

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина Сибирское отделение  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
им. Г.И. Будкера СО РАН

А.Д. Букин

О КИНЕМАТИЧЕСКОЙ  
РЕКОНСТРУКЦИИ СОБЫТИЙ

ИЯФ 2005-51

НОВОСИБИРСК  
2005

# О кинематической реконструкции событий

*А.Д. Бужин*

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера  
630090, Новосибирск, РФ

## Аннотация

В работе рассматриваются несколько вариантов кинематической реконструкции событий на примере процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$ . Один из вариантов реконструкции проводится новой программой BUREC (специально написанная программа для этой цели). Проведено сравнение всех вариантов по качеству реконструкции и времени счёта.

## On kinematic reconstruction of events

*A.D. Bukin*

Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russia

## Abstract

In the paper several variants of kinematic reconstruction of events are considered using simulated events of the process  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$ . One of the reconstruction variants is carried out by the new program BUREC (written particularly for this analysis). Comparison of different variants is carried out for the quality of reconstruction and computing time.

# Содержание

1	Введение	5
2	Критерии для сравнения разных алгоритмов реконструкции	5
3	Настройка программы BUREC	10
4	Реконструкция с исключением кинематических связей	15
5	Минимизация по углам поворота события, как целого	17
6	Итерационная процедура минимизации KINEMI	20
7	Программа условной минимизации DONLP2	25
8	Сравнение разных алгоритмов кинематической реконструкции	29
9	Заключение	31
A	Программа кинематической реконструкции BUREC	35
A.1	Интерфейс программы BUREC . . . . .	35
A.2	Предварительная минимизация . . . . .	39
A.3	Минимизируемая функция . . . . .	40

---

# 1 Введение

Кинематической реконструкцией событий называется процедура уточнения измеренных параметров частиц в событии, используя известные кинематические связи. На установках со встречными пучками известны полная энергия и импульс начальных частиц, и это даёт возможность ввести четыре уравнения связи из законов сохранения энергии-импульса. Часто кинематическая реконструкция проводится в предположении какой-то гипотезы о промежуточных нестабильных частицах. Тогда каждая нестабильная частица добавляет ещё одно уравнение связи, которое приравнивает инвариантную массу частиц от распада этой частицы известному значению массы. Процедура кинематической реконструкции позволяет для измеренных параметров существенно уточнить их значения, а для не измеренных в данном событии параметров — получить оценку их значения.

В работе [1] автор исследует разные варианты кинематической реконструкции, однако, создание программ реконструкции на их основе требует дополнительного программирования. В настоящей работе описана программа кинематической реконструкции общего пользования BUREC, результаты которой на основе исследования процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  сравниваются с другими вариантами, описанными в [1].

## 2 Критерии для сравнения разных алгоритмов реконструкции

Обычно проводится минимизация функции правдоподобия, равной половине суммы квадратов нормированных на точность измерения отклонений измеренных значений параметров частиц от их значений в модели. Удвоенное значение этой функции является значе-

нием  $\chi^2$  для критерия согласия теории с экспериментом. Правда, минимальное значение  $\chi^2$  редко используется для отбраковки гипотезы по критерию согласия  $\chi^2$ , потому что распределения вероятностей для отклонения измеренных значений параметров в редких случаях близки к Гауссовому распределению, что исключает возможность использования табличных значений вероятности по критерию согласия. Однако, минимальное значение  $\chi^2$  является хорошим параметром отделения эффекта от фона.

Кинематическая реконструкция проводится в рамках какой-то модели события. Обычно параметрами этой модели являются параметры частиц в конечном состоянии, например, импульсы и углы вылета, хотя могут быть выбраны и другие параметры модели, из которых уже могут быть вычислены параметры конечных частиц. Минимизация проводится по параметрам модели. В случае многих частиц численная минимизация функции в многомерном пространстве при наличии сильных корреляций становится тяжёлой технической задачей (в качестве иллюстрации можно рассмотреть результаты сравнения в [2] программы BUKMING и MINUIT [3]) на разных функциях. Очевидно, что принятие ложного решения о достижении точки минимума является вероятным для любого алгоритма. Кроме того, положение осложняется возможным наличием локальных минимумов, в которых любой правильный алгоритм имеет законное право завершить работу. Так как в реальных задачах ответ заранее неизвестен, то в программе BUKMING имеется возможность применить стратегию с усиленным поиском минимума — серия последовательных минимизаций из разных начальных точек. Это позволяет проверить, нет ли систематического попадания в локальные минимумы, а также случаев «недоминимизации» из-за сложного профиля минимизируемой функции.

При кинематической реконструкции событий процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  мы будем считать неизвестной массу промежуточной частицы —  $\eta'$ -мезона, хотя она известна с хорошей точностью:  $m_{\eta'} = 957.78 \pm 0.14$ . При обработке эксперимента распределение событий по реконструированной массе  $\eta'$ -мезона можно использовать для оценки числа событий эффекта.

Для оценки эффективности алгоритма реконструкции будем использовать события моделирования этого процесса для детектора СНД [4]. Всего намоделировано 164971 событие  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma$  при полной энергии  $2E = 1020$  МэВ, из них только в 44993 событиях зарегистрировано две заряженные частицы и три или больше фотонов. В исходной выборке содержится 28800 событий интересующего нас канала распада  $\eta' \rightarrow \eta\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma$ , но из них только 11348 событий имеют две заряженные и три или больше нейтральные зарегистрированные частицы. Предварительный отбор событий проводится по параметрам частиц до кинематической реконструкции. Этот отбор проходит 10038 событий изучаемого процесса. В любом варианте кинематической реконструкции получают распределения по значению массы  $\eta'$ -мезона (как уже было сказано, при реконструкции считаем эту массу неизвестной) и распределение по минимальному значению функции правдоподобия. Допуская, что в разных вариантах реконструкции эти распределения могут быть различными уже по построению, определим несколько параметров, которые характеризуют эффективность отбора событий эффекта от фоновых событий. В качестве фоновых событий возьмем события моделирования процесса  $e^+e^- \rightarrow \phi \rightarrow K_S K_L$ . Всего намоделировано 1760973 события  $K_S K_L$ , из них 133531 событие имеет две заряженных и три или более нейтральных зарегистрированных частиц, из них только 2296 события проходит предварительный отбор. На рис. 1, 2 приведены распределения эффекта и фона по параметрам  $m(\pi^+\pi^-\eta)$  и  $\chi^2_{\pi\pi\eta\gamma}$ . Введем параметр  $\Gamma$  (ширина пика распределения по массе) следующим образом. В распределении событий эффекта по массе находим границу  $m_1$ , отсекающую 25% событий слева. Аналогичную границу  $m_2$  получаем требованием отсечения справа от пика тоже 25% событий. Тогда в интервале  $(m_1, m_2)$  содержится 50% событий от всего распределения. Разность  $\Gamma = m_2 - m_1$  и назовем шириной распределения. Поскольку распределение фоновых событий по массе может, в принципе, меняться при использовании разных алгоритмов реконструкции, то хорошей мерой качества процедуры реконструкции можно считать долю фоновых событий  $B_m$ , попадающих в интер-

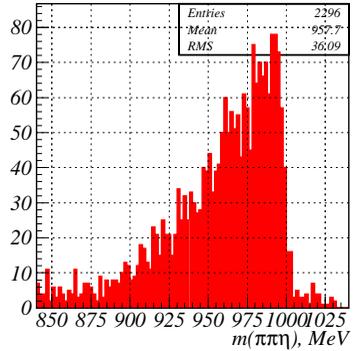
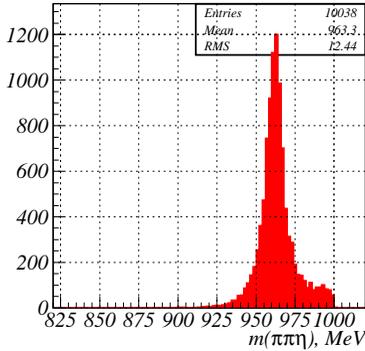


Рис. 1: Распределение событий процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  (слева) и  $e^+e^- \rightarrow K_S K_L$  (справа) по инвариантной массе  $m(\eta\pi\pi)$ .

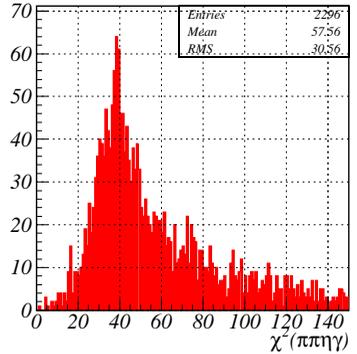
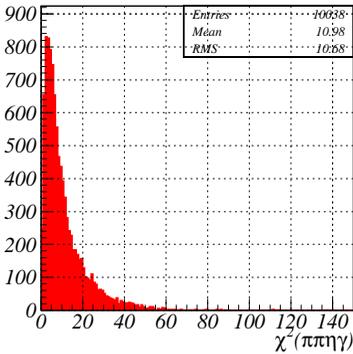


Рис. 2: Распределение событий процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  (слева) и  $e^+e^- \rightarrow K_S K_L$  (справа) по функции правдоподобия  $\chi^2_{\pi\pi\eta\gamma}$ .

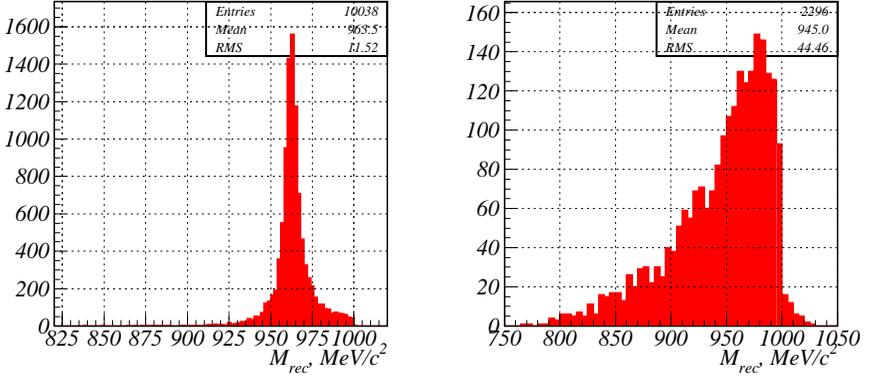


Рис. 3: Распределение событий моделирования  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  по массе отдачи самого мягкого из трех фотонов  $M_{rec} = \sqrt{W \cdot (W - 2\omega)}$ , где  $\omega$  – энергия фотона,  $W$  – полная энергия встречных пучков (справа – распределение событий моделирования фона  $e^+e^- \rightarrow K_S K_L$ ).

вал  $(m_1, m_2)$ . Чем меньше эта величина, тем эффективнее можно отделять события интересующего нас процесса от фоновых событий.

Для того, чтобы сравнивать результаты кинематической реконструкции с чем-то более простым, вычислим эти параметры для распределения событий по массе отдачи

$$M_{rec} = 2\sqrt{E \cdot (E - E_{\gamma 3})}$$

самого мягкого фотона (рис. 3), вычисленной только по измеренной энергии третьего фотона с учетом законов сохранения энергии-импульса. Границы, отсекающие 25%-е «хвосты», равны соответственно  $m_1 = 959.27$ ,  $m_2 = 967.20$ . Отсюда ширина пика  $\Gamma = 7.93$  и  $B_m = \frac{204}{2296} = (8.9 \pm 0.6)\%$ .

Аналогичным образом введем ширину распределения  $d$  событий эффекта по функции правдоподобия как границу, отделяющую 50% событий. Мерой эффективности этого параметра примем долю фоновых событий  $B_L$ , попадающих в интервал  $0 \leq \chi^2_{\pi\pi\eta\gamma} \leq d$ .

Чем меньше это число, тем эффективнее параметр. Для того, чтобы числа — доли фоновых событий, попадающих в отбираемый интервал некоторого параметра, не были слишком маленькими, будем определять такие доли не от всех событий  $K_S K_L$ , а только от тех, в которых зарегистрированы две заряженные частицы и три или более фотонов.

В конечном состоянии у нас три или больше фотонов (допускается «расщепление» фотона при реконструкции или другие подобные эффекты, приводящие для «хороших» событий эффекта к регистрации больше трех фотонов). Пять частиц (их массы считаем известными) полностью описываются 15-ю параметрами. Измерены в эксперименте углы всех частиц и энергии фотонов, то есть 13 параметров. Уравнения сохранения энергии-импульса и предположение о промежуточном  $\eta$ -мезоне позволяют исключить 5 параметров, т.е. остается свободных только 10 параметров. Поэтому распределение по функции правдоподобия должно быть близко к распределению  $\chi^2$  с тремя степенями свободы.

В любом случае имеется несколько вариантов «назначения» двух зарегистрированных фотонов, как происшедших от распада  $\eta$ -мезона. Для разных вариантов при этом получаются различные минимальные значения функции правдоподобия. В качестве рабочей комбинации выбирается вариант с наименьшим значением функции правдоподобия.

### 3 Настройка программы BUREC

Так как одной из основных целей данной работы является получение сравнительной характеристики программы BUREC, опишем несколько подробнее процедуру настройки программы, т.е. выбор значений входных параметров. Конечно, описание события и детектора (угловое и энергетическое разрешение) мы не можем менять по своему произволу, но часть параметров никак не определяется детектором или очередным событием (в данной работе использованы параметры детектора СНД [4]). В процессе настройки заодно проверим чувствительность результатов реконструкции к этим

параметрам. Таких параметров всего два: весовой множитель для «штрафной» функции  $W$  и предельное число вычислений функции  $N_{cal}$ .

«Штрафная» функция — искусственная добавка к функции правдоподобия, которая точно равна нулю, если выполняются требуемые кинематические связи, и резко возрастает, если кинематические связи нарушаются. Чем большее значение присвоено весовому множителю, тем точнее выполняются кинематические связи. Однако, с ростом этого множителя профиль функции становится более сложным для программы численной минимизации, и время счета может существенно нарастать, а при очень больших значениях  $W$  программа минимизации может не доходить до минимума.

Ограничение  $N_{cal}$  на количество вычислений функции по пути к минимуму традиционно вводится во всех программах численной минимизации (в том числе в известных программах MINUIT и DONLP2). Назначение — прервать процесс минимизации, если он по каким-то причинам неоправданно затянулся.

Для начала установим заведомо большое значение  $N_{cal}=100000$  и разберёмся с параметром  $W$ . В табл.1 представлены основные характеристики результатов кинематической реконструкции программой BUREC. Численная минимизация проводится подпрограммой BUKMING, подробно описанной в [2]. В этой программе значения управляющих констант выбраны по умолчанию, однако в случае необходимости их можно изменить через COMMON-блок. В таблице это отражено в управляющей константе  $Istr$ , которая по умолчанию имеет значение 1, но в одной строке таблицы она изменена на  $Istr=2$ , что соответствует усиленному поиску минимума с обязательными заходами минимизации из разных начальных точек. Программа BUREC перед основной минимизацией делает предварительную минимизацию с угловыми переменными, зафиксированными на их экспериментально измеренных значениях. Как видно из таблицы, в нашем случае (когда энергии некоторых частиц не измерены) это приводит к экономии времени счета. В случае, если все параметры частиц измеряются в эксперименте, эта процедура не помогает, но и не вредит.

Таблица 1: Характеристика эффективности разных вариантов кинематической реконструкции программой BUREC.  $W$  – коэффициент веса «штрафной» функции, обеспечивающей выполнение кинематических связей.

Вариант	$m_1$ , МэВ	$m_2$ , МэВ	$\Gamma$ , МэВ	$B_m, \%$	$d$	$B_L, \%$	$T_{CPU}$ , сек.
$W = 0.001$	942.62	961.88	19.26	14.5	3.27	0.44	14
$W = 0.01$	955.88	967.32	11.44	12.4	6.38	0.26	15
$W = 0.1$	957.46	967.68	10.22	11.8	7.31	0.26	16
$W = 1$	957.60	967.74	10.14	11.4	7.45	0.26	19
$W = 10$	957.61	967.75	10.14	11.6	7.47	0.26	22
$W = 50$	957.61	967.75	10.14	11.6	7.47	0.26	28
$W = 100$	957.61	967.75	10.14	11.6	7.47	0.26	28
				$\pm 0.7$		$\pm 0.10$	
<b>Дополнительные исследования варианта с <math>W = 100</math></b>							
$N_{cal} = 10^3$ Istr=1	957.57	967.71	10.14	11.6	7.47	0.26	27
$N_{cal} = 10^5$ Istr=2	957.61	967.75	10.14	11.6	7.46	0.26	1431
$N_{cal} = 10^5$ Istr=1	Без предварительной минимизации						
	957.62	967.75	10.13	11.8	7.46	0.26	167

Видно, что при  $W \geq 10$  качество реконструкции не меняется, однако, меняется время счета (из-за усложняющегося профиля функции). Для дальнейших сравнений с другими вариантами реконструкции было выбрано значение  $W = 100$ . Чтобы убедиться, что при большом значении  $W$  минимум функции находится надежно, была проведена реконструкция со стратегией минимизации Istr=2. Время счета увеличилось почти в 50 раз, а результаты не изменились. Это свидетельствует, что «недоминимизации» из-за сложного профиля функции не происходит.

На рис. 4 приведено распределение событий по количеству вычислений минимизируемой функции по пути к минимуму. Наиболее вероятное значение  $N_{cal}$  равно 250, но имеется и довольно длинный «хвост» распределения в сторону больших значений.

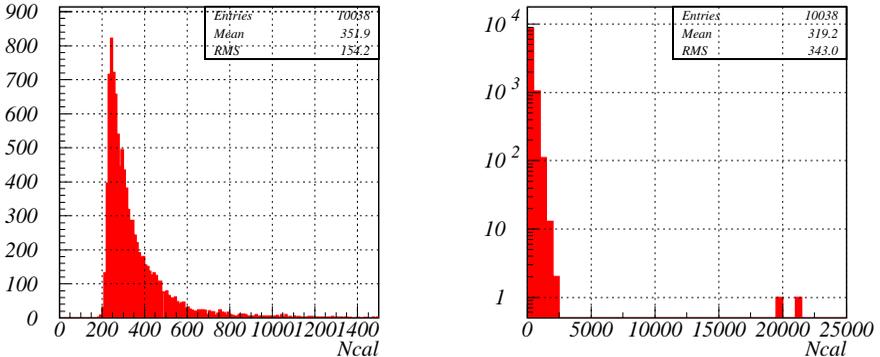


Рис. 4: Распределение событий по  $N_{cal}$  – фактическому количеству вычислений минимизируемой функции, необходимому для определения точки минимума.  $Istr=1$ ,  $W = 100$ .

Если мы ограничим  $N_{cal} < 1000$  (это повлияет примерно на 1% событий), то этим мы уменьшим (ограничим) время счета без большой потери качества (это означает, что в сложных случаях программа BUKMING немного не дойдет до минимума). Как видно из таблицы, время действительно немного уменьшилось, а результат изменился пренебрежимо мало.

Обращает на себя внимание следующее обстоятельство. При уменьшении весового множителя  $W$  ширина пика по массе системы  $\pi\pi\eta$ , как и следовало ожидать, увеличивается, а ширина распределения по функции правдоподобия уменьшается, но эффективность отбраковки фоновых событий с помощью этих параметров меняется значительно слабее. К сожалению, из-за сильного подавления уровня фона в интервал по  $\chi_{\eta\pi\pi\gamma}^2$ , захватывающий 50% событий эффекта, попадает всего 6 событий  $K_S K_L$  (ближайшее к границе событие имеет  $\chi_{\eta\pi\pi\gamma}^2 \approx 7.2$ , ближайшее отброшенное —  $\chi_{\eta\pi\pi\gamma}^2 \approx 7.8$ , поэтому при подвижках границы отбора в этих пределах параметр  $B_L$  вообще не меняется). Очевидно, что меняется и распределение фоновых событий. Можно предположить, что эффективность отбраковки фоновых событий по массе  $M_{\pi\pi\eta}$  будет значительно выше, если мы сузим интервал отбора (это, естественно, только иллюстрация, так как определять количество событий эффекта в

Таблица 2: Характеристика эффективности разных вариантов кинематической реконструкции программой BUREC.  $W$  – коэффициент веса «штрафной» функции, обеспечивающей выполнение кинематических связей. Ширина пика определяется условием захвата 10% событий эффекта.

Вариант	$m_{peak}$ , МэВ	$m_1(10\%)$ , МэВ	$m_2(10\%)$ , МэВ	$\Gamma(10\%)$ , МэВ	$B_m(10\%),\%$
$W = 0.001$	956.11	954.21	957.76	3.55	3.01
$W = 0.01$	961.35	960.37	962.30	1.93	1.61
$W = 0.1$	962.22	961.38	963.07	1.69	1.48
$W = 1$	962.29	961.44	963.09	1.65	1.61
$W = 10$	962.28	961.42	963.09	1.67	1.74
$W = 50$	962.28	961.42	963.09	1.67	1.74
$W = 100$	962.28	961.42	963.09	1.67	$1.74 \pm 0.28$

смешанном распределении более эффективно получается подгонкой суммарного экспериментального распределения суммой теоретических распределений эффекта и фона). В табл. 2 представлены результаты по ширине пика, когда границы  $m_1(10\%)$  и  $m_2(10\%)$  определяются следующим образом: в распределении событий моделирования  $e^+e^- \rightarrow \eta'\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  от значения массы  $m_{peak}$  отступаем вправо и влево так, чтобы захватить по 5% событий. В соответствии с этими границами пика перевычисляется и ширина  $\Gamma(10\%)$  и доля фоновых событий  $B_m(10\%)$ . Действительно, для более узкой области пика отношение эффект/фон заметно выше.

В вопросе выбора весового множителя  $W$  важно, чтобы параметры распределения по массе и функции правдоподобия совпадали со значениями, которые получаются при  $W \rightarrow \infty$  (абсолютно точное выполнение кинематических связей). По всем данным получается, что уже при  $W > 10$  параметры распределений стабилизируются и дальнейшее увеличение  $W$  приводит только к увеличению времени счета (вследствие усложнения профиля минимизируемой функции). Для сравнения с другими вариантами реконструкции оставим  $W = 100$ .

## 4 Реконструкция с исключением кинематических связей

Всегда можно сформировать набор параметров модели событий, которые не требуется ограничивать для выполнения кинематических связей. Как уже было показано в разделе 2, полное описание события  $\pi^+\pi^-\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  осуществляется 15-ю параметрами, но из-за кинематических связей 5 параметров можно выразить через другие 10. Непосредственно такую процедуру написать технически сложно, но можно выбрать другие 10 параметров, полностью свободные, причем все 15 параметров однозначно выражаются через эти 10 параметров, а все кинематические связи всегда точно выполняются. Покажем, как это можно сделать на примере событий нашего процесса. Пусть первый параметр  $x_1$  определяет энергию фотона отдачи  $E_{\gamma 1}$  и инвариантную массу  $M_{\pi\pi\eta}$  системы  $\pi^+\pi^-\eta$ :

$$\begin{aligned} E_{\gamma 1} &= \frac{\sin^2 x_1}{2} \cdot \left[ W - \frac{(m_\eta + 2m_\pi)^2}{W} \right], \\ M_{\pi\pi\eta} &= W \cdot \sqrt{\cos^2 x_1 + \left( \frac{m_\eta + 2m_\pi}{W} \right)^2 \cdot \sin^2 x_1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $W$  – полная энергия встречных пучков,  $m_\eta$  – масса  $\eta$ -мезона,  $m_\pi$  – масса заряженного пиона. Так как полный импульс встречных пучков равен нулю, то импульс системы  $\pi^+\pi^-\eta$  равен импульсу фотона по абсолютной величине и направлен в противоположенную сторону. Нетрудно проверить, что полная энергия системы  $\pi^+\pi^-\eta\gamma$  при любых значениях  $x_1$  равна

$$E_{\gamma 1} + \sqrt{M_{\pi\pi\eta}^2 + E_{\gamma 1}^2} \equiv W. \quad (2)$$

Аналогично, параметр  $x_2$  определяет массу  $M_{\pi\pi}$  системы  $\pi^+\pi^-$ :

$$M_{\pi\pi} = 2m_\pi \cdot \cos^2 x_2 + (M_{\pi\pi\eta} - m_\eta) \cdot \sin^2 x_2. \quad (3)$$

В системе покоя  $\pi\pi\eta$  импульсы  $\eta$ -мезона и системы  $\pi\pi$  противоположны и равны по величине

$$P_\eta = \frac{|\cos x_1 \cdot \cos x_2| \cdot \sqrt{W^2 - (m_\eta + 2m_\pi)^2}}{2M_{\pi\pi\eta} \cdot \sqrt{M_{\pi\pi\eta} + m_\eta + 2m_\pi}} \times \\ \times \sqrt{[M_{\pi\pi\eta} + m_\eta + M_{\pi\pi}] \cdot [M_{\pi\pi\eta}^2 - (m_\eta - M_{\pi\pi})^2]} \quad (4)$$

Выберем систему координат повернутую так, что первый фотон вылетает вдоль оси X в положительном направлении, а  $\eta$ -мезон в ней движется в плоскости X-Y. Тогда угол вылета  $\eta$ -мезона относительно оси X  $\theta_\eta$  в системе покоя  $\pi\pi\eta$  можно выбрать в качестве третьего свободного параметра  $x_3 = \theta_\eta$ . Этот угол и импульс  $P_\eta$  полностью определяют энергию  $\eta$ -мезона в лабораторной системе (необходимо выполнить преобразование Лоренца).

В системе центра масс  $\pi^+\pi^-$  пионы имеют одинаковую энергию, равную  $M_{\pi\pi}/2$ . Два угла в этой системе определяют направление движения  $\pi^+$ -мезона:  $\theta$ -угол  $x_4$  и  $\phi$ -угол  $x_5$ . В этой системе направление движения  $\pi^-$ -мезона противоположно импульсу  $\pi^+$ . Параметры заряженных пионов в других системах получаются преобразованиями Лоренца.

В системе покоя  $\eta$ -мезона фотоны от его распада имеют одинаковую энергию  $m_\eta/2$ . Направление вылета первого фотона в этой системе определяется двумя углами:  $\theta$ -угол  $x_6$  и  $\phi$ -угол  $x_7$ .

Все импульсы и углы всех частиц определены. Если теперь перевести их в лабораторную систему, то получим набор частиц, удовлетворяющих всем кинематическим связям. Для того, чтобы можно было описать любую возможную систему частиц, надо с помощью углов Эйлера еще осуществить произвольный поворот этой конструкции, как целого. Матрица поворота  $T$  всех векторов импульса выражается через параметры  $x_8$ ,  $x_9$  и  $x_{10}$  следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} \cos x_9 & \sin x_9 \cos x_8 & \sin x_8 \sin x_9 \\ -\cos x_{10} \sin x_9 & \cos x_{10} \cos x_8 \cos x_9 - \sin x_{10} \sin x_8 & \cos x_{10} \cos x_9 \sin x_8 + \cos x_8 \sin x_{10} \\ \sin x_{10} \sin x_9 & -\cos x_{10} \sin x_8 - \cos x_8 \cos x_9 \sin x_{10} & \cos x_{10} \cos x_8 - \cos x_9 \sin x_{10} \sin x_8 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Итак, мы получили 10 независимых параметров, полностью описывающих все возможные состояния пяти частиц, точно выполняющие закон сохранения энергии-импульса, причем инвариантная масса двух фотонов точно равна массе  $\eta$ -мезона. Функция правдоподобия, которую надо минимизировать, записывается точно так же, как в предыдущем случае (половина суммы квадратов отклонений измеренных величин от их оценки по параметрам модели, нормированных на ошибки измерения), только никакой «штрафной» функции не требуется. Так как аналитическое вычисление градиента минимизируемой функции по выбранным параметрам является сложной технической задачей, то для минимизации использовалась программа BUKMIN [5], не требующая аналитически вычисленного градиента. Результаты реконструкции событий описанной процедурой условно будут помечаться в таблицах словом AllFree.

## 5 Минимизация по углам поворота события, как целого

В предыдущем варианте реконструкции последние три параметра отвечают за поворот события, как целого. При некоторых условиях минимизацию функции правдоподобия по этим параметрам можно выполнить аналитически, тем самым сократив время минимизации за счет упрощения профиля функции в многомерном пространстве. Эти условия следующие:

1. При повороте события не должны нарушаться условия сохранения энергии-импульса. Это соответствует нашему случаю – симметричные встречные пучки требуют равенства нулю полного импульса системы, что не изменяется при повороте события, как целого.
2. Точность измерения  $\theta$ - и  $\varphi$ -углов для каждой частицы должна быть одинаковой. В детекторе СНД это справедливо для фотонов, но не выполняется для заряженных частиц. Чтобы все же применить данную процедуру, усредним точности измерения для заряженных частиц по следующей формуле:

$$\sigma_{\theta\phi} = \sqrt{\frac{\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\phi}^2}{2}}$$

3. Отклонения измеренных значений углов от точного значения должны быть достаточно малы, чтобы с хорошей точностью выполнялось равенство

$$\Delta\theta^2 + \Delta\varphi^2 \approx 2 \cdot (1 - \cos \Delta\alpha),$$

где  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\varphi$  – угловые отклонения измеренного направления импульса частицы от точного,  $\Delta\alpha$  – пространственный угол между измеренным направлением импульса и точным. В детекторе СНД, как и во всех современных детекторах, точности измерения углов достаточны хороши, чтобы принять такое приближение. Правда, даже при хорошей точности измерения углов равенство будет справедливым только для углов  $\theta \sim \pi/2$ .

В нашем случае точности измерения углов заряженных частиц в разных проекциях существенно различаются, но для того, чтобы использовать программу BUROTAT, мы их уравниваем. Естественно, функция правдоподобия при этом сильно меняется. Распределения событий эффекта и фона по функции правдоподобия приведены на рис. 5. Распределения по массе системы  $\eta\pi\pi$  при этом меняются не сильно (рис. 6). В любом случае этот вариант реконструкции опирается на существенные приближения, поэтому его можно использовать только если его достоинства перевешивают недостатки. В нашем случае критерий единственный – эффективность отделения от фоновых событий. В таблицах этот вариант реконструкции будем условно обозначать словом BUROTAT. Кстати, несмотря на то, что мы «сэкономили» на аналитической минимизации по трем углам, время счета в варианте BUROTAT оказалось заметно больше, чем в варианте AllFree. Это произошло потому, что при вычислении оптимальных углов поворота накапливаются существенные ошибки округления, и минимизируемая функция

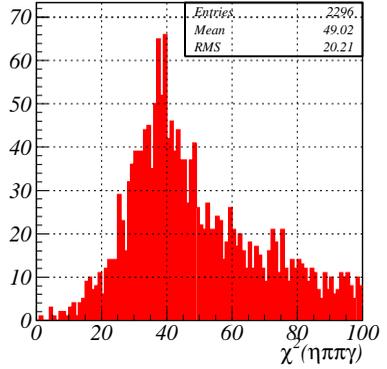
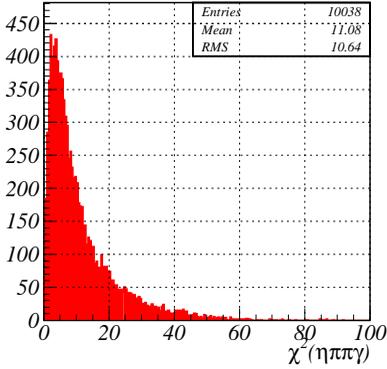


Рис. 5: Распределения событий  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi^+\pi^-\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  (слева) и  $K_S K_L$  (справа) по функции правдоподобия, полученной с помощью BUROTAT.

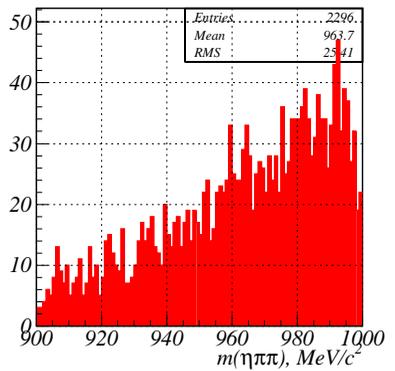
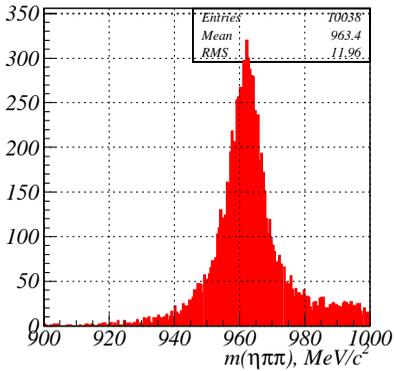


Рис. 6: Распределения событий  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi^+\pi^-\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  (слева) и  $K_S K_L$  (справа) по массе системы  $\eta\pi\pi$ , полученной с помощью BUROTAT.

становится недостаточно гладкой – критерий достижения минимума не выполняется и минимизация повторяется с новой начальной точки. Это видно по распределению событий по параметру  $N_{cal}$  – количеству вычислений функции (рис 7).

Чтобы бороться с этим явлением, надо проводить вычисления при аналитической минимизации с повышенной точностью (сейчас это делается с «двойной точностью»), или модифицировать программу минимизации так, чтобы она допускала накопление значительных ошибок округления (MINUIT дает такую возможность). Но проще всего – ограничить количество вычислений функции в программе минимизации.

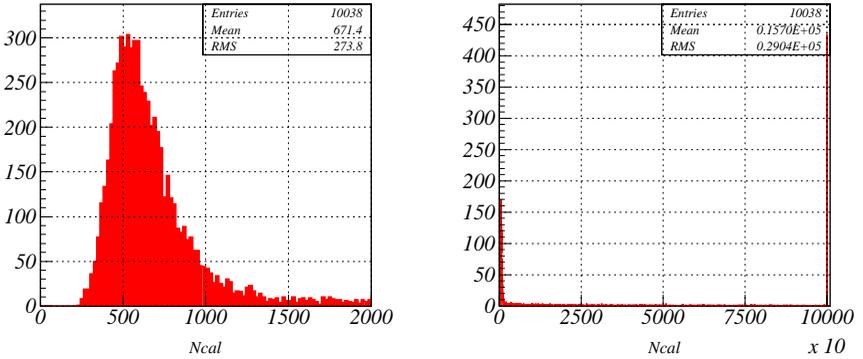


Рис. 7: Распределения событий  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi^+\pi^-\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  по  $N_{cal}$ .

## 6 Итерационная процедура минимизации KINEMI

Для учета кинематических связей используем процедуру, описанную в работе [6], и реализованную в программе KINEMI В.Н.Иванченко. Данная процедура рассчитана на то, что все параметры частиц измерены в эксперименте. В нашем случае это не так – энергии заряженных частиц не измеряются на детекторе СЧД. Припишем заряженным частицам некоторую энергию в допустимом интервале (достаточно произвольно, например, 500 МэВ), но

укажем очень плохую точность измерения, например,  $\pm 1000$  МэВ. Тогда произвольно выбранные измеренные значения энергий не должны повлиять на результат кинематической реконструкции.

Пусть частицы пронумерованы (для приписывания индексов параметрам) в следующем порядке: 1 – фотон отдачи  $\eta'$ -мезона, 2 – первый заряженный пион, 3 – второй заряженный пион, 4 – первый фотон от распада  $\eta$ -мезона, 5 – второй фотон от распада  $\eta$ -мезона. Если у каждой частицы измерена энергия  $E_i$  и углы в полярной системе координат  $\theta_i$  и  $\varphi_i$ , то кинематические связи между истинными значениями параметров можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sum_{i=1}^5 E_i - W = 0, \\
 R_2 &= \sum_{i=1}^5 \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \cos \theta_i = 0, \\
 R_3 &= \sum_{i=1}^5 \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i \cos \varphi_i = 0, \\
 R_4 &= \sum_{i=1}^5 \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i \sin \varphi_i = 0, \\
 R_5 &= 2 \cdot E_4 \cdot E_5 \cdot \times \\
 &\times [1 - \cos \theta_4 \cdot \cos \theta_5 - \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \cos (\varphi_4 - \varphi_5)] - m_\eta^2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Программе KINEM1 надо предоставлять в каждой точке по пути к минимуму значение минимизируемой функции правдоподобия и значения функций  $R_1, R_2, \dots, R_5$ , а также градиенты функций  $R_1, \dots, R_5$ . Частные производные легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1}{\partial E_i} &= 1; \quad \frac{\partial R_1}{\partial \theta_i} = \frac{\partial R_1}{\partial \varphi_i} = 0, \\
\frac{\partial R_2}{\partial E_i} &= \frac{E_i}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}} \cos \theta_i; \quad \frac{\partial R_2}{\partial \theta_i} = -\sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i; \quad \frac{\partial R_2}{\partial \varphi_i} = 0, \\
\frac{\partial R_3}{\partial E_i} &= \frac{E_i}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}} \sin \theta_i \cos \varphi_i; \quad \frac{\partial R_3}{\partial \theta_i} = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \cos \theta_i \cos \varphi_i; \\
&\quad \frac{\partial R_3}{\partial \varphi_i} = -\sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i \sin \varphi_i; \\
\frac{\partial R_4}{\partial E_i} &= \frac{E_i}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}} \sin \theta_i \sin \varphi_i; \quad \frac{\partial R_4}{\partial \theta_i} = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \cos \theta_i \sin \varphi_i; \\
&\quad \frac{\partial R_4}{\partial \varphi_i} = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \cdot \sin \theta_i \cos \varphi_i; \\
\frac{\partial R_5}{\partial E_i} &= \frac{\partial R_5}{\partial \theta_i} = \frac{\partial R_5}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \\
\frac{\partial R_5}{\partial E_4} &= 2E_5 \cdot [1 - \cos \theta_4 \cdot \cos \theta_5 - \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \cos(\varphi_4 - \varphi_5)]; \\
\frac{\partial R_5}{\partial E_5} &= 2E_4 \cdot [1 - \cos \theta_4 \cdot \cos \theta_5 - \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \cos(\varphi_4 - \varphi_5)]; \\
\frac{\partial R_5}{\partial \theta_4} &= 2E_4 \cdot E_5 [\sin \theta_4 \cdot \cos \theta_5 - \cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \cos(\varphi_4 - \varphi_5)]; \\
\frac{\partial R_5}{\partial \theta_5} &= 2E_4 \cdot E_5 [\cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 - \sin \theta_4 \cdot \cos \theta_5 \cdot \cos(\varphi_4 - \varphi_5)]; \\
\frac{\partial R_5}{\partial \varphi_4} &= -\frac{\partial R_5}{\partial \varphi_5} = 2E_4 \cdot E_5 \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \sin(\varphi_4 - \varphi_5).
\end{aligned} \tag{7}$$

На рис. 8 представлены распределения событий моделирования  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi\pi\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  по функции правдоподобия и массе системы  $\eta\pi\pi$ .

Плохое распределение по массе системы  $\eta\pi\pi$  может быть обусловлено как «недоминимизацией» функции правдоподобия (плохая сходимость к точке минимума), так и невыполнение кинематических связей. На рис. 9 приведены распределения по величине отклонения от точного выполнения кинематических связей в конце итерационной процедуры. Эти рисунки показывают, что заметная часть событий имеет большие нарушения кинематических связей. Только 38% событий от всех событий  $\eta'\gamma$  с двумя зарегистрированными заряженными частицами и тремя или более фотонами имеют  $|\Delta W| < 1$  MeV,  $P_{tot} < 1$  MeV/c и  $547 < m_{\gamma\gamma} < 548$  MeV.

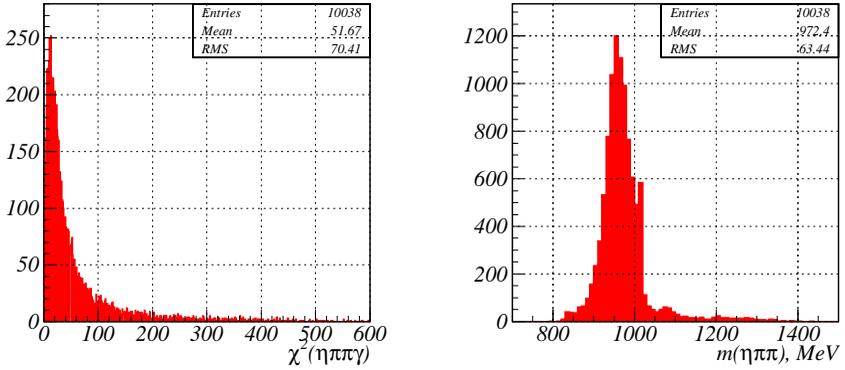


Рис. 8: Распределения событий  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi^+\pi^-\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  по функции правдоподобия (слева) и восстановленной массе системы  $\eta\pi\pi$  (справа).

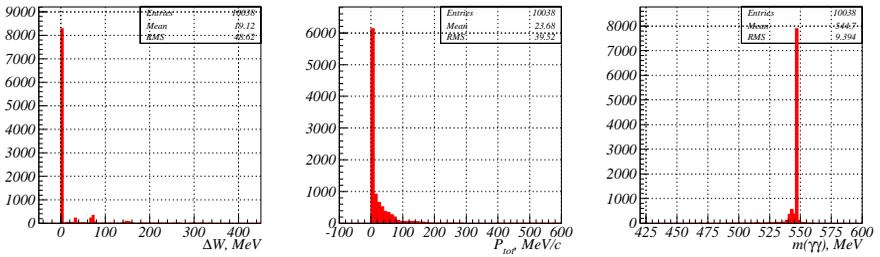


Рис. 9: Распределения, демонстрирующие степень нарушения кинематических связей: левый рисунок — разность между суммой всех восстановленных энергий частиц и известной полной энергией, рисунок в центре — абсолютная величина суммарного импульса частиц, правый рисунок — инвариантная масса двух фотонов от распада  $\eta$ -мезона.

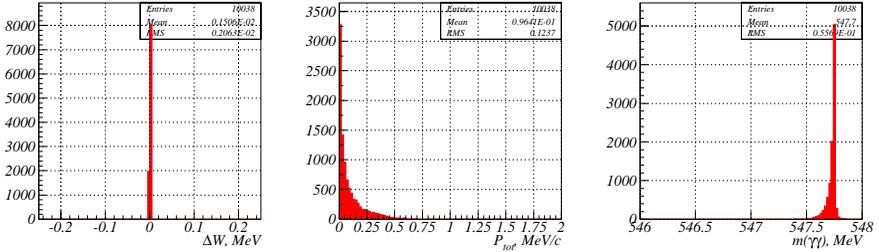


Рис. 10: Распределения, демонстрирующие степень нарушения кинематических связей: левый рисунок – разность между суммой всех восстановленных энергий частиц и известной полной энергией, рисунок в центре – абсолютная величина суммарного импульса частиц, правый рисунок – инвариантная масса двух фотонов от распада  $\eta$ -мезона. В качестве измеренной энергии заряженных пионов взята истинная энергия из данных моделирования.

Посмотрим, как сказывается на результате то, что у нас энергии заряженных частиц не измерены. Возьмем в качестве измеренной энергии заряженных пионов их «истинную» энергию из данных моделирования. Точность измерения припишем 1 МэВ. На рис. 10 приведены распределения по величине отклонения от точного выполнения кинематических связей в конце итерационной процедуры. Видно, что в итоге процедура сходится к параметрам частиц, которые достаточно точно выполняют кинематические связи. На этот раз 99% событий от всех событий  $\eta'\gamma$  с двумя зарегистрированными заряженными частицами и тремя или более фотонами имеют  $|\Delta W| < 1$  MeV,  $P_{tot} < 1$  MeV/c и  $547 < m_{\gamma\gamma} < 548$  MeV. Распределения по функции правдоподобия и массе системы  $\eta\pi\pi$  показаны на рис. 11.

Распределение по массе системы  $\eta\pi\pi$  стало просто замечательным. Из этого упражнения следует вывод, что сходимость параметров частиц к правильным значениям в данном методе не является гарантированной. Наиболее эффективно его применение к событиям, в которых все параметры частиц измерены с хорошей точностью и кинематические связи нарушаются незначительно. Однако,

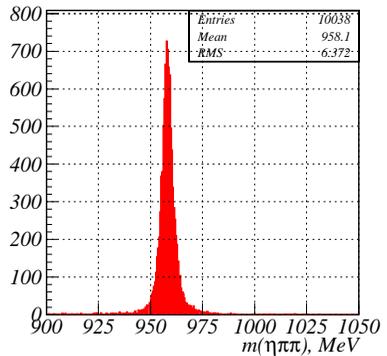
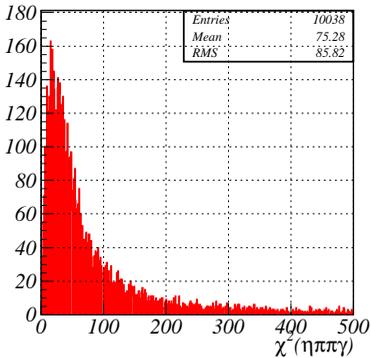


Рис. 11: Распределения событий  $\eta\pi^+\pi^-\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma$  по функции правдоподобия (слева) и восстановленной массе системы  $\eta\pi\pi$  (справа). В качестве измеренной энергии заряженных пионов взята истинная энергия из данных моделирования.

и в этом случае выполнение кинематических связей не гарантируется для фоновых событий (рис. 12). Это видно и в распределении фоновых событий  $K_S K_L$  по массе системы  $\pi^+\pi^-\gamma\gamma$  в условиях, когда энергии заряженных пионов принимают истинные значения из моделирования (рис. 13).

Несмотря на такое сильное нарушение законов сохранения для фоновых событий, параметры разделения  $m_{\eta\pi\pi}$  и  $\chi^2_{\eta\pi\pi\gamma}$ , полученные процедурой кинематической реконструкции KINEM1 для детектора, где энергии заряженных частиц тоже измеряются, давали бы хорошее разделение эффект/фон.

## 7 Программа условной минимизации DONLP2

Наряду с рассмотренными вариантами кинематической реконструкции рассмотрим минимизацию функции правдоподобия специализированной программой условной минимизации DONLP2 [7]. Эта программа находит минимум заданной функции при любом

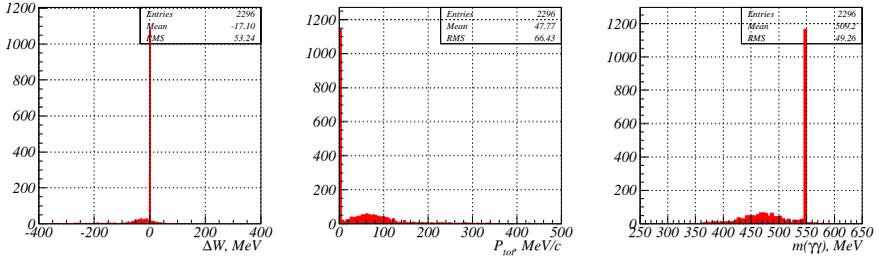


Рис. 12: Распределения, демонстрирующие степень нарушения кинематических связей для событий моделирования  $K_S K_L$ : левый рисунок — разность между суммой всех восстановленных энергий частиц и известной полной энергией, рисунок в центре — абсолютная величина суммарного импульса частиц, правый рисунок — инвариантная масса двух фотонов от распада  $\eta$ -мезона. В качестве измеренной энергии заряженных пионов взята истинная энергия из данных моделирования.

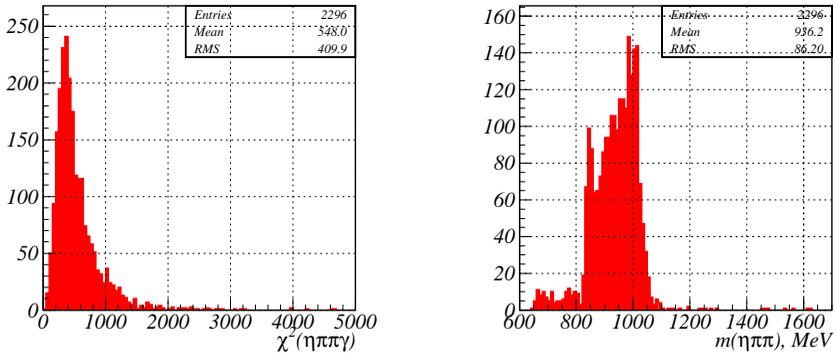


Рис. 13: Распределения событий  $K_S K_L$  по функции правдоподобия (слева) и восстановленной массе системы  $\pi\pi\gamma\gamma$  (справа). В качестве измеренной энергии заряженных пионов взята истинная энергия из данных моделирования.

наборе условий на параметры в виде равенств и ограничений в виде неравенств. Используем здесь тот же набор (6) условий на параметры, что применяли для программы KINEMI, а также и выражений для производных этих функций по параметрам (7). Кроме того, в качестве условий в виде неравенств используем 5 условий, что полная энергия частицы должна быть больше её массы. В итоге получилась минимизируемая функция от 15 параметров, которые ограничены пятью условиями-равенствами и пятью условиями-неравенствами. В программе DONLP2 по окончании работы выдается код возврата (18 вариантов), большинство из которых свидетельствует о наличии затруднений, часто спровоцированных ошибками при программировании (пользователь должен предоставлять правильные значения производных минимизируемой функции и функций — кинематических связей).

На рис. 14 представлено распределение событий эффекта и фона по коду завершения. Нормальным кодом завершения считается

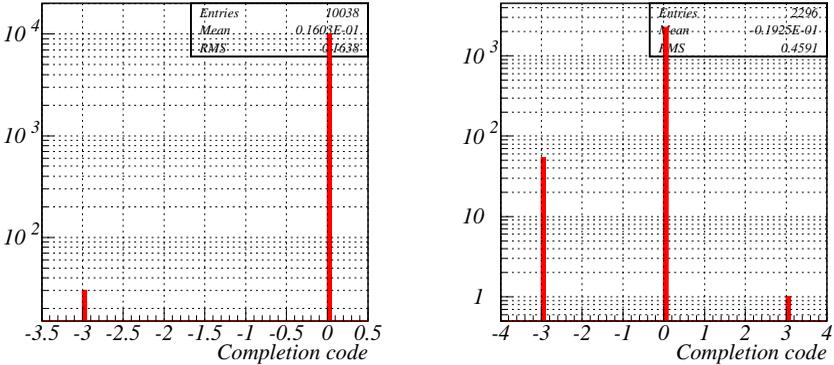


Рис. 14: Распределение событий моделирования  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi^+\pi^-\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  (слева) и  $K_S K_L$  (справа) по коду завершения программы минимизации DONLP2.

код 0, но часть событий сопровождается и другими кодами. Некоторое количество событий закончилось кодом «-3» — число итераций превысило предел (установлено MAXIT=4000). Часть фоновых событий сопровождается кодом «+3» — «сингулярная точка»

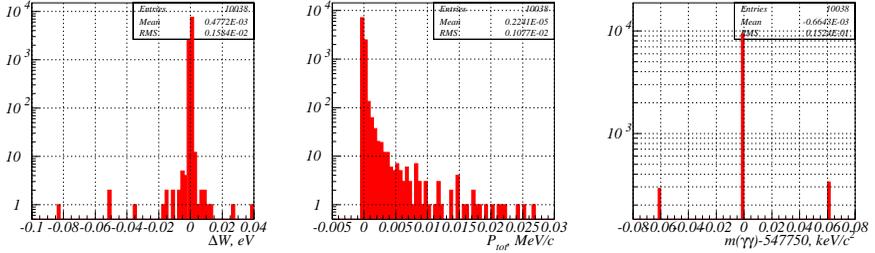


Рис. 15: Распределения, демонстрирующие степень нарушения кинематических связей при использовании DONLP2: левый рисунок – разность между суммой всех восстановленных энергий частиц и известной полной энергией, рисунок в центре – абсолютная величина суммарного импульса частиц, правый рисунок – инвариантная масса двух фотонов от распада  $\eta$ -мезона.

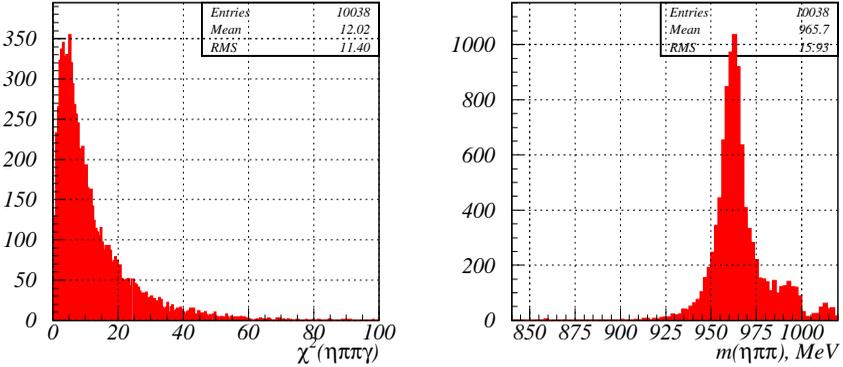


Рис. 16: Распределения событий  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi^+\pi^-\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  по функции правдоподобия (слева) и восстановленной массе системы  $\eta\pi\pi$  (справа) при использовании программы DONLP2.

(‘КТ’ conditions (relaxed) satisfied, singular point)». Во всех случаях выполнение законов сохранения и кинематических связей при использовании DONLP2 очень хорошее (рис. 15).

На рис. 16 представлены распределения событий моделирования  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi\pi\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  по функции правдоподобия и массе системы  $\eta\pi\pi$ .

Теперь мы можем сравнить разные методы кинематической реконструкции.

## 8 Сравнение разных алгоритмов кинематической реконструкции

В табл. 3 приведены основные результаты реконструкции для каждого из рассмотренных методов.

Самый экономичный метод (в смысле затрат процессорного времени) — итерационная процедура KINEMI. Однако, она хорошо работает только в случае, когда все параметры частиц измеряются в эксперименте, причем чем лучше точность измерения параметров, тем эффективнее применение этой процедуры. Однако, даже в самом благоприятном случае, для фоновых событий выполнение кинематических связей, скорей всего, не будет гарантировано, что

Таблица 3: Характеристика эффективности разных вариантов кинематической реконструкции. Ширина пика определяется условием захвата 50% событий эффекта.

Вариант	$m_1$ , МэВ	$m_2$ , МэВ	$\Gamma$ , МэВ	$B_m, \%$	$d$	$B_L, \%$	$T_{CPU}$ сек.
BUREC	957.61	967.75	10.14	11.6 $\pm 0.7$	7.47	0.26 $\pm 0.10$	28
AllFree	957.43	967.80	10.37	11.4	7.76	0.22	870
AllFree (Istr=2)	957.43	967.82	10.39	11.4	7.75	0.22	6129
BUROTAT	957.54	967.74	10.20	11.7	7.53	0.26	1871
BUROTAT (Istr=2, Ncal=2000)	957.48	968.60	11.12	12.1	8.74	0.26	188
KINEMI	941.19	990.62	49.43	19.4	27.46	1.70	5
KINEMI (Exact $E_{\pm}$ <sup>a)</sup> )	956.10	960.18	4.08	2.1 $\pm 0.3$	45.59	0.04 $\pm 0.04$	5
DONLP2	957.86	970.77	12.91	14.5	9.59	0.30	665

<sup>a)</sup> В качестве измеренных значений энергии заряженных пионов взяты их точные значения из моделирования, и приписана точность измерения 1 МэВ.

несколько снизит эффективность отделения событий эффекта от фона. Однако, если разделение и так удовлетворительное, то на это можно решиться. Также использование KINEM1 может быть обусловлено серьезным дефицитом вычислительной мощности.

Варианты реконструкции, которые в таблице обозначены, как BUREC, AllFree и DONLP2, совпадают как по постановке задачи, так и по ожидаемым результатам. То, что у программы DONLP2 результаты получились несколько хуже, очевидно, объясняется тем, что в большей части случаев минимум функции не был достигнут. Возможно, работу программы можно улучшить, настроив управляющие переменные более оптимально, не так, как они были установлены авторами программы. Это касается и времени работы. Сейчас время работы программы DONLP2 сравнимо с вариантом AllFree. Варианты BUREC и AllFree дают совпадающие по качеству результаты, но время счета различается в 30 раз в пользу программы BUREC. В каких-то случаях различием во времени счета можно было бы пренебречь, но тогда надо иметь в виду, что вариант AllFree требует значительных усилий по программированию для каждого нового процесса, в то время как программа BUREC готова к употреблению.

Вариант с использованием программы BUROTAT стоит здесь особняком, потому что минимизируется совсем другая функция правдоподобия, для данного случая просто неправильная. По условиям нахождения аналитического решения в поиске минимума по углам поворота события, как целого, необходимо иметь точность измерения углов  $\varphi$  и  $\theta$  одинаковую, и для выполнения этого условия мы, фактически, пренебрегли хорошей точностью (существенно ухудшили) измерения угла  $\varphi$  для заряженных частиц. К тому же в этом варианте, как и в AllFree, необходимы существенные усилия по программированию.

Несмотря на некоторые различия в результатах, в среднем ширина пика по восстановленной массе  $\eta'$ -мезона близка к 10 МэВ. По сравнению с этим неожиданностью оказалась малая ширина (8 МэВ) пика по массе отдачи самого мягкого фотона (стр.9). В данном процессе выбор фотона отдачи, как самого мягкого фо-

тона, довольно однозначен, однако, посмотрим, каковы характеристики пика по массе отдачи фотона, который признан партнером  $\eta'$ -мезона по результатам кинематической реконструкции.  $\Gamma = 968.19 - 959.60 = 8.59$  МэВ и  $B_m = 236/2296 = (10.3 \pm 0.7)\%$ . И этот результат оказался неожиданностью — выбор фотона отдачи в результате кинематической реконструкции приводит к худшим результатам, чем просто выбор самого мягкого фотона. Если суммарная энергия пучков равна  $W = 1020$  МэВ, то фотон отдачи должен иметь энергию

$$E_{rec} = \frac{W}{2} - \frac{m_{\eta'}^2}{2W} = 510 - \frac{957.78^2}{2 \cdot 1020} = 60.3 \text{ МэВ.}$$

Фотоны от распада  $\eta$ -мезона имеют энергию больше

$$E_{decay} \geq \frac{\sqrt{P_\eta^2 + m_\eta^2} - P_\eta}{2} = \frac{m_\eta^2}{2 \cdot (\sqrt{P_\eta^2 + m_\eta^2} + P_\eta)} \geq 170.4 \text{ МэВ}/c^2.$$

Видно, что фотоны, если они зарегистрированы с объявленной точностью по энергии, не имеют шансов перепутаться, и принцип определения фотона отдачи  $\eta'$ -мезона, как фотона с наименьшей энергией, несомненно правильный. Если же по каким-то причинам энергии фотонов и/или углы частиц зарегистрированы с большими ошибками, то кинематическая реконструкция может не дать улучшения точности в определении параметров частиц.

## 9 Заключение

Сравнение результатов кинематической реконструкции на примере событий  $\eta'\gamma \rightarrow \eta\pi^+\pi^-\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma\gamma$  разными алгоритмами показало, что самым быстрым алгоритмом реконструкции является итерационный алгоритм в программе KINEM1. Однако, в этом алгоритме совсем не гарантирована сходимость к правильному решению (в первую очередь это касается выполнения кинематических связей), и особенно это проявляется на фоновых событиях,

что существенно снижает эффективность отделения событий эффекта от фона. Если быстродействие программы при обработке эксперимента является особенно важным параметром, то применение программы KINEM1 является вполне оправданным. Для использования этой программы пользователь должен написать подпрограмму вычисления функций, определяющих кинематические связи, и их производные по параметрам.

Следующим по быстродействию (в 6 раз медленнее) оказался алгоритм с обеспечением кинематических связей с помощью «штрафной» функции. Алгоритм реализован в программе BUREC. Выполнение кинематических связей в этом алгоритме достаточно точное и определяется весовым множителем, задаваемым пользователем. Эффективность отделения событий эффекта от фона в несколько раз выше (2–5 раз), чем с программой KINEM1. К достоинствам этой программы следует отнести отсутствие необходимости программировать — во входных параметрах передается информация о зарегистрированных частицах, точности измерения параметров и список масс промежуточных нестабильных частиц. Программа сама вычисляет функцию правдоподобия и ее производные по всем параметрам.

Недостатки определяются этой же простотой организации: функция правдоподобия вычисляется только в виде половины суммы квадратов отклонения измеренных параметров частицы от «теоретических» значений, и кинематические связи исчерпываются только законом сохранения энергии-импульса (причем импульс всей системы равен нулю — симметричные встречные пучки) и распадами промежуточных нестабильных частиц. Зафиксированы возможные варианты аппроксимации точности измерения углов и энергий в зависимости от энергии частицы. Также в этой программе не предусмотрен учет статистических корреляций между измеренными параметрами.

Следующими по скорости счета (в 25–30 раз медленнее, чем BUREC) оказались методы исключения кинематических связей за счет специальной параметризации события и метод с использованием программы условной минимизации DONLP2. Метод с исключе-

нием кинематических связей за счет специальной параметризации события — параметры частиц являются функцией этих внутренних параметров, причем кинематические связи выполняются точно (до пределов, определяемых ошибками округления).

В некоторых случаях минимизацию по углам поворота события, как целого, можно выполнить аналитически. Известно решение такой задачи для случая, когда точности измерения углов частиц в разных проекциях одинаковы (реализовано в программе BUROTAT). Хотя для заряженных частиц в детекторе СНД это условие не выполняется, здесь все же была выполнена реконструкция и этим методом, однако точности измерения углов в разных проекциях были заменены на их среднеквадратичное значение. Это изменило функцию правдоподобия, но результат разделения эффект/фон почти не изменился. Время счета программы реконструкции с использованием BUROTAT не очень определено: в некоторых случаях функция правдоподобия становится недостаточно гладкой из-за накапливающихся ошибок округления, и процедура минимизации работает аномально долго. Если использовать ограничение на количество вычислений функции, то можно добиться времени счета этой процедуры на промежуточном уровне между BUREC и DONLP2 без потери эффективности в отделении эффекта от фона.

Для детектора СНД адекватным процессом для использования программы BUROTAT был бы процесс с нейтральными частицами в конечном состоянии (точности измерения углов в калориметре в разных проекциях совпадают).

Вариант реконструкции с использованием программы условной минимизации DONLP2 имеет свои особенности. Кинематические связи здесь выполняются идеально, но до минимума функции программа не всегда доходит. За счет этого эффективность отделения событий эффекта от фона несколько хуже, чем с программой BUREC. В этом режиме пользователь также должен предоставить программу вычисления минимизируемой функции, функций, описывающих кинематические связи, и их производные по всем параметрам.

Тестовым процессом в данном анализе является процесс, где энергии заряженных частиц в эксперименте не измеряются, для которого кинематическая реконструкция является наиболее ценной. Для процессов, где все параметры частиц измеряются (или для магнитных детекторов) сравнительные характеристики разных алгоритмов реконструкции могут оказаться другими.

Автор благодарен В.П.Дружинину и Е.В.Пахтусовой за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант НШ-1335.2003.2.

# А Программа кинематической реконструкции BUREC

## А.1 Интерфейс программы BUREC

Вызов программы:

```
call BUREC(Npar,indEx,Pex,Sig,Pth,Vth,Mas,wei,Wtot,Nmas,Vmas,  
           IndLis,Ncal,Fmin)
```

где

**integer \*4 Npar** — количество частиц в модели события,

**integer \*4 indEx(Npar)** — список соответствия экспериментальных частиц теоретической модели:

$$\mathbf{Pth}(j, i) \iff \mathbf{Pex}(j, \mathbf{indEx}(i))$$

**real \*8 Pex(3,\*)** — массив описания экспериментально зарегистрированных параметров частиц:

$\mathbf{Pex}(1,i)$  — полная энергия частицы, МэВ,

$\mathbf{Pex}(2,i)$  — угол  $\theta^\circ$ ,

$\mathbf{Pex}(3,i)$  — угол  $\varphi^\circ$ .

Параметры, не измеренные в эксперименте, должны иметь допустимое значение.

**real \*8 Sig(4,3,Npar)** — точности измерения соответствующих параметров частиц (МэВ, градусы). Для  $i$ -ой частицы в модели события четыре коэффициента  $\mathbf{Sig}(1\div 4,1,i)$  определяют зависимость точности измерения энергии от предполагаемой энергии частицы, следующие четыре коэффициента — то же самое для точности измерения угла  $\theta$ , следующие четыре — для угла  $\varphi$ . Если обозначить эти коэффициенты через  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , то формула для вычисления дисперсии любой величины следующая:

$$\sigma^2 = a_1 + \frac{a_2}{E} + a_3 \cdot E + a_4 \cdot E^{3/2},$$

где  $E$  — полная «теоретическая» энергия частицы (МэВ). Коэффициенты должны быть неотрицательные. Если точность какого-либо параметра получается равна нулю, то здесь принято, что этот параметр не измеряется и в функцию правдоподобия не входит, например,  $\text{Sig}(1\div 4, 1, 5) = 0$  означает, что не измерена энергия пятой частицы.

**real \*8 Pth(3,Npar)** — выходной массив параметров частиц после реконструкции:

Pth(1,i) — полная энергия частицы, МэВ,

Pth(2,i) — угол  $\theta^\circ$ ,

Pth(3,i) — угол  $\varphi^\circ$ .

Перед обращением к программе здесь должно быть задано начальное приближение, например, значения параметров, измеренные в эксперименте. Если какой-либо параметр имеет запрещенное значение, то начальные значения параметров этой частицы берутся из Pex.

**real \*8 Vth(4,Npar)** — четырёх-импульсы частиц после реконструкции (три компоненты импульса и полная энергия, всё в МэВ).

**real \*8 Mas(Npar)** — значения масс частиц (МэВ).

**real \*8 wei** — весовой множитель для части функции правдоподобия, отвечающей за выполнение кинематических связей.

**real \*8 Wtot** — полная энергия события (предполагается, что эксперимент проводится на встречных симметричных пучках).

**integer \*4 Nmas** — количество связей, определяемых промежуточными нестабильными частицами.

**real \*8 Vmas(Nmas)** — значения масс промежуточных частиц.

**integer \*4 IndLis(\*)** — список частиц в модели события, являющихся продуктами распада соответствующих промежуточных частиц в следующем формате:

кол-во частиц, на которые распадается первая нестабильная частица,

индексы этих частиц в массиве **Pth(., i)**,

кол-во частиц, на которые распадается вторая нестабильная частица,

индексы этих частиц в массиве **Pth(., i)**,

...

**integer \*4 Ncal** — на входе в программу здесь должно быть задано максимально допустимое количество вычислений функции правдоподобия при минимизации, на выходе в *Ncal* будет возвращено реально использованное кол-во вычислений функции правдоподобия.

**real \*8 Fmin** — полученное минимальное значение функции правдоподобия.

Входные параметры: *Npar*, *indEx*, *Pex*, *Sig*, *Mas*, *wei*, *Wtot*, *Nmas*, *Vmas*, *IndLis*, *Ncal*.

Выходные параметры: *Pth*, *Vth*, *Ncal*, *Fmin*.

Для минимизации используется программа BUKMING [2], поэтому полный список программ и подпрограмм выглядит следующим образом:

BUREC	BUREC1	BUREC2	BUREC3	BUREC4
BUKMING	BUKMING0	BUKMING1	BUKMING2	BUKMING3
BUKMING4	BUKMING5	BUKMING6	BUKMING7	BUKMING8
BUKMING9				

Полный список общих блоков:

BRECOM1	BRECOM2	BRECOM3	BRECOM4	BRECOM5
BUKMIG00	BUKMIG01	BUKMIG02	BUKMIG03	BUKMIG04
BUKMIG05	BUKMIG06	BUKMIG07	BUKMIG08	

Описание собственных общих блоков программы BUREC (все они для служебного пользования — перед обращением к BUREC ничего в них определять не надо):

**/BREC0M1/**  $N_{partic}, N_{constr}, W_t, W, P_{momEx}(5, N_{partic})$   
integer \*4  $N_{partic}$  — число частиц,  
integer \*4  $N_{constr}$  — кол-во связей по известным массам промежуточных частиц,  
real \*8  $W_t$  — полная энергия системы, МэВ,  
real \*8  $W$  — вес в «штрафной» функции (то же самое, что  $w_{ei}$ , с тем отличием, что если  $w_{ei} \leq 0$ , то  $W$  полагается равным 100),  
real \*8  $P_{momEx}$  — характеристики частиц:  
 $P_{momEx}(1-3, i)$  — компоненты измеренного экспериментально импульса, МэВ,  
 $P_{momEx}(4, i)$  — экспериментальная энергия, МэВ,  
 $P_{momEx}(5, i)$  — предполагаемая масса частицы, МэВ.

**/BREC0M2/**  $P_{momTh}(4, N_{partic})$   
real \*8  $P_{momTh}$  — три компоненты импульса и полная энергия частицы (МэВ).

**/BREC0M3/**  $V_{mlis}(N_{constr})$  — список масс промежуточных частиц.  
real \*8  $V_{mlis}$

**/BREC0M4/**  $indMlis(.)$  — список номеров частиц, являющихся продуктами распада промежуточных частиц (копия  $IndLis$ ).

**/BREC0M5/**  $Sigmas(4, 3, N_{par})$   
real \*8  $Sigmas$  — коэффициенты аппроксимации дисперсии каждого из трёх измеряемых параметров каждой частицы.

Интерфейсы подпрограмм:

**call BUREC1( $N_p, F, x$ )** — вычисление значения минимизируемой функции.  
integer \*4  $N_p$  — количество параметров функции,  
real \*8  $F, x(N_p)$  — значение функции  $F$  в точке  $x$ .

**call BUREC2(Np,x,Grad,iRet)** — вычисление градиента.  
integer \*4 Np,iRet — кол-во параметров Np и код возврата iRet  
(iRet=0 — градиент вычислен, iRet=1 — градиент не вычислен по какой-то причине).

**call BUREC3(Np,F,x)** — вычисление функции для предварительной минимизации энергетической части функции.  
integer \*4 Np — количество параметров функции (равно числу частиц),  
real \*8 F,x(Np) — значение функции F в точке x.

**call BUREC4(Np,x,Grad,iRet)** — вычисление градиента Grad(Np) в точке x для предварительной минимизации.

## A.2 Предварительная минимизация

Учитывая, что вероятность попадания в локальный минимум может быть спровоцирована, фактически, произвольным назначением первоначальной энергии заряженных частиц, проведём предварительную минимизацию с очень грубой точностью  $\Delta F_0 = 10^5$  и ограничением на число вызовов программы Ncall=100 · N<sub>p</sub><sup>2</sup>. Свободными переменными будут абстрактные параметры  $\xi_i$ , каждый из которых связан с полной энергией *i*-ой частицы:

$$E_i = m_i + 1 + \frac{W}{2} \cdot (1 + \sin \xi_i).$$

Минимизируемая функция при этом состоит из энергетической части функции правдоподобия и меры отклонения от законов сохранения и кинематических связей. Новых общих областей при этом не добавляется, а подпрограммы BUREC3 и BUREC4 вычисляют значение функции и градиента, соответственно.

Хотя число вызовов здесь сильно ограничено, всё же оно учитывается в общей статистике дальше.

### А.3 Минимизируемая функция

Независимыми параметрами являются все компоненты импульса всех частиц. Минимизируемая функция равна сумме функции правдоподобия  $L$  и произведения веса  $q$  на меру нарушения связей  $B$ .

Функция правдоподобия равна половине суммы квадратов отклонений измеренных параметров от их значений в модели события, нормированных на точность измерения:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sum_{\sigma_{E_i} \neq 0} \left( \frac{E_i^{(th)} - E_i^{(ex)}}{\sigma_{E_i}} \right)^2 + \sum_{\sigma_{\theta_i} \neq 0} \alpha_i \cdot \left( \frac{\Delta\theta_i}{\sigma_{\theta_i}} \right)^2 + \sum_{\sigma_{\varphi_i} \neq 0} \alpha_i \cdot \beta_i \cdot \left( \frac{\Delta\varphi_i}{\sigma_{\varphi_i}} \right)^2 \right] \quad (\text{A.1})$$

Здесь введены нормализующие факторы  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , позволяющие избавиться от особых точек:

$$\alpha_i = \frac{\left( P_i^{(th)} \right)^2}{\left( P_i^{(th)} \right)^2 + 1}, \quad \beta_i = \frac{\left( P_{ix}^{(th)} \right)^2 + \left( P_{iy}^{(th)} \right)^2}{\left( P_i^{(th)} \right)^2 + 1}.$$

Угловые отклонения выражаются через импульсы следующим образом:

$$\Delta\theta_i = \text{atan2} \left( \sqrt{\left( P_{ix}^{(th)} \right)^2 + \left( P_{iy}^{(th)} \right)^2} \cdot P_{iz}^{(ex)} - \sqrt{\left( P_{ix}^{(ex)} \right)^2 + \left( P_{iy}^{(ex)} \right)^2} \cdot P_{iz}^{(th)}, \right. \\ \left. \sqrt{\left( P_{ix}^{(th)} \right)^2 + \left( P_{iy}^{(th)} \right)^2} \cdot \sqrt{\left( P_{ix}^{(ex)} \right)^2 + \left( P_{iy}^{(ex)} \right)^2} + P_{iz}^{(ex)} \cdot P_{iz}^{(th)} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta\varphi_i = \text{atan2} \left( P_{ix}^{(th)} \cdot P_{iy}^{(ex)} - P_{iy}^{(th)} \cdot P_{ix}^{(ex)}, P_{ix}^{(th)} \cdot P_{ix}^{(ex)} + P_{iy}^{(th)} \cdot P_{iy}^{(ex)} \right). \quad (\text{A.3})$$

Для аналитического выражения градиента через импульсы частиц надо вычислять частные производные всех использованных

величин по компонентам импульса. Наиболее просто выражаются частные производные от энергии частицы по компонентам её импульса:

$$\frac{\partial E_i^{(th)}}{\partial P_{ix}^{(th)}} = \frac{P_{ix}^{(th)}}{E_i^{(th)}}, \quad \frac{\partial E_i^{(th)}}{\partial P_{iy}^{(th)}} = \frac{P_{iy}^{(th)}}{E_i^{(th)}}, \quad \frac{\partial E_i^{(th)}}{\partial P_{iz}^{(th)}} = \frac{P_{iz}^{(th)}}{E_i^{(th)}}. \quad (\text{A.4})$$

Немного сложнее выглядят производные от  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ :

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial P_{ix}^{(th)}} = \frac{2P_{ix}^{(th)}}{\left[ \left( P_i^{(th)} \right)^2 + 1 \right]^2}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial P_{iy}^{(th)}} = \frac{2P_{iy}^{(th)}}{\left[ \left( P_i^{(th)} \right)^2 + 1 \right]^2},$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial P_{iz}^{(th)}} = \frac{2P_{iz}^{(th)}}{\left[ \left( P_i^{(th)} \right)^2 + 1 \right]^2}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial P_{ix}^{(th)}} = \frac{2 \left[ \left( P_{iz}^{(th)} \right)^2 + 1 \right] \cdot P_{ix}^{(th)}}{\left[ \left( P_i^{(th)} \right)^2 + 1 \right]^2}, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial P_{iy}^{(th)}} = \frac{2 \left[ \left( P_{iz}^{(th)} \right)^2 + 1 \right] \cdot P_{iy}^{(th)}}{\left[ \left( P_i^{(th)} \right)^2 + 1 \right]^2},$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial P_{iz}^{(th)}} = - \frac{2 \left[ \left( P_{ix}^{(th)} \right)^2 + \left( P_{iy}^{(th)} \right)^2 \right] \cdot P_{iz}^{(th)}}{\left[ \left( P_i^{(th)} \right)^2 + 1 \right]^2} \quad (\text{A.6})$$

Производные от  $\Delta\theta_i$ :

$$\frac{\partial \Delta\theta_i}{\partial P_{ix}^{(th)}} = \frac{P_{ix}^{(th)} \cdot P_{iz}^{(th)}}{\sqrt{\left( P_{ix}^{(th)} \right)^2 + \left( P_{iy}^{(th)} \right)^2} \cdot \left( P_i^{(th)} \right)^2},$$

$$\frac{\partial \Delta\theta_i}{\partial P_{iy}^{(th)}} = \frac{P_{iy}^{(th)} \cdot P_{iz}^{(th)}}{\sqrt{\left( P_{ix}^{(th)} \right)^2 + \left( P_{iy}^{(th)} \right)^2} \cdot \left( P_i^{(th)} \right)^2},$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_i}{\partial P_{iz}^{(th)}} = - \frac{\sqrt{\left(P_{ix}^{(th)}\right)^2 + \left(P_{iy}^{(th)}\right)^2}}{\left(P_i^{(th)}\right)^2} \quad (\text{A.7})$$

Производные от  $\Delta \varphi_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \varphi_i}{\partial P_{ix}^{(th)}} &= \frac{P_{iy}^{(th)}}{\left(P_{ix}^{(th)}\right)^2 + \left(P_{iy}^{(th)}\right)^2}, & \frac{\partial \Delta \varphi_i}{\partial P_{iy}^{(th)}} &= - \frac{P_{ix}^{(th)}}{\left(P_{ix}^{(th)}\right)^2 + \left(P_{iy}^{(th)}\right)^2}, \\ \frac{\partial \Delta \varphi_i}{\partial P_{iz}^{(th)}} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Перейдём теперь к функции  $B$ , отражающей степень нарушения связей:

$$\begin{aligned} B &= \left[ \left( \sum_i E_i^{(th)} \right) - W \right]^2 + \left[ \sum_i P_{ix}^{(th)} \right]^2 + \left[ \sum_i P_{iy}^{(th)} \right]^2 + \left[ \sum_i P_{iz}^{(th)} \right]^2 + \\ &+ \sum_k \left[ \sqrt{\left( \sum_{j=1}^{n_k} E_{l_{jk}}^{(th)} \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^{n_k} P_{l_{jk}x}^{(th)} \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^{n_k} P_{l_{jk}y}^{(th)} \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^{n_k} P_{l_{jk}z}^{(th)} \right)^2} - M_k \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

С вычислением производных от этой части функции не должно возникнуть сложностей.

## Список литературы

- [1] *А.Д. Бужкин*. О кинематической реконструкции событий. Препринт ИЯФ 2003-27, Новосибирск, 2003.
- [2] *А.Д. Бужкин*. Программа численной минимизации функции многих параметров с использованием аналитически вычисляемого градиента. Препринт ИЯФ 2005-43, Новосибирск, 2005.
- [3] *F. James, M. Roos*. 'MINUIT' A system for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations, Computer Physics Communications 10 (1975) 343.  
*F. James*. MINUIT. Function Minimization and Error Analysis. Reference manual. CERN Program Library Long Writup D506, March 1994.
- [4] *M.N. Achasov, V.M. Aulchenko, S.E. Baru et al*. Spherical Neutral Detector for VEPP-2M Collider. Nucl. Instr. and Meth. A449 (2000) 125-139. e-Print: hep-ex/9909015.
- [5] *А.Д. Бужкин*. Программа численной минимизации функции многих параметров. Препринт ИЯФ 2004-78, Новосибирск, 2004.
- [6] *J.P. Berge et al*. Rev. Sci. Instr. 32 (1961) 538.
- [7] *P. Spellucci*. An SQP method for general nonlinear programs using only equality constrained subproblems. Mathematical Programming 82 (1998), p.413-448.  
*P. Spellucci*. A new technique for inconsistent problems in the SQP method. Math. Meth. of Oper. Res. 47 (1998) 355-400 (published by Physica Verlag, Heidelberg, Germany).

*А.Д. Букин*

**О кинематической реконструкции событий**

*A.D. Bukin*

**On kinematic reconstruction of events**

ИЯФ 2005-51

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 7.12.2005 г.

---

Сдано в набор 8.12.2005 г.

Подписано в печать 9.12.2005 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.7 печ.л., 2.2 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 51

---

Обработано на IBM PC и отпечатано на  
роталпринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

*Новосибирск, 630090, пр.академика Лаврентьева, 11.*