

Т. 45

34



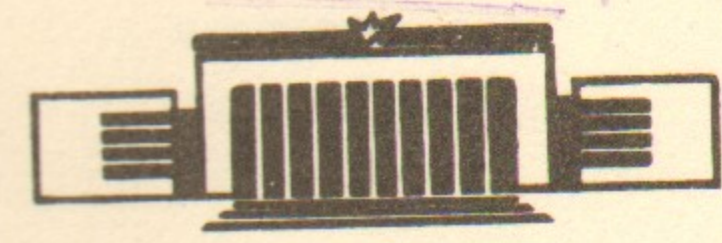
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

М.А.Тиунов, Б.М.Фомель

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ
СИСТЕМ С ЖЕЛЕЗОМ

ПРЕПРИНТ 83-150

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЯФ
Сибирского отделения
АН СССР
1983 г.



НОВОСИБИРСК

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ С ЖЕЛЕЗОМ

М.А.Тяунов, Б.М.Фомель

А Н Н О Т А Ц И Я

Для решения трехмерной нелинейной задачи магнитостатики применяется прямой интегральный метод. Программа расчета магнитных полей и сил реализована на ЭВМ "Электроника 100/25". Для ввода геометрии магнитных систем, контроля и коррекции данных используются цветной графический дисплей и графопостроитель. Приведены примеры расчета конкретных систем.

1. ВВЕДЕНИЕ

В состав экспериментальных установок нередко входят устройства, формирующие магнитные поля без аксиальной симметрии. К ним относятся квадрупольные линзы, "змейки" и т.п. на ускорителях и накопителях заряженных частиц, а также инжекторы, сепараторы и т.п. в плазменных ловушках.

До последнего времени считалось, что расчет 3-х-мерных магнитных полей с учетом насыщения железа является настолько громоздким, что его можно осуществить лишь на супер-ЭВМ мирового класса.

В настоящей работе показано, что применение интегрального метода [1,2] и разумная организация программы позволяют решать 3^x-мерные нелинейные задачи магнитостатики на мини-ЭВМ типа "Электроника 100/25". Для ввода геометрии магнитных систем, контроля и коррекции данных используются цветной графический дисплей и графопостроитель.

В данном интегральном методе отсутствует проблема граничных условий. Разбиению на элементы подвергаются шины с током и железо, а магнитное поле вычисляется только в заданных точках, например, вдоль траекторий заряженных частиц.

Располагая широким набором трехмерных элементов разбиения (параллелепипеды, призмы, тетраэдры, кольца) можно достаточно точно аппроксимировать практически любую конфигурацию магнитной системы. Однако, при разбиении на элементы необходимо знать факторы, влияющие на точность расчета магнитного поля [3,4]. Среди этих факторов наиболее важными являются учет некорректности задачи и "качество" разбиения. Некорректность задачи поддается регуляризацией по Тихонову, а высокое "качество" разбиения достигается за счет опыта и использования априорных представлений о структуре магнитного поля в железе и вне его.

2. ПРЯМОЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

Основная идея метода состоит в представлении магнитного поля \bar{H} во всем пространстве в виде суммы магнитного поля токов \bar{H}_c и поля \bar{H}_m , создаваемого за счет намагничивания магнитных материалов:

$$\bar{H} = \bar{H}_c + \bar{H}_m \quad (1)$$

Каждое из слагаемых удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\text{rot } \bar{H}_c = \bar{J} \quad (2)$$

$$\text{rot } \bar{H}_m = 0 \quad (3)$$

где \bar{J} — объемная плотность тока.

При заданном распределении токов первое из слагаемых в (1) может быть найдено по формуле Био-Савара-Лапласа:

$$\bar{H}_c = \frac{1}{4\pi} \int_{V_c} \bar{J} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует, что поле намагничивания может быть выражено как градиент скалярной функции:

$$\bar{H}_m = -\nabla \psi \quad (5)$$

В свою очередь скалярный магнитный потенциал ψ в произвольной точке p выражается через намагниченность магнитных материалов:

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_{V_m} \bar{M} \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV \quad (6)$$

где \bar{M} — вектор намагничивания единицы объема железа, \bar{R} — радиус-вектор, проведенный из бесконечно малого объема dV в точку p , V_m — полный объем магнитных материалов.

При заданной кривой намагничивания железа $\mu(H)$, вектор \bar{M} может быть записан в виде:

$$\bar{M} = \chi(H) \cdot \bar{H} \quad (7)$$

где $\chi(H) = \mu(H) - 1$

Уравнение (1) с учетом выражений (2+7) принимает вид:

$$\bar{H} = \bar{H}_c + \frac{1}{4\pi} \int_{V_m} \nabla \left[\frac{\chi \cdot (\bar{H}, \bar{R})}{R^3} \right] dV \quad (8)$$

Разобьем весь объем, занимаемый магнитными материалами, на конечное число однородно намагниченных малых объемов V_{mk} ($k = 1, 2, \dots, N$). Тогда интеграл в уравнении (8) может быть преобразован в сумму

$$\bar{H} = \bar{H}_c + \sum_{k=1}^N C_{pk} \chi_k \bar{H}_k \quad (9)$$

где C_{pk} — матрица коэффициентов, зависящих только от геометрии объема V_{mk} . Эти коэффициенты связывают поле намагничивания \bar{H}_m , создаваемое в точке p объемом V_{mk} , с намагниченностью этого объема $\bar{M}_k = \chi_k \bar{H}_k$. Если известны вектора намагниченности \bar{M}_k всех объемов, на которые разбито железо, то с помощью уравнения (9) можно вычислить магнитное поле в любой точке пространства.

Точность вычисления поля таким методом зависит от того, насколько принятое в расчете условие однородности намагничивания объемов V_{mk} соответствует реальности. Отсюда следует, что разбиение железа на объемные элементы должно быть неравномерным, и области с сильной неоднородностью поля намагничивания должны разбиваться на большее число элементов.

Из уравнения (9) можно найти вектора намагниченности, если вычислять магнитное поле в геометрических центрах объемов V_{mi} ($i = 1, 2, \dots, N$).

$$\bar{H}_i = \bar{H}_{ci} + \sum_{k=1}^N C_{ik} \chi_k \bar{H}_k \quad (10)$$

где \bar{H}_i и \bar{H}_{ci} — соответственно полное магнитное поле и поле токовых шин в центре i -го элемента.

Систему нелинейных алгебраических уравнений (10) можно записать в более компактном виде

$$(\hat{C}\hat{\chi} - \hat{I})\bar{H} = -\bar{H}_c \quad (11)$$

Здесь $\vec{H} = \begin{pmatrix} \bar{H}_1 \\ \vdots \\ \bar{H}_N \end{pmatrix}$ и $\vec{H}_c = \begin{pmatrix} \bar{H}_{c1} \\ \vdots \\ \bar{H}_{cN} \end{pmatrix}$ — соответственно вектор

полных магнитных полей и вектор токовых полей в центрах элементов разбиения. Матрица \hat{C} составлена из N^2 матриц C_{ik} (10):

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{N1} & \dots & C_{NN} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Матрица $\hat{\chi}$ зависит от решения системы (II) и имеет вид:

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_1 & & 0 \\ & \chi_2 & \\ 0 & & \chi_N \end{pmatrix} \quad (13)$$

где χ_i — матрица размерностью 3×3 , все элементы которой равны $\chi_i(H_i) = \mu(H_i) - 1$, $H_i = (H_{xi}^2 + H_{yi}^2 + H_{zi}^2)^{1/2}$, ($i = 1, 2, \dots, N$), \hat{I} — единичная матрица.

Решение системы (II) дает возможность с помощью уравнения (9) вычислять магнитное поле в любой точке пространства.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТОКОВЫХ ПОЛЕЙ

При вычислении магнитных полей, создаваемых токами, на геометрию токовых шин удобно наложить два условия, которые обычно выполняются для токовых шин реальных магнитов:

- а) Все токовые шины имеют прямоугольную форму сечения, постоянную по длине шины.
- б) Не допускается кручение токовых шин, т.е. поворот вокруг оси, совпадающий с направлением тока.

Тогда любая трехмерная система токов может быть представлена набором следующих токовых элементов:

1. Бесконечно тонкий соленоид (рис.1,а).
2. Параллелепипед с током, текущим вдоль одной из его сторон (рис.1,б).

3. Секторный элемент с азимутально направленным током (рис.1,в).

Для двух первых элементов интегрирование формулы Био-Савара-Лапласа может быть проделано аналитически по всем трем координатам, а для секторного элемента остается численное интегрирование по углу [4]. Для соленоидов конечной толщины интегрирование по радиусу также производится численно.

Условие постоянства сечения шины по длине позволяет задавать параметры сечения всего один раз, а затем описывать только направление тока, что существенно облегчает ввод токовой геометрии. Для того, чтобы ускорить ввод токовой геометрии, создана библиотека стандартных катушек, которая в настоящее время включает в себя 0-образную катушку (рис.2). Для ввода такой катушки достаточно указать пять параметров: два внешних размера, радиус закругления и размеры сечения. В дальнейшем, при необходимости, эта библиотека легко может быть расширена.

Для ускорения ввода нестандартных катушек предусмотрен учет симметрии катушки относительно одной или двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Кроме того, возможен ввод одновременно нескольких подобных катушек, а затем независимое перемещение каждой из них.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЕЙ НАМАГНИЧЕНИЯ

Для вычисления вклада в полное магнитное поле в данной точке полей намагничения отдельных объемов, на которые разбито железо (см. уравнение (9)), необходимо знать коэффициенты матрицы C_{pk} . Аналитическое выражение этих коэффициентов может быть получено для произвольного однородно намагниченного многогранника [2].

Чтобы более точно аппроксимировать часто очень сложную геометрию реальных магнитов, в качестве базовых объемных элементов были выбраны прямоугольная треугольная призма и тетраэдр (рис.3). При этом предусмотрена возможность разбиения на такие элементы следующих объемов:

1. Параллелепипед (рис.4,а).
2. Четырехугольная прямоугольная призма (рис.4,б).

3. Секторный прямоугольный объем (рис. 4, в).
4. Четырехугольная пирамида (рис. 4, г).
5. Шестигранник (рис. 4, д).

Три первых объема разбиваются на треугольные призмы, два последних — на тетраэдры. Допускается произвольная пространственная ориентация разбиваемых объемов.

Для того, чтобы ускорить ввод геометрии сердечника магнита, а также для экономии занимаемой памяти и времени счета предусмотрена возможность учета симметрии магнитной системы относительно плоскостей $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

5. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ MAG-3D

На основе изложенного выше алгоритма был создан комплекс программ MAG-3D для расчета трехмерных магнитных систем. Комплекс состоит из следующих программ:

- а) MAGT — ввод геометрии токовых шин магнита;
- б) MAGI — ввод геометрии сердечника магнита;
- в) MAGF — расчет токовых полей, матрицы геометрических коэффициентов, полного магнитного поля в произвольной точке пространства и сил, действующих на токовые элементы;
- г) MAGM — задание кривых намагничения магнитных материалов, из которых изготовлен сердечник магнита;
- д) MAGS — решение системы нелинейных уравнений методом простых итераций;
- е) MAGG — вывод геометрии токовых шин и сердечника магнита на графопостроитель.

Все программы комплекса работают последовательно, а для хранения и пересылки информации используются диски.

ЭВМ "Электроника 100/25" имеет ограничение прямо адресуемой памяти (32К 16-разрядных слов). Это означает, что даже при решении системы (II) методом оптимального исключения Гаусса максимальное число элементов разбиения не может быть больше 60 (соответствует 180 уравнениям системы (II)). Чтобы ослабить это ограничение, была создана версия программы MAGS с исполь-

зованием виртуальной памяти, максимальный объем которой достигает 32К 32-разрядных слов, что позволяет решать систему уравнений (II) для 120 элементов разбиения.

Самая большая расчетная программа MAGF, объем которой (42К) превышает объем оперативной памяти машины, переведена в оверлейный режим.

Общий объем памяти всего комплекса программ MAG-3D составляет 150К 16-разрядных слов.

Время вычисления матрицы $C_{pk}(9)$ равно 0.15 сек. Время решения системы (II) (время одной итерации) существенно зависит как от количества элементов разбиения, так и от того, используется ли при решении системы виртуальная память. При количестве элементов разбиения железа меньше 60 (без виртуальной памяти) время одной итерации не превышает 4 минут. Если же количество элементов больше 60 (используется виртуальная память) время одной итерации может достигать 70 минут. Практически для нахождения векторов намагничения железа (решения системы нелинейных уравнений (II)) достаточно 5-10 итераций.

Было проведено сравнение времени расчета одного и того же магнита трехмерной и аксиально-симметричной программами магнитостатики, написанными на основе интегрального метода. Оказалось, что переход к трехмерной задаче не привел к увеличению времени счета. Это объясняется тем, что в аксиально-симметричном случае для определения полей намагничения железа приходится вычислять эллиптические интегралы, в то время как в прямоугольных координатах все интегралы вычисляются аналитически.

Для тестирования программ комплекса MAG-3D решалась задача о проникновении внешнего однородного магнитного поля в бесконечно длинный полый цилиндр, ось которого перпендикулярна к направлению внешнего поля. Аналитическое решение задачи имеет вид [5]:

$$H = \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}{\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \right] \cdot H_0 \quad (14)$$

где H и H_0 — модуль магнитного поля внутри и вне цилиндра, R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы цилиндра, μ_1, μ_2 — магнитная проницаемость цилиндра и внешней среды.

При расчетах учитывалась симметрия задачи и разбиению на элементы типа треугольной призмы подвергалась только одна четверть цилиндра (рис. 5, а). Расчет производился при двух разбиениях: указанном на рисунке и в два раза более частом по углу, с полным числом элементов $N = 16$ и $N = 32$ соответственно. При расчетах фиксировались следующие параметры: $H_0 = 1$ кЭ, $R_1 = 8$ см, $R_2 = 10$ см, $\mu_2 = 1$ и исследовалась зависимость $H(\mu_1)$. Результаты численного счета и аналитическая зависимость (14) приведены на рис. 5, б.

Кроме того, проводилось сравнение с существующими двумерными программами, написанными на основе как интегрального метода [4], так и метода сеток POISSON [6].

Сравнение с первой программой проведено на модельном двумерном С-образном магните с насыщением сердечника. Результаты расчетов двумерной и трехмерной программами совпали с точностью до 5-го знака.

Сравнение со второй программой проведено на магните электрон-позитронного бустера БЭП-М накопителя ВЭШ-2М. На рис. 6, а изображены сечение магнита плоскостью, перпендикулярной оси пучка (ввиду симметрии приведена только четверть сечения), принятое в расчетах трехмерной программой разбиение на элементы, а также векторы намагниченности сердечника магнита. На рис. 6, б приведено распределение магнитного поля в зазоре магнита, полученное двумерной и трехмерной программами. Отличие значений магнитного поля в центре зазора магнита, рассчитанных двумя программами, составило 3%. Результаты расчетов программой POISSON представлены В.И. Купчиком.

6. РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ С ЖЕЛЕЗОМ

Ниже приводятся примеры применения комплекса программ MAG-3D для расчета магнитных полей в реальных трехмерных магнитных системах.

а). С-образный магнит.

Основное назначение данного магнита — намагничивание постоянных магнитов. Максимальное поле в зазоре магнита достигает 25 кГс при толщине зазора 39,5 мм и площади полюсных наконечников 8×16 см². Внешние габариты магнита $100 \times 76 \times 24$ см³ при сечении ярма 27×24 см². Материал сердечника магнита — сталь АРМКО, за исключением полюсных наконечников, которые выполнены из стали К-50 (пермендюр). Магнитное поле формируется двумя С-образными катушками с суммарным током 120 кА. На рис. 7, а, б приведена геометрия токовых линий магнита и одной четверти его сердечника. Там же показано принятое в расчетах разбиение сердечника магнита на объемные элементы типа треугольной призмы, их полное число равно 42. В результате расчетов было найдено распределение магнитного поля в зазоре магнита, которое сравнивалось с результатами магнитных измерений (рис. 8). Различие между расчетным и измеренным значением магнитного поля в центре зазора магнита составило 0,5%.

б) Магнитная змейка накопителя ВЭШ-4.

На накопителе ВЭШ-4 предполагается установить магнитную змейку со следующими параметрами: максимальное магнитное поле 15 кГс, апертура — 23 мм, период — 120 мм, полное количество периодов — 11, мощность синхротронного излучения ~ 260 W. Основное требование, предъявляемое к конструкции данной змейки — получение как можно более мощного синхротронного излучения при заданном возмущении орбиты пучка. Чтобы подобрать оптимальную конструкцию, удовлетворяющую этому требованию, была изготовлена модель одного периода змейки, на которой затем проводились магнитные измерения. Для сравнения эта же модель была рассчитана численно с помощью комплекса программ MAG-3D.

На рис. 9 представлена геометрия модели одного периода змейки. Ввиду симметрии показана только 1/8 часть сердечника магнита, которая в расчетах разбивалась на 45 элементов типа треугольной призмы. Боковые стенки магнита моделируют стоящие рядом периоды змейки с обратными токами. Выступы на боковых стенках приближают распределение магнитного поля вдоль оси пучка (ось X) к δ -образному, что необходимо для выполнения

требования, указанного выше. Каждый период змейки содержит две 0-образные катушки с полным током 40 кА. Весь сердечник магнита выполнен из стали АРМКО.

В результате расчетов получены зависимости $B_y(x)$ при $y = 0$, $z = 0$ и $B_y(z)$ при $x = 0$, $y = 0$. Эти зависимости сравнивались с результатами магнитных измерений (рис. 10), проведенных П.Д. Воблым. Точность расчета магнитного поля в центре магнита составила 2%.

в). Сверхпроводящая змейка накопителя ВЭП-2М.

Для увеличения светимости на накопителе ВЭП-2М предполагается установить магнитную змейку со следующими проектными параметрами: максимальное магнитное поле 70+80 кГс, апертура — 26 мм, период 120 мм, количество периодов — 5. Токосные шины змейки изготавливаются из сверхпроводящего материала.

При разработке и конструировании данного магнита возникли следующие вопросы:

1). Каково максимально достижимое без потери сверхпроводимости магнитное поле в зазоре змейки?

2). Как влияет насыщение сердечника магнита ($\mu \sim 1.3$) на распределение магнитного поля вдоль и поперек оси пучка?

3). Какова сила притяжения змейки к окружающему её магнитному экрану?

Все перечисленные вопросы требуют довольно точного расчета магнитного поля змейки.

На рис. 11 представлена принятая в расчетах модель сердечника змейки и окружающего её магнитного экрана (для ускорения расчетов рассматривалось три из пяти периодов змейки). Ввиду симметрии изображена только одна четверть модели. На этом же рисунке показано принятое в расчетах разбиение на элементы типа треугольной призмы — их полное число равно 88. Материал сердечника змейки — сталь АРМКО, а окружающего её экрана — сталь 3. На рис. 12 представлен вид сверху на токовые обмотки магнита, их полное число равно шести. Центральная обмотка состоит из двух секций с разными токами. Указанное на рис. 12 разбиение токовых шин магнита по углу соответствует принятому в

расчетах при численном интегрировании поля секторного элемента.

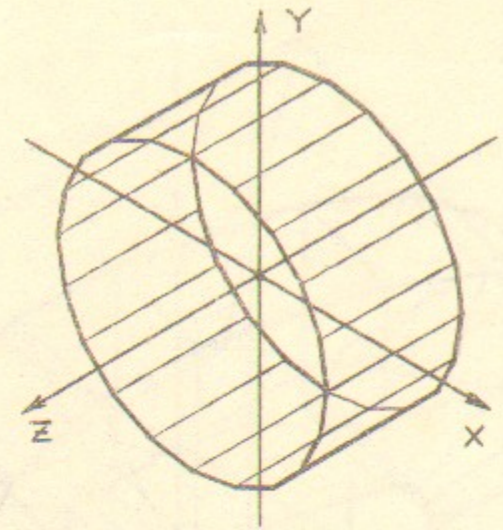
В результате расчетов найдено, что максимальное поле змейки может достигать 75 кГс. Также получено распределение магнитного поля в зазоре змейки вдоль и поперек оси пучка (ось y).

Очень сложным оказался вопрос о силе притяжения змейки к магнитному экрану. Дело в том, что при таких больших полях даже небольшая асимметрия змейки приводит к возникновению сил, которые могут превысить пределы прочности элементов крепления. Более того, для увеличения жесткости и уменьшения веса и теплоотдачи элементов крепления, в конструкцию специально заложена асимметрия змейки относительно магнитного экрана по вертикальной оси (ось z). Кроме этого, вследствие сильного возмущения орбиты пучка вдоль оси x , полюсы магнита смещены вдоль данной оси, что также приводит к асимметрии змейки. С другой стороны для расчета сил притяжения требуется точность, превышающая реально достижимую в расчетах магнитных систем с железом комплексом программ MAG-3D. Поэтому в данном случае использовался метод отражений, позволяющий без учета железа находить с хорошей точностью силы притяжения токовых шин змейки к магнитному экрану. Оказалось, что несмотря на асимметрию змейки, эти силы не превышают предельно допустимых для заложённых в конструкцию элементов крепления.

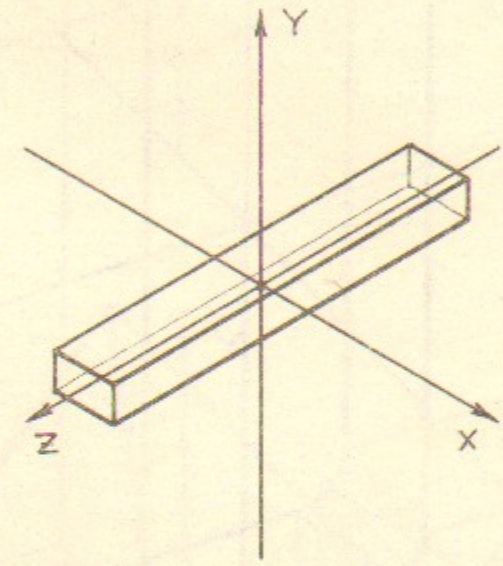
В заключение выражаем благодарность В.А. Дзюбе, П.Б. Лысянскому и В.П. Яковлеву за полезные обсуждения методов решения задач магнитостатики, П.Д. Воблему, П.М. Иванову и А.М. Власову за интерес к работе и совместное обсуждение результатов счета.

Литература

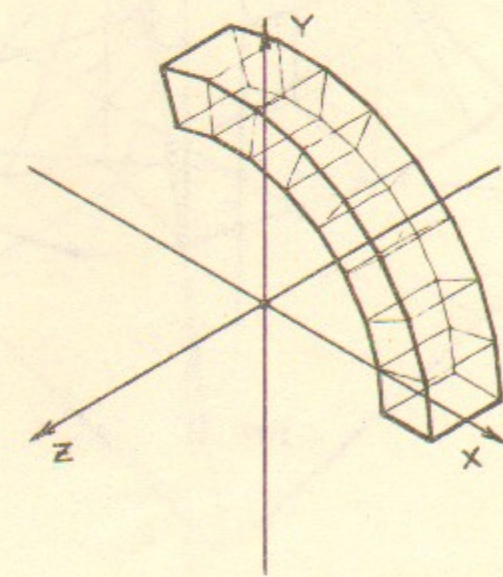
1. M. J. Newman, C. W. Trowbridge, L. R. Turner
GFUN: an interactive program as an aid
to magnet design. RPP/A94, 1972
2. A. G. A. M. Armstrong, C. J. Collie, N. J. Diserens,
M. J. Newman, J. Simkin, C. W. Trowbridge
New developments in the magnet design
computer program GFUN. RL-75-066, 1975.
3. А. Н. Алешаев, В. А. Дзюба, М. М. Карлинер, П. Б. Лысянский,
Б. М. Фомель. Препринт ИЯФ 75-95, 1975.
4. В. А. Дзюба, М. М. Карлинер, П. Б. Лысянский, Б. М. Фомель. Пре-
принт ИЯФ 77-123, 1977.
5. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинами-
ке. М., 1970.
6. POISSON Group Programs.
User's Guide. CERN, 1965.



а)



б)



в)

Рис. I

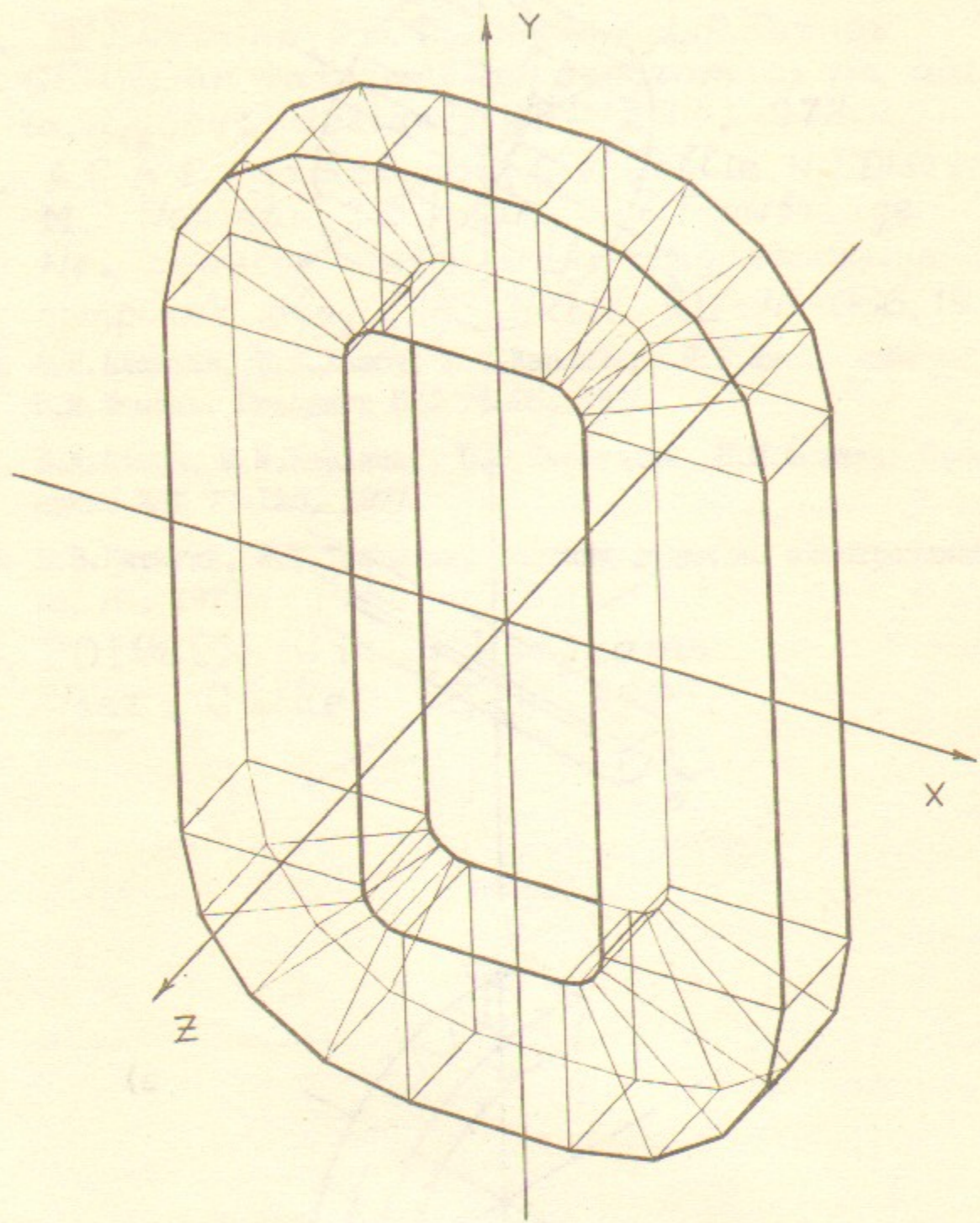


Рис. 2

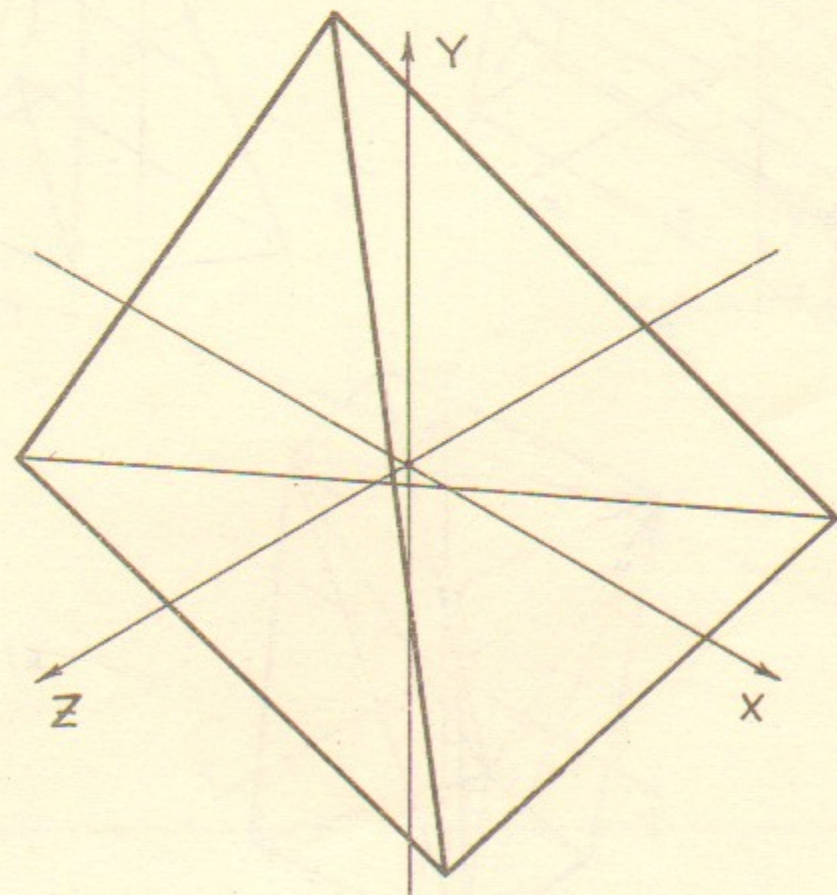
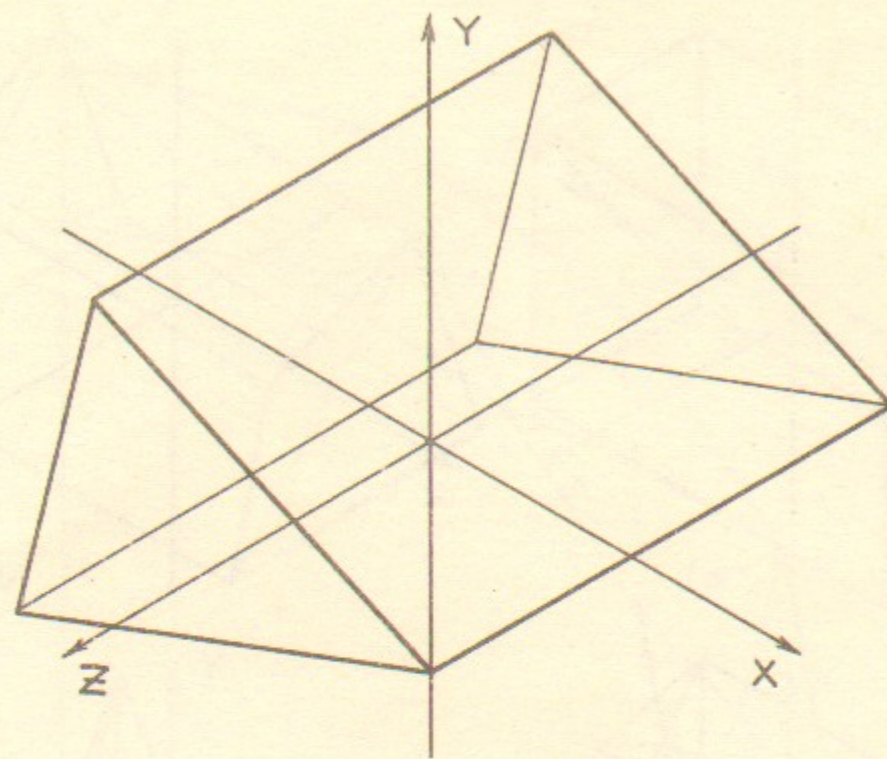


Рис. 3

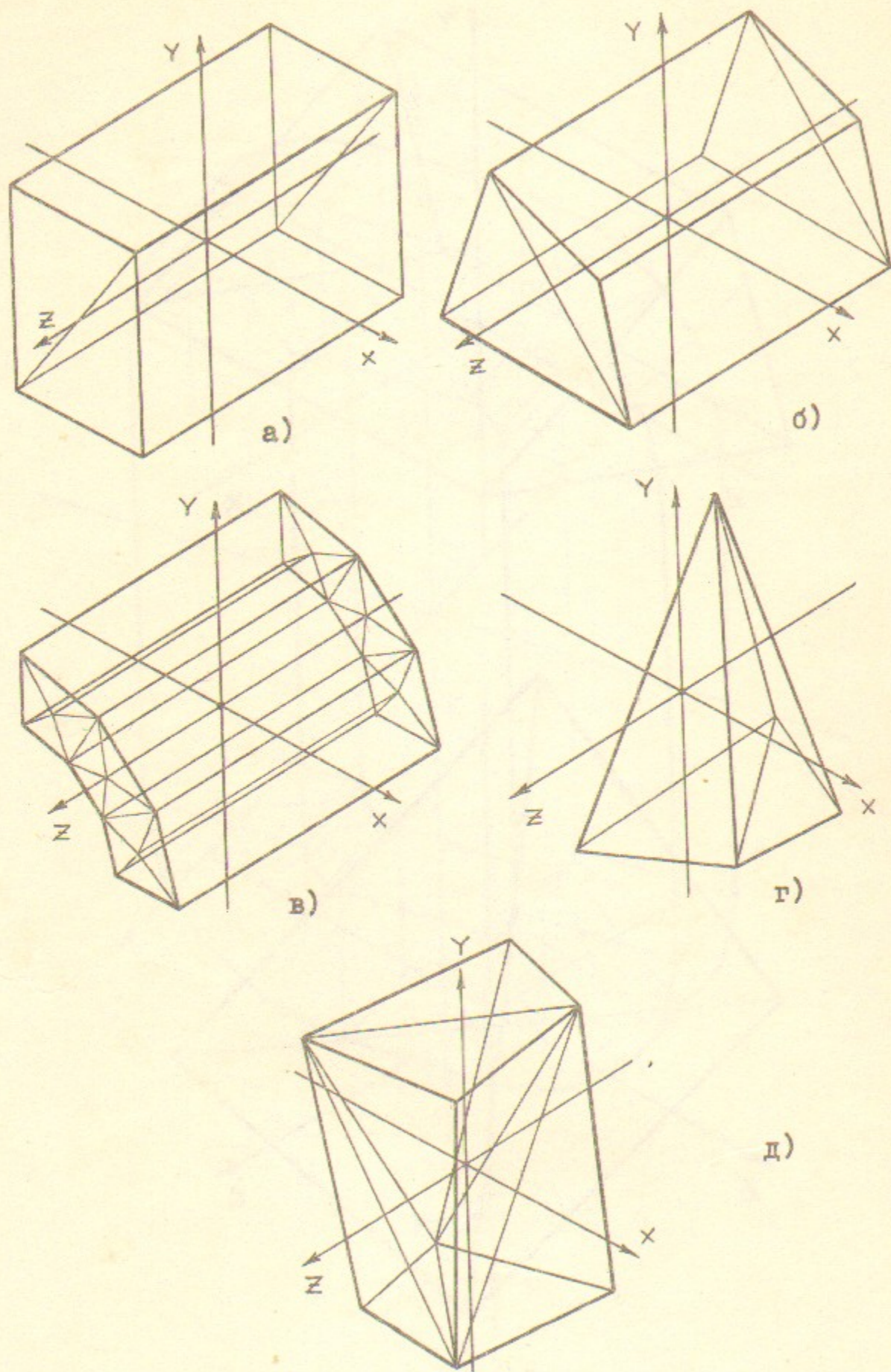


Рис. 4

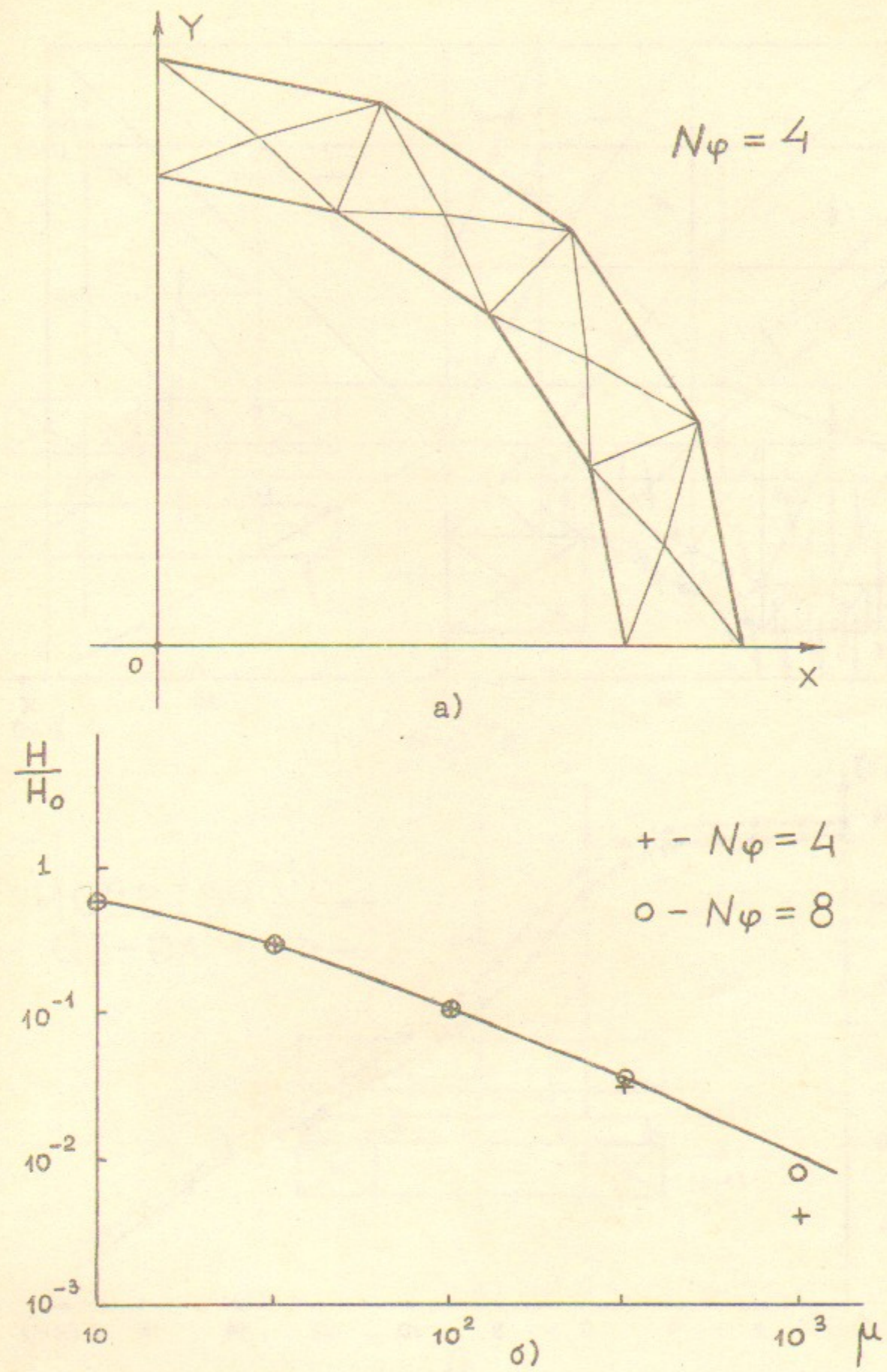
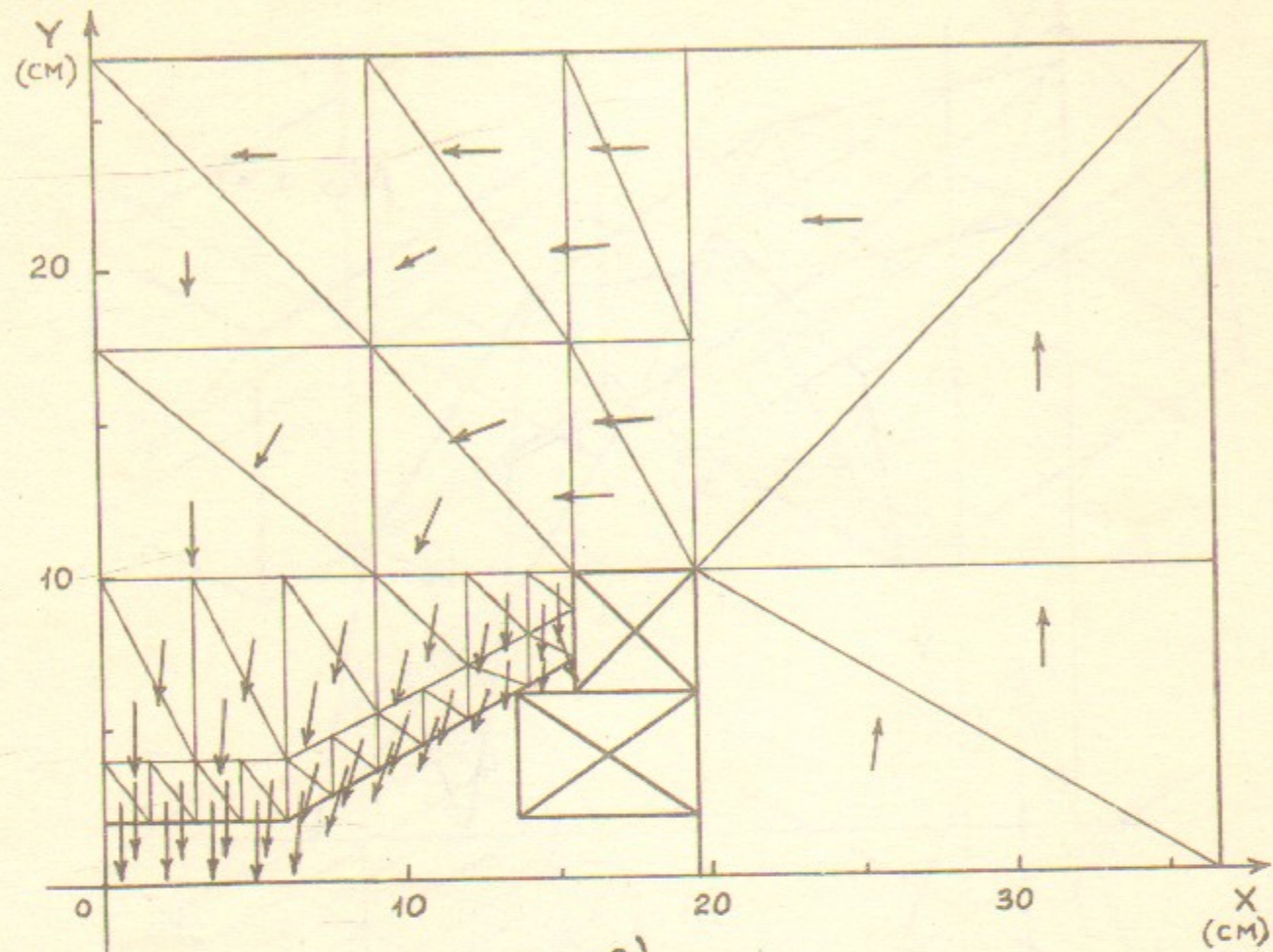
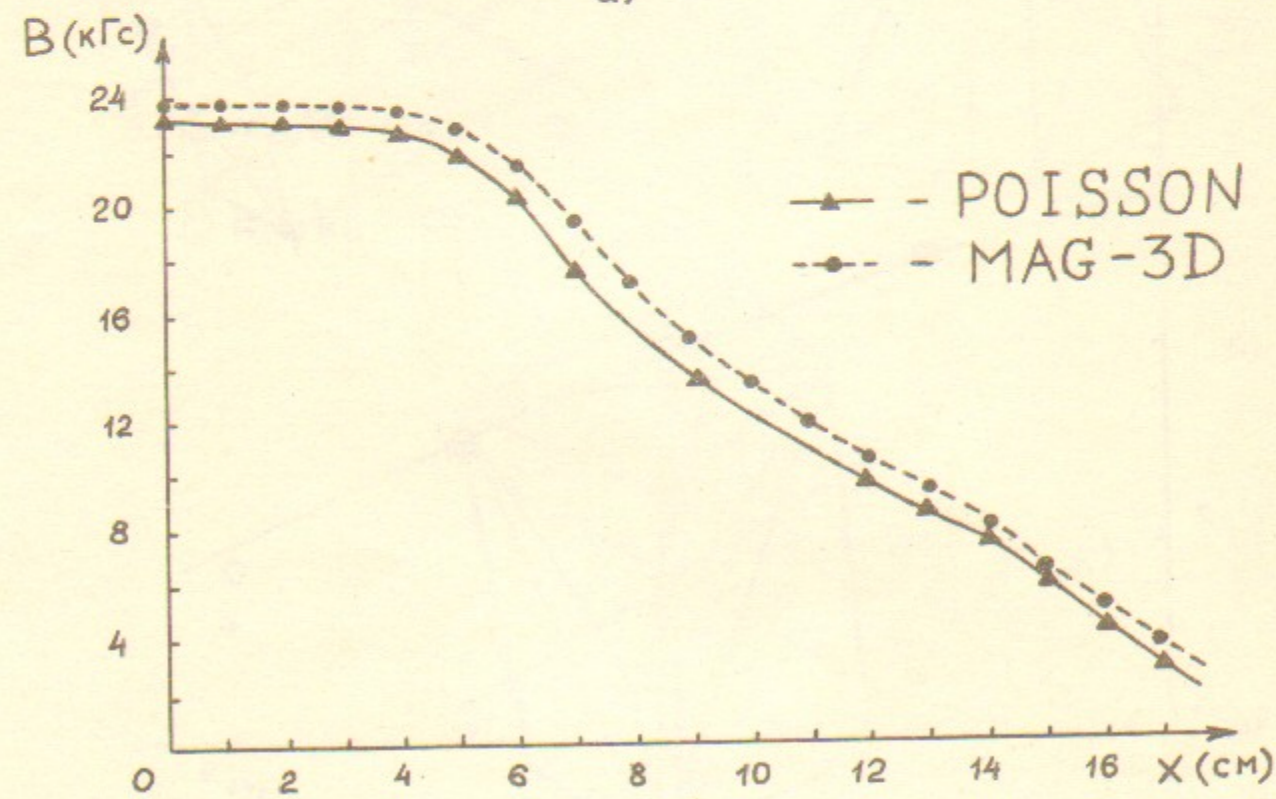


Рис. 5

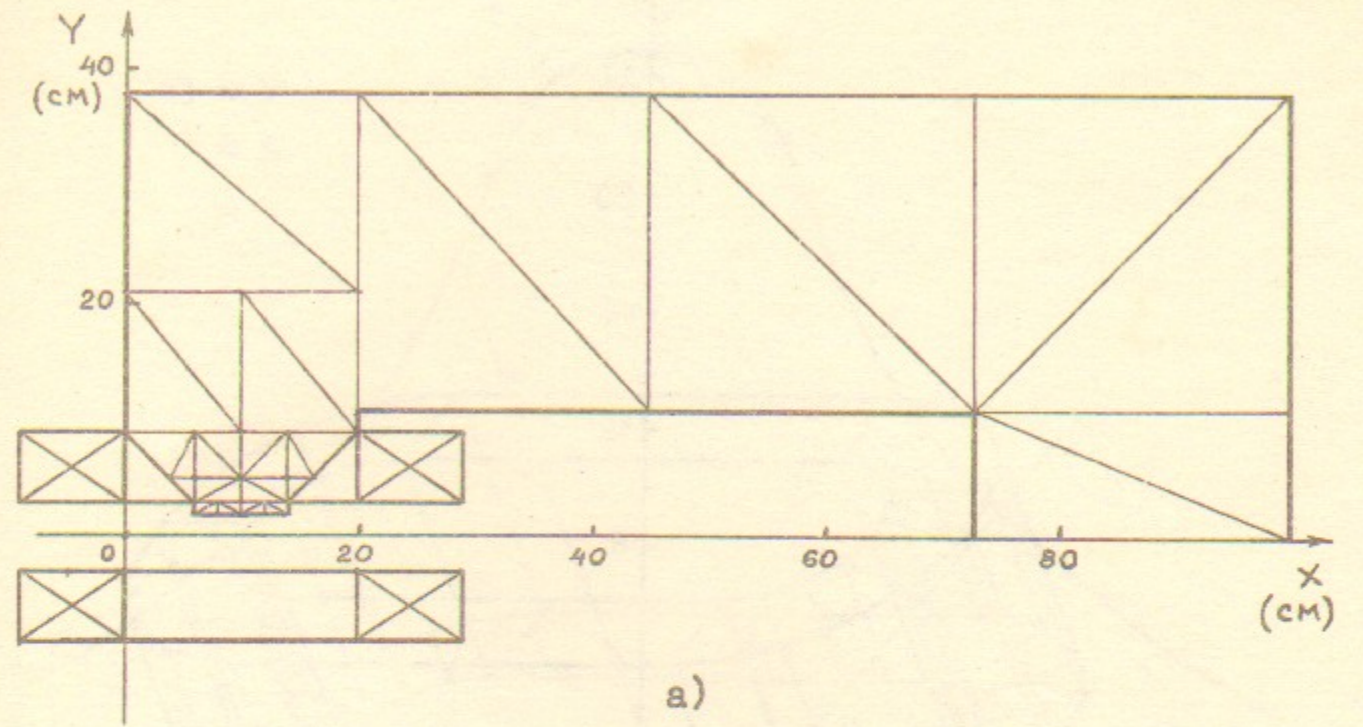


a)

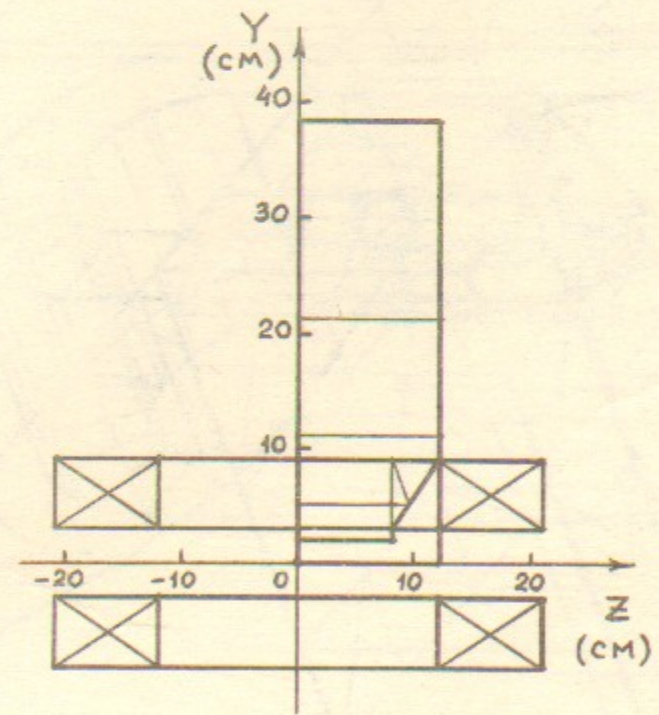


b)

Рис.6

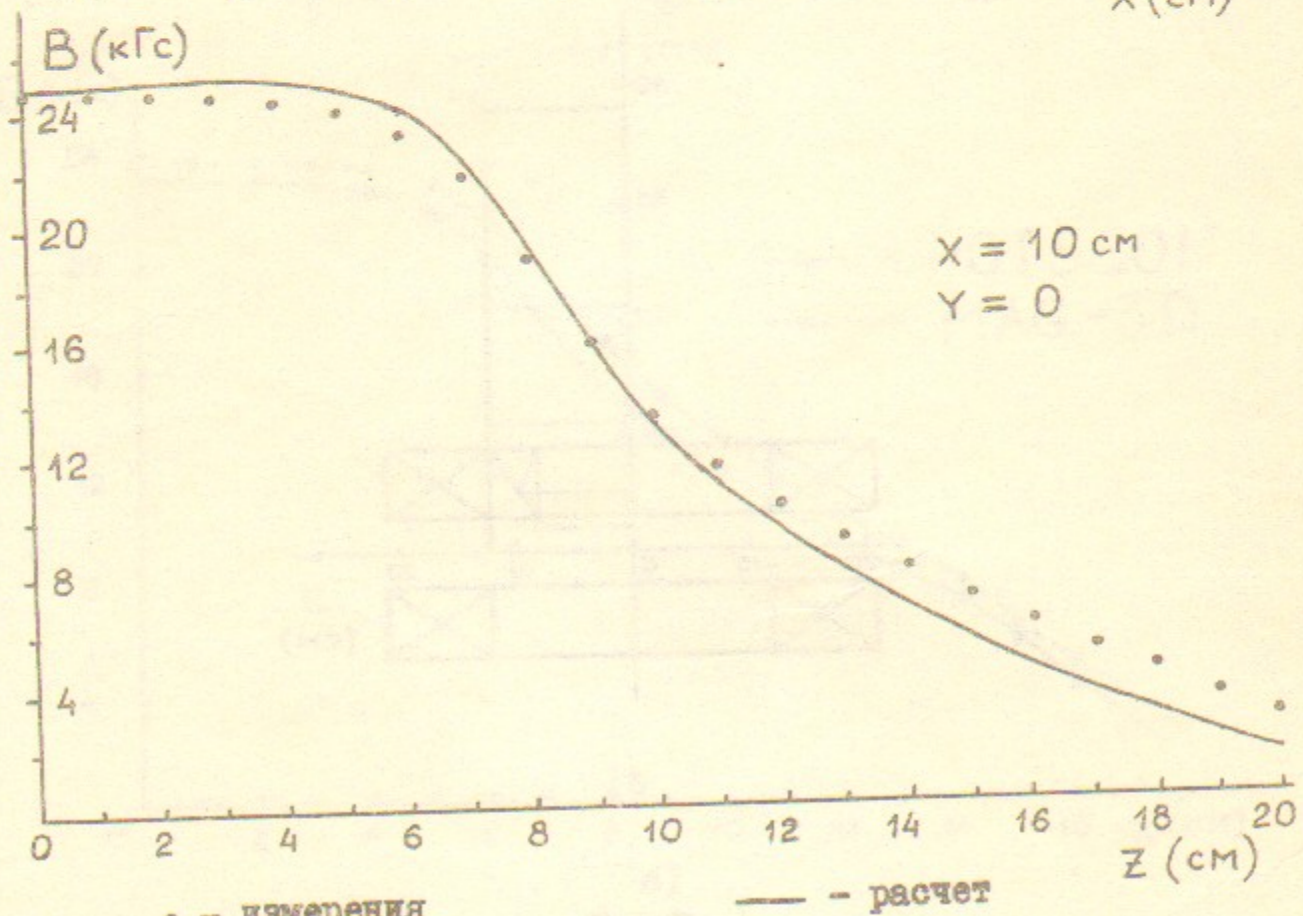
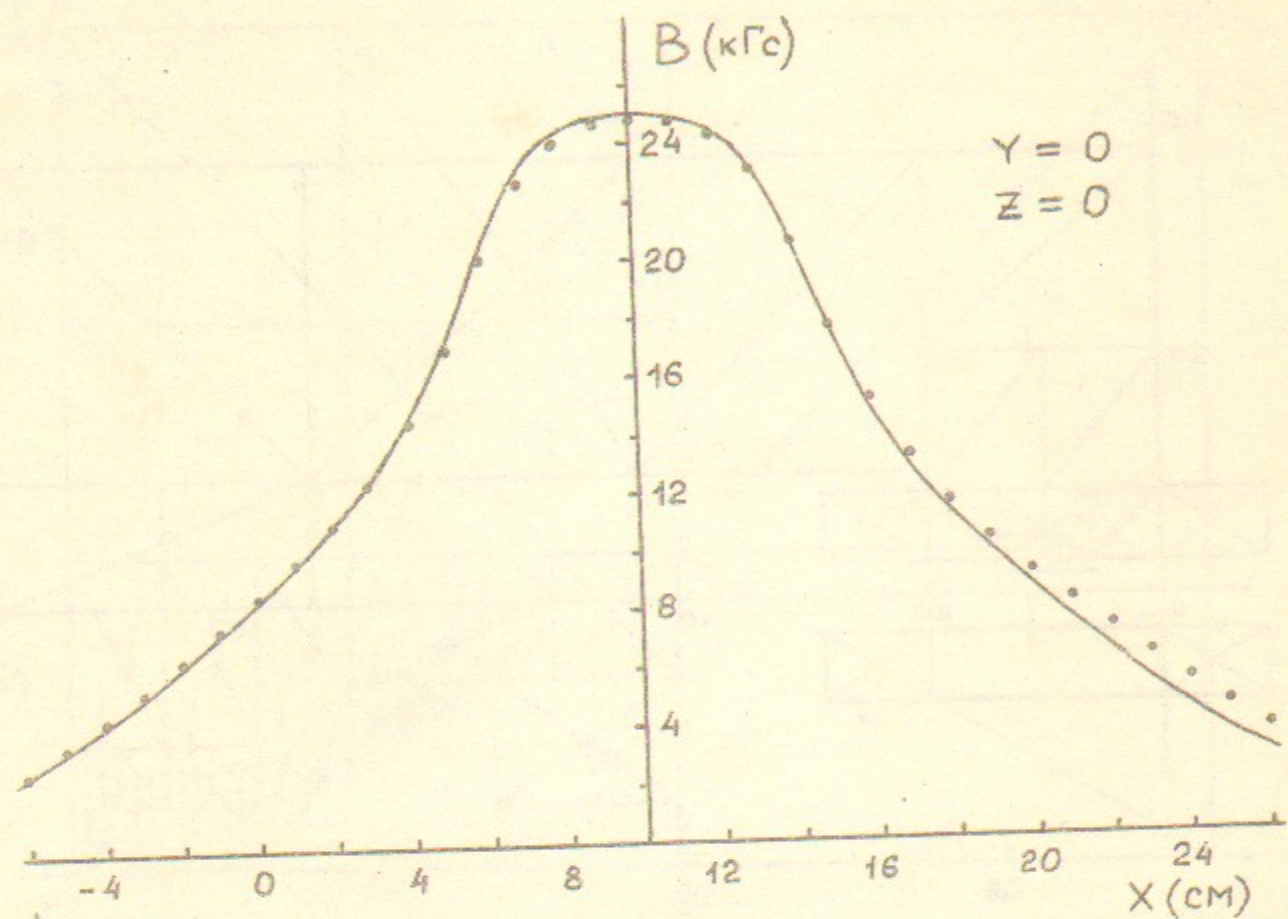


a)



b)

Рис.7



• — измерения

— — расчет

Рис.8

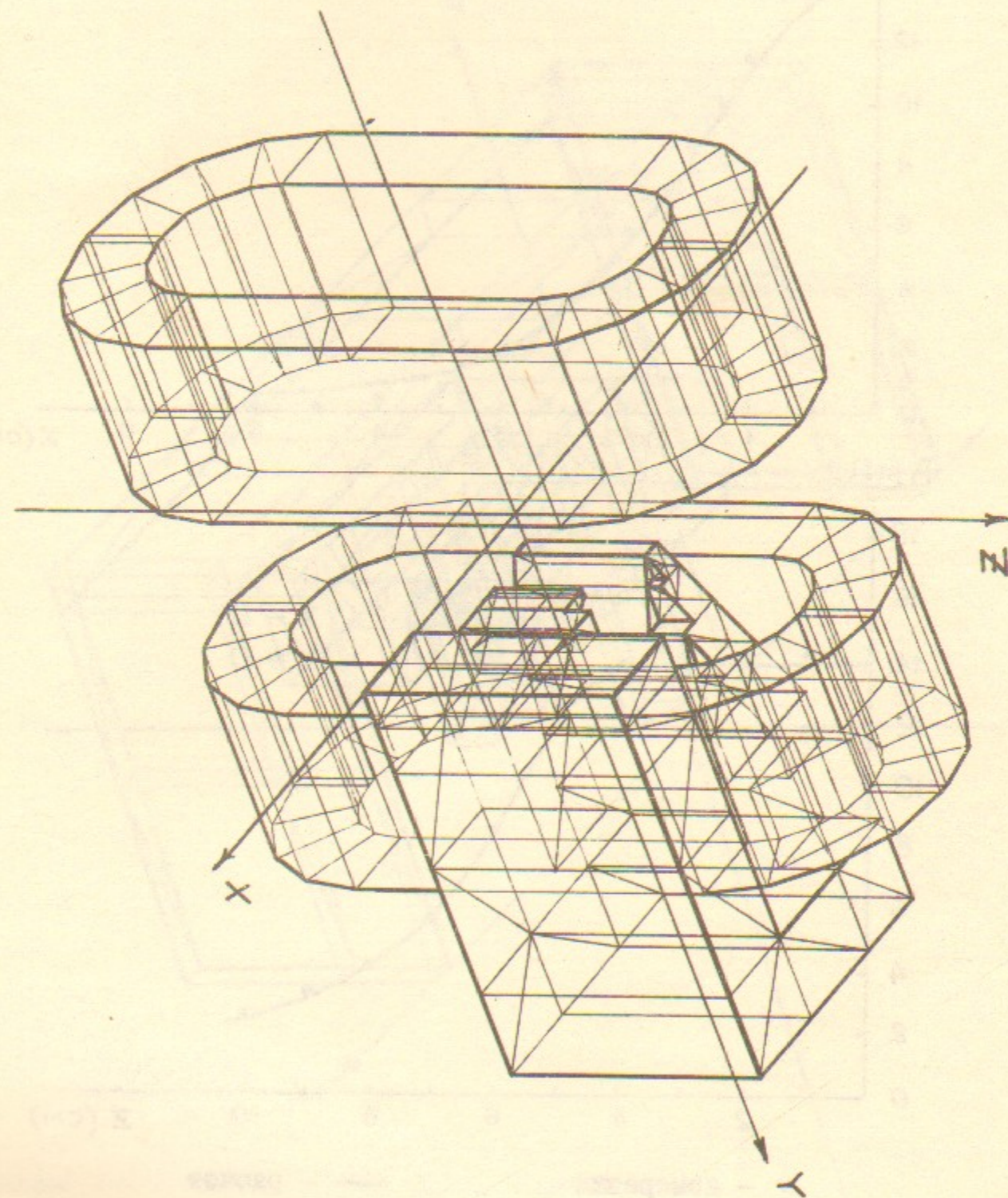
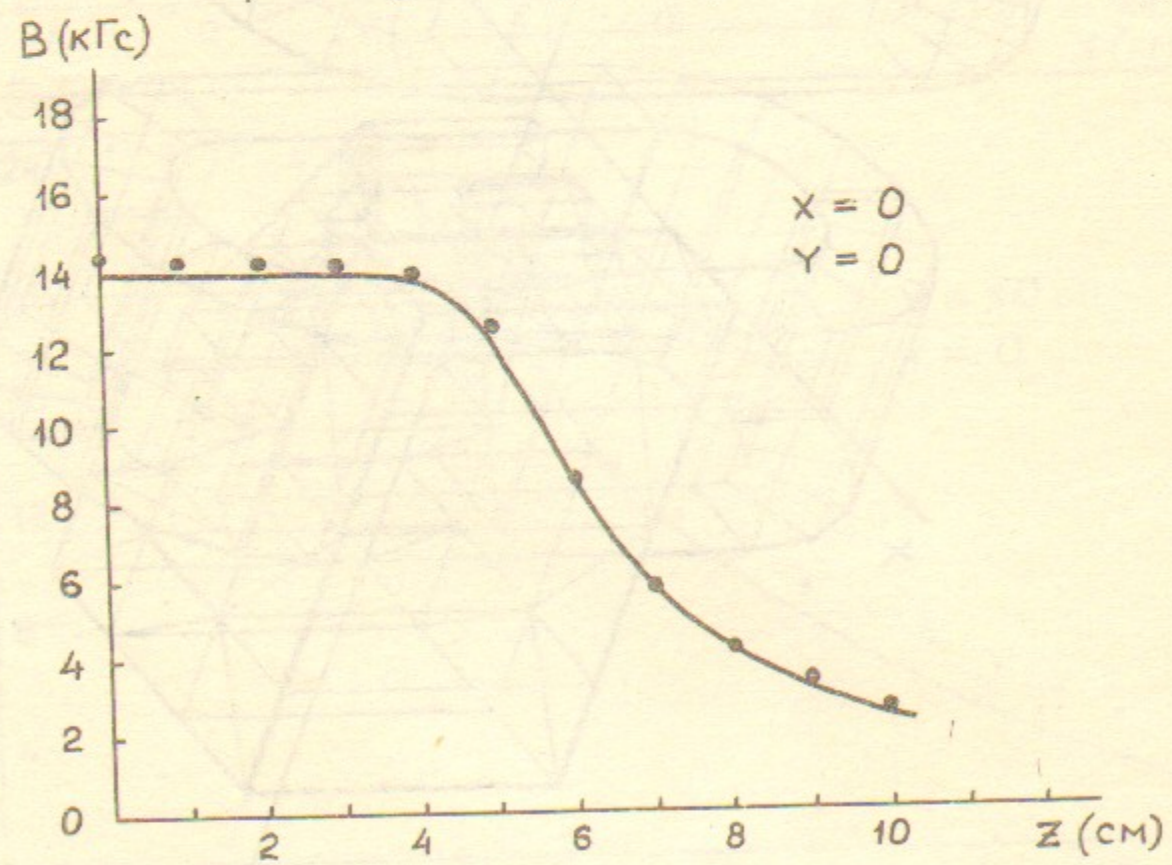
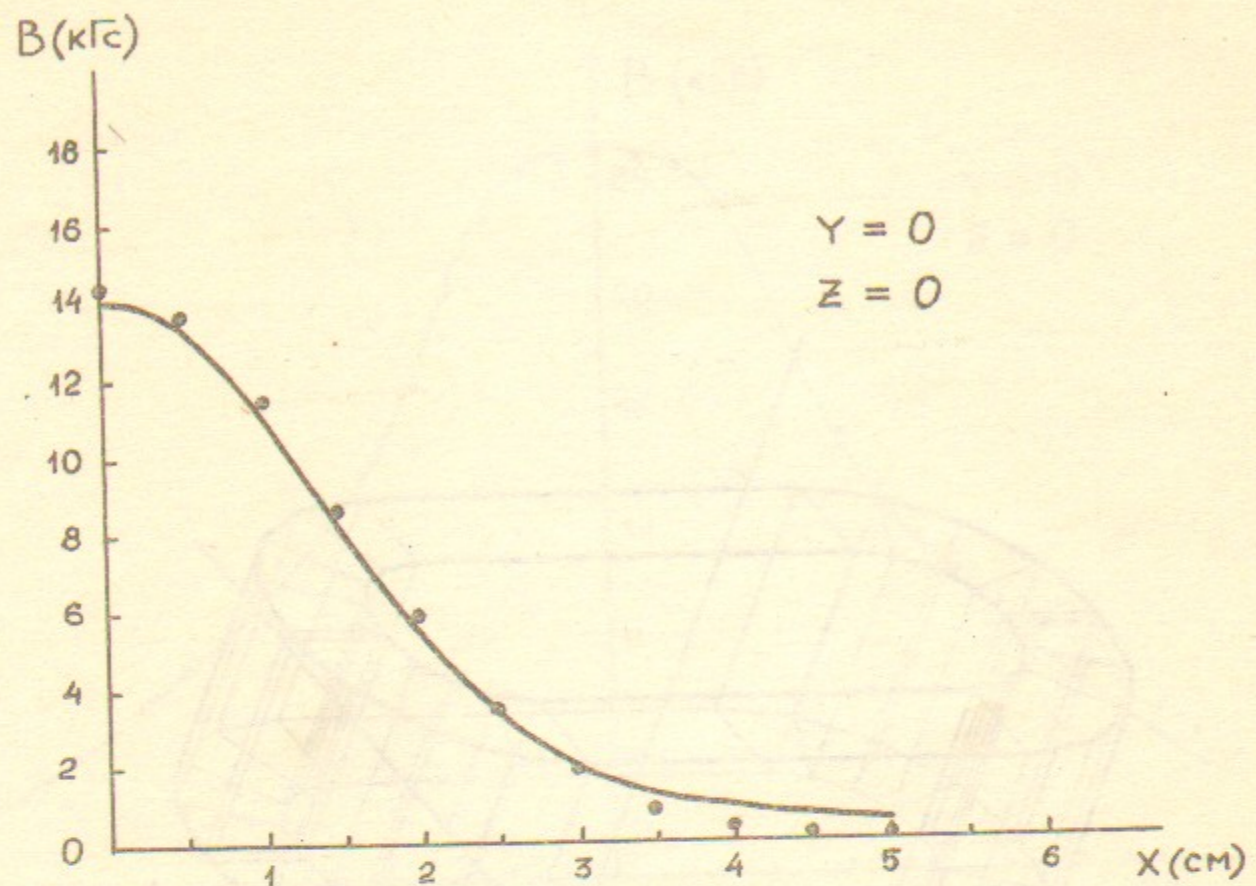


Рис.9



• - измерения — - расчет

Рис. I0

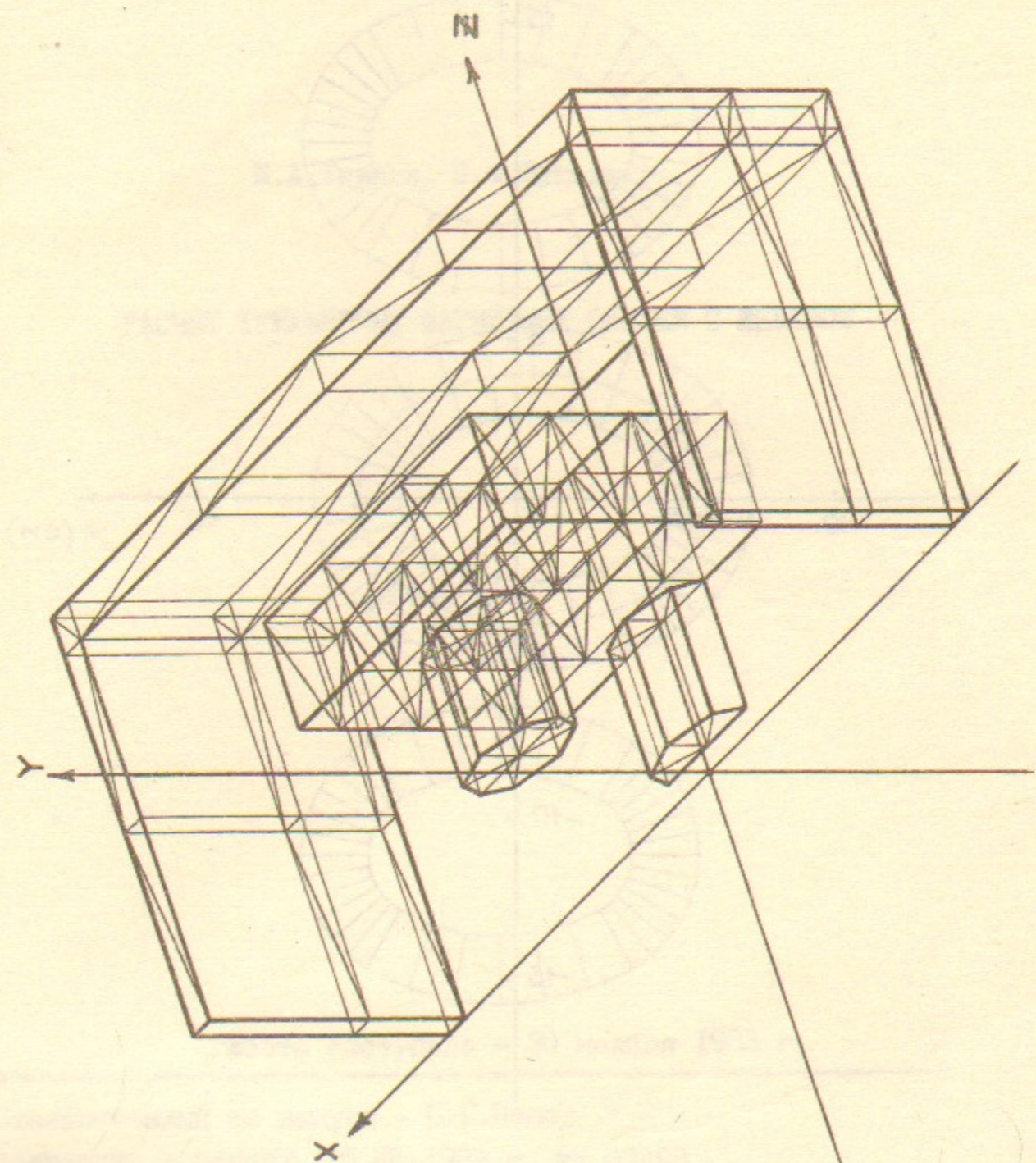


Рис. II

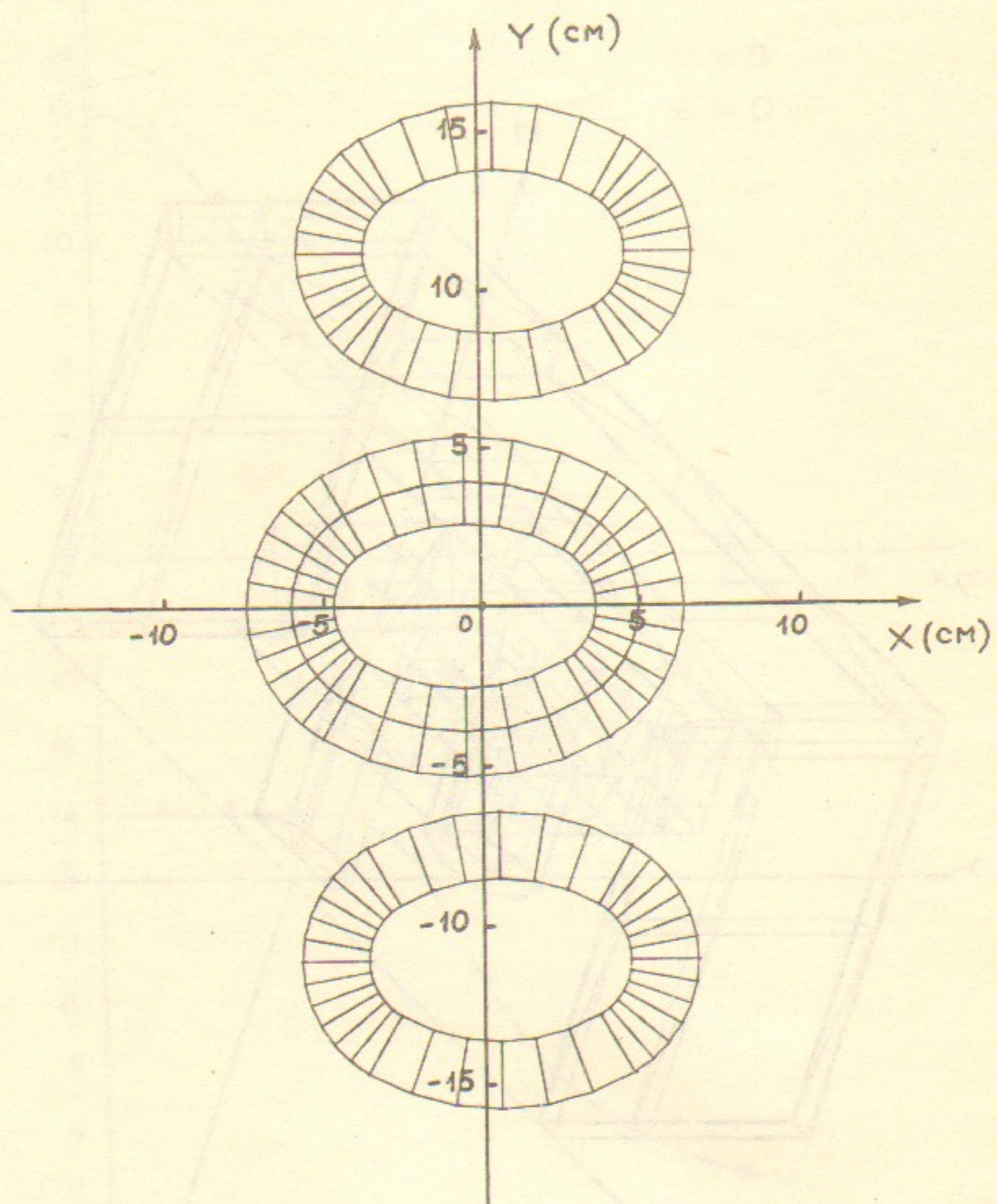


Рис.12

М.А.Тиунов, Б.М.Фомель

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ С ЖЕЛЕЗОМ

Препринт
№ 83-150

Работа поступила - 30 ноября 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
 Подписано к печати 15.XII-1983 г. МН 03488
 Формат бумаги 60x90 I/16 Усл. 1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.
 Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 150.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90