

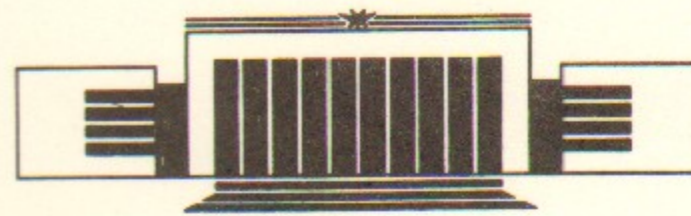


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР ²⁴

А.Р. Житницкий

ТОРОНЫ И НАРУШЕНИЕ КИРАЛЬНОЙ
СИММЕТРИИ В КХД И СКХД

ПРЕПРИНТ 89-34



НОВОСИБИРСК

Тороны и нарушение киральной симметрии в КХД и СКХД

А.Р. Житницкий

Институт ядерной физики
630090, Новосибирск 90, СССР

АННОТАЦИЯ

Рассматривается новый класс самодуальных торонных решений в калибровочных $SU(2)$ -теориях. Решение определено на многообразии с границей, обладает половинным топологическим зарядом $Q=1/2$ и действием $S = \frac{8\pi^2}{g^2} Q$. Вычислен вклад соответствующих конфигураций в киральный конденсат. Показано, что отличное от нуля значение конденсата обусловлено квазинулевыми модами из континуума. При этом автоматически выполняется аномальное тождество Кониши в суперсимметричной КХД. Для величины конденсата в КХД с $N_f=2$ получено значение

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\pi^2 e^{5/12} 2^4 \Lambda^3, \quad \Lambda^3 \equiv M_0^3 \exp\left\{-\frac{4\pi^2}{g^2(M_0)}\right\} \frac{1}{g^4(M_0)}.$$

© Институт ядерной физики СО АН СССР

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей статьи — анализ физических следствий, обусловленных существованием торонов [1], — самодуальных решений с дробным топологическим зарядом. Напомним, что целочисленность топологического заряда Q для инстантона [2] связана с компактификацией физического пространства в сферу, т. е. с отождествлением всех бесконечно удаленных точек. Выбор других граничных условий может привести, в принципе, к дробным топологическим зарядам. В частности, в $SU(N)$ -глюодинамике, определенной на гиперторе $T_1 \times T_1 \times T_1 \times T_1$, введение так называемых твистованных граничных условий [3] позволило получить решения классических уравнений — торонов [4], имеющих $Q=1/N$ и действие $S = \frac{8\pi^2}{g^2} \frac{1}{N}$.

Кроме твистованных граничных условий, возможны и другие способы описания решений с дробными Q : аналитическое продолжение в комплексное пространство, содержащее несколько римановых поверхностей; переход к описанию на орбифолдах или на многообразиях с границей. Именно последние подходы эксплуатировались в работах [1, 5] и будут использованы в настоящей статье.

Хотя торонное решение, описанное для калибровочных теорий в [1] и для σ -моделей в [5], формулируется принципиально в иных терминах, чем в [4], мы сохраняем термин «торон», введенный в [4]. Этим мы подчеркиваем тот факт, что решение самоду-

ально, минимизирует действие и имеет топологический заряд $Q=1/N$, т. е. обладает всеми свойствами, присущими оригинальному торону [4].

Несколько слов об интерпретации торонного решения, которое описано в [1] и будет эксплуатироваться в настоящей статье. В отличие от инстантонного решения [2], определенного на компактном многообразии без границы (сфера), торонное решение определено на многообразии с границей. В частности, границей при описании решения [1] служат два берега разреза, проведенного в плоскости $z=r+it$, $r=(x_i x_i)^{1/2}$. Хотя поля могут испытывать скачок на берегах разреза, физические величины (типа напряженности $G_{\mu\nu}^2$) однозначны. С помощью конформного преобразователя многообразие с разрезом можно отобразить на диск радиусом R [5в]. Исходное евклидово пространство может пониматься как предел $R \rightarrow \infty$. В такой интерпретации торонное решение «размазано» по всему пространству и в этом смысле сильно напоминает решение [4], в котором роль регулятора играет размер четырехмерного ящика L .

Можно поступить иначе и сделать конформное отображение на внешность круга с радиусом $\Delta \rightarrow 0$. В этом случае торонное решение может интерпретироваться как точечный дефект (при величине регулятора $\Delta \rightarrow 0$). Торонное действие $S_{\text{кл}} = \frac{8\pi^2}{g^2} Q$ не зависит, конечно, от величин размерных параметров R , Δ . Именно последняя интерпретация торона как точечного дефекта, регуляризованного таким образом, что уравнения самодуальности выполнены и при конечных значениях Δ , кажется нам наиболее предпочтительной. Лишь в конце вычислений Δ полагается равной нулю. Отметим, что, хотя классическое действие конечно, $G_{\mu\nu}^2$ имеет интегрируемую особенность $|\Delta - z|^{-1}$ [1], являющуюся отражением дробности Q .

С технической точки зрения наиболее удобно работать с исходным многообразием с разрезом в плоскости z . Именно в этом случае глобальные граничные условия [6]^{*)} на моды выполняются с

^{*)} Напомним, что глобальные граничные условия возникают из требования эрмитовости гамильтониана при анализе теории на многообразии с границей и играют ключевую роль в формулировке теоремы индекса Атьи—Патоли—Сингера, для многообразий с границей [6] (не путать с теоремой Атьи—Сингера, сформулированной для компактных многообразий без границы и имеющей отношение к подсчету числа нулевых мод в поле стандартного инстантона).

помощью естественного требования однозначности физических, калибровочно-инвариантных величин [5в].

Отметим, что имеется красивая аналогия^{**)} обсуждаемых торонных дефектов с описанием дислокаций, возникающих в физике твердого тела (см., например, [7]). В последнем случае объектом описания является вектор смещения $\vec{u}(r)$ узла от его положения в идеальной решетке. Существование дислокации проявляется в том, что $\vec{u}(r)$ при обходе по любому замкнутому контуру, охватывающему линию дислокации, получает приращение \vec{b} , равное периоду решетки. Тем самым вектор смещения является неоднозначной функцией координат; физической неоднозначности однако нет, так как приращение на период не меняет состояния решетки. В частности, тензор напряжений является однозначной функцией координат. С технической точки зрения, обычно для описания поля смещений в теорию вводятся фиктивные δ -образные особенности, обеспечивающие требуемый скачок [7]. В задаче с тороном мы предпочитаем проводить описание на двух римановых поверхностях [1], что избавляет нас от необходимости введения фиктивных сил. Отметим, что дислокация — линейный дефект структуры, определяемый вектором Бюргерса \vec{b} . В нашем случае аналогом \vec{b} является вектор, ортогональный плоскости (r, t) и направленный вдоль пятого, нефизического измерения. Поэтому в физическом пространстве торон выглядит как точечный дефект.

Несколько слов о мотивах рассмотрения конфигураций с $Q=1/2$. Наиболее ярко необходимость анализа таких конфигураций видна в суперсимметричных теориях. В частности, в суперсимметричной глюодинамике инстантон обеспечивает ненулевое значение лишь коррелятора $\langle \lambda^2(0), \lambda^2(x) \rangle$ [8, 9] в соответствии с 4 нулевыми модами глюино λ в поле инстантона (см., например, обзор [10]). В поле торона с уменьшением Q в два раза, уменьшается количество нулевых мод глюино ровно вдвое, что обеспечивает отличное от нуля значение собственно конденсата $\langle \lambda^2 \rangle$ [1].

Аналогичная ситуация, как будет показано в настоящей статье, возникает и в СКХД, т. е. в теории с полями материи фундаментального представления. И в этом случае инстантон способен обеспечить ненулевое значение лишь некоторых корреляторов, но не отдельных конденсатов $\langle \lambda^2 \rangle$, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, ... Торон же имеет в точности необходимые свойства, чтобы обеспечить ненулевые значения этих конденсатов. Однако, по сравнению со случаем суперсимметричной

^{**)} Автор выражает благодарность А.З. Паташинскому за указанную аналогию.

глюодинамики, имеется принципиальное различие, связанное с существованием нулевых мод. Дело в том, что, как объяснялось выше и подробнее в [1], торон обеспечивает существование двух нулевых мод глюино (фермионов присоединенного представления) и именно эти моды дают ненулевой вклад в $\langle \lambda^2 \rangle$. Фермионы фундаментального представления ведут себя кардинально иным образом, так как в поле торона они не могут иметь нулевых мод вовсе (в этом легко убедиться из вида аксиальной аномалии). Однако след о том, что торон есть топологический объект, проявляется в существовании квазинулевых мод, лежащих в непрерывном спектре. Именно эти моды, как будет показано в последующих разделах, играют ключевую роль при вычислении торонной меры и киральных конденсатов.

План работы следующий. В разделе 2 обсуждается спектр оператора Дирака для фермионов фундаментального представления с малой массой m . На основе полученных результатов определяется торонная мера в СКХД. В разделе 3 вычисляются киральные конденсаты и проверяется тождество Кониши.

Приобретая опыт работы с полями фундаментального представления в СКХД, мы обратимся в разделе 4 к физически интересному случаю КХД. Будет показано, что теория с числом легких ароматов N_f , равным числу цветов N_c , является выделенной и в некоторых аспектах (сокращение ненулевых мод между бозонами и фермионами) напоминает поведение суперсимметричных моделей. Вычисление торонной меры и кваркового конденсата $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ при $N_f = N_c = 2$ завершает 4 раздел.

2. ФЕРМИОННЫЙ ДЕТЕРМИНАНТ И ТОРОННАЯ МЕРА В СКХД

Прежде всего напомним некоторые результаты, полученные для торонной меры в суперсимметричной глюодинамике [1]:

$$Z_{\text{SYM}} = C \frac{M_0^4 d^4 x_0}{g^4} \frac{d^3 \varepsilon}{M_0} \exp\left\{-\frac{4\pi^2}{g^2}\right\} = C \Lambda^3 \frac{1}{g^4} d^2 \varepsilon d^4 x_0. \quad (1)$$

$$\Lambda^3 \equiv M_0^3 \exp\left\{-\frac{4\pi^2}{g^2}\right\}.$$

Здесь фактор $g^{-4} M_0^4 d^4 x_0$ обусловлен четырьмя бозонными нулевыми модами; фактор $M_0^{-1} d^2 \varepsilon$ — двумя нулевыми модами глюино;

множитель $\exp\left\{-\frac{4\pi^2}{g^2}\right\}$ есть вклад классического действия торона.

Выражение (1) обеспечивает ненулевое значение конденсата глюино $\langle \lambda^2 g^2 \rangle$ и имеет точно ренорминвариантный вид:

$$\langle g^2 \lambda^2 \rangle = 2C \frac{1}{g^2} \Lambda^3. \quad (2)$$

Перейдем к вычислению торонной меры в СКХД. В этом случае введение фермионов и бозонов фундаментального представления вносит следующий дополнительный фактор (регуляторный вклад опущен) [11]:

$$Z_{\text{SQCD}} = Z_{\text{SYM}} \cdot (d_F)^{N_f} (d_B)^{-N_c},$$

$$d_F = \text{Det} \begin{bmatrix} -i\hat{D} - im \\ -i\hat{\partial} - im \end{bmatrix}, \quad d_B = \text{Det} \begin{bmatrix} -D^2 + m^2 \\ -\partial^2 + m^2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Стандартная манипуляция с детерминантом позволяют выразить его через функцию Грина соответствующего оператора [12]:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dm} \ln d_F &= \text{Tr} \left[\frac{m^2}{-(\hat{D})^2 + m^2} - \frac{m^2}{-\hat{\partial}^2 + m^2} \right] = \\ &= \text{Tr} \left[\frac{m^2}{-D^2 + m^2} - \frac{m^2}{-\partial^2 + m^2} \right] - \text{Tr} \frac{m^2 \gamma_5}{[-\hat{D}^2 + m^2]}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь символ Tr понимается в обобщенном смысле как след по пространственно-временным, цветовым и лоренцевским индексам. На последнем этапе при получении (4) было использовано соотношение

$$-\hat{D}^2 \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) = -D^2 \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right),$$

справедливое для любого самодуального поля.

Хорошо известно [13], что последнее слагаемое в (4) связано с индексом оператора Дирака, не зависит от m вовсе и точно равно топологическому заряду внешнего поля Q . Проще всего в этом убедиться, взяв производную $(d/dm^2) \text{Tr}$ и доказать независимость Tr от m^2 , а затем вычислить обсуждаемый Tr при больших m^2 .

Что касается первых двух слагаемых в (4), то их вклад связан с ненулевыми модами и точно сокращается с соответствующими бозонными, определяющими d_B . Подведем итог: дополнительный

вклад, обусловленный полями материи, с учетом регулятора определяется множителем:

$$m \frac{d}{dm} \ln Z_{\text{SQCD}} = Q N_f; \quad Z_{\text{SQCD}} \sim \left(\frac{m}{M_0} \right)^{Q N_f}, \quad (5a)$$

$$-\text{Tr} \frac{m^2 \gamma_5}{-\hat{D}^2 + m^2} = Q. \quad (5b)$$

В частности, для инстантона с $Q=1$ формула (5) воспроизводит хорошо известный результат [11] о подавлении $\sim m$ безмассовыми фермионами инстантонного перехода. В свою очередь, как известно, это подавление связано с существованием нулевых мод. Так что выражение (5b) для целых значений Q является проекционным оператором на нулевые моды, каждая из которых, нормированная на единицу (в смысле $\text{Tr} \sim d^4x$) дает вклад в (5b), точно равный единице.

Хотя формальное выражение для меры получено ($Q=1/2$ для $SU(2)$):

$$Z_{\text{SQCD}} = C \frac{1}{g^4} M_0^4 d^4x_0 \frac{d^2\epsilon}{M_0} \left(\frac{m}{M_0} \right)^{N_f/2} \exp \left\{ -\frac{4\pi^2}{g^2} \right\}, \quad (6)$$

возникает естественный вопрос: каким образом может выполняться соотношение (5b) с дробной правой частью, если каждая нулевая мода вносит в левую сторону (5b) лишь целочисленный вклад? Формальный ответ хорошо известен [6, 14] и связан с тем, что наше решение определено на многообразии с границей. Поэтому эффекты границы, отсутствующие при анализе инстантонного решения, играют важную роль в рассматриваемом случае.

С физической точки зрения ситуация может быть описана следующим образом [15, 16]. Левая сторона выражения (5b), являющаяся дивергенцией аксиального тока, может быть разложена стандартным образом по собственным функциям оператора Дирака $-i\hat{D}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$ с собственными значениями λ . Следуя [15], обозначим соответствующую спектральную плотность $C(\lambda, r)$. Здесь $r \rightarrow \infty$ и зависимость $C(r)$ есть напоминание о том, что был взят интеграл от полной дивергенции и его величина зависит от значения подынтегрального выражения при больших r . Таким образом, утверждение о том, что (5b) не зависит от m , эквивалентно утверждению, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int d\lambda C(\lambda, r) \frac{m^2}{\lambda^2 + m^2} = Q, \quad (7)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} C(\lambda, r) = Q\delta(\lambda).$$

Соотношение (7) есть в точности результат [15], означающий, что при дробных значениях Q в (5b) дают вклад квазиульевые моды из континуума («unbound resonance at $\lambda=0$ » по терминологии [15]). Эти квазиульевые моды имеют ту отличительную особенность, что при помещении системы в ящик размеров r собственные значения упомянутых мод стремятся к нулю быстрее, чем r^{-1} .

Как мы увидим, ниже, спектр, в котором континуум начинается бесщелевым образом с $\lambda=0$, играет исключительно важную роль в формировании киральных конденсатов. С другой стороны, как видно из (5), (7), именно такой вид спектра является неотъемлемой частью конфигураций с дробными значениями Q . При целых же значениях Q соотношение (5b) насыщается исключительно нулевыми модами с $C(\lambda) = +1 \cdot \delta(\lambda)$; континуум в этом случае отделяется от $\lambda=0$ щелью конечной ширины (для инстантона размер щели $\sim r^{-1}$).

Вне зависимости от того, как интерпретировать соотношение (5) — в терминах теоремы индекса [6, 14], с точки зрения спектральной плотности [15] или на языке [16] функции Йоста и теоремы Левинсона для потенциального рассеяния, — основной результат настоящего раздела есть выражение (6). Именно соотношение (6) показывает, что каждый фермион вносит мультипликативный фактор \sqrt{m} и поэтому формулировка теории с изначально равной нулю массой не является адекватной^{*}). Киральный предел мы всегда будем понимать в смысле предельного перехода $m \rightarrow 0$ в окончательных выражениях.

3. КИРАЛЬНЫЕ КОНДЕНСАТЫ В СКХД

Имея явное выражение (6) для торонной меры в СКХД, не составляет труда вычислить конденсат глюино, аналогично тому, как это было сделано в глюодинамике (2), [1]. Для этого необходимо, как обычно, вместо λ -полей подставить их нулевые моды и проинтегрировать по коллективным координатам. В результате

^{*} Ранее на аналогичном утверждении настаивали авторы работ [17, 10].

имеем

$$\langle g^2 \lambda^2 \rangle = \frac{2C}{g^2} \Lambda^{3-N/2} m^{N/2}, \quad \Lambda^{3-N/2} \equiv M_0^{3-N/2} \exp\left\{-\frac{4\pi^2}{g^2}\right\}. \quad (8)$$

Выражение (8), как легко убедиться, имеет точно ренорминвариантный вид. Более того, зависимость конденсата от массы ($\langle \lambda^2 \rangle_{N_f=1} \sim \sqrt{m}$, $\langle \lambda^2 \rangle_{N_f=2} \sim m$) согласуется с инстантонными расчетами [10, 17, 18] и лишь численным фактором отличается от последних (см. ниже). Что касается теорий с $N_f > N_c = 2$, то в этом случае инстантоны не генерируют каких-либо функций Грина, позволяющих определить $\langle \lambda^2 \rangle$. В этом смысле формула (8) является новым результатом. Более важно, однако, то, что торонное исчисление позволяет находить собственно конденсаты, а не корреляторы специального вида, из которых эти конденсаты могут быть извлечены. Кроме того, заметим, что зависимость конденсата от массы m с дробной степенью выглядит крайне неестественной в инстантонных расчетах, где масса может входить в ответ только в целой степени (технически, дробная степень возникает после извлечения корня из корреляторов определенного вида). В торонных расчетах (6) такая зависимость от массы является неотъемлемой чертой конфигураций с дробными Q . В этом случае устойчивыми решениями оказывается в точности конфигурации с $Q = 1/2$ [1], которые обеспечивают, в свою очередь, зависимость Z от массы $Z \sim m^{N/2}$ (5), именно такая зависимость предсказывается на теоретическом уровне как следствие суперсимметрии и тождеств Уорда [10]. В более общем случае для группы $SU(N)$ естественно ожидать существования $Q = 1/N_c$ (см. ниже). В этом случае нетривиальная зависимость $\langle \lambda^2 \rangle$ от массы $\sim m^{N/N_c}$ также находит свое естественное объяснение.

Другое важное отличие от инстантонных расчетов состоит в следующем. Как известно [10], в СКХД с калибровочной группой $SU(N)$ имеется N вырожденных вакуумов $|\Omega_k\rangle$, отвечающих существованию Z_N -симметрии. Отличие от нуля конденсата (8) означает спонтанное нарушение этой Z_N -симметрии. Причем маркировка вакуумных состояний $|\Omega_k\rangle$ определяется фазой конденсата:

$$\langle \Omega_k | \lambda^2 | \Omega_k \rangle = \exp\{2\pi i k / N\} \langle \Omega_0 | \lambda^2 | \Omega_0 \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

Напомним также, что инстантонные вычисления отвечают усреднению по всем N -состояниям [10]. Так что отличный от нуля результат может быть получен только для функций Грина, инвариантных

относительно Z_N (например, $\langle \prod_{i=1}^N \lambda^2(x_i) \rangle$). Результат (9) при этом получается извлечением корня N -й степени из единицы.

В торонных вычислениях мы имеем дело непосредственно с отдельно взятым вакуумным состоянием $|\Omega_k\rangle$. Действительно, торонный вакуумный переход с $Q = 1/N$ меняет киральный заряд Q_5 на 2 единицы (что следует, например, из выражения для аномалии: $\partial_\mu a_\mu = 2NQ$). Состояние же $|\Omega_k\rangle$ является суперпозицией вакуумов с определенными киральными зарядами $|Q_5=0\rangle$, $|Q_5=2\rangle$, ..., $|Q_5=2(N-1)\rangle$ [1, 19]:

$$|\Omega_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left\{i \frac{2\pi k l}{N}\right\} |Q_5=2l\rangle. \quad (10)$$

Так что отличное от нуля значение для матричного элемента перехода (8) $= \langle Q_5=2 | g^2 \lambda^2 | Q_5=0 \rangle$ с учетом (10) воспроизводит формулу (9).

Еще один киральный конденсат, представляющий интерес, — скалярный $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ (мы используем обозначения обзора [10]). Его величина может быть однозначно восстановлена из аномального тождества Кониши [20]:

$$\frac{1}{32\pi^2} \langle g^2 \lambda^2 \rangle = m \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (11)$$

Однако мы предпочитаем явно вычислить $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, воспроизвести соотношение (11) и тем самым убедиться в самосогласованности подхода в целом.

В техническом плане вычисление $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ несколько более сложная задача, чем $\langle \lambda^2 \rangle$ (8). Это видно хотя бы из того, что ненулевой результат для $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ получается в следующем порядке малости по g^2 (см. (11)) и поэтому требуется учет юкавского взаимодействия типа $\sim g\psi\lambda\psi^*$ (см. рис. 1). Действуя методом, описанным в [10, 17], с учетом (6) приходим к следующему выражению для $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi(x) \rangle &= C \frac{1}{g^4} \Lambda^{3-N/2} m^{N/2} d^2 \varepsilon(-2g^2 m) \int d^4 x_0 d^4 y d^4 y' \times \\ &\times \text{tr} \left(\frac{1}{D^2 - m^2} \right)_{xy} \lambda_0(y) \left(\frac{1}{D^2 - m^2} \right)_{yy'} \lambda_0(y') \left(\frac{1}{D^2 - m^2} \right)_{y'x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь λ_0 — нулевые моды глюино; $(D^2 - m^2)^{-1}$ — соответствующие массивные пропагаторы в поле торона, расположенного в точке x_0 ; tr понимается в смысле следа по лоренцевским и цветовым индексам. Массы всех ароматов считаются равными m ; анализ более общего случая осуществляется тривиальной заменой в мере:

$$m^{N_i/2} \rightarrow \prod_{i=1}^{N_i} m_i^{1/2},$$

маркировкой конденсата $\langle \tilde{\psi}^i \psi_i \rangle$ (нет суммирования по i) и массы m_i в формуле (12) для каждого интересующего нас i -го аромата.

Конечно, явное вычисление (12) с малой массой m , кажется совершенно безнадежной задачей, хотя бы потому что для торона (как и для инстантона) неизвестно замкнутое выражение для массивного пропагатора. Эту трудность мы преодолеем, следуя логике [10, 17] и вычисляя величину $\langle \tilde{\psi} \psi \rangle$ при больших $m \gg \Lambda$. Полученный ответ, как следствие суперсимметрии, верен для любых m [10, 17, 18]. С учетом этого общего замечания ясно, что при $m \rightarrow \infty$ пропагаторы заменяются на свободные, а интеграл $d^4 x_0$ от нулевых мод глюино заменяется на единицу (это отвечает нормировке нулевых мод λ_0). В итоге имеем

$$\langle \tilde{\psi} \psi \rangle = 2C\Lambda^{3-N_i/2} m^{N_i/2} \frac{1}{m} \frac{1}{32\pi^2}. \quad (13)$$

Сравнивая (8), (13) с (11), убеждаемся, что соотношение Кониши выполняется автоматически, что указывает на самосогласованность подхода в целом. Отметим, также что если бы мы могли вычислить интеграл (12) при малых m , то он должен равняться m^{-2} . Такое сингулярное при $m \rightarrow 0$ поведение ожидалось, конечно, заранее и обусловлено квазиулевыми модами, обсуждавшимися во втором разделе. Приведенное выше вычисление демонстрирует, что киральный предел, понимаемый в смысле предельного перехода $m \rightarrow 0$, кардинально отличается от ситуации, когда m полагается равной нулю в исходном лагранжиане. В частности, при $N_f = 2$ $\langle \tilde{\psi} \psi \rangle \sim \Lambda^2$ — конечная величина, не зависящая от массы. Однако стартуя с меры для безмассовой теории (в этом случае Z_{SQCD} тождественно обращается в нуль (6)), можно было бы наивно ожидать, что все конденсаты также зануляются. Этого не происходит, несмотря на то, что настоящих нормируемых нулевых мод фундаментального представления в поле торона не существует.

В заключение настоящего раздела обсудим возможность извлечения постоянной C (6) из инстантонной формулы [11]. Для этого предположим, что два близлежащих торона с центрами x_1 и x_2 могут интерпретироваться как инстантон с размером $\rho = x_1 - x_2 \rightarrow 0$,

расположенный в точке $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Такая интерпретация согласуется с величиной действия и топологического заряда каждой из систем, а также с количеством бозонных и фермионных нулевых мод. Действительно, в поле инстантона имеется 8 бозонных и 4 фермионных нулевых моды глюино. Эти числа согласуются с четырьмя трансляционными нулевыми модами и двумя модами глюино, сопровождающими каждый их двух торонов^{*)}.

Итак, запишем инстантонную меру для СКХД [10]:

$$Z_{\text{инст}} = \frac{1}{g^8} M_0^6 \frac{d^4 x_0 d^4 \rho}{2\pi^2} \frac{4}{\pi^2} (4\pi^2)^4 \left(\frac{m}{M_0}\right)^{N_f} d^2 \varepsilon_1 d^2 \varepsilon_2 \exp\left\{-\frac{8\pi^2}{g^2}\right\}. \quad (14)$$

В выражение (14) мы заменили стандартный множитель $\rho^3 d\rho$ на $d^4 \rho / (2\pi^2)$, имея в виду в дальнейшем интерпретировать $d^4 x_0 d^4 \rho$ как интеграл по трансляциям каждого из торонов $d^4 x_1 d^4 x_2$. В итоге, выражение (14) распадается на произведение двух множителей, каждый из которых может интерпретироваться как торонная мера (6). Тот факт, что такое разбиение согласуется с формулой (6)^{**)}, подтверждает наше исходное предположение. Далее, полагая

$$Z_{\text{инст}} = \frac{1}{2!} Z_{\text{тор}}(x_1) Z_{\text{тор}}(x_2),$$

^{*)} Заметим, что эта гипотеза подтверждается в более общем случае произвольной группы Ли G . Как известно, число нулевых мод в поле инстантона определяется квадратичным оператором Казимира $C(G)$ и равно $4C(G)$. В частности, для $SU(N)$ $C(G = SU(N)) = N$. С другой стороны, можно ожидать, что минимально допустимый топологический заряд в точности равен $Q = N^{-1}$. Тем самым $4N$ нулевых инстантонных мод естественно интерпретировать как трансляции N -торонов. Кроме того, в суперсимметричной глюодинамике существование N -вакуумов и $2N$ нулевых мод глюино [10, 18] также согласуется с гипотезой о существовании $Q = N^{-1}$. Известный вид β -функции и аксиальной аномалии также поддерживает эту гипотезу. Самое удивительное, что все эти факты самосогласованы для произвольной группы Ли! Автор выражает благодарность Д. Дьяконову за обсуждение этого вопроса.

^{**)} Напомним, что формула (6) была получена без каких-либо ссылок на инстантонные расчеты.

где 2! учитывает тождественность, имеем

$$C = 2^5 \pi^2. \quad (15)$$

Теперь можно сравнить величину конденсата $\langle \lambda^2 \rangle$ (8), (15) с инстантонными вычислениями [10, 17]. Численное отличие оказывается равным $\sqrt{4/5}$. В настоящее время мы не знаем, как интерпретировать этот результат — должны ли совпадать эти числа, существует ли опасность двойного счета или, наоборот, возможность неучета каких-либо вкладов? Эти вопросы тем более правомерны, что вычисления в режиме сильной связи не дают полной уверенности в возможности пренебречь взаимодействием (это касается как торонов, так и инстантонов, см. обсуждения в [18]), хотя каждый из расчетов самосогласован в том смысле, что обеспечивает соотношение Кониши (11). Другими словами, хотя приближение разреженного газа (формула (6)) дает определенный разумный ответ, нет доказательства того, что этот ответ полный.

4. КИРАЛЬНЫЙ КОНДЕНСАТ В КХД

Преобретая опыт работы с полями фундаментального представления в суперсимметричных теориях и убедившись в разумности получаемых результатов, основанных на торонном решении, обратимся к вычислению торонной меры в КХД.

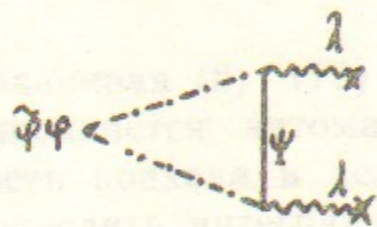


Рис. 1.



Рис. 2.



Рис. 3.

..... — скалярное ϕ -поле, — поле кварка ψ , ~ — поле глюино λ , - - - — поле глюона a_n ,
X — взаимодействие с внешним полем.

По сравнению с торонной плотностью в СКХД (1), (3) имеют следующие очевидные различия:

- 1) отсутствует фактор $d^2\varepsilon/M_0$, связанный с нулевыми модами глюино;
- 2) отсутствует фактор $(d_B)^{-N_f}$, связанный со скалярными полями;
- 3) ненулевые моды в КХД не сокращаются и должны быть включены в анализ.

Начнем с обсуждения ненулевых калибровочных мод. Как известно [21], их вклад с логарифмической точностью может быть легко восстановлен с помощью вычисления обычной фейнмановской диаграммы (рис. 2). Результат равен [21]

$$S = S_{\text{кл}} + \Delta S,$$

$$\Delta S_g = \frac{2}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} \ln M_0^2 \int d^4x \left[\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^2 \right]_{\text{кл}} = \frac{2}{3} (\ln M_0) Q, \quad (16)$$

$$\exp\{-\Delta S_g\} = \exp\left\{-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln M_0\right\}.$$

Аналогичным образом, вклад ненулевых мод, связанный с существованием фермионов определяется рис. 3 и равен [21]

$$\Delta S_f = \frac{g^2 N_f}{16\pi^2} \ln M_0^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \int d^4x \left[\frac{1}{4} g_{\mu\nu}^2 \right]_{\text{кл}} = Q N_f \left(1 - \frac{1}{3}\right) \ln M_0. \quad (17)$$

Мы намеренно разделили два вклада в (17). Первый вклад в скобках (1) связан со спиновой частью взаимодействия и приводит к фактору $\exp\{-Q N_f \ln M_0\}$. При целых значениях $Q=1$ этот множитель обезразмеривает вклад нулевой моды: $(m/M_0)^{N_f}$. При дробных Q этот множитель связан с квазиулевыми модами, см. (4), (5). Второй член в (17) лишь фактором (-2) отличается от вклада скалярной частицы. Причем, двойка соответствует двум состояниям поляризации, а минус — антикоммутируемости фермионов. Такое соответствие согласуется с выражением (4), где первое слагаемое совпадает с выражением для скалярного детерминанта, а второе, связанное со спином, в точности воспроизводит $\exp\{-Q N_f \ln M_0\}$. Отметим, что, по сравнению с инстантонными вычислениями, не только действие уменьшилось в два раза, но и вклад ненулевых мод оказался в 2 раза меньше (фактор $Q=1/2$ перед $\ln M_0$ в (16), (17)). Ясно, что этот эффект автоматически обеспечивает правильное ренорминвариантное выражение. На языке собственных функций соответствующих квадратичных операторов обсуждаемый эффект подробно анализировался в σ -модели [5a] и связан с уменьшением количества допустимых мод.

Наконец, последний штрих, завершающий анализ ненулевых мод, связан с первым слагаемым в (4) при $m \rightarrow 0$. В СКХД этот множитель не доставлял хлопот: он точно сокращался с соответствующим бозонным детерминантом. В данном случае он не равен нулю, однако при $m \rightarrow 0$ мал, $\sim m^2 \ln m$, причем, с логарифмической

точно может быть вычислен, исходя из выражения для безмассовой функции Грина в поле торона (см. Приложение).

Собирая все факторы вместе, имеем

$$Z_{QCD} = K \frac{M_0^4}{g^4} d^4 x_0 \left(\frac{m}{M_0} \right)^{N_f/2} \exp \left\{ -\frac{4\pi^2}{g^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{6} (2 - N_f) \ln M_0 \Delta \right\}. \quad (18)$$

Здесь фактор $M_0^4 d^4 x_0 g^{-4}$ обусловлен четырьмя трансляционными нулевыми модами; множитель $(m/M_0)^{N_f/2}$ связан с квази нулевыми модами (5); вклад $\exp \left\{ -\frac{1}{6} (2 - N_f) \ln M_0 \Delta \right\}$ отвечает ненулевым калибровочным (16) и фермионным (17) модам; наконец, $\exp \left\{ -4\pi^2/g^2 \right\}$ есть вклад классического действия торона. Легко убедиться, что M_0 и $g(M_0)$ в формуле (18) собираются точно в ренорминвариантное выражение; кроме того, заметим, что логарифмический вклад, связанный с ненулевыми модами $\ln(M_0 \Delta)$ обезразмеривается характерным масштабом Δ , играющим роль регулятора при описании торонного точечного дефекта (см. Введение и [5a]).

Важнейшей отличительной чертой (18) от аналогичных формул для суперсимметричных теорий (1), (6) является зависимость Z_{QCD} от регуляторного параметра Δ . В частности, при $N_f = 1$ $Z_{QCD} \sim d^4 x \Delta^{-1/6}$. Очевидно, что рост Z_{QCD} при $\Delta \rightarrow 0$ означает рост торонной плотности (несмотря на то, что размер каждого торона мал) и невозможности использования квазиклассического выражения (18), справедливого для разреженного газа ($Z \ll 1$). В конечном счете это означает, что взаимодействие существенно, когда плотность торонов растет. Такая интерпретация находит свое подтверждение в рамках гипотезы, что два близких торона x_1 и x_2 переходят в инстантон с размером $\rho = x_1 - x_2 \rightarrow 0$ (см. конец предыдущего раздела). Действительно, определим энергию взаимодействия двух торонов аналогично тому, как это было сделано для двух инстантонов в [22]. Для этого выпишем вклад в Z двух, расположенных в точках x_1 и x_2 торонов:

$$Z_{2 \text{ тор}} \sim d^4 x_1 d^4 x_2 \frac{1}{\Delta^{2-N_f/6}} \frac{1}{\Delta^{2-N_f/6}} e^{-W_{int}}. \quad (19)$$

Здесь W_{int} учитывает взаимодействие торонов и характеризует различие по сравнению с формулой для разреженного газа (18). Энергию взаимодействия W_{int} , согласно нашей гипотезе, можно

найти, вычитая из инстантонного вклада вклад двух невзаимодействующих торонов. Что касается нулевых мод, то, как и в СКХД, соответствующий инстантонный фактор $m^{N_f} d^4 x_0 d^4 \rho$ точно переходит в произведение для невзаимодействующих торонов: $[d^4 x_1 m^{N_f/2}] [d^4 x_2 m^{N_f/2}]$. Энергию взаимодействия W_{int} определяют именно ненулевые моды:

$$e^{-W_{int}} = \exp \left\{ -\left[\left(\frac{2-N_f}{3} \right) \ln M_0 \rho - \left(\frac{2-N_f}{6} \right) \ln M_0 \Delta - \left(\frac{2-N_f}{6} \right) \ln M_0 \Delta \right] \right\} = \exp \left\{ -\left(\frac{2-N_f}{3} \right) \ln \left| \frac{x_1 - x_2}{\Delta} \right| \right\}. \quad (20)$$

Здесь фактор $\exp \left\{ -\left(\frac{2-N_f}{3} \right) \ln M_0 \rho \right\}$ связан с ненулевыми инстантонными модами [11]. Подставляя (20) в (19) убеждаемся, что зависимость от параметра Δ исчезла; место Δ занял множитель $|x_1 - x_2|$, учитывающий взаимодействие.

При $N_f = 1$

$$W_{int} \Big|_{x_1 \rightarrow x_2} = \frac{1}{3} \ln |x_1 - x_2| \rightarrow -\infty.$$

В свою очередь, это означает, что имеется логарифмическое притяжение торонов. Так что они стремятся сблизиться друг с другом, чем и увеличивают торонную плотность. Это согласуется с качественным замечанием, упомянутым выше. При $N_f \geq 3$ имеется отталкивание, которое может быть качественно понято, как следствие ферми-статистики*).

Случай $N_f = 2$ (в более общем случае $N_f = N_c$) является выделенным**). В этом случае торон сохраняет свою индивидуальность; величина $Z_{N_f=2}$ (18) является конечной и может быть использована для дальнейших расчетов. С технической точки зрения выделенность $N_f = 2$ связана с сокращением ненулевых мод, аналогично тому, как это происходило в суперсимметричных теориях (разделы 2, 3).

Общий итог приведенного выше анализа следующий.

Найти вклад торонов в физические величины в общем случае

*). Отметим, что инстантонное взаимодействие имеет те же качественные свойства, включая зависимость от N_f . Именно энергия взаимодействия в этом случае равна $W \sim (2 - N_f) \ln |x_1 - x_2|$ [22].

**). Эта точка зрения пропагандировалась ранее в [19].

(исключая $N_f=2$) в рамках рассматриваемого приближения не представляется возможным — необходим учет взаимодействия и выход за рамки квазиклассического приближения. Наиболее вероятно, тороны, как квазичастицы, потеряют свою индивидуальность, аналогично тому, как это происходит с инстантонами в σ -модели [23].

Однако при $N_f=2$ тороны сохраняют свою индивидуальность и дают ненулевой вклад в физические величины. Отметим, что реализуемая в Природе теория с $N_f=N_c=3$ в точности попадает в этот выделенный класс, и поэтому соответствующий анализ представляет интерес. В дальнейшем, по упомянутой выше причине, мы ограничимся случаем $N_f=N_c=2$. Торонная мера (18) в этом случае имеет вид

$$Z_{N_f=2} = K \frac{M_0^3}{g^4} d^4x_0 m \exp\left\{-\frac{4\pi^2}{g^2}\right\} = Km\Lambda^3 d^4x_0, \quad (21)$$

$$\Lambda^3 \equiv M_0^3 \frac{1}{g^4} \exp\left\{-\frac{4\pi^2}{g^2}\right\}.$$

Теперь все подготовлено для вычисления кирального конденсата в КХД с $N_f=2$ в поле торона. Как и для СКХД, основную роль будут играть квазинулевые моды, они сократят малую массу m в (21) и обеспечат конечный ответ для $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim \Lambda^3$.

По определению, с учетом (21) имеем

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{Минковск}} = -i \langle \psi^+ \psi \rangle_{\text{Евклид}} = -iKm\Lambda^3 \text{tr} \int d^4x_0 \frac{-im}{[-\hat{D}^2 + m^2]}. \quad (22)$$

Здесь ψ — любой из ароматов u или d . В (22) мы заменили $\psi\psi^+$ функцией Грина в поле торона. Заметим, что полученный интеграл (22) уже встречался нам ранее при вычислении фермионного детерминанта (4). Хотя мы не знаем функции Грина массивной частицы, интеграл от нее при $m \rightarrow 0$ мы знаем точно! Действительно,

$$\text{tr} \int d^4x \left(\frac{m^2}{-\hat{D}^2 + m^2} \right) = \text{tr} \int d^4x \frac{m^2(1 + \gamma_5)}{(-D^2 + m^2)} - \text{tr} \int d^4x \frac{m^2\gamma_5}{[-\hat{D}^2 + m^2]} = Q = \frac{1}{2} \quad (23)$$

Здесь, как и в (4), мы учли, что $\hat{D}^2(1 + \gamma_5) = D^2$. Кроме того, мы воспользовались результатом Приложения о том, что первое слагаемое в (23), не связанное со спином, стремится к нулю, как $m^2 \ln m$. Второе слагаемое не зависит от m вовсе и точно равно Q .

Антиторон дает в точности такой же вклад. В итоге

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{Минковск}} = -K\Lambda^3, \quad \Lambda^3 \equiv \frac{M_0^3}{g^4} \exp\left(-\frac{4\pi^2}{g^2}\right). \quad (24)$$

Как и при получении (5), мы хотим подчеркнуть исключительную важность квазинулевых мод (7) из континуума, которые и обеспечивают отличное от нуля значение интеграла (23) и в конечном итоге, конденсата (24). Еще раз подчеркнем, что, хотя (24) не зависит от массы кварка, все вычисления кардинальным образом предполагают отличное от нуля значение m и киральный предел понимается только в смысле предельного перехода $m \rightarrow 0$.

Наконец, следуя той же процедуре, что и при получении постоянной C (15), можно найти коэффициент K :

$$K = \pi^2 2^5 \left(\frac{e^{5/6}}{4} \right)^{1/2}. \quad (25)$$

В каком-то смысле механизм возникновения конденсата (24) напоминает механизм, предложенный в [24]. В обоих случаях ненулевое значение $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ обусловлено близкими к $\lambda=0$ модами. Есть и разница: в [24] этот эффект достигался взаимодействием квазичастиц; в нашем случае, как это отмечалось после формулы (7), отличная от нуля плотность вблизи $\lambda=0$ является неотъемлемой чертой конфигураций с дробными значениями Q . Именно это свойство спектра, с нашей точки зрения, определяет всю физику, связанную со спонтанным нарушением киральной симметрии.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной итог настоящей работы состоит в следующем. Предложен новый механизм спонтанного нарушения киральной симметрии в калибровочных теориях. Он основан на самодуальных конфигурациях с дробным топологическим зарядом. Неотъемлемой чертой таких решений является бесщелевой спектр оператора Дирака. В конечном счете это и обеспечивает формирование конденсатов. Предлагаемый подход апробировался в суперсимметричных теориях, где нетривиальная зависимость конденсата от массы (дробная степень) есть следствие точных теорем. Наш подход автоматически воспроизводит эту дробную степень, так же, как и соотношение Кониши, что свидетельствует (по крайней мере) о самосогласованности расчетов.

Что касается КХД, то выяснилось, что при $N_f \neq 2$ (для калибровочной группы $SU(2)$) тороны стремятся слиться и теряют свою индивидуальность (в суперсимметричных теориях тороны при любых N_f сохраняют индивидуальность). В этом случае квазиклассическое вычисление перестает быть осмысленным, и мы не в состоянии выяснить судьбу торонов. Значение $N_f=2$ является выделенным, и с технической точки зрения напоминает суперсимметричные модели — ненулевые моды между бозонами и фермионами, в этом случае сокращаются*). Это дает возможность вычислить торонную плотность и киральный конденсат $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, что и является основным результатом работы.

Напомним, что мотивация рассмотрения конфигураций с дробным топологическим зарядом была связана с анализом суперсимметричных теорий (см. Введение, [1, 5]). Однако необходимость конфигураций с дробными Q отмечалась значительно раньше в связи с $U(1)$ -проблемой, дискретной системой из N_f -вакуумов, загадкой θ -периода и т. д. (см. оригинальные работы [25] и обзор [26]). По существу, проблема, поднятая в [25], состоит в том, что существование тяжелого изосинглетного η' -мезона накладывает сильные ограничения на определенные корреляторы. В частности, коррелятор $\int d^4x \langle G\bar{G}, \bar{\psi}\gamma_5\psi \rangle$ должен быть порядка 1 (при $m \rightarrow 0$), топологическая восприимчивость $\int d^4x \langle G\bar{G}(x), G\bar{G}(0) \rangle$ должна зануляться как первая степень массы (с определенным коэффициентом!). Обеспечить такое поведение с помощью инстантонов крайне сложно [26]. Кроме того, тождества Уорда требуют, чтобы зависимость конденсат от θ была дробной: $\exp\{i\theta/N_f\}$. Такое поведение также трудно объяснить в рамках стандартного инстантонного подхода [26]. В то же самое время эти вопросы автоматически решаются (будет опубликовано отдельно), без какого-либо насилия, в рамках предлагаемой в настоящей статье схемы. Взгляд на столь широкий круг вопросов с единой точки зрения свидетельствует, по нашему мнению, о правильности изложенного подхода о нарушении киральной симметрии.

В заключение автор выражает благодарность А.И. Вайнштейну, Д.И. Дьяконову, В.Ю. Петрову, В.Л. Черняку за полезные обсуждения.

* Отметим, что реализуемая в Природе модель с $N_f=N_c=3$ попадает в этот класс и есть все основания ожидать ситуации, аналогичной $SU(2)$ с $N_f=2$.

Цель настоящего Приложения — найти функцию Грина в поле торона и вычислить величину

$$m^2 \int d^4x \operatorname{tr} \left(\frac{1}{-D^2+m^2} - \frac{1}{-\partial^2+m^2} \right) \quad (\text{П.1})$$

при $m \rightarrow 0$. Как обсуждалось в тексте, знание о (П.1) необходимо при вычислении торонной меры (18) и кирального конденсата (23) в КХД.

Стартуем со следующего вида торонного решения [1]:

$$A_\mu^a = -\bar{\eta}_{\mu\nu}^a \partial_\nu \ln P, \quad P = \frac{1}{2r} (G + \bar{G}) = \frac{2(1-\bar{g}g)}{|i+g|^2(z+\bar{z})}, \quad (\text{П.2})$$

$$G = \frac{i-g}{i+g}, \quad g(z) = \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{3/2}, \quad z = r+it.$$

Здесь, как и в [1], все величины измеряются в единицах Δ и основным блоком решения является функция $G(z)$, аналитическая по z .

Форма решения (П.2) такова, что могут быть применены все методы, используемые для поиска функции Грина для инстантона в сингулярной калибровке [27]. Следуя упомянутой выше работе, будем искать решение уравнения

$$-D_x^2 \Delta(x, y) = \delta^4(x-y), \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu^a \frac{z^a}{2} \quad (\text{П.3})$$

в виде

$$\Delta(x, y) = P^{-1/2}(x) \frac{F(x, y)}{4\pi^2(x-y)^2} P^{-1/2}(y) \quad (\text{П.4})$$

где $F(x, y=x) = P(x)$. Последнее условие связано с требованием правильного поведения $\Delta(x \rightarrow y)$ на малых расстояниях:

$$\Delta(x \rightarrow y) \sim \frac{1}{4\pi^2(x-y)^2}.$$

Следуя [27], легко убедиться, что уравнение (П.3) на функцию $F(x, y)$ может быть записано в виде

$$\sigma_\mu^+ \partial_\mu F(x, y) - \frac{2\sigma_\mu^+(x-y)_\mu}{(x-y)^2} [F(x, y) - P(x)] = 0, \quad (\text{П.5})$$

$$\sigma_\mu^+ = (\pm i, \vec{\sigma})$$

Для решения этого уравнения введем обозначения:

$$\begin{aligned} x_\mu &= (t_1, \vec{n}_1 r_1), & z_1 &= r_1 + it_1, & \bar{z}_1 &= r_1 - it_1, & G_1 &= G(z_1), \\ y_\mu &= (t_2, \vec{n}_2 r_2), & z_2 &= r_2 + it_2, & \bar{z}_2 &= r_2 - it_2, & G_2 &= G(z_2). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

После этого, явной подстановкой можно проверить, что функция $F(x, y)$, определяемая соотношением

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{(1 + \vec{\sigma} \vec{n}_1)(1 + \vec{\sigma} \vec{n}_2)}{z_1 + \bar{z}_2} (G_1 + \bar{G}_2) - \frac{(1 - \vec{\sigma} \vec{n}_1)(1 + \vec{\sigma} \vec{n}_2)}{\bar{z}_2 - z_1} (\bar{G}_1 - G_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 + \vec{\sigma} \vec{n}_1)(1 - \vec{\sigma} \vec{n}_2)}{z_2 - z_1} (G_1 - G_2) + \frac{(1 - \vec{\sigma} \vec{n}_1)(1 - \vec{\sigma} \vec{n}_2)}{z_2 + \bar{z}_1} (G_2 + \bar{G}_1) \right\}, \quad (\text{П.7}) \end{aligned}$$

в точности удовлетворяет (П.5) с дополнительным требованием: $F(x, x) = P(x)$. Проверка существенно основывается на свойствах проекционных операторов $(1 \pm \vec{\sigma} \vec{n})$ и аналитичности $G(z)$. В частном случае, для функции $G(z) = z + 1/z$, отвечающей инстантону, формула (П.7) переходит в хорошо известное решение [27].

Теперь мы подготовлены вычислить интеграл (П.1). Учитывая, что соответствующая величина определяется большими x , мы с логарфмической точностью подставим в (П.1) выражение для безмассовой функции Грина (П.7) и обрежем интеграл на расстояниях $x \ll m^{-1}$ (аналогичные расчеты для инстантона см. в [12]). В итоге, учитывая асимптотическое поведение функций

$$G(z \rightarrow \infty) = \frac{2}{3} z + \frac{1}{2z}, \quad P(z \rightarrow \infty) = \frac{2}{3},$$

$$F(x, y) \rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_\lambda^- x_\lambda) (\vec{\sigma}_\mu^+ y_\mu) \frac{1}{x^2 y^2},$$

имеем при $m \rightarrow 0$

$$m^2 \int_0^{1/m} d^4 x \operatorname{tr} \left[\frac{1}{-D^2} - \frac{1}{+4\pi^2(x-y)^2} \right] \simeq \frac{3}{2} m^2 \ln m \quad (\text{П.8})$$

Результат (П.8) означает, что соответствующим вкладом в конденсат (23), так же, как и в выражение для торонной плотности (18), можно пренебречь при малых m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Житницкий А.Р. ЖЭТФ, 1989, т.95, с.24.
2. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S. Phys. Lett., 1975, v.59, p.85.
3. 't Hooft G. Nucl. Phys. B, 1978, v.138, p.1; 1979, v.153, p.141.
4. 't Hooft G. Commun. Math. Phys. 1981, v.81, p.267.
5. а) Житницкий А.Р. ЖЭТФ, 1988, т.94, с.19.
б) Zhitnitsky A.R. Mod. Phys. Lett. A, 1989, v.4, p.451.
в) Житницкий А.Р. Препринт ИЯФ, СО АН СССР 88-154. Новосибирск, 1988; ЖЭТФ, 1989, т.95.
6. Atiaah M.F., Patodi V.K., Singer I.M. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, v.77, p.43, v.78; v.405; 1967, v.79, p.71.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987.
8. Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl. Phys., 1983, v.B229, p.407.
9. Rossi G. and Veneziano G. Phys. Lett., 1984, v.B138, p.195.
10. Amati D. et al. Phys. Rep., 1988, v.162, p.169.
11. 't Hooft G. Phys. Rev., 1976, v.D14, p.3432.
12. Carlitz R.D. and Creamer D.B. Annal. of Phys., 1979, v.118, p.429.
13. Brown L.S., Carlitz R.D., Lee C. Phys. Rev. D, 1977, v.16, p.417.
14. Ninomiya M., Tan C.H. Nucl. Phys. B, 1985, v.257, p.199.
15. Kiskis J. Phys. Rev., 1977, v.D15, p.2329.
16. Boyanovsky D. and Blankenbecler R. Phys. Rev., 1985, v.D31, p.3234.
17. Amati D., Rossi G., Veneziano G. Nucl. Phys. B, 1985, v.249, p.1; 1986, v.B263, p.591.
18. Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl. Phys., 1985, v.B260, p.157.
19. Житницкий А.Р. ЯФ, 1987, т.46, с.238; ЯФ, 1988, т.47, с.251.
20. Konishi K. Phys. Lett., 1984, v.B135, p.439.
21. Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. УФН, 1982, т.136, с.554.
22. Brown L.S., Creamer D.B. Phys. Rev., 1978, v.D18, p.3695.
23. Fateev V.A., Frolov I.V., Schwartz A.S. Nucl. Phys., 1979, v.B154, p.1.
24. Dyakonov D.I., Petrov V.Yu. Nucl. Phys., 1986, v.B272, p.475.
25. Crewther R.J., Phys. Lett., 1977, v.B70, p.349; 1980, v.B93, p.75.
26. Christos G.A. Phys. Rep., 1984, v.116, p.251.
27. Brown L.S. et al. Phys. Rev., 1978, v.D17, p.1583.

А.Р. Житницкий

**Тороны и нарушение киральной
симметрии в КХД и СКХД**

Ответственный за выпуск С.Г.Попов

Работа поступила 17 марта 1989 г.
Подписано в печать 23.03 1989 г. МН 10108
Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1,8 печ.л., 1,5 уч.-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ № 34

*Набрано в автоматизированной системе на базе фото-
наборного автомата ФА1000 и ЭВМ «Электроника» и
отпечатано на ротапункте Института ядерной физики
СО АН СССР,
Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*