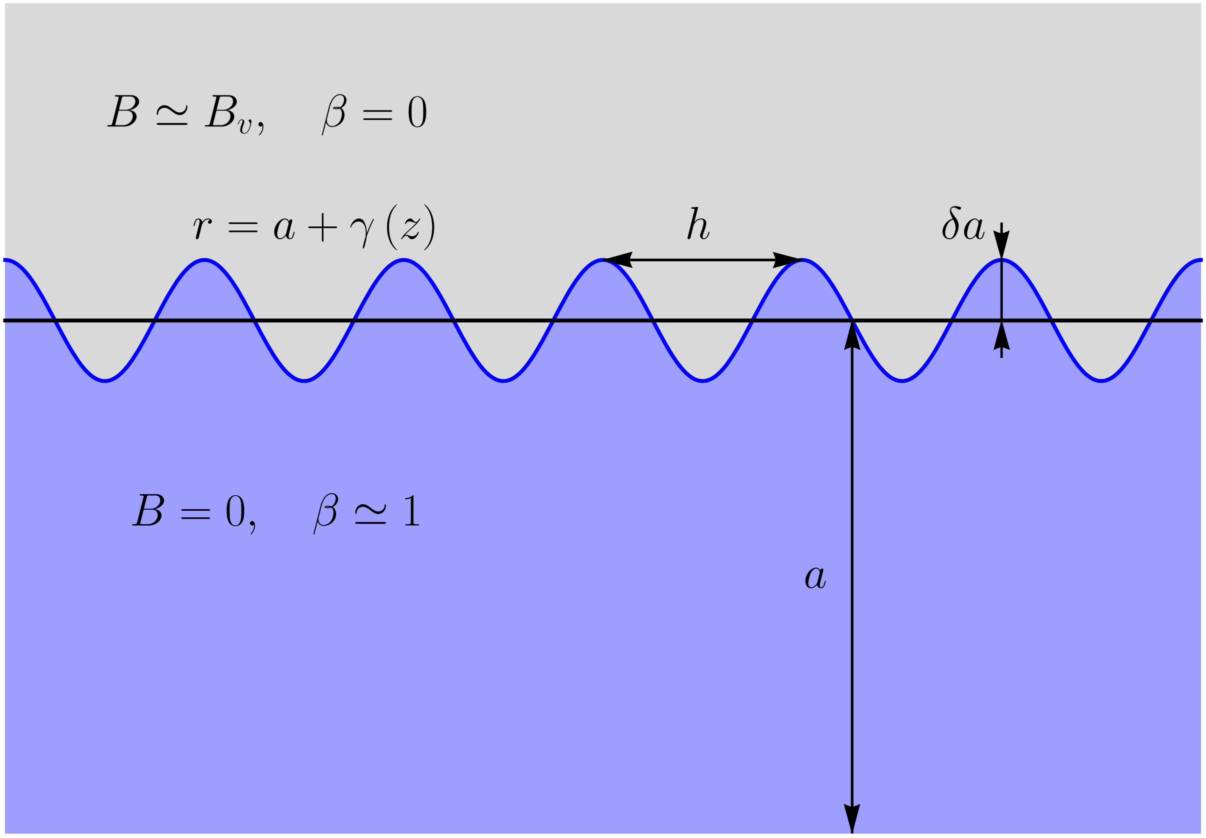

Рис. 7. Схематическое изображение границы «пузыря» в гофрированном магнитном поле.

Получим приближенную аналитическую зависимость гофрировки силовых линий на границе пузыря $\delta a/a$ от гофрировки вакуумного магнитного поля $\delta B_v/B_v$ и шага гофрировки h/a. Для этого рассмотрим следующую задачу. Пусть однородное вакуумное магнитное поле B_v гофрировано с шагом h. Тогда вакуумный магнитный поток можно представить в виде

$$\psi_v(r,z) = \pi B_v r^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m k_h r I_1(m k_h r) \cos(m k_h z),$$

где $k_h = 2\pi/h$, $I_\nu(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода (функции Инфельда). Будем также считать (см. рис. 7), что поле внутри «пузыря» полностью вытеснено плазмой ($\beta \simeq 1,\ B = 0$), толщина переходного слоя λ стремится к нулю, а форма границы плазмы задается уравнением

$$r = a + \gamma(z), \qquad \gamma(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \gamma_m \cos(mk_h z). \tag{16}$$

Тогда магнитный поток на границе равен нулю

$$\psi|_{r=a+\gamma(z)} = 0, \tag{17}$$

а магнитное поле терпит скачок

$$B\|_{r=a+\gamma(z)} = \sqrt{\beta} B_v. \tag{18}$$

Так как уравнение равновесия (3) с нулевой правой частью линейно, решение вне плазмы в вакуумном зазоре имеет вид

$$\psi = \psi_v + \psi_p.$$

Причем для периодичной с периодом h конфигурации

$$\psi_p(r, z) = b_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} b_m k_h r K_1(mk_h r) \cos(mk_h z),$$

где $K_\nu(x)$ – модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдональда). В итоге общее решение снаружи от плазмы можно записать в виде

$$\psi = \pi B_v r^2 + b_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m(r) \cos(mk_h z), \tag{19}$$

$$\psi_m(r) = k_h r \left[c_m I_1(mk_h r) + b_m K_1(mk_h r)\right]. \tag{20}$$

Считаем поправку, связанную с гофрировкой, малой, то есть

$$\gamma_m, b_m, c_m \sim \left(\frac{\delta a}{a}\right)^n \quad \forall m \geqslant 1, \quad n \geqslant 1, \qquad \delta a \ll a.$$

Учитывая, что $2\pi r B_z dr = d\psi$, в первом приближении по малости δa граничные условия (17) и (18) можно записать в виде

$$\psi|_a + \gamma(z)\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_a = 0, \tag{21}$$

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_a + \gamma(z)\left.\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]\right|_a = 2\pi\sqrt{\beta}B_v. \tag{22}$$

Определим амплитуду гофрировки вакуумного магнитного поля на границе плазмы (при $r = a$) следующим образом

$$-\delta B_v = \frac{2}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} B_{vz}|_a \cos(k_h z)\,dz = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left.\left[\frac{2}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\psi_v\cos(k_h z)\,dz\right]\right|_a.$$

Следовательно

$$-\delta B_v = c_1\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left.\left[k_h r I_1(k_h r)\right]\right|_a = \frac{c_1 k_h^2}{2\pi}I_0(k_h a)$$

$$\Rightarrow$$

$$c_1 = -\delta B\frac{2\pi}{k_h^2 I_0(k_h a)}. \tag{23}$$

Аналогично определяя гофрировку силовых линий на границе «пузыря», находим

$$\delta a = \frac{2}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(a + \gamma(z))\cos(k_h z)\,dz = \gamma_1. \tag{24}$$

Подставляя (19) в граничные условия (21) и (22), имеем

$$\pi B_v a^2 + b_0 + \sum_{m=1}^{+\infty}\psi_m|_a\cos(mk_h z) + 2\pi a B_v\sum_{m=1}^{+\infty}\gamma_m\cos(mk_h z) = 0,$$

$$2\pi B_v + \sum_{m=1}^{+\infty}\left.\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_m}{\partial r}\right|_a\cos(mk_h z) = 2\pi\sqrt{\beta}B_v.$$

Принимая во внимание ортогональность гармоник ряда Фурье, для $m = 1$ получаем равенства

$$\psi_1|_a + 2\pi a B_v\gamma_1 = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right|_a = 0,$$

которые после подстановки (20) сводится к системе линейных уравнений

$$aI_1\left(k_h a\right)c_1 + aK_1\left(k_h a\right)b_1 = -2\pi a B_v \gamma_1,$$
$$I_0\left(k_h a\right)c_1 - K_0\left(k_h a\right)b_1 = 0.$$

Решая эту систему и подставляя c_1 и γ_1 из (23) и (24), окончательно получаем аналитическую оценку для гофрировки силовой линии на границе «пузыря»:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta B_v}{B_v}\mathcal{H}\left(\frac{2\pi a}{h}\right), \qquad (25)$$
$$\mathcal{H}\left(x\right) = \frac{1}{x}\left[\frac{I_1\left(x\right)}{I_0\left(x\right)} + \frac{K_1\left(x\right)}{K_0\left(x\right)}\right].$$

Данная зависимость также была построена на основании результатов ряда численных экспериментов. Пример равновесного численного решения в гофрированном поле показан на рисунке 8. Из сравнения численного (рис. 9(б)) и аналитического (рис. 9(а)) результатов видно их хорошее согласие по крайней мере на качественном уровне.

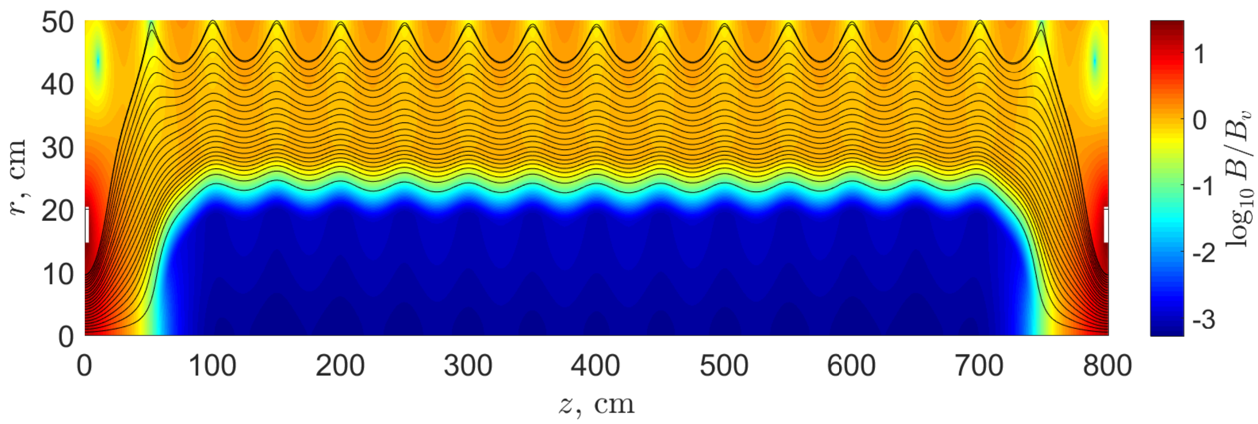

Рис. 8. Численное решение в гофрированном магнитном поле.

При анализе полученной зависимости $\delta a = \delta a\left(\delta B_v, h\right)$ наблюдается ослабление гофрировки силовых линий δa при меньшем шаге h, и рост – при большем. Это происходит по следующей причине. Характерный радиус кривизны силовой лини тем меньше, чем меньше шаг гофрировки. Кривизна силовой линии, а, следовательно, и сила натяжения, стремящаяся ее выпрямить, при этом растет, так как обратно пропорциональна радиусу кривизны. С другой стороны, при увеличении шага h натяжение силовых линий

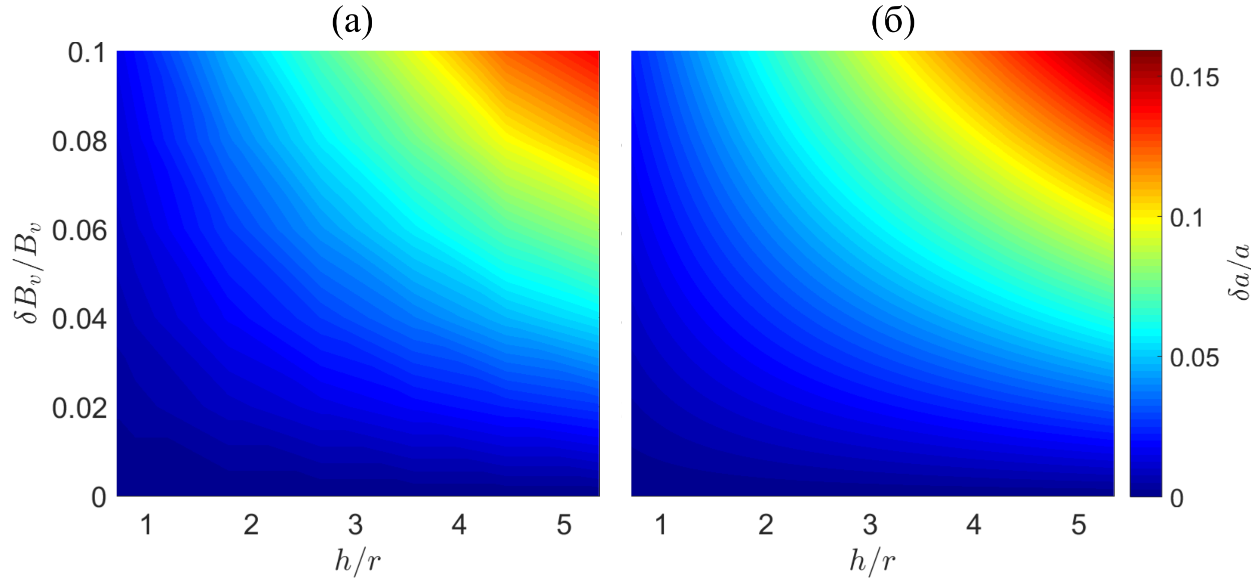

Рис. 9. Зависимость гофрировки силовых линий на границе пузыря $\delta a/a$ от гофрировки вакуумного магнитного поля $\delta B_v/B_v$ и шага гофрировки h/a. (а) моделирование; (б) аналитическая оценка.

становится слабым, и, как предсказывает теория [6], плазма стремится «выдавиться» в образовавшиеся магнитные ямы.

Таким образом, при наличии гофрировки возникают две противоборствующие силы: выпрямляющее натяжение силовых линий и силы давления магнитного поля и плазмы, стремящиеся разделить «пузырь» на отдельные фрагменты. Шаг h_{crit}, при котором относительная гофрировка силовых линий и гофрировка вакуумного магнитного поля сравниваются (т.е. $\delta a/a = \delta B_v/B_v$), можно оценить из формулы (25):

$$\frac{h_{crit}}{a} = \frac{2\pi}{\mathcal{H}^{-1}(1)} \simeq 3.27,$$

где $\mathcal{H}^{-1}(x)$ – функция обратная $\mathcal{H}(x)$. Другими словами, если шаг h превышает h_{crit}, относительная гофрировка силовых линий на границе пузыря $\delta a/a$ усиливается по сравнению с гофрировкой вакуумного поля $\delta B_v/B_v$, если h меньше h_{crit}, напротив – ослабевает.

2.5. Анизотропия плазмы

Хорошо известно, что в открытых ловушках плазма является существенно анизотропной, в частности, давление вдоль магнитного поля и поперек могут сильно отличаться. По этой причине полезно построить модель равновесия, учитывающую эффекты, связанные с анизотропией плазмы.

Задача о нахождении равновесия в анизотропном случае существенно усложняется, и для реализации численного алгоритма ее решения требуется более основательный подход. В настоящей работе в качестве первого этапа обсуждается постановка задачи и приводится теоретическая модель.

Уравнение равновесия в общем виде

$$\nabla_\nu P_{\mu\nu} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right]_\mu\,, \tag{26}$$

где $P_{\mu\nu}$ – тензор давления плазмы, который в анизотропном случае может быть представлен в форме

$$P_{\mu\nu} = p_\perp\left(\delta_{\mu\nu} - h_\mu h_\nu\right) + p_\parallel h_\mu h_\nu,$$

где $p_\perp$ и $p_\parallel$ – поперечное и продольное давление, $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ – единичный вектор вдоль магнитного поля. Учитывая это, правая часть уравнения (26) может быть преобразована следующим образом

$$\begin{aligned}\nabla_\nu P_{\mu\nu} = \nabla_\nu\left[p_\perp\left(\delta_{\mu\nu} - h_\mu h_\nu\right) + p_\parallel h_\mu h_\nu\right] = \\ = \nabla_\perp p_\perp + \nabla_\parallel p_\parallel - \left(p_\perp - p_\parallel\right)\nabla_\nu\left(h_\mu h_\nu\right).\end{aligned}$$

Последнее слагаемое:

$$\begin{aligned}&-\left(p_\perp - p_\parallel\right)\nabla_\nu\left(h_\mu h_\nu\right) = \\ &\quad = \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^2}\left(2Bh_\mu h_\nu\nabla_\nu B - Bh_\nu h_\mu\nabla_\nu B - B^2 h_\nu\nabla_\nu h_\mu\right) = \\ &\qquad = \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^2}\left(B\nabla_\parallel B - B^2\boldsymbol{\kappa}\right),\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{h}\nabla)\,\mathbf{h}$ – кривизна магнитного поля. В итоге

$$\nabla_\nu P_{\mu\nu} = \nabla_\perp p_\perp + \nabla_\parallel p_\parallel + \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^2}\left(B\nabla_\parallel B - B^2\boldsymbol{\kappa}\right),$$

и тогда уравнение (26) приводится к виду

$$\nabla_\perp p_\perp + \nabla_\parallel p_\parallel + \frac{p_\perp - p_\parallel}{B}\left(\nabla_\parallel B - B\boldsymbol{\kappa}\right) = \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right]. \tag{27}$$

Вдоль магнитного поля

Проекция уравнения (27) на $\mathbf{h}$:

$$\frac{\partial p_\parallel}{\partial \ell} = -\frac{p_\perp - p_\parallel}{B}\frac{\partial B}{\partial \ell},$$

где ℓ – координата вдоль силовой линии магнитного поля. Переходя к дифференцированию по B, получаем

$$\left(\frac{\partial p_\parallel}{\partial B}\right)_\psi = -\frac{p_\perp - p_\parallel}{B}, \tag{28}$$

где производная берется при постоянном ψ. Далее, вводя замену $\zeta = p_\parallel/B$, сводим уравнение (28) к виду

$$B\left(\frac{\partial \zeta}{\partial B}\right)_\psi + \zeta = -\frac{p_\perp - B\zeta}{B},$$
$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial B}\right)_\psi = -\frac{p_\perp}{B^2}.$$

После интегрирования вдоль силовой линии для продольного давления получим «явное» выражение в виде

$$p_\parallel = B\int\limits_{\gamma_\perp(\psi,B)} p_\perp d\left(\frac{1}{B}\right). \tag{29}$$

Поперек магнитного поля

Векторное умножение уравнения (27) на $\mathbf{h}$ дает

$$[\mathbf{h}\times\nabla_\perp p_\perp] - \frac{p_\perp - p_\parallel}{B} B\,[\mathbf{h}\times\boldsymbol{\kappa}] = \frac{1}{cB}\,[\mathbf{B}\times[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]]\,,$$

откуда поперечный ток

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{c}{B}\,[\mathbf{h}\times\nabla_\perp p_\perp] - c\frac{p_\perp - p_\parallel}{B}\,[\mathbf{h}\times\boldsymbol{\kappa}]\,. \tag{30}$$

Учитывая, что

$$\nabla_\perp = \nabla\psi\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_\perp,$$

где $(\partial/\partial\psi)_\perp$ – производная поперек силовых линий магнитного поля, из (30) получаем

$$\mathbf{j}_\perp = \left(2\pi rc\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial\psi}\right)_\perp - c\kappa\frac{p_\perp - p_\parallel}{B}\right)\boldsymbol{e}_\theta,\quad \kappa = (\mathbf{n}\boldsymbol{\kappa})\,, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{n} = \nabla\psi/\left|\nabla\psi\right|$ – вектор нормали к магнитной поверхности, $\boldsymbol{e}_\theta = [\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{n}]$ – единичный вектор, направленный по азимуту.

Кроме того, следует принимать во внимание, что из-за анизотропии плазмы поперечное давление начинает зависеть также и от магнитного поля, действительно

$$p_\perp = \int f(\varepsilon,\mu,P_\phi)\, m v_\perp^2 d^3v \simeq p_\perp(\psi,B)\,.$$

Тогда первое слагаемое в выражении для тока (31) преобразуется следующим образом

$$\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial\psi}\right)_\perp = \left(\frac{\partial p_\perp}{\partial\psi}\right)_B + \left(\frac{\partial p_\perp}{\partial B}\right)_\psi\left(\frac{\partial B}{\partial\psi}\right)_\perp = \\ = \left(\frac{\partial p_\perp}{\partial\psi}\right)_B + \frac{1}{|\nabla\psi|}\frac{\partial B}{\partial n}\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial B}\right)_\psi = \\ = \left(\frac{\partial p_\perp}{\partial\psi}\right)_B + \frac{1}{2\pi rB}\frac{\partial B}{\partial n}\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial B}\right)_\psi,$$

где

$$\frac{\partial B}{\partial n} = (\boldsymbol{n}\nabla B)\,.$$

И в конечном итоге получаем

$$j_\perp = 2\pi rc\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial \psi}\right)_B + c\left[\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial n}\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial B}\right)_\psi - \kappa\frac{p_\perp - p_\parallel}{B}\right]. \tag{32}$$

Первое слагаемое соответствует изотропному случаю, второе возникает из-за неоднородности давления вдоль силовой линии, а третье – добавка, связанная с кривизной магнитного поля.

В центральной части «пузыря», где применимо параксиальное приближения, анизотропные добавки малы, однако на краях магнитное поле сильно меняется и влияние анизотропии следует учитывать.

Модель равновесия анизотропной плазмы

Уравнение равновесия Грэда-Шафранова (3) при учете анизотропных поправок в правой части преобразуется к виду

$$\Delta^*\psi = -16\pi^3 r^2\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial \psi}\right)_B - 8\pi^2 r\left[\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial n}\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial B}\right)_\psi - \kappa\frac{p_\perp - p_\parallel}{B}\right] - \frac{8\pi^2}{c} r j_v.$$

Поперечный транспорт также модифицируется, так как диффузия плазмы сквозь магнитное поле напрямую связана с диамагнитным током (32). Уравнение переноса (13) в анизотропном случае

$$\frac{1}{(2\pi)^3 D_M}\left(v_m\frac{p}{B_{mz}} - \frac{1}{2}\frac{dW}{d\psi}\right) =$$

$$= \frac{d}{d\psi}\left(\int\limits_{\gamma_\perp(\psi)} nT\left[\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial \psi}\right)_B + \frac{1}{2\pi r}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial n}\left(\frac{\partial p_\perp}{\partial B}\right)_\psi - \kappa\frac{p_\perp - p_\parallel}{B}\right]\right]\frac{r^2 dz}{B_z}\right).$$

Продольное давление $p_\parallel$определяется из (29).

Строго говоря, для полноты модели требуется уравнение, из которого может быть найдена зависимость поперечного давления плазмы $p_\perp$ от магнитного поля B. Оно может быть получено, например, из кинетической теории. В работе [6] для разных типов инжекции вводится модельная зависимость $p_\perp = p_\perp(\psi, B)$.

Кроме того, следует обратить внимание на то, что уравнение, задающее связь между давлением и плотностью, также изменится. В качестве эквивалента ему можно, например, использовать адиабаты Чу-Голдбергера-Лоу [14]

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{p_\perp}{nB}\right] = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{B^2 p_\parallel}{n^3}\right] = 0.$$

Однако, стоит отметить, что эти соотношения являются достаточно грубым МГД-приближением. Более того, они получаются из условия сохраниния магниттного момента частиц μ, которое в случае диамагнитного удержания выполняется не всегда, так как характерная величина неоднородности магнитного поля может превышает ларморовский радиус частицы.

3. Динамическая задача

3.1. Теоретическая модель

Перейдем к рассмотрению динамики плазмы в режиме диамагнитного удержания в открытой ловушке. В работе [6] была построена модель формирования «пузыря» на начальной стадии, когда поперечным переносом можно пренебречь. В настоящей работе рассматривается динамика с учетом поперечного транспорта, что позволяет пронаблюдать за эволюцией «пузыря» на поздних этапах вплоть до релаксации к стационарному состоянию.

Пусть в вакуумной магнитной конфигурации имеется участок ослабленного квазиоднородного магнитного поля в центральной части ловушки. Тогда «пузырь» будет формироваться в этой области, причем его форму можно приближенно считать цилиндрической. Это позволяет использовать параксиальное приближение в центральной части ловушки при учете газодинамических продольных потерь через торцы.

Будем рассматривать все процессы на временах много больших времени установления силового равновесия. Тогда можно считать, что в каждый момент времени выполняется условие

$$p+\frac{B^2}{8\pi}=\frac{B_v^2}{8\pi}, \tag{33}$$

где B_v – вакуумное магнитное поле в центре ловушки. Классические уравнения баланса частиц и энергии плазмы [11] в первом порядке малости по скорости могут быть представлены в форме

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\left(n\mathbf{v}\right)=w_n, \tag{34}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{5}{2}\nabla\left(p\mathbf{v}\right)+\nabla\mathbf{q}=w_\varepsilon+\mathbf{jE}, \tag{35}$$

где w_n, w_ε – источники частиц и энергии соответственно, $\mathbf{q}$ – поток тепла, связанный с теплопроводностью.

Сначала найдем азимутальную составляющую электрического поля. Магнитный поток ψ через сечение силовой трубки $\hat{\mathbf{S}}$ можно определить как $d\psi = \mathbf{B}d\hat{\mathbf{S}}$. Пусть радиус $\hat{r}$ и площадь сечения $\hat{\mathbf{S}}$ трубки явно зависят от времени и ψ так, что

$$\hat{r} = \hat{r}\left(\psi, t\right), \qquad \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}\left(\psi, t\right).$$

Вообще говоря, должна еще присутствовать зависимость от продольной координаты, но для краткости здесь и далее мы будем ее опускать. Из сохранения магнитного потока через сечение силовой трубки имеем

$$0 = \frac{d}{dt} \int\limits_{\hat{\mathbf{S}}(\psi,t)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int\limits_{\hat{\mathbf{S}}(\psi,t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} + B\frac{\partial \hat{S}}{\partial t}. \tag{36}$$

Введем скорость «движения» магнитного поля

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \hat{S}}{\partial t}\mathbf{n}, \tag{37}$$

где $\mathbf{n} = \nabla\psi / \left|\nabla\psi\right|$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности силовой трубки. Тогда из закона индукции

$$E_\theta = -\frac{1}{2\pi r c} \int\limits_{\hat{\mathbf{S}}(\psi,t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \tag{38}$$

учитывая (36) и (37), получаем

$$E_\theta = \frac{1}{c} B u \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_\theta = \frac{1}{c}\left[\mathbf{B} \times \mathbf{u}\right].$$

Отсюда следует, что азимутальное электрическое поле равно нулю в системе отсчета, движущейся вместе с магнитным полем со скоростью $\mathbf{u}$.

Теперь найдем скорость $\mathbf{v}$, с которой плазма течет сквозь магнитное поле. В системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E}^{''} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right] + \mathbf{E}. \tag{39}$$

Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}^{'}$, где $\mathbf{v}^{'}$ – потоковая скорость плазмы относительно магнитного поля. Причем в системе отсчета магнитного поля азимутальное электрическое поле равно нулю, поэтому

$$\mathbf{E}^{'} = \mathbf{E}_n^{'} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right] + \mathbf{E}. \tag{40}$$

Индекс n обозначает компоненту поля нормальную к магнитной поверхности. С другой стороны, в системе отсчета плазмы закон Ома имеет вид $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}^{''}$. Тогда из (39) при учете (40) имеем

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{1}{c}\left[\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}^{'}\right)\times\mathbf{B}\right] + \mathbf{E} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}^{'}\times\mathbf{B}\right] + \mathbf{E}_n^{'}.$$

Умножая это выражение векторно на $\mathbf{B}$, для нормальной составляющей скорости просачивания плазмы сквозь магнитное поле получим

$$\mathbf{v}_n^{'} = \frac{c}{\sigma B^2}\left[\mathbf{B}\times\mathbf{j}\right]. \tag{41}$$

Для того чтобы исключить член $\mathbf{jE}$ из уравнения баланса энергии (35), воспользуемся уравнением Пойнтинга. При $E \ll B$ оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{8\pi} + \nabla\mathbf{S} = -\mathbf{jE}, \tag{42}$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right]$$

– вектор Пойнтинга. Используя (37), получим

$$\mathbf{S}_n = -\frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{B}\times\left[\mathbf{B}\times\mathbf{u}\right]\right] = \frac{B^2}{4\pi}\mathbf{u}.$$

Сложим уравнения (35) и (42), тогда

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{5}{2}\nabla\left(p\mathbf{v}\right) + \frac{\partial p_B}{\partial t} + 2\nabla\left(p_B\mathbf{u}\right) = -\nabla\mathbf{q} + w_\varepsilon + \nabla\mathbf{S}_\theta, \tag{43}$$

$p_B = B^2/8\pi$ – плотность энергии магнитного поля.

Далее, проинтегрируем уравнения (34) и (43) по объему силовой трубки $\hat{V}\left(\psi, t\right)$. Так как мы считаем «пузырь» цилиндрическим в центральной области, задача значительно упрощается и сводится к интегрированию по поперечному сечению силовых трубок. При этом удобно воспользоваться следующим равенством

$$\int\limits_{\hat{S}} \frac{\partial F}{\partial t} dS = \frac{d}{dt} \int\limits_{\hat{S}} F dS - \frac{\hat{\mathbf{s}}\mathbf{u}}{L} F, \qquad \hat{\mathbf{s}} = 2\pi \hat{r} L \mathbf{n},$$

где F – некоторая функция времени и координат, L – длина «пузыря». После интегрирования уравнение (34) приводится к виду

$$\int\limits_{\hat{V}} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \left(n\mathbf{v} \right) \right] dV = \int\limits_{\hat{V}} w_n dV,$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\hat{S}} nLdS + n\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}' + \Phi_{n\|} = W_n, \tag{44}$$

где $\Phi_{n\|}$ – поток плазмы через торцы магнитной трубки, $W_n = \int\limits_{\hat{V}} w_n dV$. Аналогичным образом интегрируем уравнение (43).

$$\int\limits_{\hat{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} p + p_B \right) + \frac{5}{2} \nabla \left(p\mathbf{v} \right) + 2\nabla \left(p_B \mathbf{u} \right) \right] dV = - \int\limits_{\hat{V}} \left[\nabla \mathbf{q} + w_\varepsilon \right] dV,$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\hat{S}} \left(\frac{3}{2} p + p_B \right) LdS + \frac{5}{2} p\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}' + \left(p + p_B \right) \hat{\mathbf{s}}\mathbf{u} + \Phi_{\varepsilon\|} = -\hat{\mathbf{s}}\mathbf{q} + W_\varepsilon, \tag{45}$$

где $\Phi_{\varepsilon\|}$ – поток энергии через пробки, $W_\varepsilon = \int\limits_{\hat{V}} w_\varepsilon dV$. Теперь, дифференцируя (44) по ψ, приходим к уравнению баланса частиц в силовой трубке

$$\frac{d}{dt} \left[nL\hat{S}_\psi \right] + \left(n\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}' \right)_\psi = W_{n\psi} - \left(\Phi_{n\|} \right)_\psi,$$

где нижний индекс ψ обозначает частную производную по ψ. Дифференцируя (45) и учитывая уравнение равновесия (33), получаем закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{3}{2} p + p_B \right) L\hat{S}_\psi \right] + \frac{5}{2} \left(p\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}' \right)_\psi + \left(p + p_B \right) \left(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{u} \right)_\psi = W_{\varepsilon\psi} - \left(\Phi_{\varepsilon\|} \right) - \left(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{q} \right)_\psi.$$

Первое слагаемое имеет смысл изменения полной энергии внутри силовой трубки, $\frac{3}{2}\left(p\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}'\right)_\psi$ – поток энергии через магнитную поверхность. Чтобы понять смысл оставшихся слагаемых в левой части, преобразуем их следующим образом

$$\left(p\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}'\right)_\psi + (p + p_B)\left(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{u}\right)_\psi = p\left(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}'\right)_\psi + p_\psi\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}' + (p_B + p)\left(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{u}\right)_\psi =$$
$$= p\left(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}\right)_\psi - p_{B\psi}\hat{\mathbf{s}}\mathbf{v}' + p_B\left(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{u}\right)_\psi .$$

Первое слагаемое – работа давления газа, второе – работа силы Ампера, а третье – работа «давления» магнитного поля.

Скорость плазмы $\mathbf{v}'$ можно выразить через градиент давления:

$$\mathbf{v}_n' = \frac{c^2}{\sigma B^2}\left[\mathbf{B}\times\mathbf{j}\right] = -\frac{c^2}{\sigma B^2}\nabla p = -\frac{2\pi r c^2}{\sigma B}p_\psi\mathbf{n}.$$

Продольные потери через пробки считаем газодинамическими, поэтому

$$\left(\Phi_{n\|}\right)_\psi = \left(2\int\limits_{S_m} v_\| n dS\right)_\psi = 2v_m n S_{m\psi},$$
$$\left(\Phi_{\varepsilon\|}\right)_\psi = \left(\int\limits_{S_m} v_\| \alpha T\frac{n}{2}dS\right)_\psi = \frac{\alpha}{2}v_m p S_{m\psi},$$

где αT – энергия, уносимая через торцы ловушки, в расчете на один ион плазмы (для ГДЛ $\alpha \simeq 8$ [15]), S_m и $v_m \propto \sqrt{T}$ – площадь сечения магнитной поверхности и продольная скорость течения плазмы в пробке соответственно. Причем, учитывая, что $S_\psi = 1/B$, получим

$$S_{m\psi} = \frac{1}{B_m} = \frac{1}{B_v R_v},$$

где B_m – магнитное поле в пробке, $R_v = B_m/B_v$ – пробочное отношение, вычисленное по вакуумному полю.

В результате итоговая система уравнений динамики принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left[n\frac{L}{B}\right] + (\Phi_{n\perp})_\psi + \frac{2v_m}{B_v R_v}n = W_{n\psi}, \tag{46}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{3}{2}p + \frac{B^2}{8\pi}\right)\frac{L}{B}\right] + \frac{B_v^2}{8\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{B}\right] + (\Phi_{\varepsilon\perp})_\psi + \frac{\alpha v_m}{2B_v R_v}p = W_{\varepsilon\psi}, \tag{47}$$

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = \frac{B_v^2}{8\pi}, \tag{48}$$

$$dS = \frac{d\psi}{B}, \qquad p = nT,$$

где

$$(\Phi_{n\perp})_\psi = -\left(nLS\frac{4\pi c^2}{\sigma B}p_\psi\right)_\psi,$$

$$(\Phi_{\varepsilon\perp})_\psi = -\frac{5}{2}\left(p\frac{4\pi c^2}{\sigma B}LSp_\psi\right)_\psi - (4\pi\varkappa BLST_\psi)_\psi\,.$$

– поперечные потоки вещества и энергии соответственно. Уравнение (46) описывает сохранение частиц, (47) – баланс энергии в силовой трубке, а (48) – равновесие плазмы.

3.2. Численное моделирование

В качестве модельной зависимости поток тепла положим равным

$$\mathbf{q} = -\varkappa \nabla T, \qquad \varkappa \propto n B^{-2}.$$

Также считаем проводимость спитцеровской

$$\sigma \propto T^{3/2}.$$

Более удобно проводить расчеты, если привести уравнения модели к безразмерным величинам, для этого введем следующие обозначения

$$\theta = \frac{T}{T_0}, \quad T_0 = \frac{P_\varepsilon}{Q_n}, \qquad \beta = \frac{p}{p_0}, \quad p_0 = \frac{B_v^2}{8\pi} \qquad \nu = \frac{n}{n_0}, \quad n_0 = \frac{p_0}{T_0},$$

$$U = \frac{B_v}{B}, \quad x = \frac{S}{S_n}, \quad \xi = \frac{\psi}{B_v S_n}, \qquad v_m = v_{0m}\theta^{1/2}, \quad \varkappa = \varkappa_0 \nu U^2, \quad \sigma = \sigma_0 \theta^{3/2},$$

$$\tau = \frac{t}{\tau_{GDT}}, \quad \tau_{GDT} \equiv \frac{R_v L}{v_{0m}}, \qquad \mu_n = \frac{w_n S_w L}{Q_n}, \quad \mu_\varepsilon = \frac{w_\varepsilon S_w L}{P_\varepsilon},$$

где P_ε – полная мощность нагрева, Q_n – полная интенсивность источника частиц, S_w – характерная площадь источника, v_{0m}, $\varkappa_0$ и σ_0 – скорость звука, коэффициент теплопроводности и спитцеровская проводимость соответственно, вычисленные при температуре T_0. При такой нормировке система уравнений сводится к виду

$$(\nu U)_\tau - 2\Lambda_D \left(\frac{x U \nu}{\theta^{3/2}} \beta_\xi \right)_\xi + 2\nu\theta^{1/2} = \Lambda_s U \mu_n, \tag{49}$$

$$\frac{U^3}{4}(6-\beta)\beta_\tau - \left(x U \nu \left[\frac{5\Lambda_D}{\sqrt{\theta}} \beta_\xi + 4\Lambda_\varkappa \theta_\xi \right] \right)_\xi + \frac{\alpha}{2}\beta\theta^{1/2} = \Lambda_s U \mu_\varepsilon, \tag{50}$$

$$\beta + \frac{1}{U^2} = 1, \tag{51}$$

$$\beta = \nu\theta, \qquad dx = U d\xi,$$

где коэффициенты переноса выражаются следующим образом

$$\Lambda_D = \frac{\pi\lambda^2}{S_n}, \qquad \Lambda_\varkappa = \frac{\pi\lambda_\varkappa^2}{S_n}, \qquad \Lambda_s = \frac{\tau_{GDT} Q_n}{n_0 S_w L} = \frac{\tau_{GDT} P_\varepsilon}{p_0 S_w L},$$
$$\lambda = \sqrt{D_M \tau_{GDT}}, \qquad D_M = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0}, \qquad \lambda_\varkappa = \sqrt{\frac{\varkappa_0 \tau_{GDT}}{n_0}},$$

λ – толщина переходного слоя, $\lambda_\varkappa$ – характерное расстояние, на которое тепло распространяется по теплопроводности на границе «пузыря».

Численные решения

Для решения системы уравнений (49-51) в данной работе применялись численные методы.

Рассмотрим пример численного моделирования, представленный на рисунке 10. В левой части изображены радиус пузыря r, нормированный на характерный радиус источника частиц r_0, плотность n и температура T на оси ловушки в зависимости от времени t в единицах газодинамического времени жизни τ_{GDT}, вычисленного при температуре T_0. В правой части рисунка представлены радиальные профили относительного давления β, плотности n и температуры T в различные моменты времени.

В нулевой момент времени в ловушке имеется плазма малой плотности и температуры. Нагрев разряженной мешенной плазмы на начальном этапе приводит к быстрому росту температуры. На следующей стадии давление достигает значений близких к предельному, происходит переход в режим диамагнитного удержания, плазма начинает расширяется, что ведет к ее остыванию. Дальнейшая динамика развития «пузыря» характеризуется медленной релаксацией к стационарному состоянию.

Укажем на одну интересную особенность режима диамагнитного удержания, которая была обнаружена в расчетах. Для этого пронаблюдаем за эволюцией радиального профиля температуры, изображенного на рисунке 10. Можно заметить, что при приближении к режиму диамагнитного удержания с $\beta \simeq 1$ на границе плазмы возникает пик температуры. Появление данного пика происходит вследствие омического нагрева плазмы протекающим диамагнитным током, который сконцентрирован в узкой области переходного слоя на границе «пузыря», где градиент давления максимальный.

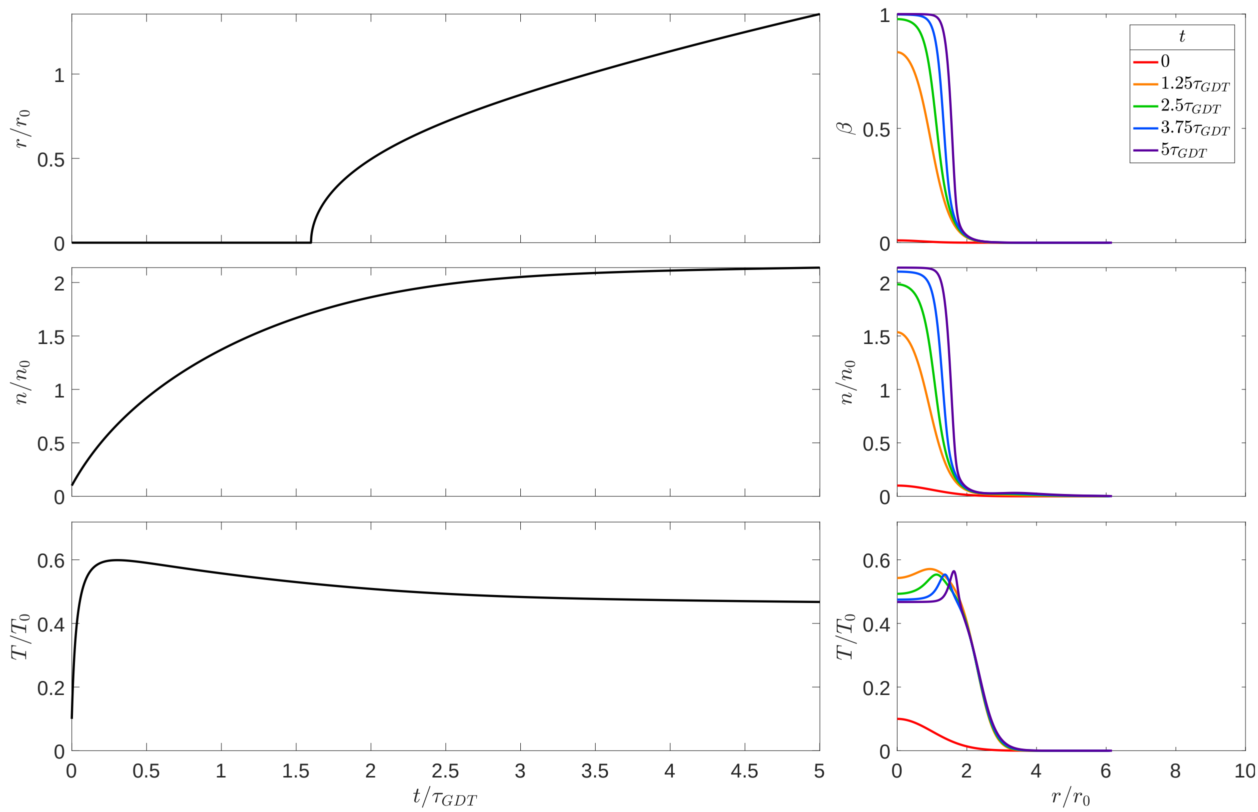

Рис. 10. Пример расчетов динамики формирования «пузыря». Слева: радиус пузыря r, плотность n и температура T на оси ловушки в зависимости от времени t; справа: радиальные профили относительного давления β, плотности n и температуры T в различные моменты времени.

3.3. Омический нагрев на границе «пузыря»

Как было отмечено ранее, на начальной стадии разряда температура плазмы резко возрастает, причем в основном в области, где мощность внешнего источника нагрева максимальна. Затем, после перехода в режим диамагнитного удержания с $\beta \simeq 1$, сформировавшийся «пузырь» начинает расширяться по радиусу, что приводит остыванию плазмы внутри. В тоже время на границе «пузыря» формируется узкий переходный слой, где возникает диамагнитный ток, приводящий к нагреву плазмы и появлению омического пика температуры. Рассмотрим на уровне оценок природу физических процессов, протекающих внутри переходного слоя.

Когда «пузырь» перешел в стадию медленной релаксации к стационарному состоянию, можно считать его границу почти неподвижной. Внутри перенос идет преимущественно в поперечном направлении, таким образом, практически вся плазма стекает на границу и затем теряется через пробки. Это приводит к тому, что в переходном слое имеется приближенный баланс между мощностью омического нагрева, поперечным потоком энергии из пузыря и продольными потерями через пробки.

Воспользовавшись уравнением баланса сил

$$\nabla p = \frac{1}{c}\left[\mathbf{j} \times \mathbf{B}\right],$$

можно оценить плотность мощности, которая выделяется в на границе «пузыря» за счет омического нагрева

$$w_j \sim \frac{j^2}{\sigma} \sim \frac{1}{\sigma}\left(\frac{c}{B}\frac{dp}{dr}\right)^2.$$

Аналогично оценивается дивергенция плотности поперечного потока энергии из «пузыря» и продольного потока через торцы

$$\phi_{\varepsilon\perp} \sim \frac{5}{2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{c^2}{\sigma B^2}p\frac{dp}{dr}\right),$$
$$\phi_{\varepsilon\parallel} \sim \frac{\alpha}{2} p v_m \frac{2\pi a}{R_v},$$

здесь мы пока что пренебрегли теплопроводностью, о ее влиянии будет ска-

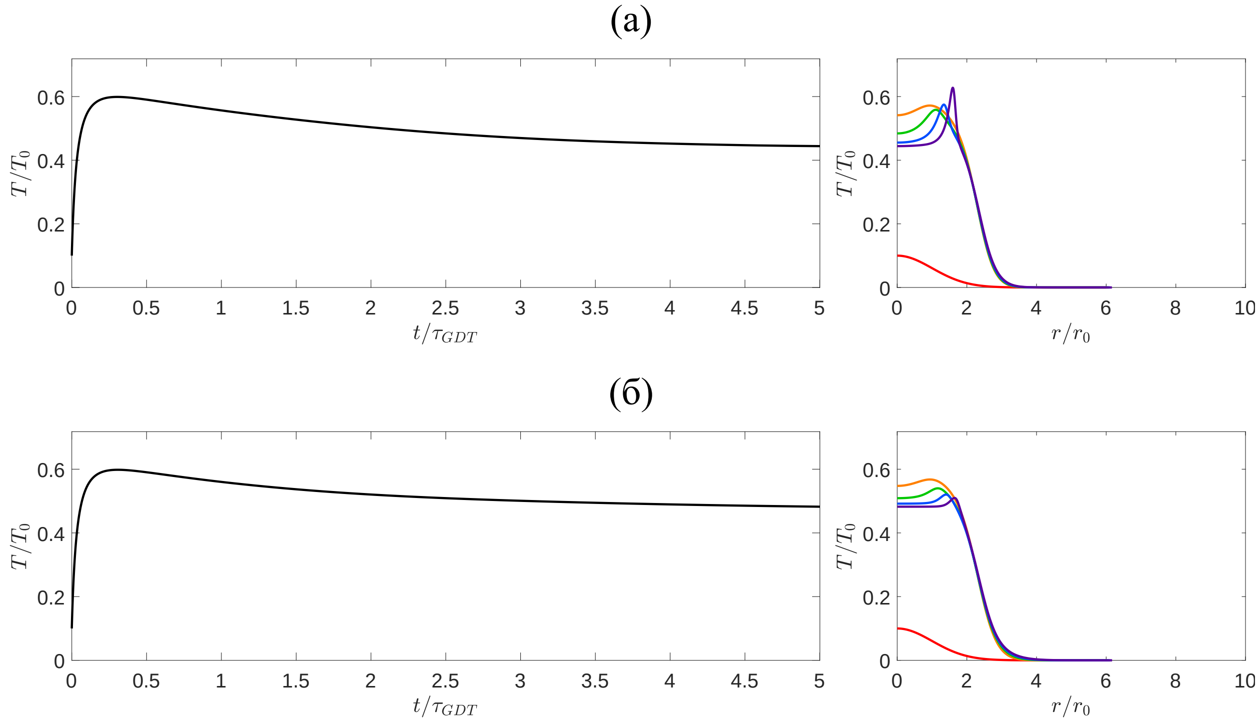

Рис. 11. Пример расчетов динамики при: малом (а) и большом (б) коэффициенте теплопроводности.

зано позже.

Как можно увидеть из этих оценок, величины $\phi_{\varepsilon\perp}$ и w_j, являющиеся источниками энергии в слое $\pi r dr$, пропорциональны квадрату dp/dr и не обращаются в нуль вместе с p. В то же время сток энергии $\phi_{\varepsilon\|}$ линеен по p и спадает к периферии плазмы, где $p \simeq 0$. Это приводит к тому, что выделение энергии в переходном слое идет всегда, а значит пик температуры может остаться даже после достижения стационара, когда плазма внутри «пузыря» перестанет остывать из-за увеличения объема.

Качественно этот эффект объясняется тем, что в режиме диамагнитного удержания энергия, приходящая из внешнего источника нагрева, полностью идет на увеличение объема, следовательно, плазма начинает, как бы «переливаться через край» «пузыря», вытекая в переходный слой. Это ведет к тому, что всегда имеется пропорциональный градиенту давления перенос энергии, связанный с постоянным течением плазмы из «пузыря», при этом в отсутствие теплопроводности обратный поток тепла пропорциональный градиенту температуры отсутствует. Плазма, втекая в переходный слой, начинает как бы «тереться» о магнитное поле и, следовательно, нагреваться.

Если же учесть теплопроводность, возникает дополнительный перенос энергии, частично размывающий «неправильный» градиент температуры. На рисунке 11 представлено сравнение двух решений с разными коэффициентами теплопроводности, видно, что при большем его значении пикирование температуры становится менее выраженным.

Найдем приближенное аналитическое решение системы уравнений переноса (49-51) на границе «пузыря» вдали от источников частиц и энергии. Обобщим модель, полагая, что проводимость зависит от температуры степенным образом $\sigma \propto \theta^{\gamma}$.

$$\Lambda_D \theta \left(\frac{x\beta\beta_x}{\theta^{\gamma+1}(1-\beta)} \right)_x = \theta^{1/2}\beta\sqrt{1-\beta},$$
$$5\Lambda_D \left(\frac{x\beta\beta_x}{\theta^{\gamma}(1-\beta)} \right)_x + 4\Lambda_\varkappa \left(\frac{x\beta\theta_x}{\theta(1-\beta)} \right)_x = \frac{\alpha}{2}\theta^{1/2}\beta\sqrt{1-\beta}.$$

Введем обозначение

$$y \equiv -\frac{x\beta\beta_x}{\theta^{\gamma}(1-\beta)} \simeq -\frac{x_0\beta\beta_x}{\theta^{\gamma}(1-\beta)} \propto \Phi_{\varepsilon\perp}, \tag{52}$$

здесь мы считаем, что пограничный слой тонкий и можно приближенно положить $x \simeq x_0 = \mathrm{const}$, где x_0 – обезразмеренная площадь сечения «пузыря». Также для простоты пренебрежем теплопроводностью, тогда

$$-\Lambda_D \theta \left(\frac{y}{\theta} \right)_x = \theta^{1/2}\beta\sqrt{1-\beta}, \tag{53}$$
$$-5\Lambda_D y_x = \frac{\alpha}{2}\theta^{1/2}\beta\sqrt{1-\beta}. \tag{54}$$

Отсюда получаем уравнение на y

$$5y_x = \frac{\alpha}{2}\theta\left(\frac{y}{\theta}\right)_x \quad \Rightarrow \left(\frac{10}{\alpha} - 1\right)\frac{y_x}{y} = -\frac{\theta_x}{\theta},$$

решая которое находим

$$y = C_1 \theta^{-\frac{\alpha}{10-\alpha}}, \quad \alpha \neq 10. \tag{55}$$

Конвективный поток энергии y должен спадать на периферии. При этом можно заметить, что для $\alpha < 10$ при приближении к границе плазмы температура обращается в бесконечность, т.е. $\theta \to \infty$ при $y \to 0$. Такое решение возникает из-за того, что на границе «пузыря» плазма постоянно подогревается омическим источником тепла, причем отток энергии из-за теплопроводности отсутствует (т.к. мы ранее ей пренебрегли).

После подстановки (55) в (54) при учете (52) получаем

$$\theta^{-\left(\frac{2\alpha}{10-\alpha}+\frac{3}{2}-\gamma\right)}d\theta = C_2\frac{\beta^2 d\beta}{\sqrt{1-\beta}}.$$

Далее, интегрирование вместе с граничными условиями

$$\theta_{\beta=1} = \theta_0, \qquad y|_{\beta=0} = 0 \tag{56}$$

дает

$$\theta = \theta_0\left[1-\frac{1}{8}\sqrt{1-\beta}\left(3\beta^2+4\beta+8\right)\right]^{-1/\eta}, \qquad \eta = \frac{2\alpha}{10-\alpha}+\frac{1}{2}-\gamma. \tag{57}$$

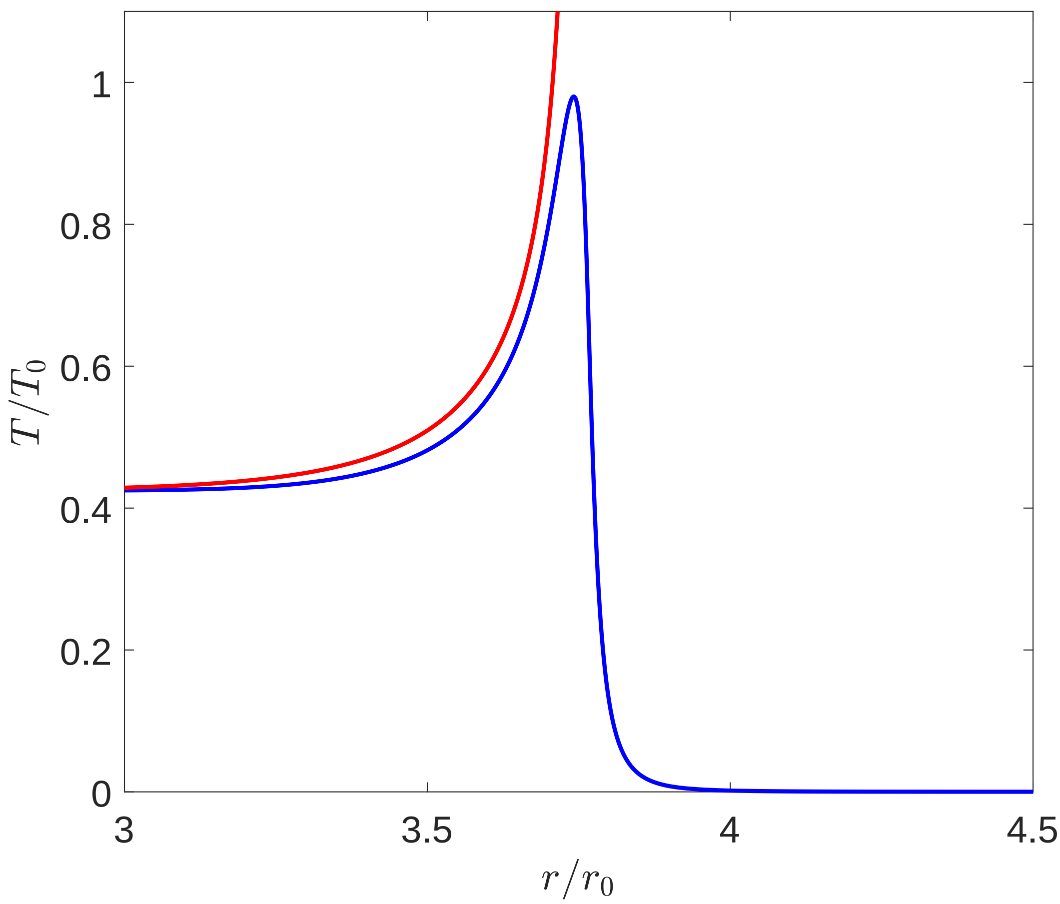

Рис. 12. Пример численного решения близкого к стационарному (синяя кривая) и аналитическое приближение (красная кривая).

На рисунке 12 представлено численное решение близкое к стационарному и аналитическое приближение (57) для случая спитцеровской проводимости ($\gamma = 3/2$) и классический продольных потерь ($\alpha = 8$). Как видно, на переферии приближенное решение начинает сильно отличаться от численного. Это происходит из-за того, что ближе к границе плазмы предположение о малости теплопроводности по сравнению с конвективным переносом может нарушаться, и аналитическое приближение выходит за рамки своей применимости.

3.4. Критическая мощность источника в режиме «пузыря»

При проектировании экспериментальной установки важно знать значение пороговой мощности источника, которая требуется для достижения режима диамагнитного удержания. Оценим величину этой мощности аналитически, а также сравним ее численными расчетами.

Пусть профили плотности источников частиц и тепла, μ_n и μ_ε, близки по форме, то есть $\mu_\varepsilon \approx \mu_n \approx g\left(r\right)$. Для простоты будем считать, что функция $g\left(r\right)$ принимает максимальное значение в некоторой точке $r = r_{max}$ и, следовательно, $g\left(r_{max}\right) = 1$. Рассмотрим силовую трубку, находящуюся вблизи $r = r_{max}$, в начальный момент времени, когда магнитное поле близко к вакуумному, и поперечным переносом в уравнениях (49-51) можно пренебречь, тогда

$$\begin{gathered}
\left(\nu U\right)_\tau + 2\nu\theta^{1/2} = \Lambda_s U, \\
\frac{U^3}{4}\left[6-\beta\right]\left(\nu\theta\right)_\tau + \frac{\alpha}{2}\beta\theta^{1/2} = \Lambda_s U, \\
\beta = 1 - \frac{1}{U^2}, \qquad \nu = \frac{\beta}{\theta}.
\end{gathered}$$

Далее, найдем стационарное решение, для этого нужно положить равными нулю производные по времени.

$$\begin{aligned}
2\beta\theta^{-1/2} &= \Lambda_s U, \\
\frac{\alpha}{2}\beta\theta^{1/2} &= \Lambda_s U, \\
\beta &= 1 - \frac{1}{U^2}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Перемножая первые два уравнения и подставляя β из третьего, получаем

$$\sqrt{\alpha}\frac{U^2-1}{U^3} = \Lambda_s.$$

Отсюда видно, что правая часть принимает максимальное значение при $U = U_{crit} = \sqrt{3}$, а также

$$\Lambda_s\big|_{U=U_{crit}} = \Lambda_{crit} \equiv \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}.$$

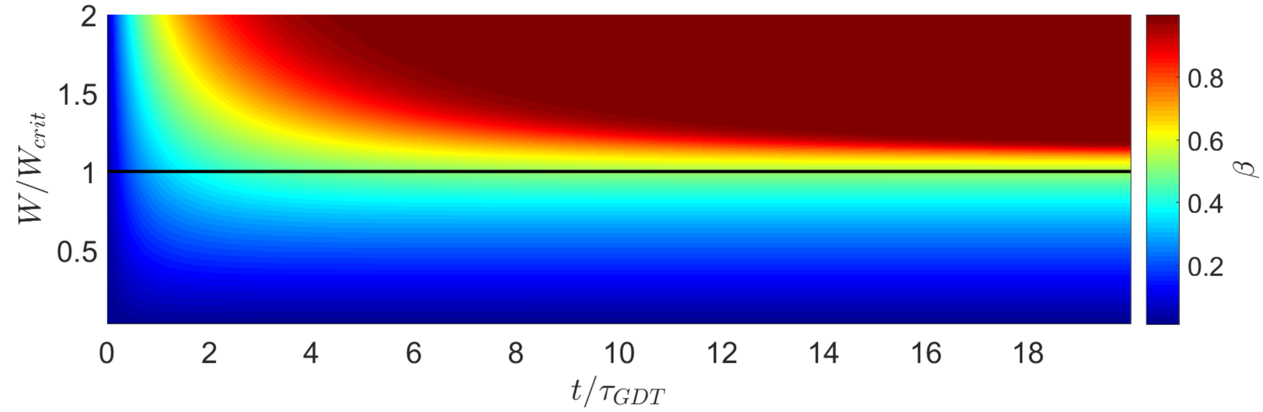

Рис. 13. Зависимость β на оси ловушки от времени t, вычисленная при различных мощностях источника W. Черным цветом отмечена прямая, соответствующая аналитической оценке критической мощности источника.

При $\Lambda_s > \Lambda_{crit}$ стационарных решений нет, и силовая трубка неограниченно расширяется. Это происходит из-за того, что возникает неустойчивый процесс с положительной обратной связью. Рост β ведет к увеличению объема силовой трубки и, следовательно, пробочного отношения. В свою очередь, из-за роста пробочного отношения улучшается удержание, что опять приводит к увеличению β. Таким образом, при достижении некоторой критической мощности источника W_{crit} происходит переход в режим диамагнитного удержания и формируется «пузырь» с $\beta \simeq 1$.

Критическое значение $\beta_{crit} = 2/3$, при котором происходит этот переход, можно получить, подставив U_{crit} в уравнение равновесия (58). В размерных величинах критерий перехода в режим диамагнитного удержания имеет вид

$$W \equiv \sqrt{Q_n P_\varepsilon} > W_{crit} \equiv \Lambda_{crit} \frac{B_v^2 S_w}{8\pi R_v \sqrt{m_i}}, \quad \Lambda_{crit} \equiv \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}, \tag{59}$$

$$\text{для ГДЛ:} \quad \alpha \simeq 8, \quad \Lambda_{crit} \simeq 1.09.$$

где m_i – масса иона плазмы.

Значение пороговой мощности можно также определить из моделирования. Для этого на основании численных расчетов была построена зависимость β на оси ловушки от времени для разных значений полной мощности источника. Форма источников задавалась близкой к прямоугольной с плавной границей. Результаты расчетов представлены на рисунке 13. По горизонтальной оси отложено время в единицах τ_{GDT}, по вертикальной –

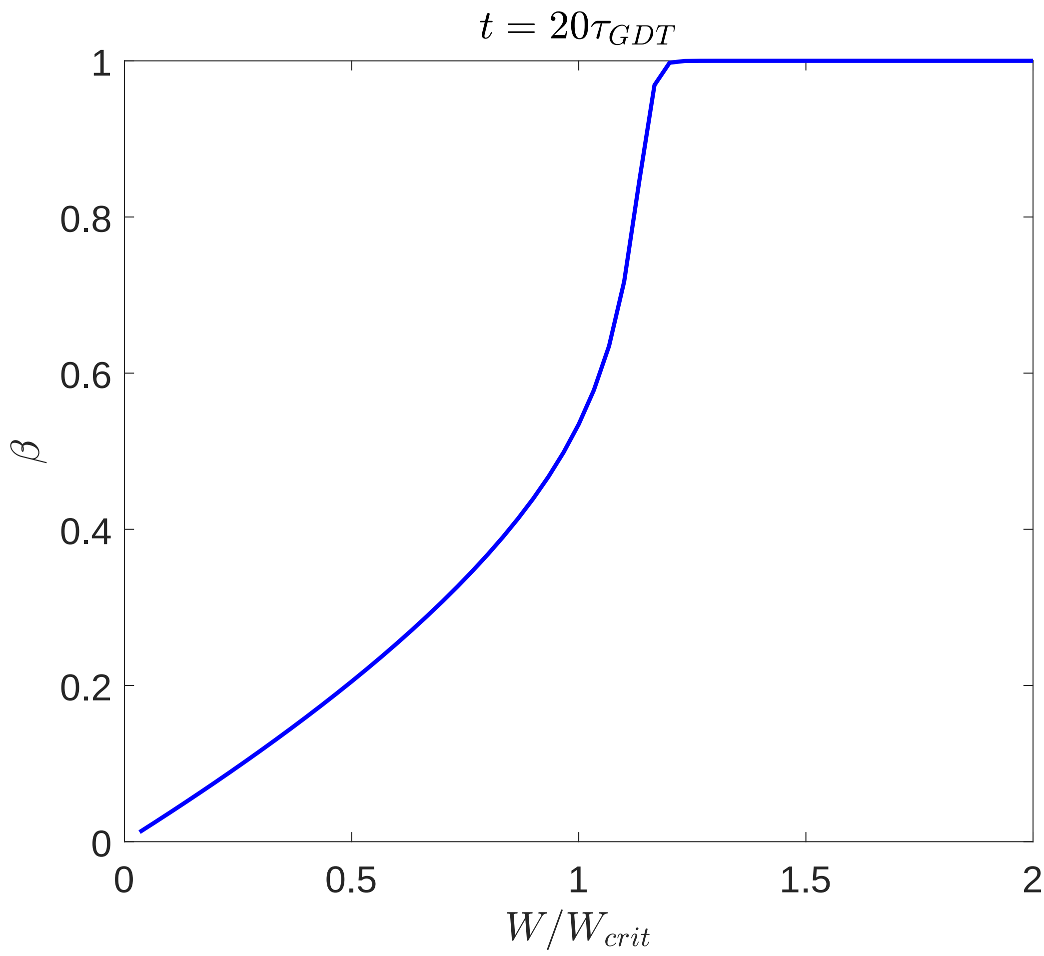

Рис. 14. Зависимость β на оси ловушки от мощности источника W в момент времени $t = 20\tau_{GDT}$.

мощность источника $W = \sqrt{Q_n P_\varepsilon}$ в единицах W_{crit}. Как можно заметить, аналитическая оценка пороговой мощности с хорошей точностью совпадает с результатами вычислений, что говорит о правдоподобности численной модели.

При рассмотрении зависимости β от мощности источника W в момент времени $t = 20\tau_{GDT}$, представленной на рисунке 14, хорошо виден пороговой характер формирования «пузыря».

В качестве следующего шага следует расширить данную динамическую модель. Для этого нужно учесть, что в реальном эксперименте для нагрева плазмы часто используется метод нейтральной инжекции. В этом случае плазма становится неравновесной, появляется горячая компонента плазмы – быстрые ионы, возникающие вследствие перезарядки нейтралов пучка на холодных частицах плазмы. Учет этой компоненты должен привести к изменению общей картины динамики формирования «пузыря». В частности, модифицируется оценка (59), поскольку через пробки в основном будут теряться частицы с малой энергией, в то время как горячие ионы будут постепенно отдавать свое тепло холодной компоненте плазмы.

4. Заключение

Настоящая магистерская диссертация посвящена теоретическому исследованию плазмы в режиме диамагнитного удержания в осесимметричной открытой ловушке. В процессе работы была построена стационарная модель непараксиального равновесия плазмы, а также создана одномерная динамическая модель «пузыря» в цилиндрическом приближении. В ходе выполнения работы были получены следующие результаты.

1. Стационарная задача.

   а) Создана программа расчёта осесимметричных стационарных состояний плазмы в открытых ловушках. Найдены приближенные численные решения, соответствующие режиму диамагнитного удержания. Показано, что расчеты согласуются с аналитическими оценками.

   б) На основе численных решений было построено распределение диамагнитного поля, которое позволит оптимизировать положение пластин магнитной стабилизации.

   в) Алгоритм был применен для расчета равновесных конфигураций проектируемых установок САТ (в режиме «пузыря») и ГДМЛ. Численные решения могут быть применены для исследования неустойчивостей, анализа эффективности удержания и оптимизации магнитной системы этих установок.

   г) Проведен анализ влияния гофрировки вакуумного магнитного поля на равновесие плазмы в режиме диамагнитного удержания. Показано, что гофрировка поля приводит к умеренной гофрировке границы «пузыря», если шаг гофрировки не слишком сильно превышает радиус плазмы ($h/a \lesssim 3.27$).

2. Динамическая задача.

   а) Построена одномерная модель для расчета динамики формирования «пузыря» в приближении цилиндрической геометрии.

б) При анализе результатов вычислений был обнаружен принципиально новый эффект – рост температуры на границе «пузыря» вследствие омического нагрева.

в) Получена аналитическая оценка пороговой мощности источника необходимой для перехода в режим диамагнитного удержания. Показано хорошее согласие этой оценки с расчетами.

В качестве следующего шага планируется расширить динамическую модель, включив в нее влияние горячих ионов.

Список литературы

1. Будкер Г. И. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую // Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. – 1958. – Т. 3. – С. 3-31.

2. Post R. F. Summary of UCRL pyrotron (mirror machine) program // United Nations international conference on the peaceful uses of atomic energy Proceedings. – 1958. – Т. 32. – С. 245-265.

3. Tuszewski M. Field reversed configurations // Nuclear Fusion. – 1988. – Т. 28. – №. 11. – С. 2033.

4. Steinhauer L. C. Review of field-reversed configurations //Physics of Plasmas. – 2011. – Т. 18. – №. 7. – С. 070501.

5. Mirnov V. V., Riutov D. D. Linear gasdynamic system for plasma confinement // Technical Physics Letters. – 1979. – Т. 5. – С. 678-682.

6. Beklemishev A. D. Diamagnetic “bubble” equilibria in linear traps // Physics of Plasmas. – 2016. – Т. 23. – №. 8. – С. 082506.

7. Beklemishev A. et al. Novosibirsk project of gas-dynamic multiple-mirror trap // Fusion Science and Technology. – 2013. – Т. 63. – №. 1T. – С. 46-51.

8. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Journal of Nuclear Energy (1954). – 1958. – Т. 7. – №. 3-4. – С. 284-285.

9. Шафранов В. Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1957. – Т. 33. – №. 3. – С. 9.

10. Bagryansky P. A. et al. Status of the experiment on magnetic field reversal at BINP // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2016. – Т. 1771. – №. 1. – С. 030015.

11. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. – 1963. – Т. 1. – С. 183-272.

12. Днестровский Ю. Н. Математическое моделирование плазмы.– 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 1993. – С. 125 – ISBN 5-02-014737-0.

13. Berk H. L., Wong H. V., Tsang K. T. Theory of hot particle stability // The Physics of fluids. – 1987. – Т. 30. – №. 9. – С. 2681-2693.

14. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E. The Boltzmann equation an d the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions //Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1956. – Т. 236. – №. 1204. – С. 112-118.

15. Ryutov D. D. Axial electron heat loss from mirror devices revisited // Fusion science and technology. – 2005. – Т. 47. – №. 1T. – С. 148-154.