

46

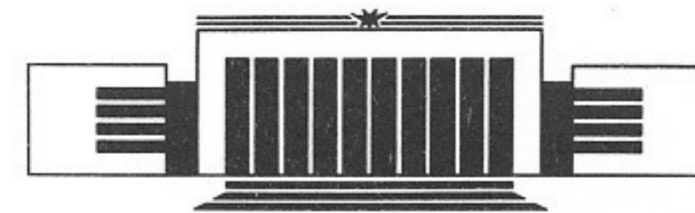


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

**В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков**

**С КАКОЙ СКОРОСТЬЮ  
ИДЕТ ДИФфуЗИЯ АРНольДА?**

**ПРЕПРИНТ 89-72**



**НОВОСИБИРСК**

# С КАКОЙ СКОРОСТЬЮ ИДЕТ ДИФФУЗИЯ АРНОЛЬДА ?

В.В.Вечеславов и Б.В.Чириков

Институт ядерной физики  
630090, Новосибирск, СССР

## АННОТАЦИЯ

Дан обзор современных представлений о диффузии Арнольда-универсальной неустойчивости движения в многомерных нелинейных колебательных системах. Основное внимание уделено оценкам скорости этой диффузии. Обсуждаются два новых эффекта быстрой диффузии Арнольда в системах с сильной и слабой нелинейностью.

Доклад на международном совещании по динамике пучков заряженных частиц. Новосибирск, 1989.

## 1. Введение

Основная цель настоящей работы — обсудить еще раз изумительно красивый механизм так называемой диффузии Арнольда, универсальной неустойчивости многомерных колебательных гамильтоновых систем [1-5]. Это интересное явление может играть важную роль в столь различных процессах, как движение астероидов в Солнечной системе и поведение тяжелых частиц в накопительных кольцах [6]. Первый пример такой неустойчивости был предложен и рассмотрен Арнольдом [1]. Диффузионный характер этого явления был открыт и численно подтвержден в работах [2,4,5], в то время как Нехоршев [3] нашел строгую верхнюю границу скорости развития этой неустойчивости.

Рассмотрим многомерный гамильтониан

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon \sum_{m, n} V_{mn}(I) e^{i(m\theta + n\Omega t)}, \quad (1.1)$$

где  $H_0$  описывает невозмущенную полностью интегрируемую систему и малое ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) возмущение представлено рядом Фурье. Переменные действие — угол  $I, \theta$  являются  $N$ -мерными векторами, а явная квазипериодическая зависимость от времени характеризуется  $M$ -мерным вектором частот  $\Omega$ ;  $m \equiv (m_1, \dots, m_N)$ ,  $n \equiv (n_1, \dots, n_M)$ .

Долговременная динамика системы, которой мы интересуемся в первую очередь, определяется резонансами связи ( $n=0$ ) и внешними ( $n \neq 0$ ). Резонансы первого порядка или первичные, удовлетворяют условию

$$m\omega(I) + n\Omega = 0, \quad (1.2)$$

которое задает резонансную поверхность в пространстве действий, здесь  $m\omega \equiv m_i \omega_i$ ,  $n\Omega \equiv n_k \Omega_k$  — скалярные произведения. Невозмущенные колебания называются нелинейными, если отвечающие им частоты  $\omega_i(I) = \partial H_0 / \partial I_i$  зависят от переменных действий. Если, к тому же, эти колебания невырождены, т.е. детерминант

$$\left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_k} \right| = \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_k} \right| \neq 0 \quad (1.3)$$

отличен от нуля, то существует взаимно-однозначное соответствие между пространством действий и пространством частот. Пространство частот является более удобным для наглядного представления резонансной структуры, поскольку каждая резонансная поверхность

(1.2) есть просто плоскость.

Ширина нелинейного резонанса определяется величиной слабого ( $\varepsilon \neq 0$ ) возмущения [4,5]:

$$(\Delta\omega)_r = \frac{4}{|m|} \left| \frac{\varepsilon V_{mn}}{2\mu_m} \right|^{1/2} = \frac{4\tilde{\Omega}_r}{|m|} \sim \omega (\varepsilon \alpha \nu)^{1/2} \quad (1.4)$$

Здесь  $1/\mu_m = m_i (\partial\omega_i / \partial I_k) m_k \sim |m|^2 \alpha |\omega| / |I|$ ,  $|m| \equiv \sum |m_i|$ ;

$\alpha$  — безразмерный параметр нелинейности и  $\tilde{\Omega}_r$  — частота малых фазовых колебаний вокруг устойчивой периодической орбиты в центре резонанса. В последней грубой оценке  $\nu \sim V_{mn} / H_0$  для старших гармоник возмущения.

При достаточно малом возмущении теория КАМ гарантирует сохранение квазипериодического движения на слегка деформированных инвариантных торах для почти всех (но не всех!) начальных условий [7]. Дополнительное множество и оказывается той самой областью многомерного фазового пространства, где имеет место диффузия Арнольда. Прежде чем перейти к этой главной теме нашего доклада напомним, что при относительно сильном возмущении наступает перекрывание резонансов и образуется глобальный хаос, содержащий быть может лишь редкие островки с регулярным движением. Критическая величина возмущения, при которой возникает глобальная стохастичность, была грубо оценена в работах [4,8,12]:

$$(\varepsilon\alpha)_{cr} \sim \left(\frac{\tilde{\Omega}}{5}\right)^{3/2} Q + F' \sim \nu^3, \quad (1.5)$$

где предположено экспоненциальное убывание гармоник возмущения  $V_{mn} \sim \nu H_0 \exp[-\tilde{\Omega}(|m|+|n|)]$ ;  $\langle V^2 \rangle \sim H_0^2$ ;  $\tilde{\Omega} \ll 1$ ;  $Q = N + M$ . Величина  $F' = 0$  для простого критерия перекрывания резонансов, в то время как строгая верхняя граница, следующая из результатов Мозера [8] есть  $F = 4$ . Оба подхода в определении порога перекрывания  $(\varepsilon\alpha)_{cr}$  находятся, таким образом, в разумном согласии и грубую оценку (1.5) можно считать достаточно правдоподобной, особенно при больших значениях  $Q = N + M$ . К сожалению, совершенно иная ситуация имеет место в отношении диффузии Арнольда, что является основным предметом нашего дальнейшего обсуждения.

Как правило, диффузия Арнольда существует при любом сколь угодно слабом возмущении  $\varepsilon \ll \varepsilon_{cr}$  и является, в этом смысле, универсальной неустойчивостью многомерных нелинейных колебаний. Слова "как правило" означают, что существуют исключительные

системы, например, цепочка Тоды [9], которые являются полностью интегрируемыми и движение которых оказывается квазипериодическим при любых начальных условиях. В отличие от таких исключительных систем, типичная гамильтонова система при  $\varepsilon \rightarrow 0$  является лишь КАМ-интегрируемой [10], что означает приближенную интегрируемость, точность которой как раз и определяется диффузией Арнольда. Поскольку как скорость этой диффузии, так и мера стохастической компоненты движения весьма малы при малом

$\varepsilon$ , то КАМ-интегралы обнаруживают высокую точность и качество. Понятие КАМ-интегрируемости столь же важно для физики, как и понятие адиабатической инвариантности, а глубокая связь этих понятий позволяет сказать, что КАМ-интегрируемость есть обращенная адиабатичность [11] (см. также раздел 2 ниже).

Диффузия Арнольда идет вдоль резонансных поверхностей (1.2), полное множество которых является всюду плотным в фазовом пространстве. Если резонансы пересекаются, то любой хаотической траектории оказывается доступна вся инвариантная поверхность, определяемая точными интегралами движения, например, энергетическая поверхность в случае консервативной системы ( $\Omega = 0$  в (1.1)). Более того, такая хаотическая траектория подходит сколь угодно близко к любой точке этой поверхности. Однако, движение при этом не является эргодическим, поскольку мера хаотической компоненты мала! Из простых геометрических соображений ясно, что резонансы могут пересекаться только при числе степеней свободы  $N$  больше двух, т.е. при  $N \geq 3$  для консервативной системы ( $\Omega = 0$ ) и при  $N \geq 2$  если  $\Omega \neq 0$ . В этом смысле диффузия Арнольда в нелинейных системах отличается от глобального хаоса и представляет собой многомерное явление. Пример конечной сетки резонансов дан на рис.1.

Главная обсуждаемая ниже проблема — оценка скорости диффузии. Хотя эта диффузия обычно протекает очень медленно, она может оказаться решающим фактором, например, при длительном взаимодействии встречных пучков заряженных частиц в накопителях [6]. Мы дадим общий обзор современных представлений о диффузии Арнольда, включая различные (и очень различающиеся!) оценки и результаты наших последних численных экспериментов на простой модели. Эти эксперименты выявили новый интересный эффект — наличие широкой области по возмущению  $\varepsilon$ , где скорость диффузии убывает лишь как некоторая степень  $\varepsilon$ , т.е. относительно медленно. Конечно, асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$  закон изменения

скорости является экспоненциальным, что согласуется со всеми полученными ранее результатами.

## 2. Сильная нелинейность, оценки

Будем называть нелинейность сильной, если безразмерный параметр  $\alpha \neq 0$  и не зависит от  $\varepsilon$  (см. (1.4)). Для достаточно слабого возмущения  $\varepsilon \ll \alpha$  ширина резонанса  $\frac{(\Delta I)_r}{I} \sim \frac{(\Delta \omega)_r}{\omega} \sim \left(\frac{\varepsilon \nu}{\alpha}\right)^{1/2}$  оказывается относительно малой и это существенно упрощает анализ диффузии Арнольда.

Структура нелинейного резонанса в фазовом пространстве показана на рис. 2, где резонансная фаза  $\psi = m^{(g)}\theta + n^{(g)}\tau$  и  $\rho$  - сопряженный ей импульс (линейная комбинация  $I_k$ , подробности см. в [4]). Индекс "g" означает выделенный, "ведущий" резонанс  $m^{(g)}\omega + n^{(g)}\Omega = 0$ , вдоль которого идет диффузия и  $\tau = \Omega t + \tau^{(0)}$ , где  $\tau^{(0)}$  постоянный вектор начальных фаз. Резонансная область шириной  $(\Delta \rho)_r \sim |I| (\varepsilon \nu / \alpha)^{1/2}$  ограничена невозмущенной сепаратрисой поверхностью, проекция которой показана на рис. 2 пунктирной линией. Возмущение разрушает (расщепляет) сепаратрису и образует вокруг нее очень тонкий стохастический слой. Это именно тот слой, где идет диффузия Арнольда. Остальная часть резонансной области заполнена регулярными траекториями, которые также располагаются на инвариантных торах, но топология этих торов не такая, как при отсутствии возмущения. Важно подчеркнуть, что движение вблизи резонанса характеризуется новой очень медленной частотой  $\tilde{\Omega}_g \sim |\omega| (\varepsilon \alpha \nu)^{1/2}$  колебаний фазы  $\psi$ . В результате возникает новая система резонансов  $(\tilde{\Omega}_g + m\omega) + n\Omega = 0$ , взаимодействие которых приводит как к образованию стохастического слоя, так и к диффузии Арнольда в нем. Почему стохастический слой при  $\varepsilon \rightarrow 0$  всегда образуется в окрестности невозмущенной сепаратрисы? Потому что именно здесь фазовая частота  $\tilde{\Omega}_g \rightarrow 0$  становится исчезающе малой, что в общем случае способствует возникновению хаоса.

Для получения количественных оценок рассмотрим резонансный гамильтониан [4] (см. (1.4) выше):

$$H_g = \frac{\rho^2}{2\mu_g} - \mu_g \tilde{\Omega}_g^2 \cos \psi \quad (2.1)$$

который описывает единственный (ведущий) резонанс. Нас интересует окрестность сепаратрисы  $H_g = \mu_g \tilde{\Omega}_g^2$ , где период движения  $T$  неограниченно растет:

$$T(w) = \frac{1}{\tilde{\Omega}_g} \ln \frac{32}{|w|} \quad (2.2)$$

Здесь безразмерная величина  $w = (H_g / \mu_g \tilde{\Omega}_g^2) - 1$  характеризует относительное расстояние до сепаратрисы. Второй член резонансного гамильтониана (2.1) является одним из членов возмущения  $V_{mn}^{(g)} \equiv V_g$  в исходном гамильтониане (1.1). Эта система является все еще полностью интегрируемой, поскольку имеет интеграл  $H_g = \text{const}$ . Включим теперь еще один член возмущения с фазой

$$\psi_{mn} = m\theta + n\tau \approx \xi_{mn} \psi + \omega_{mn} t + \beta_{mn} \quad (2.3)$$

где  $\xi_{mn} \sim 1$ ;  $\beta_{mn}$  - постоянный сдвиг фазы и частота возмущения  $\omega_{mn} = m\omega^{(g)} + n\Omega$  с резонансным вектором  $\omega^{(g)}$  удовлетворяющим условию  $m^{(g)}\omega^{(g)} + n\Omega = 0$ . Взаимодействие двух этих резонансов ( $m^{(g)}$  и  $m$ ) ликвидирует интегрируемость и формирует стохастический слой вокруг невозмущенной сепаратрисы. Ширина этого слоя может быть оценена согласно [4] как

$$w_s \approx \frac{\tilde{\Omega}_g}{\Gamma(2|\xi_{mn}|)} \frac{\nu_1}{\xi_{mn}} \frac{V_{mn}}{V_g} (2\lambda)^{2|\xi_{mn}|+1} e^{-\frac{\pi\lambda}{2}} \quad (2.4)$$

где  $\Gamma(x)$  есть гамма-функция,  $\nu_1 \sim 1$  и главный параметр

$$\lambda = \frac{\omega_{mn}}{\tilde{\Omega}_g} \sim \frac{|m|}{|m^{(g)}|} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (2.5)$$

Последняя оценка является довольно грубой, но тем не менее она показывает, что в области диффузии Арнольда ( $\varepsilon \ll \varepsilon_{cr}$ ) параметр  $\lambda \gg 1$  оказывается большим и стохастический слой обычно экспоненциально узок.

При взаимодействии только двух резонансов диффузия идет поперек слоя в пределах его очень малых размеров и не может, следовательно, серьезно влиять на глобальную динамику. Для того, чтобы диффузия могла охватить область больших размеров требуется присутствие еще хотя бы одного резонанса. При этом грубая оценка скорости диффузии в пространстве действий имеет вид [4]:

$$D_I \sim \frac{\varepsilon^2 V_g^2}{T_a \tilde{\Omega}_g^2} \frac{w_s^2}{\lambda^4}, \quad (2.6)$$

где  $T_a$  — средний период движения в слое:  $\Lambda = T_a \tilde{\Omega}_g = 1 + \tilde{\Omega}_g T(w_s)$ , см. (2.2). Вводя приведенные ширину слоя и скорость диффузии

$$\tilde{w}_s = w_s \frac{V_g}{V_{mn}}; \quad \tilde{D} = \frac{D_I}{D_I^0}; \quad D_I^0 = \frac{\varepsilon^2 V_{mn}^2}{\tilde{\Omega}_g^2}, \quad (2.7)$$

где  $D_I^0$  — скорость в условиях глобального хаоса  $\varepsilon \gg \varepsilon_{cr}$ , получаем важное соотношение

$$\tilde{D} \approx c \frac{\tilde{w}_s^2}{\Lambda \lambda^4} \quad (2.8)$$

между скоростью диффузии Арнольда и шириной соответствующего стохастического слоя. В следующем разделе мы широко используем это замечательное соотношение. К счастью, неизвестный в общем случае множитель  $c$ , судя по нашему опыту, слабо зависит от параметров системы [10]. Все существенные для диффузии Арнольда резонансы, кроме ведущего, называются возмущающими резонансами. Видно, что как ширина стохастического слоя, так и скорость диффузии Арнольда связана с высокочастотным ( $\lambda \gg 1$ ) возмущением, что прямо противоположно случаю медленного адиабатического возмущения. Нетрудно видеть, что это различие на самом деле определяется только тем, какую из взаимодействующих степеней свободы считать возмущаемой, а какую возмущающей. По этой причине мы будем рассматривать диффузию Арнольда как обращенную адиабатичность и называть  $\Lambda$  параметром адиабатичности [10, 11].

Если взаимодействуют всего три первичных резонанса, т.е. в (1.1) отброшены все члены возмущения кроме трех, то оценки как для ширины слоя  $w_s$ , так и для скорости диффузии  $D_I$  могут быть выполнены весьма аккуратно, в худшем случае с точностью до множителя порядка 2 [4]. Однако, при достаточно слабом возмущении такой подход, как правило, не соответствует действительности из-за влияния резонансов высоких порядков, которые могут и не присутствовать явно в исходном гамильтониане (1.1), но появляются в последующих приближениях теории возмущений.

Как учесть эффекты высокого порядка, оперируя с исходным гамильтонианом? Подсказка содержится в полученном Нехорошевым [3] выражении для верхней оценки скорости диффузии Арнольда:

$$\tilde{D} \sim D_0 \exp(-A \lambda_p^{1/\varepsilon}) \quad (2.9)$$

с основным параметром  $E$ , который при  $M=0$  имеет вид

$$E = E_N = \frac{(3N-1)N}{4} + 2. \quad (2.10)$$

Эта оценка была позднее подтверждена многими авторами (см., например [13]). Существенно, что входящая в соотношение (2.9) величина  $\lambda_p$  является формальным параметром адиабатичности, связанным только с первичными содержащимися в (1.1) резонансами и потому легко вычисляемым (см. следующий раздел).

Качественное объяснение зависимости (2.9) и её связь с резонансами высоких порядков даны в [4], но полученный в этой работе количественный результат для параметра  $E$  оказался совершенно другим, именно:

$$E = L \leq Q-1 = N+M-1, \quad (2.11)$$

где  $L$  — число линейно независимых (несоизмеримых) невозмущенных частот, комбинации которых и определяют резонансы высоких порядков. Максимальная величина  $L = Q-1$  связана с соотношением  $m^{(g)} \omega + n^{(g)} \Omega = 0$ , выполняющимся (в среднем) на резонансе связи.

Отличие  $L$  от  $E$  не обязательно ведет к противоречию, поскольку  $E_N$  — оценка сверху. Однако, проблема состоит в определении истинной величины  $E$ , если только вообще зависимость (2.9) является хорошим приближением. Численные эксперименты, обсуждаемые в следующем разделе, похоже, подтверждают равенство  $E = L$ . Однако у нас нет полной уверенности в том, что возмущение достаточно мало и условие применимости оценки Нехорошева выполнено.

Недавние численные эксперименты [10] выявили другую интересную особенность диффузии Арнольда: при увеличении  $E$  с увеличением  $L$  зависимость  $\tilde{D}(\lambda_p)$  становится менее крутой, но при этом множитель  $A$  в (2.9) также возрастает с  $L$  и две кривые  $\tilde{D}(\lambda_p, L)$ , отвечающие различным  $L$  пересекаются при некотором значении параметра  $\lambda_p(L)$ . Другими словами, эффект увеличения  $L$  проявляется только при больших значениях  $\lambda_p$ . В этом объяснение того факта, что весьма простое приближение трех резонансов, отвечающее величине

$L=1$ , оказывается в хорошем согласии с численными данными при  $\lambda_p \leq 4$  (см. [4,14]).

Более аккуратный анализ (по сравнению с приведенным в [4]) соотношений, определяющих входящий в (2.9) множитель  $A$  подтвердил сделанное в работе [10] предположение, что на самом деле  $A=BL$  и что теперь уже  $B$  слабо зависит от параметров. При этом может оказаться, что при фиксированном  $\lambda_p$  найдется такое  $\tilde{L} < L$ , для которого скорость диффузии выше, чем для действительного  $L$ . Такая повышенная диффузия может быть вызвана возмущающими резонансами, образованными меньшим чем  $L$  и равным  $\tilde{L}$  числом независимых невозмущенных частот. Отсюда следует, что необходимо для каждого  $\lambda_p$  находить такое  $\tilde{L}(\lambda_p) \leq L$ , которому отвечает максимальная скорость диффузии, что приводит к соотношению

$$\tilde{D}(\lambda_p) \sim D_0 \exp(-B\tilde{L}\lambda_p^{1/\tilde{L}}), \quad (2.12)$$

где  $\tilde{L}(\lambda_p) \leq L$ . Учитывая приближенность наших оценок, естественно заменить получающуюся при этом ломаную линию гладкой кривой. С этой целью удобно рассматривать зависимость  $\tilde{L}(\lambda_p)$  как непрерывную, удовлетворяющую локальному условию  $\partial\tilde{D}(\lambda_p, \tilde{L})/\partial\tilde{L} = 0$ , что дает  $\tilde{L} = \ln\lambda_p$ . Подставляя последнее равенство в (2.12), приходим к весьма простому соотношению

$$\tilde{D} \sim D_0 \lambda_p^{-Be} \quad (2.13)$$

где  $e = 2,7182\dots$ . Мы будем называть этот интересный режим слабой адиабатичностью. Он имеет место при  $\tilde{L} < L$ , т.е. при  $\lambda_p < e^L$ ; при  $\lambda_p > e^L$  восстанавливается обычная экспоненциальная зависимость. Таким образом, наша окончательная оценка для скорости диффузии имеет вид

$$\frac{\tilde{D}}{D_0} \sim \begin{cases} \lambda_p^{-Be}; & \lambda_p \leq e^L; \\ \exp(-BL\lambda_p^{1/L}); & \lambda_p \geq e^L; \end{cases} \quad (2.14)$$

Заметим, что обе кривые касаются при  $\lambda_p = e^L$ .

Согласно численным результатам (см. след. раздел)  $B \approx 2.8$ , что близко к значению  $B = \pi$  при  $L=1$ , вытекающему из соотношений (2.4) и (2.6). Учитывая грубость наших оценок будем в дальнейшем использовать это последнее значение и тогда показатель степени в первом уравнении (2.14) оказывается равен  $Be \approx \pi e \approx 8.5$ .

Входящий в соотношения (2.14) параметр  $\lambda_p$  является формальным, поскольку он определяется только первичными резонансами. Вместо него можно ввести новый (истинный) параметр адиабатичности  $\lambda$  с помощью выражения

$$\lambda = L\lambda_p^{1/L}, \quad (2.15)$$

что дает возможность получить другое описание влияния резонансов высоких порядков.

Оценка (2.13) имеет смысл только для больших значений  $Q$ , однако, её можно применять и при небольшом числе степеней свободы, если спектр внешнего квазипериодического возмущения достаточно богат ( $M \gg 1$ ).

### 3. Сильная нелинейность. численные эксперименты

Как и в более ранних работах [2,4,14], мы использовали простую модель, заданную гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^4 + x_2^4}{4} - \mu x_1 x_2 - \varepsilon x_1 f(t), \quad (3.1)$$

где  $f(t)$  некоторая периодическая или квазипериодическая функция (подробности см. в [10]). Любопытной особенностью невозмущенной системы ( $\mu = \varepsilon = 0$ ) является близость её движения к гармоническому  $x_i \approx a_i \cos \theta_i$ , несмотря на сильную нелинейность  $\alpha = (I/\omega)d\omega/dI = 4/3$ ;  $\theta = \omega = \beta a$ ;  $\beta \approx 0.85$ . Внешнее периодическое возмущение имеет основную частоту  $\Omega$ , в качестве ведущего выбран резонанс связи  $\omega_1 = \omega_2$ , формальный (по резонансам первого порядка) параметр адиабатичности равен  $\lambda_p = |\omega_{in}|/\tilde{\omega}_g \approx \Omega/2\beta\sqrt{\mu}$  ( $\omega_{in} = \omega_1 - n\Omega$ ;  $\tilde{\omega}_g = \beta\sqrt{\mu}$ ).

На рис.3, взятом из работы [14], четко виден переход от глобального хаоса, вызванного перекрытием основных резонансов, к диффузии Арнольда вдоль стохастического слоя. Явное подтверждение последнего обстоятельства дано на рис.4 [14]. Проведенные в работе [14] прямые измерения скорости диффузии подтверждают оценку (2.9) со следующими подгоночными значениями параметров:  $E=2$ ;  $D_0=26$ ;  $A=7.9$  или  $B \approx 4$  (см.(2.14)). С ростом  $\lambda_p$  скорость диффузии быстро падает, поэтому в [14] исследовалась лишь область значений  $\lambda_p \leq 10$ . Для продвижения в сторону более слабых возмущений мы использовали другую методику, основанную на измерении ширины хаотического слоя и вычис-

лении скорости диффузии по формуле (2.8). Фактически измерялась единственная зависимость  $T(w)$  (см. (2.2)), с помощью которой отыскивалась как ширина слоя  $w_s$  (она отвечает минимальному  $T$ ), так и истинный параметр адиабатичности  $\lambda = w_s / \Delta w_m$  ( $\Delta w_m$  — максимальная разность соседних значений  $w$ ). Описанным способом удалось достичь значений  $\lambda_p \leq 50$  (но всего лишь  $\lambda \approx 14$ , см. (2.15),  $L = 2$  и ниже).

Прежде всего, было проверено соотношение (2.8) и найдено значение неизвестного множителя  $C \approx 3.5$  по данным прямым измерений скорости диффузии в интервале  $\lambda_p = 3.7 - 8$ , взятым из [14].

Основные численные результаты, полученные в работе [10], представлены на рис. 5 крестиками. Они хорошо соответствуют формуле (2.9) с параметрами  $E = 2$ ;  $D_0 = 2.0$ ;  $A = 5.60$ . Найденная отсюда величина  $B \approx 2.80$  разумно согласуется со значением  $B = \pi$ , полученным с учетом лишь первичных резонансов (см. (2.4), (2.6)). Рис. 6 показывает, как достигает своего асимптотического значения отношение  $\lambda / 2\sqrt{\lambda_p} \rightarrow 1$  (см. 2.15)). Наконец, на рис. 7 приведены предварительные результаты, подтверждающие существование области слабой адиабатичности в соответствии с (2.14). Степенной закон представлен верхней прямой линией, а кривые являются асимптотическими экспонентами для различных значений  $L$ . Взятые с рис. 5 величины (крестики) согласуются с законом (2.14) как на степенном, так и на экспоненциальном участках. Сам по себе этот факт не может, конечно, рассматриваться как решающее доказательство, но на рис. 7 приведены и другие результаты, являющиеся, на наш взгляд, предварительным указанием на слабую адиабатичность. Рассматривались случаи, когда внешнее возмущение имело: 1) линейно-зависимые частоты  $\omega / \Omega = n/2$ , что понижало как величину  $L \rightarrow 1$ , так и скорость диффузии (квадраты) и 2) две несоизмеримые частоты  $\Omega_2 / \Omega_1 = 1.2381966\dots$  что повышало скорость диффузии и  $L \rightarrow 3$  (кружок). Конечно, изучение этого нового явления — слабой адиабатичности — необходимо продолжить.

#### 4. Слабая нелинейность, нерезонансный случай

Если невозмущенный гамильтониан

$$H_0 = \omega^{(0)} I \quad (4.1)$$

является линейной функцией действий с постоянным вектором частот  $\omega^{(0)}$ , то нелинейность называется слабой, поскольку в этом случае она или вообще отсутствует, или привносится в систему только слабым возмущением  $\varepsilon V(I, \theta)$ . Заметим, что такая ситуация типична, например, для взаимодействия встречных пучков в накопителях заряженных частиц [6]. Обобщенная теория КАМ [7] применима и в этом случае, что гарантирует устойчивость движения для большинства начальных условий если обеспечена несоизмеримость линейных частот  $\omega^{(0)}$ :

$$m\omega^{(0)} + n\Omega \neq 0 \quad (4.2)$$

для любых целочисленных векторов  $m$  и  $n$ . Для почти всех  $\omega^{(0)}$ ,  $\Omega$  справедлива следующая нижняя оценка [4]

$$|m\omega^{(0)} + n\Omega| > \frac{G|m|}{q^{Q+\nu}}, \quad (4.3)$$

где  $G$  и  $\nu > 0$  некоторые постоянные,  $Q = N + M$  и  $q = |m| + |n|$ . Однако, если возмущение представлено степенными рядами по  $x_k = (2I_k / \omega_k) \cos \theta_k$  и отвечающим им импульсам  $P_k$ , то достаточно обеспечить выполнение условия (4.2) только для  $|m| \leq 4$  (см. [7]), поскольку обычно стабилизирующий нелинейный сдвиг частоты  $|\delta\omega| \sim H_0^2$ . Именно такой случай имеет место вблизи центра обычного нелинейного резонанса ( $\varepsilon \ll \varepsilon_{cr}$ ), где движение устойчиво. Заметим, что при взаимодействии встречных пучков в накопителях такая ситуация обычно не возникает.

Возвращаясь к общему случаю слабой нелинейности, рассмотрим вначале однорезонансное возмущение  $\sim \varepsilon$  с нелинейным сдвигом частоты  $\delta\omega \sim \varepsilon \nu$ . Система остается интегрируемой, но, в отличие от сильной нелинейности, ширина резонанса  $\Delta I \sim (\varepsilon/\alpha)^{1/2} I \sim I$  оказывается много больше, а частота фазовых колебаний  $\Omega \sim (\varepsilon \alpha \nu)^{1/2} \omega \sim \varepsilon \omega \nu$  много меньше, т.к.  $\alpha \sim \varepsilon$  (сравни (1.4)). Другие оценки остаются в основном прежними и можно использовать полученные в разделе I результаты с параметром адиабатичности  $\lambda_p \sim 1/\varepsilon$  вместо  $\lambda_p \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$  для сильной нелинейности (см. (2.5)). Мы ожидаем, в частности, что для скорости диффузии справедливы соотношения (2.14), которые можно сравнить с оценкой, полученной недавно в [15]. Найденное авторами этой работы значение основного параметра  $L = N + 3$  разумно согласуется с нашей величиной  $L = N - 1$  (см. (2.11),  $M = 0$ ,  $N \gg 1$ ).

Такое соответствие, однако, не оправдано. В нашем подходе возмущение содержит один резонансный член, т.е. условие (4.2) нарушено для одной пары векторов  $m$  и  $n$ , а в работе [15] все резонансы исключены. Для сильной нелинейности это несущественно, поскольку резонансы зависят от начальных условий. При слабой нелинейности такая зависимость имеет место только для резонансов очень высоких порядков  $q \approx \varepsilon^{-1/q} \equiv q_\varepsilon$  (см. (4.3)) и только эти резонансы могут выступать в качестве ведущих с очень большим параметром адиабатичности

$$\lambda \sim q_\varepsilon e^{q_\varepsilon/q} \sim -\ln D \quad (4.4)$$

и, соответственно, чрезвычайно низкой скоростью диффузии (здесь принято, что фазовая частота  $\bar{\omega} q_\varepsilon \sim \varepsilon V_0^{1/2} \sim \varepsilon e^{-q_\varepsilon}$  и использовано соотношение (2.15):  $\lambda \sim \lambda_p \sim \bar{\omega} q_\varepsilon^{-1/q}$ ). Оценка (4.4), конечно, весьма грубая, но она дает хорошее представление о роли ведущего резонанса. Эффект значительного снижения скорости диффузии при слабой нелинейности был предсказан в работе [13]:

$$-\ln D \approx q_\varepsilon N \ln q_\varepsilon \quad (4.5)$$

где  $q_\varepsilon \equiv -\ln \varepsilon / 4(N-1) \sim \ln q_\varepsilon$ ,  $M=0$ . Эта скорость много меньше, чем при сильной нелинейности (см. (2.9)), но много больше (4.4). Как и в случае сильной нелинейности (сравни (2.10) и (2.11)), мы вновь сталкиваемся с фактом весьма различающихся, хотя и не противоречащих друг другу, оценок.

В заключение отметим, что случай слабой нелинейности труднее поддается анализу, но движение при отсутствии резонансов оказывается значительно более устойчивым.

### 5. Слабая нелинейность, резонансный случай

В предыдущем разделе была уже рассмотрена ситуация с одним резонансом и она походит на то, что имеет место при сильной нелинейности. Совершенно иная картина возникает при двух или более линейных резонансах. В этом можно убедиться выполнив замену переменных, устраняющую невозмущенный гамильтониан (4.1) (простой пример такой процедуры приведен ниже). Тогда малый параметр возмущения  $\varepsilon$  не будет влиять ни на резонансную структуру, ни на степень хаоса; он будет определять лишь масш-

таб времени. Иначе говоря, если ввести новое время  $\tau = \varepsilon t$ , то задача вообще не будет содержать никакого малого параметра и движение может оказаться сильно хаотическим, если число степеней свободы не меньше двух. Последнее равно числу независимых резонансных фаз  $\psi_k = m^{(k)}\theta + n^{(k)}\tau$  с различными входящими в соотношение (4.2) векторами  $m^{(k)}$  (см. [4]). Это любопытное нелинейное явление было обнаружено в [16] и изучалось позднее в [17].

До недавнего времени диффузия Арнольда понималась как диффузия вдоль нелинейного резонанса (хаотического слоя) в многомерном фазовом пространстве. Но при слабой нелинейности структура резонанса может быть качественно иной, что было установлено и детально изучено Сагдеевым, Заславским и их сотрудниками [18]. Следуя работе [18], мы рассмотрим здесь простой пример с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2 + \omega_0^2 x^2}{2} + \varepsilon \cos(x - \Omega t) = \omega_0 I + \varepsilon \cos[a \cos \theta - \Omega t] \quad (5.1)$$

где  $a = (2I/\omega_0)^{1/2}$  амплитуда невозмущенных колебаний;  $I, \theta$  - переменные действие - фаза.

Эта модель широко применяется при изучении нагрева плазмы на циклотронном резонансе волна - частица, но ее связь с ускорительной проблематикой, в частности, со взаимодействием встречных пучков, неясна.

Полагая  $\omega_0 = 0$  мы получаем полностью интегрируемый случай одиночного нелинейного резонанса без всяких признаков хаоса. Величина  $x$  является фазовой переменной,  $p$  - действием и имеет место сильная нелинейность. Однако, для любого (в частности, сколь угодно малого)  $\omega_0 \neq 0$  нелинейность становится слабой и динамика системы кардинально изменяется. Чтобы убрать в гамильтониане (5.1) линейный член, перейдем к новой фазе  $\varphi = \theta - \omega_0 t$ :

$$H/\varepsilon = \cos[a \cos(\varphi + \omega_0 t) - \Omega t] = \quad (5.2)$$

$$= J_n(a) \cos(n\varphi + \frac{\pi n}{2}) + \sum_{k \neq n} J_k(a) \cos[k\varphi - (\Omega - k\omega_0)t + \frac{\pi k}{2}],$$

где  $J_n(a)$  функция Бесселя и предполагается выполненным резонансное условие  $\Omega = n\omega_0$ . Сумма в (5.2) является высокочастотным возмущением при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поскольку  $\dot{\varphi} \sim \varepsilon$ . Пренебрегая этим возмущением, мы получаем усредненный гамильто-



ниан

$$\bar{H} = \varepsilon \int_n(a) \cos(n\varphi + \frac{\pi n}{2}) \Rightarrow \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \cos A \cdot \cos \Phi \quad (5.3)$$

где  $A = a - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}$ ;  $\Phi = n\varphi + \frac{\pi n}{2}$  и последнее выражение есть упрощенное представление при  $a \gg 1$ . Наиболее поразительной чертой этой модели оказывается то, что одиночный резонанс ( $n\omega_0 = \Omega$ ) создает бесконечную сетку устойчивых ( $\sin A = \sin \Phi = 0$ ) и неустойчивых ( $\cos A = \cos \Phi = 0$ ) неподвижных точек на поверхности  $(A, \Phi)$ , как это показано на рис.8. Это совершенно непохоже на хорошо известную картину резонанса при сильной нелинейности, когда имеется одномерная цепочка неподвижных точек, идущих в направлении фазовой переменной. Такое различие качественно меняет характер движения. В то время как сильная нелинейность строго ограничивает размах колебаний по переменной действия, при слабой нелинейности, как это видно на обсуждаемой модели, возможно неограниченное движение по резонансной сетке. Правда, в приближении (5.3) колебания ограничены пределами одной ячейки сетки. Однако, высокочастотное возмущение создает вдоль сепаратрис связную хаотическую паутину, по которой траектория может блуждать неограниченно. Размер резонансной ячейки ( $\Delta A = \pi$ ,  $\Delta I_c = \pi \omega_0 a$ ) не зависит от  $\varepsilon$ , но частота фазовых колебаний зависит и равна

$$\tilde{\Omega}_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon n}{\omega_0 a^{3/2}} \quad (5.4)$$

возле центра и

$$\tilde{\Omega}_s \sim \frac{\tilde{\Omega}_0}{|\ln w_s|} \sim \frac{\tilde{\Omega}_0}{\lambda} = \frac{\tilde{\Omega}_0^2}{\omega_0} \quad (5.5)$$

в хаотическом слое ширины  $w_s$  ( $\ln w_s \sim -\lambda$ ), где параметр адиабатичности  $\lambda = \omega_0 / \tilde{\Omega}_0$  (см. раздел 2).

Диффузия обусловлена тем, что траектория переходит от одной ячейки к другой, пересекая центральную линию хаотического слоя (невозмущенную сепаратрису), являющуюся границей соседних ячеек. Среднее время между двумя последовательными пересечениями центральной линии - время возврата-было найдено в [19] и равно

$$T_R \approx 3\lambda \frac{2\pi}{\tilde{\Omega}_s} \sim \frac{\omega_0^2}{\tilde{\Omega}_0^3} \quad (5.6)$$

Учитывая это, для скорости диффузии по хаотической паутине одиночного резонанса находим

$$D_I \equiv \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{t} = \frac{\Delta I_c^2}{T_R} = \frac{D_1}{I^{5/4}} \sim \frac{(\varepsilon n)^3}{\omega_0^3 a^{5/2}} \quad (5.7)$$

Эта скорость убывает лишь как куб возмущения, поэтому диффузия Арнольда в рассматриваемом случае оказывается достаточно быстрой. Аналогичный результат для резонансной сетки другого вида был найден и численно подтвержден недавно в работе [20]. Любопытно, что рассмотренная в разделе 2 слабая адиабатичность в сильно нелинейной системе также описывается степенным законом с близким показателем:  $D \sim \varepsilon^{\pi e/2} \approx \varepsilon^4$  (см. (2.14)).

Открытие резонансной сетки и быстрой диффузии Арнольда было весьма любопытным. Многие физики, специалисты по плазме, изучали систему (5.1) начиная с 1977 года. Потребовалось, однако, около десяти лет, чтобы понять это явление. Более того, на рис. 2.11 в книге [5] резонансная сетка видна теперь (!) совершенно отчетливо (сравни с нашим рис.8), что, однако, не было замечено ни авторами, ни переводчиками этой книги на русский язык.

Поскольку скорость диффузии падает с  $I$  (5.7), то среднее действие растет медленнее чем при однородной диффузии. Если

$$D_I = D_1 I^{-\beta}, \quad \text{то диффузионное уравнение} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial I^2} D_I \frac{\partial f}{\partial I}$$

где  $f(I)$  есть функция распределения, дает:

$$\langle I^{2+\beta} \rangle = D_1 (1 + \frac{\beta}{2}) t; \quad I \sim (D_1 t)^{\frac{1}{2+\beta}}; \quad (5.9)$$

$$\langle I^{13/4} \rangle = \frac{13}{8} D_1 t; \quad I \sim (D_1 t)^{\frac{4}{13}}$$

Последние соотношения отвечают  $\beta = 5/4$  в (5.7).

Формирование бесконечной резонансной сетки в рассмотренной модели происходит из-за колебательной зависимости усредненного гамильтониана (5.3) от действия  $I$ . Это имеет место только если резонанс выполняется с точностью [18]:

$$|\delta \dot{\varphi}| \leq \tilde{\Omega}_0 \quad (5.10)$$

Если, например,  $\delta \dot{\varphi} = \delta \Omega / n$  ( $\delta \Omega = \Omega - n\omega_0$ ), то хаотическая паутинка будет ограничена областью  $a^{3/2} \leq \varepsilon n^2 / \omega_0 \delta \Omega$  при условии  $\varepsilon \gtrsim \omega_0 \delta \Omega / \sqrt{n}$ . Если, вместо этого, добавить к усредненному гамильтониану (5.3) монотонный член вида

$\varepsilon V_0(I)$ , то это условие не будет зависеть от  $\varepsilon$ . Пусть, например,  $V_0 = I^2$ , тогда диффузия по паутине будет ограничена величиной  $I \leq n^{4/7} \omega_0^{-1/7}$ .

Заметим, что в многомерных системах со слабой нелинейностью резонансная сетка принимает форму, напоминающую соты и диффузия по этой сетке всегда идет более быстро, чем в случае сильной нелинейности ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Другой важной особенностью слабо-нелинейной диффузии является то, что она может возникать при минимальной размерности фазового пространства ( $N > 1$ ), допускающей образование хаоса [18].

### 6. Заключительные замечания

Для достаточно малого возмущения типичная нелинейная колебательная система является КАМ-интегрируемой, т.е. её движение оказывается регулярным и устойчивым для большинства начальных условий (раздел 2). Диффузия Арнольда, нарушающая полную интегрируемость, не только идет очень медленно, но и ограничена очень узкими хаотическими слоями исчезающе малой меры. Отсюда на первый взгляд кажется, что эта диффузия вообще не важна. В случае чисто динамической системы это действительно так. Однако присутствие любого дополнительного внешнего шума кардинально изменяет динамику, поскольку диффузия Арнольда может существенно усилить действие этого шума при любых начальных условиях. Такое усиление тем больше, чем слабее шум, что детально описано в [4]. Средняя скорость диффузии Арнольда при этом падает до величины

$$\langle \tilde{D} \rangle_A \sim \tilde{D} \frac{\tilde{\omega}_s}{\lambda} \sim \frac{\tilde{\omega}_s^3}{\lambda \lambda^5} \quad (6.1)$$

много меньшей, чем скорость при отсутствии шума.

При наличии диссипации (например, радиационного трения для электронов) в игру вступает качественно новый механизм ухода частиц вдоль резонансов. Это явление было обнаружено Теннисоном [21] и подробно изучено Герасимовым [22].

Имеется еще одна неустойчивость движения — модуляционная диффузия — возникающая вследствие внешней или внутренней низкочастотной модуляции [23, 24]. Она приводит (при не слишком слабом возмущении  $\varepsilon \geq \varepsilon_m$ ,  $\varepsilon_m \ll \varepsilon_{cr}$ ) к образованию модуляционных хаотических слоев с относительно большой шириной  $\Delta\omega_m$ . Внутри модуляционного мультиплета движение оказывается хаотичес-

ким из-за перекрытия близких резонансов. Критическое значение  $\varepsilon_m$  уменьшается с уменьшением частоты модуляции, но остается конечным, что отличает эту диффузию от диффузии Арнольда. Ширина  $\Delta\omega_m$  зависит от глубины (амплитуды) модуляции и примерно равна ширине Фурье-спектра движения. В хаотическом слое вокруг сепаратрисы ширина спектра имеет порядок частоты фазовых колебаний  $\tilde{\omega}_g$ . Следовательно, оценка (2.14) для скорости диффузии Арнольда может быть грубо использована и для оценки скорости модуляционной диффузии, если заменить  $\tilde{\omega}_g$  на  $\Delta\omega_m$ . Более аккуратные вычисления были выполнены в [23] но только для первичных резонансов ( $L=1$ ). Влияние резонансов высоких порядков на модуляционную диффузию наблюдалось, по-видимому, в численных экспериментах в работе [25] (см. также там рис.3).

При модуляционной диффузии мера хаотической компоненты больше примерно в  $\omega_s^{-1}$  раз, чем при диффузии Арнольда, что является наиболее существенным их отличием. В частности, средняя скорость модуляционной диффузии при наличии шума  $\langle \tilde{D} \rangle_m \sim \tilde{D}_m / \lambda$  также много больше  $\langle \tilde{D} \rangle_A$  (см.(6.1)).

Последнее замечание, хотя и относится к совершенно другой области, представляется нам важным. Оно касается проблемы оценки ошибок вычислений вообще и при моделировании динамических систем, в частности. Для случая гамильтоновых уравнений движения и использования консервативного (канонического) численного алгоритма (который часто является наиболее эффективным, см., например, [26]), мы делаем следующее предположение: рост ошибок вычислений определяется фиктивной диффузией Арнольда, возникающей вследствие замены непрерывной системы дискретным по времени отображением. Более того, эта диффузия идет в присутствии внешнего, также фиктивного, шума, создаваемого различными вычислительными ошибками, включая округление.

Литература

1. В.И. Арнольд. ДАН СССР 156 (1964) 9; Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. Тр. Межд. конгресса математиков, Москва, 1966, с.387.
2. Г.В. Гадияк, Ф.М. Израйлев, Б.В. Чириков. Численные эксперименты по универсальной неустойчивости в нелинейных колебательных системах (диффузия Арнольда). Тр. 7-ой Межд. конференции по нелинейным колебаниям, Берлин, 1975, т. II-1, с.315.
3. Н.Н. Нехорошев. УМН 32:6 (1977) 5.
4. B.V. Chirikov. *Phys. Reports* 52 (1979) 263.
5. А. Лихтенберг и М. Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
6. *Nonlinear dynamics and the beam-beam interaction.* M. Month and J.P. Herreza, Eds. A.I.P. Conf. Proc., 1979, No 57.
7. В.И. Арнольд. УМН 18:6 (1963) 91.
8. J. Moser. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton Univ. Press, 1973.
9. M. Toda. *Phys. Reports* 18 (1975) 1.
10. В.В. Вечеславов, Б.В. Чириков. Интегрируемость в теории КАМ. Препринт 88-110, Институт ядерной физики, Новосибирск, 1988.
11. B.V. Chirikov. *Proc. R. Soc. Lond. A* 413 (1987) 145.
12. B.V. Chirikov. *The Nature and Properties of the Dynamical Chaos*, preprint 82-152, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 1982.
13. G. Benettin and G. Galavotti. *J. Stat. Phys.* 44 (1986) 293.
14. B.V. Chirikov, J. Ford and F. Vivaldi, см. [6], стр. 323.
15. A. Giorgilli and L. Galgani. *Celestial Mechanics*, 37 (1985) 95.
16. J. Ford and G.H. Lunsford. *Phys. Rev. A* 1 (1970) 59.
17. Б.В. Чириков и Д.Л. Шепелянский. Ядерная физ. 36 (1982) 1563.
18. A.A. Cheznikov et al. *Physica D* 33 (1988) 65. *УФН* 156 (1988) 193.
19. Б.В. Чириков и Д.Л. Шепелянский. Тр. 9-ой Межд. конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 1981). Киев, Наукова Думка, 1983, т. II., с.421.

20. A.J. Lichtenberg and B.P. Wood. *Diffusion on two space and time scales.* Memo UCB/ERL M89/22, Berkeley, 1989.
21. J.L. Tennyson. *Physica D* 5 (1982) 123.
22. A.L. Gerasimov. *Phys. Lett. A* 135 (1989) 92.
23. B.V. Chirikov, M.A. Lieberman, D.L. Shepelyansky and F.M. Vivaldi. *Physica D* 14 (1985) 289.
24. F.M. Vivaldi. *Rev. Mod. Phys.* 56 (1984) 737.
25. B.V. Chirikov, J. Ford, F.M. Izrailev, D.L. Shepelyansky and F.M. Vivaldi, см. [19], стр. 80.
26. В.В. Вечеславов. Метод канонического интегрирования любого порядка. Препринт 89-35. ИЯФ СО АН СССР, 1989.

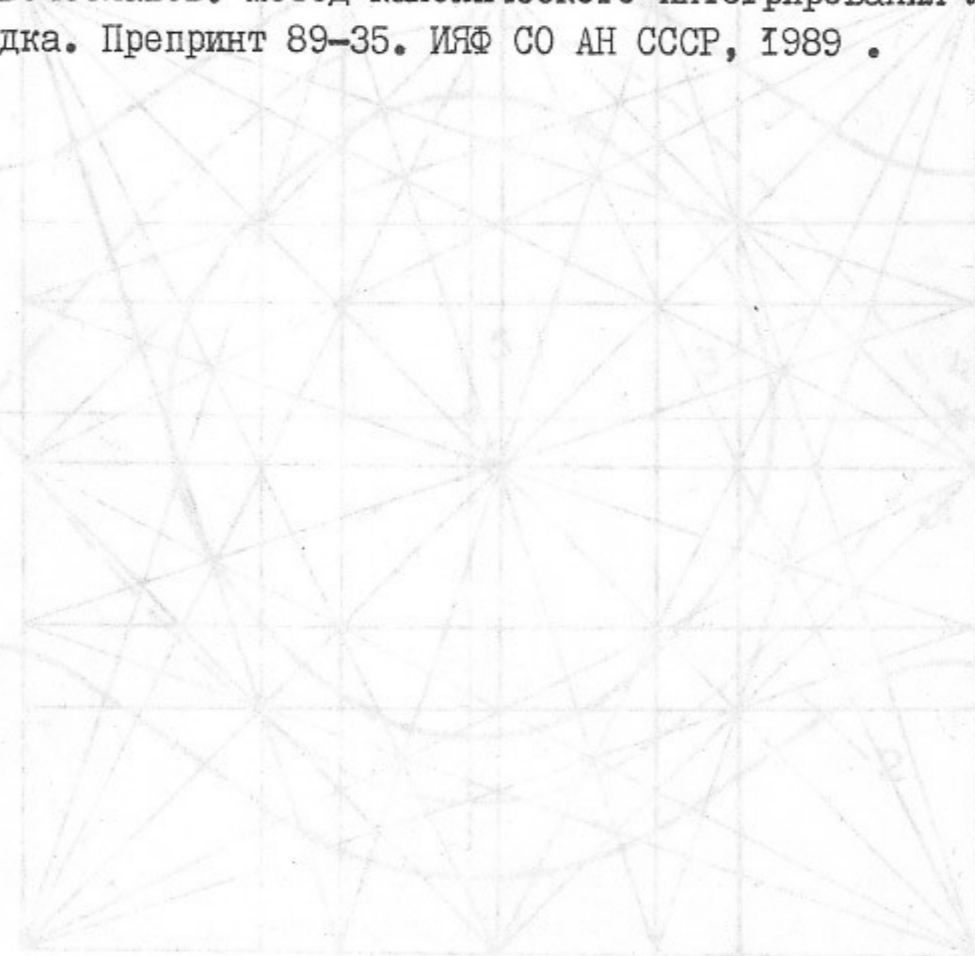


Рис. 2. Структура нелинейного резонанса со степенными частотами. Область резонанса (затененная) ограничена линиями, соответствующими степенным частотам. В центре области резонанса находится точка, соответствующая степенной частоте. Линии, соединяющие точки, образуют сложную структуру, напоминающую фрактал.

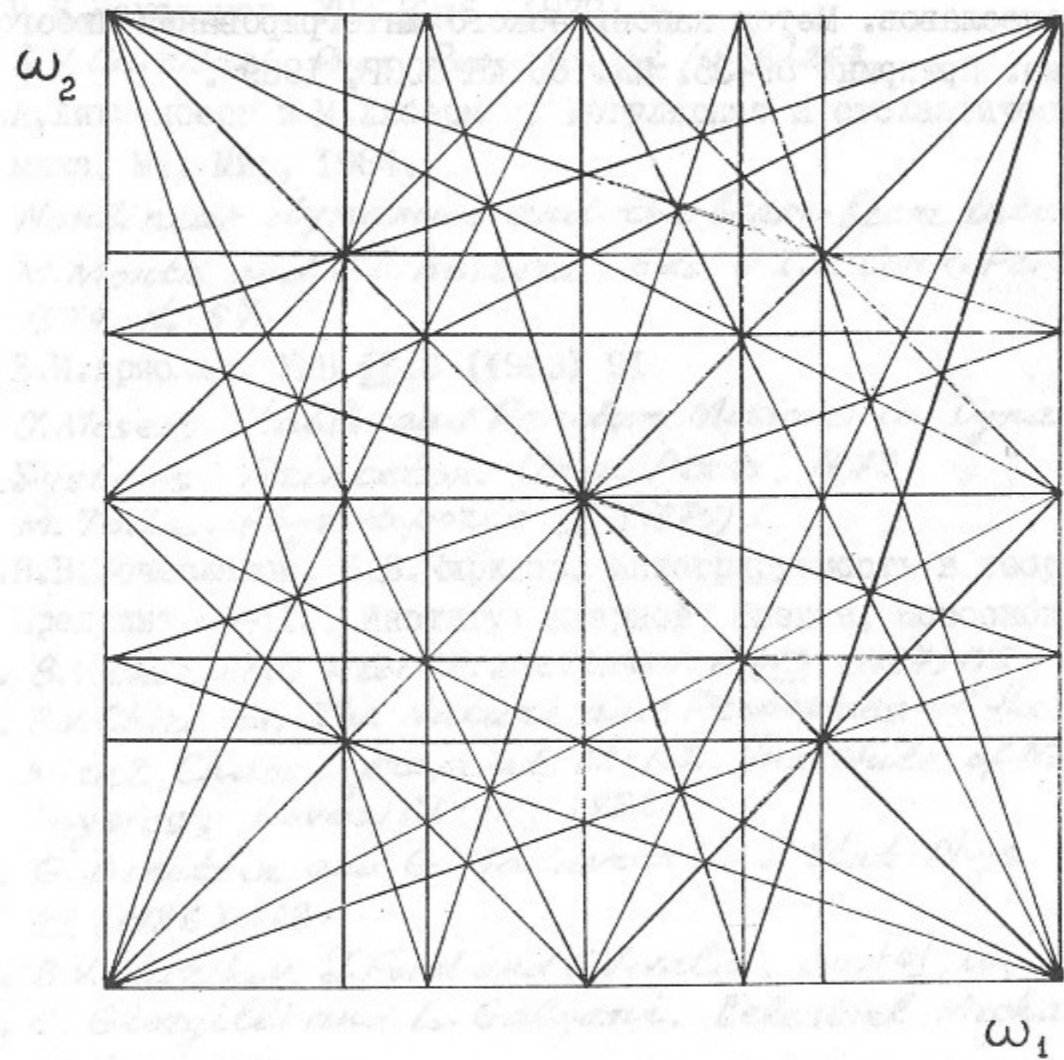


Рис.1. Схема нелинейных резонансов в пространстве частот для двух степеней свободы ( $N=2$ ) при наличии внешнего возмущения ( $\Omega \neq 0$ ) или для консервативной ( $\Omega = 0$ ) системы с  $N > 2$  (проекция на энергетическую поверхность).

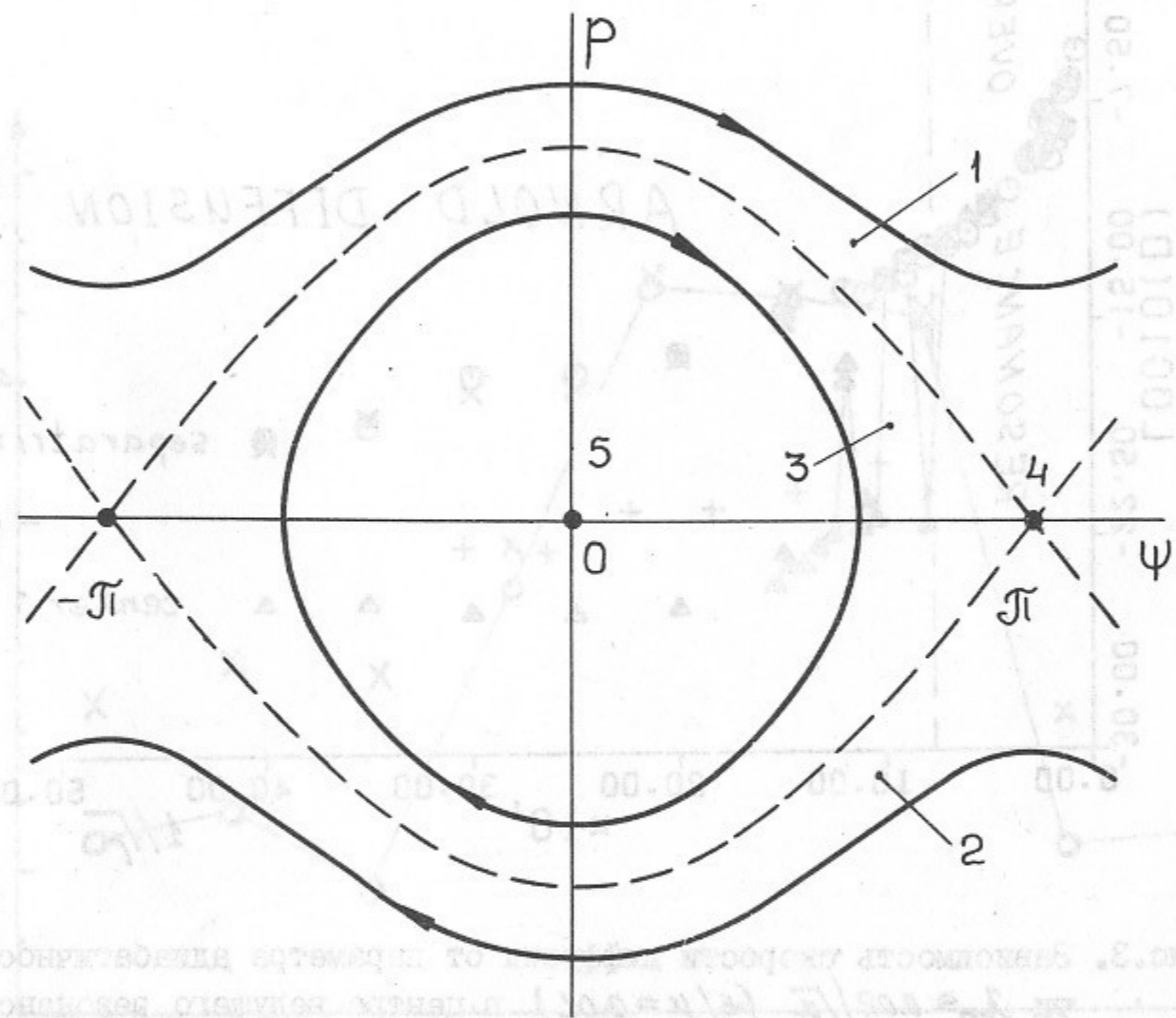


Рис.2. Структура нелинейного резонанса со стохастическим слоем между двумя силовыми линиями: 1, 2 - области вращения резонансной фазы  $\psi$  в противоположные стороны; 3 - область колебаний  $\psi$ ; 4, 5 - проекции неустойчивой и устойчивой периодических траекторий, соответственно; стрелки на границах слоя показывают направление движения; пунктир - невозмущенная сепаратриса.

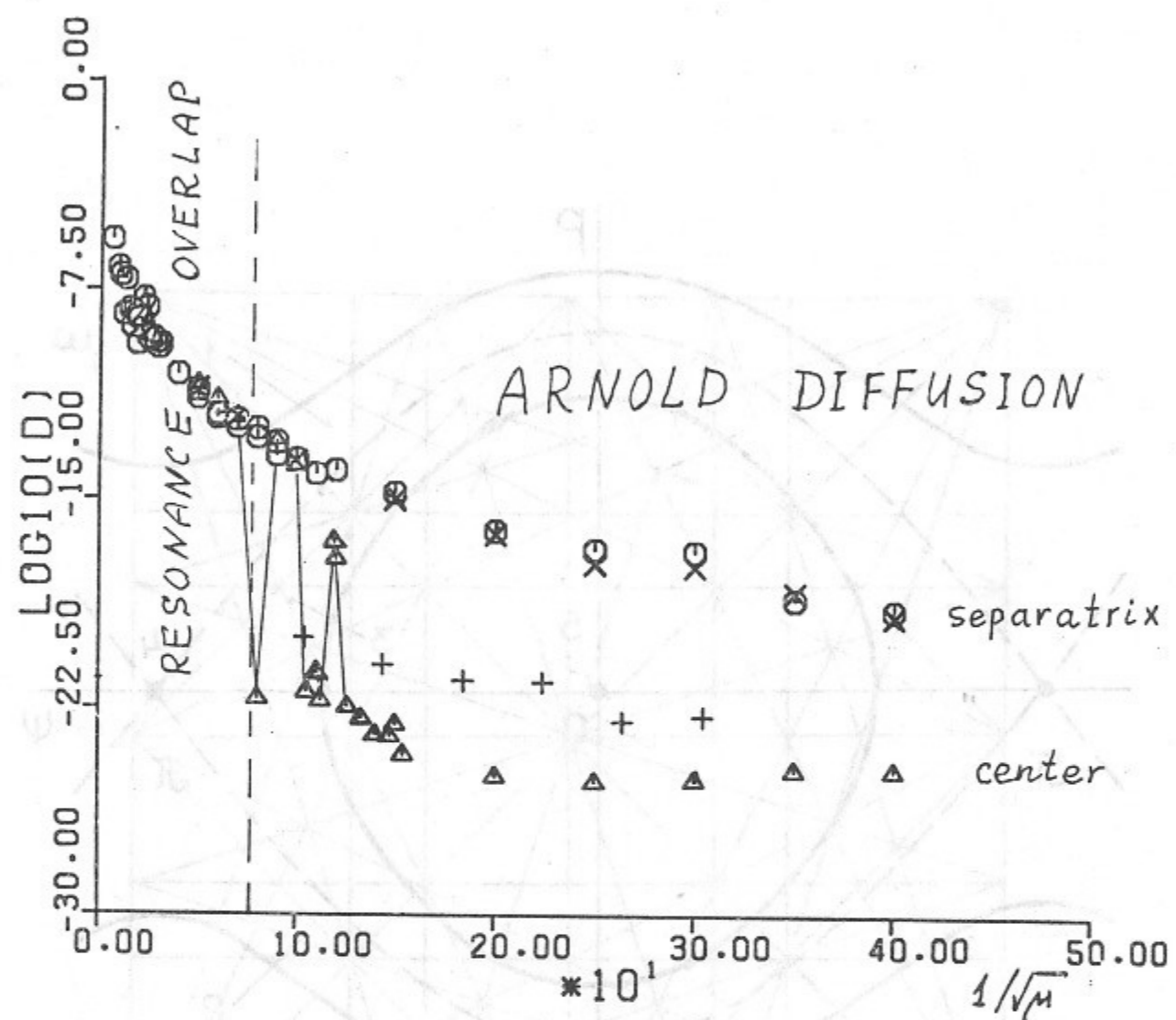


Рис.3. Зависимость скорости диффузии от параметра адиабатичности  $\lambda_p \approx 0.02/\sqrt{\mu}$  ( $\epsilon/\mu = 0.01$ ) в центре ведущего резонанса и внутри хаотического слоя. Пунктирная вертикальная линия отмечает переход от перекрытия резонансов к диффузии Арнольда.

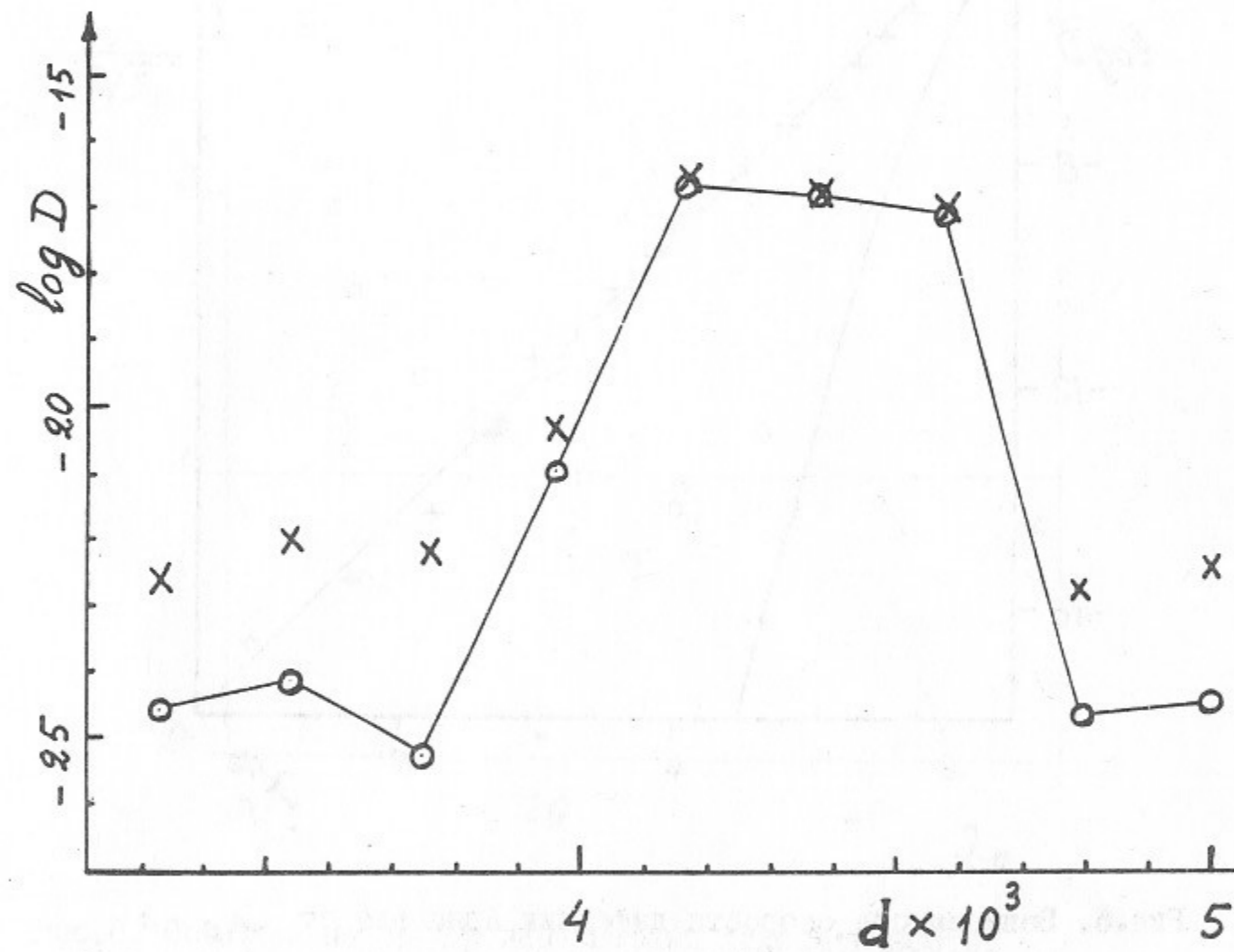


Рис.4. Зависимость скорости диффузии от начальных условий:  $\lambda_p = 4$ ;  $\epsilon/\mu = 0.1$ ;  $2d = x_1(0) - x_2(0)$ ;  $p_1(0) = p_2(0) = 0$ .  
 центру резонанса соответствует  $d = 0$ . [14].

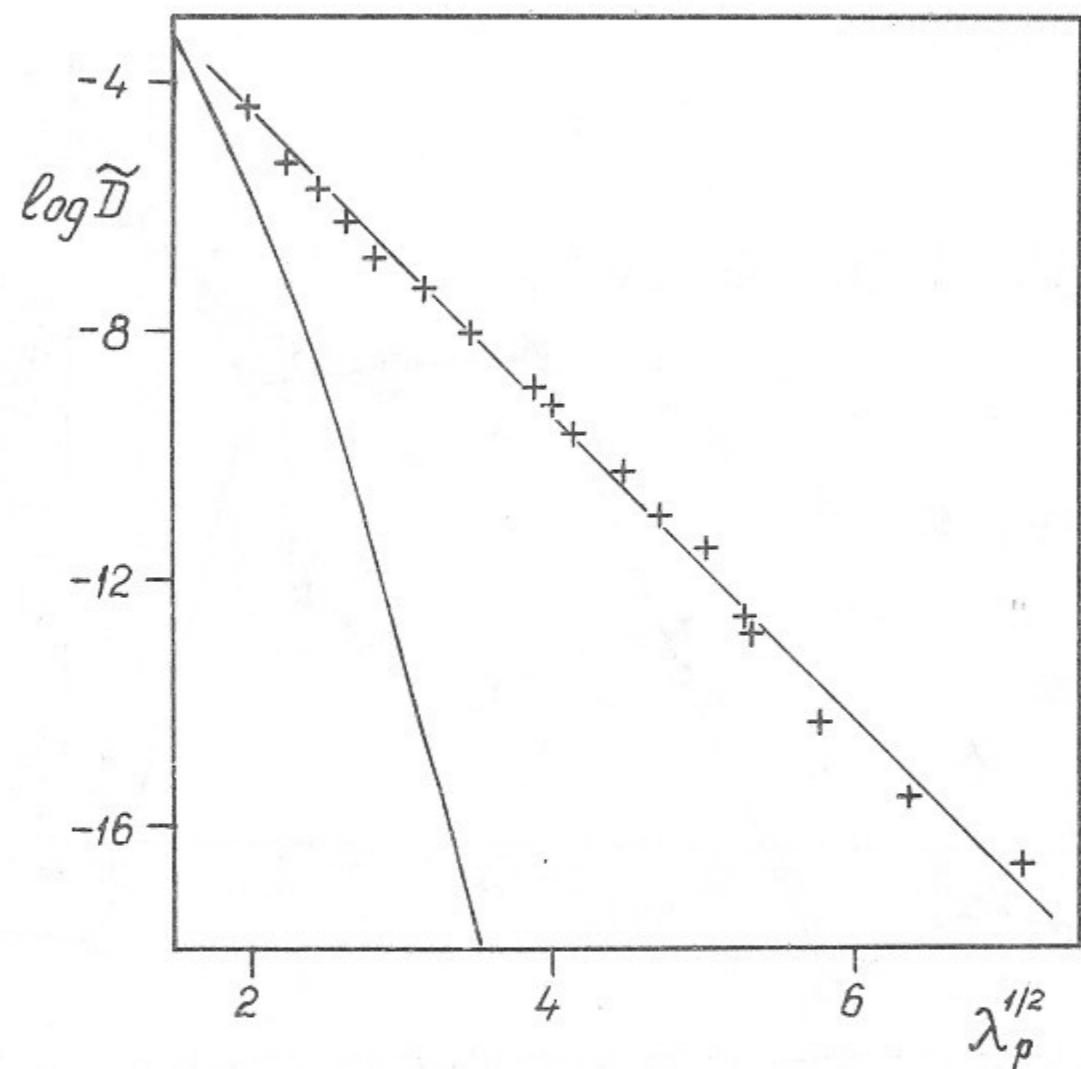


Рис.5. Зависимость скорости диффузии Арнольда от  $\lambda_p$  : крестики - численные результаты; прямая линия отвечает оценке (2.9) с  $E=2$ ;  $A=5.60$ ;  $D_0=2.0$  ; кривая - та же оценка с  $E=1$ ;  $A=\pi$  (первичные резонансы).

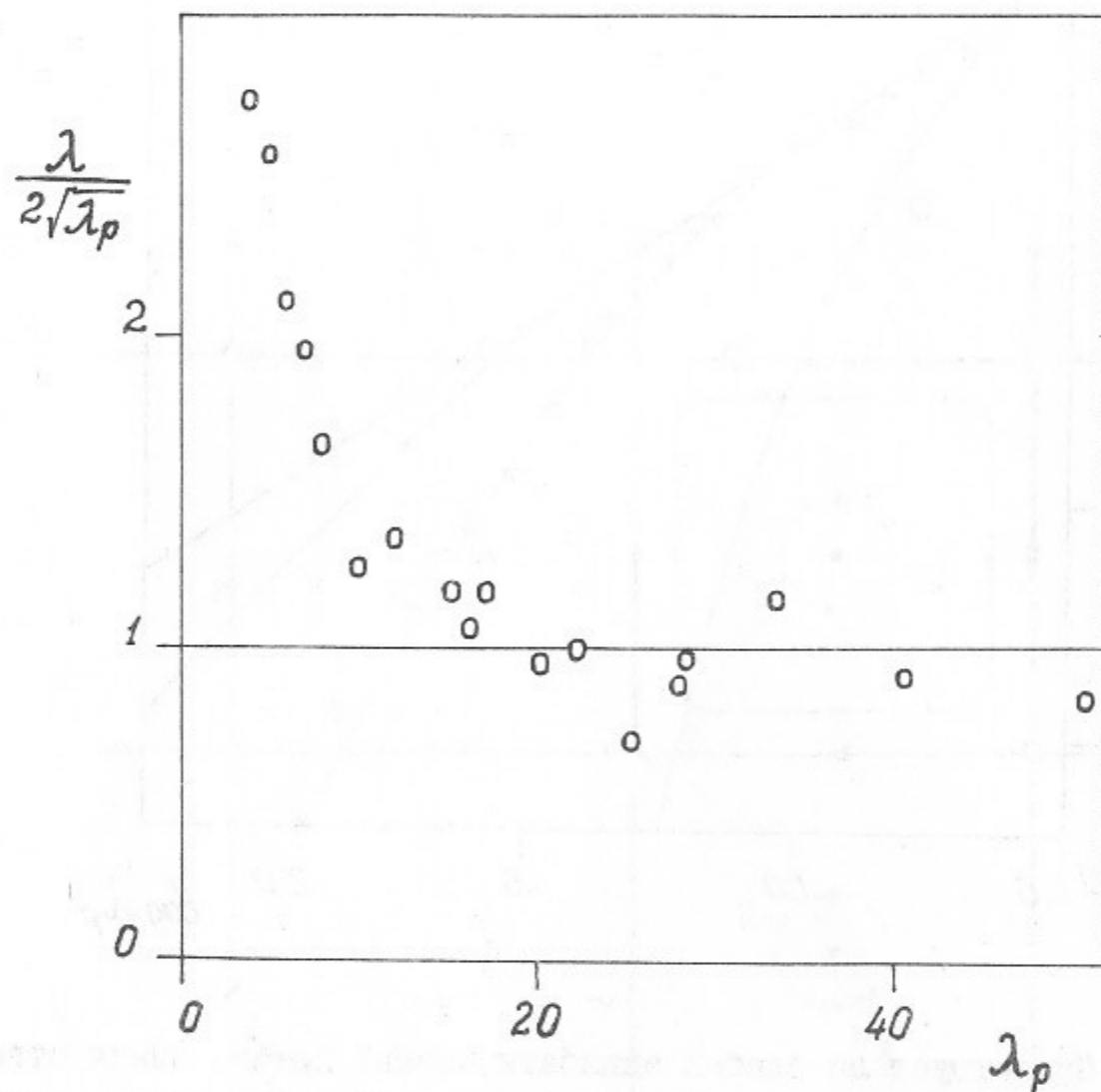
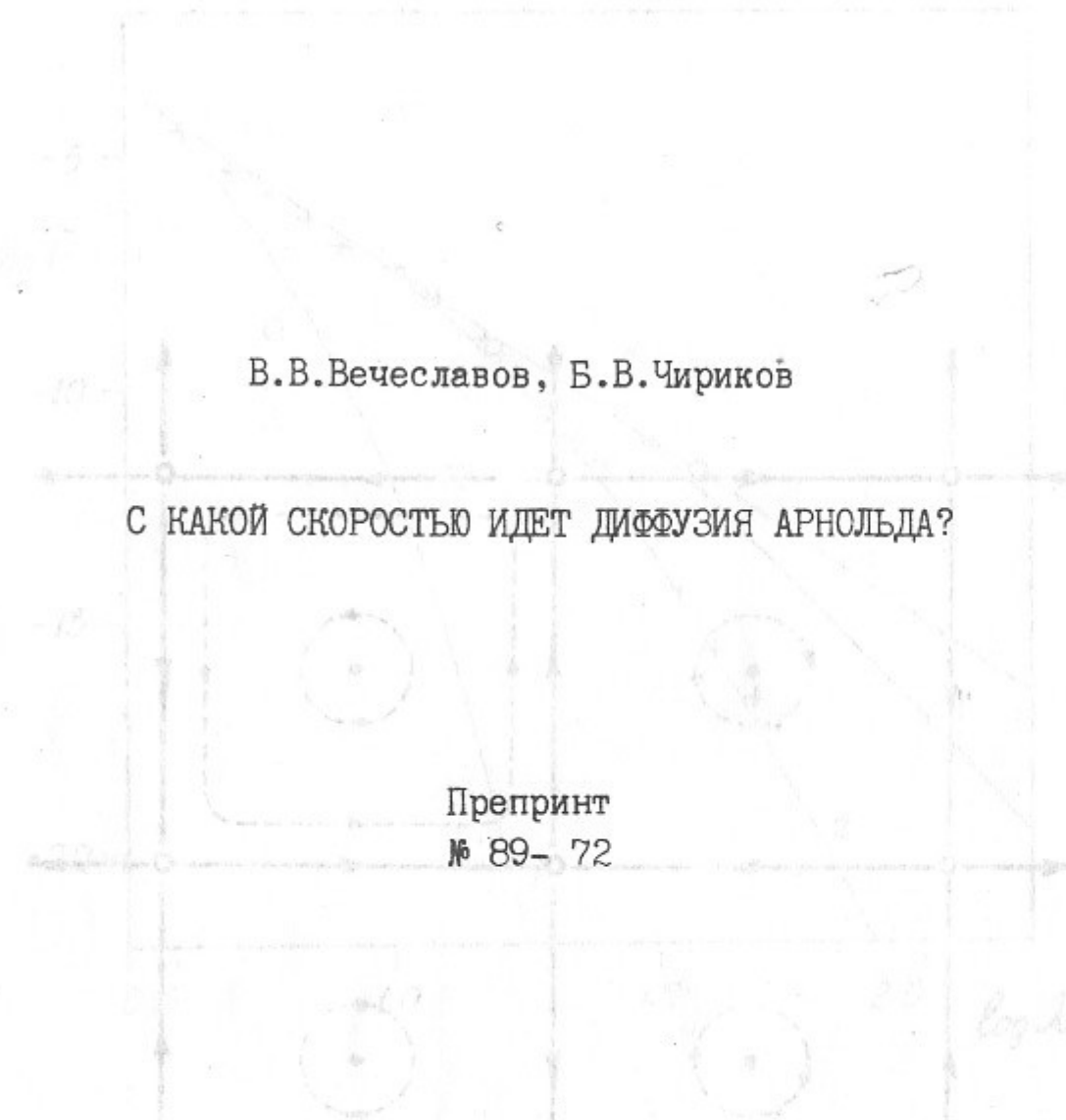


Рис.6. Соотношение между параметрами адиабатичности:  $\lambda$  - истинный;  $\lambda_p$  - формальный (по первичным резонансам). Горизонтальная линия - формула (2.15) при  $L=2$  .



В.В.Вечеславов, Б.В.Чириков

С КАКОЙ СКОРОСТЬЮ ИДЕТ ДИФФУЗИЯ АРНОЛЬДА?

Препринт  
№ 89-72

Работа поступила - 10 мая 1989 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 31.05.1989 г. МН 10232  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.2,0 печ.л., 1,7 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 72.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90