

Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им.Г.И. Будкера

В.В. Вечеславов

ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ
СЕПАРАТРИСЫ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА
(новые результаты)

ИЯФ 98-90

НОВОСИБИРСК
1998

**Прецизионное измерение расщепления сепаратрисы
нелинейного резонанса (новые результаты)**

В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера,
630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

Продолжен начатый в [1] анализ эффекта расщепления сепаратрисы нелинейного резонанса для модели стандартного отображения, основанный на результатах *прямых* измерений угла расщепления $\alpha(K)$, где K – параметр системы. Измерения выполнены в прежнем широком диапазоне $0.1 \lesssim \alpha \lesssim 10^{-208}$ ($1 \geq K \geq 0.0004$), но со значительно более высокими относительной (лучше 10^{-50}) и средней ($\sim 10^{-55}$) точностями. Это позволило существенно уточнить обнаруженные ранее в [1] эффекты и построить качественно новые эмпирические зависимости, обеспечивающие надежную экстраполяцию данных найденных для угла и инварианта в промежуточной асимптотике $K \lesssim 10^{-2}$ за пределы исследованной области. Полученные результаты могут быть полезны для дальнейшего развития теории расщепления сепаратрисы и образования хаотического слоя нелинейного резонанса.

**Precise measurement of separatrix splitting
in a nonlinear resonance (new results)**

V.V. Vecheslavov

Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, Russia

Abstract

Started in [1] analysis of the separatrix splitting of a nonlinear resonance for the standard map model based on the *direct* measurement of the splitting angle $\alpha(K)$, where K is a system's parameter, was continued. Measurements has been carried out in the same wide range $0.1 \lesssim \alpha \lesssim 10^{-208}$ ($1 \geq K \geq 0.0004$), but with significantly higher a relative accuracy (better than 10^{-50}) and an average accuracy ($\sim 10^{-55}$). This allowed to refine essentially of some early obtained in [1] results and to construct the qualitatively new empirical relations. The relations give the possibility for accurate extrapolation of the data, found for the angle and the invariant in the intermediate asymptotics $K \lesssim 10^{-2}$, beyond the investigated region. The results may be useful for further development of the separatrix splitting and chaotic layer formation of the nonlinear resonance theory.

PACS number 05.45.+b

©Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия

1 Состояние проблемы

Взаимодействие нелинейных резонансов и возникающие как следствие хаотические режимы динамических гамильтоновых систем относятся к числу наиболее важных и сложных проблем современной теории нелинейных колебаний [2–5]. Обычно начальные состояния системы выбираются вблизи одного из резонансов, который считается основным или ведущим, а остальные рассматриваются как возмущения. Во многих случаях задача сводится к изучению динамической модели, которую можно интерпретировать как маятник (основной резонанс), подверженный действию периодических или квазипериодических сил. Именно в окрестности сепаратрисы основного резонанса под воздействием почти любого сколь угодно слабого возмущения и возникает хаос нелинейных колебаний [2–5,8,9].

Исследования в этой области сопровождаются, как правило, ширококомасштабными численными экспериментами, при проведении которых вместо дифференциальных уравнений в непрерывном времени гораздо эффективнее использовать их дискретные аналоги – отображения [1–5]. Одной из простых но чрезвычайно содержательных и весьма популярных моделей такого рода является так называемое стандартное отображение Чирикова [2]:

$$\bar{p} = p + K \cdot \sin x, \quad \bar{x} = x + \bar{p}. \quad (1.1)$$

Здесь p, x – переменные действие – угол, а $K \ll 1$ – единственный параметр модели, характеризующий эффект возмущения на периоде отображения, который принят равным единице.

Хаотической динамике стандартного отображения посвящено очень много работ, в том числе и настоящая работа. Представляется уместным

перед обсуждением полученных здесь результатов кратко напомнить основные определения и состояние проблемы.

В непрерывном времени отображение (1.1) описывается гамильтонианом:

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(x - m\Omega t), \quad (1.2)$$

где основная частота внешнего возмущения $\Omega = 2\pi$. Видно, что (1.2) представляет собой бесконечную систему сильно нелинейных резонансов ($\partial^2 H / \partial p^2 = 1$), движение вблизи каждого из которых идентично с точностью до сдвига по действию: $p - p_m \rightarrow p$, где $p_m = m\Omega$ – резонансное значение действия (отсюда второе название стандартного отображения – однородная модель [2]). Частота малых собственных колебаний в любом резонансе равна $\omega_0 = \sqrt{K} \ll 1$. Хотя амплитуды всех резонансов одинаковы (K), все они (кроме основного, выделенного начальными условиями движения) представляют лишь очень слабое возмущение. Это объясняется большой частотой возмущения по сравнению с собственной частотой колебаний на выделенном резонансе:

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \gg 1. \quad (1.3)$$

Взаимодействие резонансов при этом является адиабатическим, а его эффект – экспоненциально малым по большому параметру адиабатичности λ .

Основной резонанс системы (1.2) (пусть ему, как и в [1], отвечает индекс $m = 0$), можно описать гамильтонианом ”маятника”:

$$H_1(p, x) = \frac{p^2}{2} + K \cdot \cos x. \quad (1.4)$$

Напомним, что в случае сильной нелинейности такая простая форма резонансного гамильтониана оказывается универсальной [2].

Наиболее важная для обсуждаемой проблемы характеристика нелинейного резонанса (1.4) – наличие *сепаратрисы*

$$p_s = \pm 2\omega_0 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right); \quad H_1^{(s)} = \omega_0^2 = K, \quad (1.5)$$

особой траектории, которая отделяет колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса). На самом деле (1.5) описывает две

пространственно совпадающие ветви при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$, соответственно. Каждая ветвь представляет собой асимптотическую траекторию с бесконечным периодом движения, которая выходит из положения неустойчивого равновесия (седло) и приходит в него же. Почти любое сколь угодно малое возмущение расщепляет сепаратрису на две пересекающиеся траектории, которые по-прежнему выходят из седла навстречу друг другу, но никогда в него не возвращаются (этот эффект был качественно описан Пуанкаре еще в прошлом столетии [6]). Обе ветви расщепленной сепаратрисы пересекаются, в частности, под углом α при $x = \pi$ (центральное пересечение) и некотором $p_s(\pi) \approx p_0 = 2\omega_0$ (см. (1.5)). Свободные концы расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины [6,7], которые заполняют, однако, ограниченную и узкую область вдоль невозмущенной сепаратрисы, образуя так называемый *хаотический слой* – зародыш и источник хаоса нелинейных колебаний [2–5,8,9]. Важнейшей для приложений характеристикой этого слоя является его энергетическая полуширина $w_s = H/K - 1$, которая, однако, может быть найдена лишь приближенно [2]. В этой связи важно отметить, что для отображения (1.1) угол центрального пересечения ветвей сепаратрисы α оказывается единственным строгим параметром хаоса, вычисление которого может быть выполнено сколь-угодно точно.

Значительный прогресс в изучении проблемы расщепления сепаратрисы стандартного отображения начался относительно недавно (1984 г.). Он связан с появлением серии математических работ [10–12], где величина угла α определялась достаточно точно из численного решения вспомогательного уравнения, в котором был исключен экспоненциальный фактор. Заметим, что работы физиков этого и более раннего периодов [2–5,8,9] в основном были направлены на исследование эффекта нарушения адиабатичности и получение приближенных оценок размеров хаотического слоя.

Для асимптотического ($\lambda = 2\pi/\sqrt{K} \rightarrow \infty$) значения угла расщепления $\alpha_\infty = \alpha(\infty)$ в [10] получено выражение

$$\alpha_\infty = \pi \mathcal{L} \frac{e^{-\pi\lambda/2}}{K}, \quad (1.6)$$

где фигурирует одна из важных числовых характеристик стандартного отображения \mathcal{L} (в [1] ее предложено называть постоянной Лазуткина).

Необходимо отметить, что в развитой в [2] теории хаотического слоя фигурирует поправочный множитель $f \sim 1$, физический смысл которого – учет эффекта конечной амплитуды возмущающих резонансов; для

стандартного отображения там же численно была получена первая (заниженная) оценка $f \approx 2.15$. Появившаяся позже постоянная Лазуткина связана с этим фактором простым соотношением $\mathcal{L} = 16\pi^3 f$ (см. в [1] формулу (1.16) и комментарии к ней), поэтому всякое уточнение постоянной \mathcal{L} есть одновременное уточнение фактора f в теории хаотического слоя. Наиболее точное из опубликованных на сегодняшний день значений этой постоянной, насколько нам известно, равно (формула (4.14) в [1]):

$$\mathcal{L} = 1118.82770594090077841514639323566 \pm 3 \times 10^{-27}. \quad (1.7)$$

В [10] приведена также оценка поправки к α_∞ в области *промежуточной асимптотики* $0 < K \ll 1$:

$$c_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha_\infty} - 1, \quad (1.8)$$

которая позже подробно изучалась в [1] и будет рассмотрена в настоящей работе (см. разделы 2,3).

Следующий важный шаг в исследовании проблемы был сделан в [11], где зависимость (1.8) представлена уже в виде асимптотического ряда по подходящим степеням малого параметра. Величины первых четырех коэффициентов такого ряда определены там с помощью численного решения вспомогательных уравнений.

В этой теории вводится важная замена переменных задачи: $(K, \alpha) \rightarrow (h, \sigma)$, где

$$h(K) = \ln \left(1 + \frac{K}{2} + \sqrt{K + \frac{K^2}{4}} \right) \approx \sqrt{K} \quad (1.9)$$

положительный характеристический показатель касательного (линеаризованного) отображения (1.1) в неустойчивой неподвижной точке $x = p = 0$,

$$\sigma(h) = \nu(h) \cdot \sin \alpha \quad (1.10)$$

симплектический инвариант, а $\nu(h)$ – некоторая норма касательных векторов.

В [11] было найдено приближенное решение, которое также может быть записано как поправка к инварианту (по аналогии с поправкой (1.8) к углу):

$$c_\sigma(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma_\infty} - 1, \quad (1.11)$$

где $\sigma_\infty = 4\alpha_\infty$ (см. (1.6)).

Важно подчеркнуть, что именно эти ”поправки” наиболее полно описывают промежуточную асимптотику и их изучение позволяет выяснить ”тонкую структуру” расщепления сепаратрисы и образования хаотического слоя (см. ниже).

Совсем недавно в работе [1] был реализован принципиально иной подход к проблеме, опирающийся на результаты *прямых* измерений угла расщепления сепаратрисы стандартного отображения (1.1) в очень широком диапазоне параметра $1 \geq K \geq 0.0004$ ($1 \gtrsim h \gtrsim 0.02$); $0.1 \gtrsim \alpha \gtrsim 10^{-208}$ с относительной точностью лучше 10^{-25} и средней точностью $\sim 10^{-30}$. Для этого была разработана специальная методика с использованием пакета компьютерных программ [13], реализующего все возможности стандартного языка ФОРТРАН с произвольной точностью счета (число значащих цифр мантииссы в десятичном представлении вещественного числа доходило в [1] до 300). Для сравнения с теорией [11] вычислялся также инвариант σ (1.10), причем функция $\nu(h)$ (ее аналитическое выражение неизвестно) определялась численно по специальной программе [16].

В соответствии с теорией [11], поправки (1.8) для угла и (1.11) для инварианта отыскивались в виде конечного ряда по четным степеням h

$$\tilde{c}(h) = a(0) + \sum_{m=1}^M a(m)h^{2m}. \quad (1.12)$$

Чтобы облегчить непосредственное сравнение экспериментальных данных с результатами работы [11] для инварианта, наряду с (1.12), использовалось также представление в форме ряда Тэйлора:

$$\frac{\sigma}{\sigma_\infty} \mathcal{L} = \mathcal{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b(m)h^{2m}, \quad b(m) = a(m) \cdot m! \cdot \mathcal{L}. \quad (1.13)$$

При отыскании коэффициентов разложений (1.12) и построении эмпирических зависимостей широко использовался метод наименьших квадратов (см., например, [14]); особо важное значение придавалось контролю точности вычислений и надежной оценке ошибок полученных результатов.

Работа [1] подтвердила развитую в [11] теорию как качественно (ряды вида (1.12)), так и количественно (см. таблицу 2 в [1]). Одним из основных результатов этой работы можно считать построение простых эмпирических зависимостей (4.2) величин коэффициентов разложений (1.12) от номера m . С ними связывалась возможность экстраполировать ряды (1.12) за пределы области прямых измерений. Но там же отмечалась

ненадежность такой экстраполяции, поскольку старшие коэффициенты $m = 8, 9, 10$ и для угла и для инварианта явно уклонялись от предполагаемых зависимостей (см. в [1] рис.3 и комментарии к нему). Эти отклонения были названы "аномалиями, вопрос о природе которых остается открытым и требует дальнейших исследований". Забегая вперед, поясним ставшую позже понятной причину возникновения этих "аномалий": использованная в [1] относительная точность измерений угла 10^{-25} оказалась (как это ни парадоксально) *недостаточной*, что и не позволило вычислить необходимого для надежной экстраполяции числа коэффициентов (см. раздел 2).

Любая даже приближенная экстраполяция облегчает не только выявление, но и интерпретацию характерных особенностей промежуточной асимптотики, что может существенно помочь продвижению теории расщепления сепаратрисы и образования хаотического слоя нелинейного резонанса. По этой причине было признано необходимым продолжить начатый в [1] анализ эффекта расщепления сепаратрисы нелинейного резонанса для модели стандартного отображения с использованием прямых измерений угла расщепления.

В настоящей работе исследования выполнены в прежнем широком диапазоне $0.1 \gtrsim \alpha \gtrsim 10^{-208}$ ($1 \geq K \geq 0.0004$), но со значительно более высокими относительной (лучше 10^{-50}) и средней ($\sim 10^{-55}$) точностями. Это, вместе с использованием весьма точного значения постоянной Лазуткина (1.7), позволило не только существенно уточнить обнаруженные ранее в [1] эффекты (раздел 2), но и получить качественно новые эмпирические зависимости, обеспечивающие надежную экстраполяцию рядов вида (1.12) для угла и инварианта за пределы исследованной области (раздел 3).

2 Результаты измерений

При измерениях угла использовалась подробно описанная в [1] схема: отыскивалась центральная точка пересечения ветвей сепаратрисы $x_s = \pi$, $p_s(\pi)$, затем справа и слева от нее на обеих ветвях вычислялось по две точки. Это позволяло аппроксимировать ветви полиномами второй и четвертой степеней и вычислить два значения угла их пересечения α_2 и α_4 , соответственно. В общем случае какое-то количество \mathcal{N}_α первых значащих цифр (с учетом округлений) в выражениях α_2 и α_4 совпадают, а далее эти значения расходятся. Мы добивались неравенства $\mathcal{N}_\alpha \geq 50$, что и давало относительную точность в определении угла не хуже

10^{-50} . На самом деле относительная точность в области промежуточной асимптотики оказалась несколько выше и составила в среднем $\sim 10^{-55}$ (см. рис.1).

По описанной схеме была найдена зависимость $\alpha(K)$ для 104 значений параметра возмущения в интервале $1 \geq K \geq 0.0004$ и это явилось исходным эмпирическим материалом для всего дальнейшего анализа. Величина угла записывалась с сохранением 100 значащих цифр, что обеспечивало точность обработки результатов намного выше точности экспериментальных данных (см. ниже).

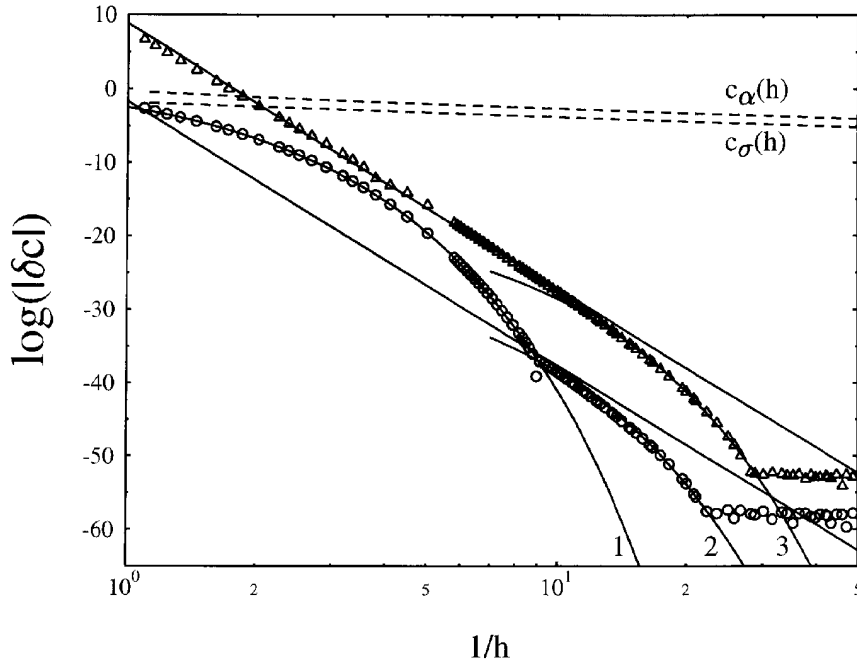


Рис. 1: Результаты интерполяции эмпирических данных по углу расщепления сепаратрисы (треугольники) и инварианту (кружки): $\delta c(h)$ – уклонение поправки от промежуточной асимптотики (1.12), логарифм десятичный. Наклонные прямые представляют первое слагаемое остаточного члена (3.5); кривые 1,2,3 – экспоненциальные уклонения (см. раздел 3). Верхние пунктирные линии – полные поправки $c(h)$ для угла (1.8) и инварианта (1.11), соответственно.

В [1] отмечалась основная трудность интерполяции эмпирических данных с помощью ряда вида (1.12), состоящая в том, что различные члены этого ряда отличаются по величине на много порядков и матрица нормальной системы уравнений метода наименьших квадратов для отыскания коэффициентов $a(m)$ в (1.12) оказывалась, как правило, вырожденной в компьютерном представлении. Потребовалось не только проводить окончательную обработку с точностью $\sim 10^{-100}$, но и вводить изменение масштаба переменных задачи: $(h, \tilde{c}) \rightarrow (H = Sh, C = S\tilde{c})$, где масштабный фактор $S \gg 1$ приходилось подбирать. Однако в [1] мы имели дело с десятью коэффициентами (1.12), а в настоящей работе эта цифра возросла до семнадцати (см. таблицы 1,2) и простое изменение масштаба перестало помогать. Проблему удалось решить за счет обращения прямой матрицы с предварительным разбиением ее на блоки (см., например, [15]), причем размеры блоков также приходилось подбирать. Напомним, что в методе наименьших квадратов диагональные элементы обратной матрицы определяют веса, по которым начисляются ошибки неизвестных и потому исключить операцию обращения нельзя [14].

Как отмечено в [1], практически доступное число членов ряда M ограничено сверху ошибками вычислений главным образом из-за "шума", вызванного *конечной точностью эмпирических данных* $\alpha(h)$. Резкое повышение этой точности (с 10^{-25} до 10^{-50}) и, как следствие, резкое снижение уровня этого "шума", позволило повысить число найденных в настоящей работе коэффициентов до $M = 17$ (против 10 в [1]). При дальнейшем увеличении M мы не только не получаем новые коэффициенты, но и теряем предыдущие (см. рис.1 в [1]).

Точность эмпирической зависимости (1.12) характеризуется средне-квадратичной ошибкой (СКО):

$$\Delta c = \langle (c(h) - \tilde{c}(h))^2 \rangle^{1/2}, \quad (2.1)$$

где скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по интервалу интерполяции. Ясно, что в качестве последнего не может быть взят весь эмпирический интервал, поскольку степенная зависимость (1.12) в теории [11] характеризует лишь промежуточную асимптотику. Именно поэтому *уклонение*

$$\delta c(h) = c(h) - \tilde{c}(h) \quad (2.2)$$

содержит наиболее ценную и интересную информацию о дополнительных неадиабатических эффектах, не вошедших в теорию. Таким образом, как и в [1], необходимо было в заданном массиве эмпирических данных выбрать также оптимальный интервал интерполяции $(h_1 - h_2)$, где

$h_1 = 0.02$ – минимальное значение в исходных данных. Основным критерием при этом служила наименьшая величина Δc (2.1), а также точность найденных коэффициентов ряда (1.12) (см. таблицы 1,2).

Таблица 1. Коэффициенты $a_\alpha(m)$ ряда (1.12) для угла

m	$a_\alpha(m)$	Δ	$\langle \delta \rangle$
1	-0.233376428864381610627639715 651844925562242	0.397×10^{-41}	0.384×10^{-42}
2	-0.290818155124688860367364364 03046408113	0.370×10^{-36}	0.334×10^{-37}
3	-0.014824955534894051786788200 5854733	0.212×10^{-32}	0.177×10^{-33}
4	0.043182190148644921649679410 03978	0.836×10^{-29}	0.647×10^{-30}
5	-0.041519239478427464679586098	0.241×10^{-25}	0.171×10^{-26}
6	-0.131373309408107983341741	0.525×10^{-22}	0.342×10^{-23}
7	-0.319169849155133631687	0.885×10^{-19}	0.525×10^{-20}
8	-1.060531457633276423	0.117×10^{-16}	0.630×10^{-17}
9	-4.38156420631767	0.122×10^{-12}	0.593×10^{-14}
10	-21.62868101831	0.101×10^{-09}	0.440×10^{-11}
11	-126.24207274	0.662×10^{-07}	0.255×10^{-08}
12	-861.834118	0.337×10^{-04}	0.115×10^{-05}
13	-6810.600	0.131×10^{-01}	0.395×10^{-03}
14	-61716.8	$0.380 \times 10^{+01}$	$0.100 \times 10^{+00}$
15	$-6.3755 \times 10^{+05}$	$0.771 \times 10^{+03}$	$0.178 \times 10^{+02}$
16	$-7.15 \times 10^{+06}$	$0.981 \times 10^{+05}$	$0.199 \times 10^{+04}$
17	$-1.3 \times 10^{+08}$	$0.591 \times 10^{+07}$	$0.107 \times 10^{+06}$

Качество интерполяции падает не только при увеличении h_2 , как отмечено выше, но и при его уменьшении из-за малого вклада высоких степеней h при малом h , а также из-за уменьшения числа N_p участвующих в интерполяции точек. Основные результаты получены при стандартной интерполяции путем минимизации дисперсии $(\Delta c)^2$ (см. (2.1)) и представлены в таблицах 1,2 и на рис.1.

Таблица 2. Коэффициенты $b(m)$ ряда (1.13) для инварианта

m	$b_\sigma(m)$	Δ	$\langle \delta \rangle$
1	18.59891195820929735881714904 1692488164817654712988	0.113×10^{-44}	0.142×10^{-45}
2	-4.34114127056816253677582933 04979013479225149	0.158×10^{-40}	0.183×10^{-41}
3	-4.18326375909189413723327235 65031001721936	0.199×10^{-36}	0.212×10^{-37}
4	-4.93413959073087940856342052 930157	0.226×10^{-32}	0.219×10^{-33}
5	-10.6454864428182042353564212 15457	0.230×10^{-28}	0.203×10^{-29}
6	-35.8600816693504759710595553	0.209×10^{-24}	0.166×10^{-25}
7	-177.6036528919052715929381	0.169×10^{-20}	0.121×10^{-21}
8	-1239.435334988728110840	0.121×10^{-16}	0.769×10^{-18}
9	-11806.115613907542005	0.757×10^{-13}	0.427×10^{-14}
10	-149425.48996254799	0.412×10^{-09}	0.204×10^{-10}
11	-2454832.5606990	0.193×10^{-05}	0.835×10^{-07}
12	-51297631.6298	0.762×10^{-02}	0.286×10^{-03}
13	$-1.339922127 \times 10^{+09}$	$0.248 \times 10^{+02}$	$0.802 \times 10^{+00}$
14	$-4.3097121 \times 10^{+09}$	$0.647 \times 10^{+05}$	$0.178 \times 10^{+04}$
15	$-1.6850 \times 10^{+12}$	$0.126 \times 10^{+09}$	$0.295 \times 10^{+07}$
16	$-7.88 \times 10^{+13}$	$0.166 \times 10^{+12}$	$0.331 \times 10^{+10}$
17	$-4.9 \times 10^{+15}$	$0.110 \times 10^{+15}$	$0.191 \times 10^{+13}$

В таблицах 1 и 2 Δ – СКО в группе, а $\langle \delta \rangle$ – средняя СКО индивидуальной интерполяции. Если число знаков коэффициента превышает размер колонки, то оставшиеся знаки записываются в ту же колонку на строку ниже.

Точность найденных коэффициентов, как и в [1], оценивалась двумя различными методами. Во-первых, вычислялась стандартная СКО интерполяции [14] (колонка 4 в таблицах), т.е. ожидаемая ошибка коэффициентов при случайной СКО исходных эмпирических данных. Для учета ошибок другой природы – систематических – значения коэффициентов определялись также как средние по нескольким интерполяциям с различным числом входных данных: $N_p = 20 - 28$ для угла и $N_p = 25 - 35$ для инварианта. Именно эти значения и приведены в таблицах (колонка

2). Относительно слабая зависимость средних от N_p служила основным критерием при выборе этих двух групп. В качестве ошибки принималась СКО значений коэффициентов в группе (колонка 3 в таблицах). Видно, что ошибка в группе является наибольшей (и потому определяющей) во всех случаях. Различие обеих СКО определенно указывает на существенные систематические ошибки. По-видимому, значения СКО в группе и определяют число надежных десятичных знаков коэффициентов.

3 Обсуждение результатов и выводы

Следуя предложенной в работе [1] схеме, рассмотрим прежде всего поведение самих коэффициентов разложений (1.12), исходя из данных таблиц 1,2.

Начнем с того обнаруженного в [1] факта, что отношение коэффициентов угла и инварианта прекрасно ложится на экспоненту (проходящая через квадраты прямая на рис.2):

$$a_\alpha/a_\sigma(m) = R e^{\gamma m}, \quad R = 0.7471 \pm 0.0539, \quad \gamma = 1.3579 \pm 0.0089. \quad (3.1)$$

С учетом этого и проведенного в [1] анализа интерполяционные зависимости можно описать следующими приближенными выражениями:

$$a_\sigma(m) \approx \frac{A_\sigma}{m^p} (1 + Q e^{qm}) \quad (3.2a)$$

для инварианта (проходящая через кружки кривая на рис.2) и

$$a_\alpha(m) \approx A_\sigma R \frac{e^{\gamma m}}{m^p} (1 + Q e^{qm}) \quad (3.2b)$$

для угла (проходящая через треугольники кривая на рис.2). Используя величины R и γ из (3.1), введем вместо коэффициентов для угла $a_\alpha(m)$ их приведенные значения:

$$\tilde{a}_\alpha(m) = \frac{a_\alpha(m)}{R} e^{-\gamma m} = \frac{A_\sigma}{m^p} (1 + Q e^{qm}). \quad (3.3)$$

Сравнение выражений (3.2a) и (3.3) показывает, что подгонку наименьшими квадратами значений неизвестных величин A_σ, p, Q, q можно выполнять по объединенному множеству $\{a_\sigma(m), \tilde{a}_\alpha(m)\}$, предварительно

удалив из него несколько первых членов, явно уклоняющихся от подгочной зависимости (см. рис.2 и таблицы 1,2). Фактически интерполяция проводилась не по самим коэффициентам, а по десятичным логарифмам их абсолютных величин (см. рис.2), в ней участвовало 29 точек и были получены следующие результаты:

$$\begin{aligned} A_\sigma &= -0.01571 \pm 0.00480; & p &= 3.188 \pm 0.171; \\ Q &= 2.224 \times 10^{-5} \pm 9.93 \times 10^{-6}; & q &= 1.127 \pm 0.028. \end{aligned} \quad (3.4)$$

СКО такой интерполяции оказалась равна ≈ 0.092 , а ее результаты представлены на рис.2.

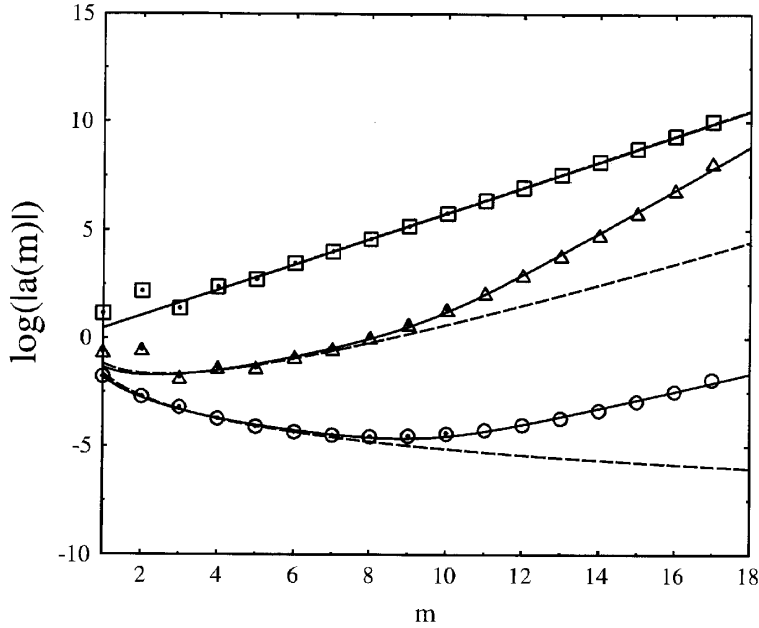


Рис. 2: Закон изменения коэффициентов промежуточной асимптотики (1.12) для угла $a_\alpha(m)$ (треугольники), инварианта $a_\sigma(m)$ (кружки) и их отношения a_α/a_σ (квадраты). Сплошные линии – эмпирические зависимости (3.1),(3.2) по данным настоящей работы. Жирными точками внутри значков при $m \leq 10$ отмечены значения коэффициентов из работы [1], пунктирными линиями – полученные там же интерполяционные зависимости.

Сравнение выражений (3.2) (им отвечают сплошные кривые на рис.2) с формулами (4.2) из [1] (им отвечают пунктирные кривые на рис.2) показывает, что обработка существенно более точного и более обширного экспериментального материала настоящей работы привела к качественно другим экспериментальным зависимостям в отношении коэффициентов рядов (1.12) за счет появления в (3.2) дополнительного множителя $(1 + Q \exp(qm))$. При $m < 8$, однако, оба семейства кривых оказываются достаточно близки. Любопытно отметить, что зависимость (3.1) для отношения коэффициентов угла и инварианта не претерпела при этом никакого изменения.

Важно подчеркнуть, что поскольку полученные эмпирические соотношения (3.2) в промежуточной асимптотике $h \lesssim 0.1$ не демонстрируют никаких "аномалий" (см. рис.2), то их применение не ограничено числом фактически найденных коэффициентов. Это позволяет с помощью (3.2),(3.4) достаточно аккуратно оценить остаточные члены рядов (1.12), не включенные в интерполяцию (сплошные наклонные прямые на рис.1):

$$R(h, M) = \sum_{m=M+1}^{\infty} a(m) h^{2m} \approx a(M+1) h^{2M+2}. \quad (3.5)$$

Выполненный выше анализ коэффициентов дает возможность полнее представить себе глобальное поведение исследуемых зависимостей. Прежде всего, оба ряда и для угла и для инварианта расходятся внутри исследованного диапазона при некотором $h > h_{cr}$: для угла $h_{cr} \approx \exp(-(\gamma + q)/2) \approx 0.287$, для инварианта $h_{cr} \approx \exp(-q/2) \approx 0.569$. Однако, характер этих зависимостей при $1 \gtrsim h \gtrsim 0.1$ (до попадания в область промежуточной асимптотики) качественно различен.

Изменение инварианта очень хорошо описывается "каскадом экспонент". Первая из них (кривая 1 на рис.1)

$$|\delta c_1(h)| \approx 63 \cdot e^{-\pi^2/h}, \quad (3.6)$$

обнаруженная и получившая четкое объяснение уже в работе [1], значительно превышает остаточный член (3.5). Она описывает возмущение сепаратрисы более удаленным резонансом с частотой $2\Omega = 4\pi$ (см. (1.2)). Простая теория [2] предсказывает предэкспоненциальный множитель 8, т.е. почти на порядок меньше. Такое различие вполне объяснимо очень сложной в рассматриваемом случае системой резонансов высших приближений.

Вторая экспонента (кривая 2 на Рис.1, интерполяция по 34 точкам, СКО ≈ 0.13)

$$|\delta c_2(h)| = A_2 \cdot e^{-\beta_2/h}, \quad \log_{10}(A_2) = -23.45 \pm 0.11, \quad \beta_2 = 3.512 \pm 0.017. \quad (3.7)$$

напротив, располагается целиком ниже остаточного члена. Механизм ее появления при сегодняшнем состоянии теории совершенно неясен. Обращает на себя внимание близость значения показателя β_2 к числу π .

Любопытная ситуация возникает для угла: в области расходимости представляющего его ряда вообще не наблюдается никаких сингулярностей или аномалий в поведении функции $c_\alpha(h)$ или ее отклонения $\delta c_\alpha(h)$ от интерполяции. Более того, последнее вполне удовлетворительно описывается остаточным членом (3.5), который к тому же представлен на рис.1 только своим первым слагаемым.

И здесь переход в область промежуточной асимптотики реализуется через экспоненту (кривая 3 на рис.1, интерполяция по 22 точкам, СКО ≈ 0.12):

$$|\delta c_3(h)| = A_3 \cdot e^{-\beta_3/h}, \quad \log_{10}(A_3) = -15.84 \pm 0.15, \quad \beta_3 = 2.906 \pm 0.018. \quad (3.8)$$

В этом случае показатель β_3 также оказывается близок к π .

Из всего сказанного следует, что поведение и угла и инварианта при больших $h \sim 1$ существенно отличается от их поведения в области промежуточной асимптотики $h \lesssim 0.1$.

В заключение отметим, что полученные в настоящей работе данные во многом подтверждают и уточняют выводы более ранней работы [1]. Но главным результатом здесь следует, по-видимому, считать построение качественно новых экспериментальных зависимостей (3.1)-(3.4), что позволяет надежно экстраполировать ряды (1.12) за пределы исследованной области прямых измерений. Это, по нашему мнению, может заметно способствовать дальнейшему развитию современной теории расщепления сепаратрисы и образования хаотического слоя нелинейного резонанса.

Автор глубоко благодарен Б.В.Чирикову за обсуждения и советы. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00865).

Литература

1. В.В. Вечеславов, Б.И.Чириков, *Прецизионное измерение расщепления сепаратрисы нелинейного резонанса*, Препринт ИЯФ 98-3, Новосибирск (1998). ЖЭТФ, в печати.
2. V.V. Chirikov, Phys.Reports **52**, 263 (1979).
3. Г.М. Заславский, Б.В. Чириков, УФН **105**, 3 (1971).
4. Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
5. A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
6. A. Poincaré, *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, Paris (1892), p.226 (А. Пуанкаре, *Избранные труды*, Наука, Москва (1971), т. 1, с.728).
7. В.К. Мельников, Труды Моск. мат. общества **12**, 3 (1963).
8. N.N. Filonenko, R.Z. Sagdeev and G.M. Zaslavsky, Nuclear Fusion **7**, 253 (1967).
9. Г.М. Заславский, Н.Н. Филоненко, ЖЭТФ **54**, 1590 (1968).
10. В.Ф.Лазуткин, *Расщепление сепаратрис стандартного отображения Чирикова*, Деп. ВИНТИ 6372-84 (1984). V.F. Lazutkin, I.G. Schachmanski and M.B. Tabanov, Physica D **40**, 235 (1989). V.G. Gelfreich, V.F. Lazutkin and M.B.Tabanov, Chaos, **1**, 137, (1991).
11. V.G. Gelfreich, V.F. Lazutkin and N.V. Svanidze, Physica D **71**, 82 (1994).
12. V.G. Gelfreich, *A proof of the exponentially small transversality of the separatrices for the standard map*. Freie Universität Berlin, Preprint 9/98 (1998) 56 p. (to appear in *Communic.Math.Physics*)
13. D.H.Bailey, *ACM transaction on mathematical software* , v. **19** (1993), p.288-319
14. Б.М. Шиголев, *Математическая обработка наблюдений*, ГИФМЛ, Москва (1960); D. Hudson, *Statistics*, Geneva (1964) (Д. Худсон, *Статистика для физиков*, МИР, Москва (1970)).
15. К.Ланцош, *Практические методы прикладного анализа*, ГИФМЛ, Москва (1961).
16. В.Г.Гельфрейх, *Частное сообщение*.

В.В. Вечеславов

**Прецизионное измерение расщепления сепаратрисы
нелинейного резонанса (новые результаты)**

V.V. Vecheslavov

**Precise measurement of separatrix splitting
in a nonlinear resonance (new results)**

ИЯФ 97-90

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 4.12.1998 г.

Сдано в набор 7.12.1998 г.

Подписано в печать 7.12.1998 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.0 печ.л., 0.8 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 90

Обработано на IBM PC и отпечатано на
роталпринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.