

53

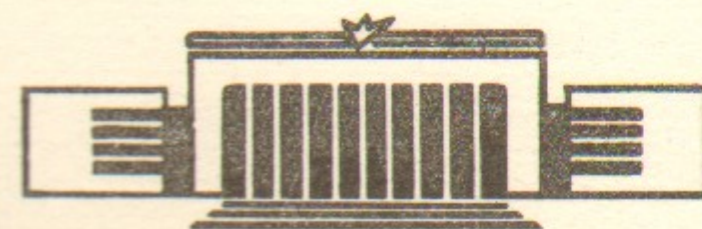


ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.С.Артамонов, Н.И.Иноземцев

ЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД
КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

ПРЕПРИНТ 83—83



НОВОСИБИРСК

ЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД КОГЕРЕНТНЫХ
КОЛЕБАНИЙ ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

А.С.Артамонов, Н.И.Иноземцев

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается когерентная устойчивость пучка заряженных частиц, взаимодействующего с согласованной линией при сдвиге частот отдельных мод когерентных колебаний порядка синхротронной частоты. Анализ проведен для короткого сгустка в пределе малого и большого хроматизма. Показано, что в случае малого и даже нулевого хроматизма, когда сдвиг частот когерентных дипольных колебаний становится порядка половины синхротронной частоты, возникает неустойчивость низших синхротронных мод.

I. Введение

Одним из основных эффектов, ограничивающих накопления больших токов в накопителях заряженных частиц, является когерентная неустойчивость, обусловленная взаимодействием пучка с окружающей материальной структурой. В настоящей работе рассматривается взаимодействие бунчируемого пучка с отрезком двухсвязной согласованной линии. Результаты показывают, что это взаимодействие может оказаться определяющим для накопителей, имеющих большое число (несколько десятков) пластин электростатического управления пучками, пластин инфлектора, дефлектора, пикап-электродов и т.д.

Теория когерентной неустойчивости была достаточно полно развита в работах [1-3]. Так, в [1] уже рассматривалось взаимодействие пучка с согласованными линиями. Однако область применения результатов, полученных в этих работах, ограничивается такими величинами токов, при которых когерентный сдвиг частот синхротронных колебаний много меньше синхротронной частоты. При выполнении этого условия уравнения движения в системе "частицы-поле" распадаются на систему независимых уравнений для отдельных мод когерентных колебаний. Анализ этих уравнений позволяет получить выражения для действительной и мнимой части когерентного сдвига и установить достаточные условия когерентной неустойчивости.

В то же время результаты исследований неустойчивостей [4-7] показывают, что в большинстве действующих накопителей при рабочих токах (5-10 мА) когерентный сдвиг частот бетатронных колебаний оказывается сравнимым с синхротронной частотой. В этом случае нельзя проводить анализ когерентной неустойчивости на основе независимого рассмотрения отдельных мод, поскольку, по крайней мере, ближайшие синхробетатронные моды оказываются сильно связанными. Следовательно, необходимо рассматривать систему "зацепляющихся" уравнений (или соответствующее ей интегродифференциальное уравнение). Анализ такой системы в общем случае провести достаточно сложно. В данной работе, при некоторых упрощающих обстоятельствах, это удалось сделать для короткого

$$\left(\ell_B / 2\ell \leq 1 \right) \quad \text{сгустка длиной } \ell_B \left(\gamma^2 \ell_B \gg \ell, \gamma = \frac{E}{mc^2} \right)$$

взаимодействующего с отрезком двухсвязного согласованного волно-

вода длиной l , в двух предельных случаях большого $\frac{l_B}{R_0} \left| \frac{d\omega}{d\omega_s} \right| \gg 1$ и малого $\frac{l_B}{R_0} \left| \frac{d\omega}{d\omega_s} \right| \ll 1$ хроматизма,

где $2\pi R_0$ - периметр машины, ω - частота бетатронных колебаний, ω_s - частота обращения. Показано, что при взаимодействии синхротронных мод и взаимодействии синхробетатронных мод при большом хроматизме критерий устойчивости совпадает с критерием устойчивости отдельных мод без учета их взаимодействия. В случае малого и даже нулевого хроматизма одна из низших мод синхробетатронных колебаний становится неустойчивой, если действительная часть когерентного сдвига дипольных колебаний превышает $0,57 \omega_c$ (ω_c - синхротронная частота). Механизм развития этой неустойчивости обусловлен несимметрией "head-tail" взаимодействия частиц и связан с возбуждением TEM-волны на дальнем по движению пучка краю пластины.

В настоящей работе использован аппарат кинетического уравнения, предложенный в [2]. Во втором разделе мы с несущественными изменениями приведем вывод дисперсионного уравнения, подробно изложенный в [1]. Это облегчит чтение работы и позволит сравнить полученные результаты с результатами работы [1].

2. Вывод дисперсионного уравнения

Для анализа коллективной устойчивости воспользуемся системой уравнений Власова, линеаризованной относительно отклонений одночастичной функции распределения $F(\vec{\varphi}, \vec{r}, t)$, векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r}, t)$ и скалярного потенциала $\varphi(\vec{r}, t)$ от их значений в стационарном состоянии, устойчивость которого исследуется:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}_{st}}{\partial \vec{\varphi}} \cdot \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \mathcal{H}_{st}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \vec{\varphi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\varphi}} \cdot \frac{\partial F_{st}}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial F_{st}}{\partial \vec{\varphi}} = 0$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi e}{c} \int d\vec{p} \vec{v} \tilde{F} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \quad (I)$$

$$\Delta \tilde{\varphi} = -4\pi e \int d\vec{p} \tilde{F}; \quad \text{div} \vec{A} = 0$$

Здесь \mathcal{H}_{st} - гамильтониан, описывающий движение частиц в фокусирующих полях и полях, наведенных пучком, находящимся в стационарном состоянии:

$$\mathcal{H}_{st} = c \sqrt{(\vec{\varphi} - \frac{e}{c} \vec{A}_{st})^2 + m_0 c^2} + e \varphi_{st}$$

$\mathcal{L} = -\frac{e}{c} (\vec{v} \vec{A}) + e \tilde{\varphi}$; $\vec{\varphi} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}_{st}$ - канонический, $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$ - кинетический импульс, $F_{st}(\vec{\varphi}, \vec{r})$ - одночастичная функция распределения стационарного пучка, нормированная на полное число частиц:

$$\int d\vec{r} d\vec{p} F_{st} = N \quad (2)$$

m_0 , e - масса и заряд частицы; c - скорость света; мы считаем пластину и камеру бесконечно проводящими, поэтому потенциалы удовлетворяют граничными условиями $\vec{A}_t|_n = 0$; $\varphi|_n = \text{const}$.

Движение частиц в накопителях удобно описывать в переменных действие - угол (I, ψ) . В этих переменных \mathcal{H}_{st} и F_{st} зависят только от действий, и кинетическое уравнение для F_{st} принимает особенно простой вид:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \psi_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} \cdot \frac{\partial F_{st}}{\partial I^k} = 0 \quad (3)$$

Как правило, стационарные поля, наведенные пучком, малы по сравнению с фокусирующими полями накопителя, поэтому вдали от машинных резонансов ими можно пренебречь. Тогда формулы, описывающие переход от переменных $\vec{r}, \vec{\varphi}$ к переменным действие - угол, имеют вид:

$$\chi = \chi_B + \chi_C; \quad \chi_C = R_0 \Psi(\theta) \frac{\Delta p_{||}}{p_s}; \quad \Delta p_{||} = p - p_s;$$

$$(\chi_B, z) = \frac{a_{\chi, z}}{2 |g_{\chi, z}|_{\max}} \cdot \left\{ f_{\chi, z}(\theta) \exp(i\psi_{\chi, z} + i\varphi_C \frac{d\omega_{\chi, z}}{d\omega_s}) + \text{к.с} \right\}$$

$$\vec{p}_1 = p_s \frac{d\vec{r}_1}{dt}; \Delta p_{||} = \mu_c \dot{\psi}_c; \theta = \theta_s + \psi_c + \psi_g; \theta_s = \omega_s t;$$

$$\psi_g = \frac{1}{R_0} \left(\psi(\theta) \cdot \frac{d\psi_c}{d\theta} - \psi_c \cdot \frac{d\psi}{d\theta} \right); \psi_c = \psi \sin \psi_c; \dot{\psi}_c = \omega_c(\rho_s);$$

$$\frac{d\omega_{\kappa,z}}{d\omega_s} = \left(\frac{d\omega_{\kappa,z}}{d\rho} / \frac{d\omega_c}{d\rho} \right)_s; a_{\kappa,z} = 2 |f_{\kappa,z}|_{\max} \cdot \sqrt{2 \Gamma_{\kappa,z} \frac{R_0}{\rho_s}}$$

$$\Gamma_c = \frac{\mu_c \omega_c \psi^2}{2} R_0 \quad (4)$$

В них индексом s отмечены величины, относящиеся к равновесной частице; $2\pi R_0$ - периметр машины; $\omega_c(\rho)$ - частота обращения частиц; $\mu_c = \left(\frac{d\omega_c}{d\rho} \right)^{-1}$ - масса синхротронного

движения, $f_{\kappa,z}$ - функция Флоке, удовлетворяющие условиям нормировки:

$$f_{\kappa} (f_{\kappa}' + i\nu_{\kappa} f_{\kappa})^* - \text{к.с.} = -2i \quad (\kappa = \kappa, z)$$

$$\nu_{\kappa,z} = \left(\frac{\omega_{\kappa,z}}{\omega_c} \right)_s - \text{число бетатронных колебаний за оборот};$$

$|f_{\kappa,z}|_{\max}$ - наибольшие значения модуля функции Флоке;

$\psi(\theta)$ - вынужденное периодическое решение уравнения:

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \frac{R_0^2}{R^2(\theta)} \cdot [1 - n(\theta)] \psi = \frac{R_0}{R(\theta)}$$

где $n(\theta)$ - показатель спада ведущего магнитного поля;

$R(\theta)$ - радиус кривизны орбиты.

Будем рассматривать взаимодействие низкочастотных возбуждений пучка с полем главной волны идеального согласованного двухсвязного волновода. Потенциал поля главной ТЕМ - волны

в бесконечном двухсвязном волноводе имеет вид:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = c \frac{\vec{A}_0(\vec{r}_1)}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky} Q_{\kappa}(t) \quad (5)$$

где $\vec{A}_0 = -\vec{\nabla} U(\vec{r}_1)$ (с нормировкой $\int dS \vec{A}_0^2 = 4\pi$) пропорционально электрическому полю, создаваемому разностью потенциалов U_0 между электродами:

$$\vec{A}_0(\vec{r}_1) = (c \mathcal{L}_0)^{1/2} \frac{\vec{E}(\vec{r}_1)}{U_0}; \Delta \vec{E}(\vec{r}_1) = 0$$

\mathcal{L}_0 - волновое сопротивление линии; а величины Q_{κ} удовлетворяют следующему уравнению:

$$\ddot{Q}_{\kappa} + c^2 \kappa^2 Q_{\kappa} = e \int d\Gamma \vec{\nabla} \vec{A}_0^* e^{-iky} \vec{F} \quad (6)$$

Для низкочастотных колебаний поля ($\kappa l \ll 1$) на отрезке волновода длиной l азимутальную зависимость потенциала можно аппроксимировать выражением:

$$U(\vec{r}_1, \theta) = \begin{cases} U(\vec{r}_1); & |\theta| \leq \frac{l}{2R_0} \\ 0 & ; |\theta| > \frac{l}{2R_0} \end{cases}$$

(θ отсчитывается от середины пластины).

С учетом изложенного выше система уравнений Власова свелась к следующей:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \omega_{\kappa} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \psi_{\kappa}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\kappa}} \frac{\partial F_{st}}{\partial I^{\kappa}} = 0 \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = c \frac{\vec{A}_0(\vec{r}_1)}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky} Q_{\kappa}(t) \\ \ddot{Q}_{\kappa} + c^2 \kappa^2 Q_{\kappa} = e \int d\Gamma (\vec{\nabla} \vec{A}_0)^* e^{-iky} \vec{F} \end{cases} \quad (7)$$

Решение этой системы будем искать в виде:

$$\tilde{F} = e^{-i\omega t} \sum_{m,n} F_{m,n} e^{im_k \psi_k - in\omega_s t} \quad (8)$$

$$Q_k = e^{-i\omega t} \sum_n Q_{k,n} e^{-in\omega_s t}$$

Подставив (8) в (7) получается система интегральных уравнений:

$$(\omega + n\omega_s - m_k \omega_k) F_{m,n} = \frac{e^2}{2\pi} m_k \frac{\partial F_{st}}{\partial I^k} \sum_{m',n',n''} \times \quad (9)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{[\vec{v}\vec{A}_0 e^{iky}]_{m,n'-n}}{c^2 k^2 - (\omega + n'\omega_s)^2} \cdot \int d\Gamma [\vec{v}\vec{A}_0 e^{iky}]_{m',n'-n''}^* \cdot F_{m',n''}$$

где

$$[\vec{v}\vec{A}_0 e^{iky}]_{m,n} = i\omega_s (kR_0 - m_k v_k - n) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \frac{d^3\psi}{(2\pi)^3} \cdot \int_{-e/2R_0}^{e/2R_0} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(kR_0\theta - n\theta_s - m_k \psi_k)} U(\vec{r}_1)$$

В отсутствие взаимодействия пучка с согласованной линией спектр когерентных колебаний определяется уравнениями $\omega = m_k \omega_k$.

Если взаимодействие является достаточно слабым, таким, что когерентный сдвиг частот $\Delta\omega$ удовлетворяет условию

$|\Delta\omega| \equiv |\omega - m_k \omega_k| \sim \omega_c \ll \omega_s, \omega_k, \omega_z$, то в уравнениях (9) достаточно оставить члены с $n, n'' = 0$, а в сумме по m' ограничиться суммированием по соседним к $\{m\}$ синхробетатронным модам. Систему интегральных уравнений можно существенно упростить, используя разложение $[\vec{v}\vec{A}_0 e^{iky}]_{m,n}$ в ряд по амплитудам колебаний и заменяя суммирование по n' интегрированием $[I]$. С помощью подстановки

$$F_{m,n} = m_k \frac{\partial F_{st}}{\partial I^k} \cdot \frac{a_z^{|m_z|} a_z^{|m_z|}}{\omega - m_k \omega_k} \cdot \chi_m(\psi) \quad (10)$$

получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\chi_m(\psi) = \sum_{m'} \int_{-\infty}^{\infty} dn \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{(u-n-m_k v_k)(u-n-m'_k v_k)}{u^2 - (\nu+n+i\varepsilon)^2} \times \quad (11)$$

$$\times g_{m,n}^u(\psi) \cdot \int_0^{\infty} d\psi'^2 \xi_{m'}(\psi') \cdot g_{m',n}^{u*}(\psi') \cdot \chi_{m'}(\psi')$$

в которой $\nu = \frac{\omega}{\omega_s}$, $m' = (m_1, m'_2)$; $\varepsilon \rightarrow +0$ - определяет правило обхода полюсов;

$$\xi_{m'}(\psi) = \frac{Ne^2 \beta^2}{R_0 (|m_z|! |m_z|!)^2} \cdot \left\{ m'_2 \frac{\partial \rho(\psi)}{\partial I_c} \cdot \left\langle \frac{a_z^{|m_z|} a_z^{|m_z|}}{\omega - m'_k \omega_k} \right\rangle - \right.$$

$$\left. - \rho(\psi) \cdot \left\langle m_1 \frac{\partial}{\partial I_1} \frac{a_z^{|m_z|} a_z^{|m_z|}}{\omega - m'_k \omega_k} \right\rangle \right\};$$

$\beta = \frac{v}{c}$; скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение с $F_1(I_1)$. При выводе (11) мы полагали, что функция распределения F_{st} факторизуется, то есть $F_{st} = N F_1(I_1) \rho(I_c)$, причем

$$\int d\Gamma_1 F_1(I_1) = \int d\Gamma_c \rho(I_c) = 1$$

Величины $g_{m,n}^u$, входящие в (11) имеют вид:

$$g_{m,n}^u = \frac{Y_{m_c} \left[\psi \left(n + m_c \frac{d\omega_{\perp}}{d\omega_s} \right) \right]}{2^{|m_{z1}| + |m_{z2}|}} \cdot \left\{ \frac{\partial^{|m_{z1}| + |m_{z2}|} U}{\partial z^{|m_{z1}|} \partial z^{|m_{z2}|}} \times \right.$$

$$\times \int_{-e/2R_0}^{e/2R_0} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(u-n)\theta + im_c \chi_{\perp}} \omega_z^{|m_{z1}|} \omega_z^{|m_{z2}|} +$$

$$+ \frac{in}{R_0} |m_{z1}| \cdot \frac{\partial^{|m_{z1}| + |m_{z2}| - 1} U}{\partial z^{|m_{z1}| - 1} \partial z^{|m_{z2}|}} \cdot \int_{-e/2R_0}^{e/2R_0} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(u-n)\theta + im_c \chi_{\perp}} \times$$

$$\times \omega_z^{|m_{z1}| - 1} \omega_z^{|m_{z2}|} \cdot \left[\psi \cdot \left(\omega_z' + \frac{i \operatorname{sign}(m_c)}{\omega_z} \right) - \omega_z \psi' \right] \Big\} +$$

$$+ o \left(a_{\perp}^{|m_{z1}| + |m_{z2}| + 1} \right)$$

где Y_{m_c} - функции Бесселя,

$$\omega_{z,z} = |\bar{f}_{z,z}|, \quad \bar{f}_k = \frac{f_k}{|f_k|_{\max}}, \quad \text{а } \chi_k = -v_k \theta + \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\omega_k^2}$$

- фаза бетатронного движения.

Решение системы интегральных уравнений (II) при произвольных распределениях $\rho(\psi)$ возможно только численными методами. Мы исследуем эти уравнения для модельных распределений, пренебрегая разбросом по частотам.

3. Взаимодействие синхробетатронных мод

Рассмотрим аксиально-продольные возбуждения ($m_c = 0$) для модельного распределения $\rho(\psi) = \frac{1}{2\pi} \delta(\psi^2 - \Delta^2)$. В нем $\delta(\dots)$ - дельта функция Дирака, а Δ связана с длиной пучка соотношением:

$$\Delta = \frac{e\beta}{2R_0}$$

В результате подстановки модельного распределения в систему интегральных уравнений (II) получим систему алгебраических уравнений:

$$(\omega - m_c \omega_c) \bar{\chi}_m = \sum_{m'} a_{m,m'} \bar{\chi}_{m'} \quad (I2)$$

$$\bar{\chi}_m = \chi_m(\Delta)$$

Где суммирование по m' ведется по соседним к $\{m\}$ синхробетатронным модам, а коэффициенты $a_{m,m'}$ выглядят следующим образом:

$$\operatorname{Re} a_{m,m'} = -\pi N \delta_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot Y_{m_c}(ax) \cdot Y_{m'_c}(ax) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sin(x-b)}{x-b} - \frac{m_z g \frac{e}{R_0}}{(x-b)} \cdot \left[1 - \frac{\sin(x-b)}{x-b} \right] \right\}; \quad (I3)$$

$$\operatorname{Im} a_{m,m'} = -2\pi N \delta_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot Y_{m_c}(ax) \cdot Y_{m'_c}(ax) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{x-b} + m_z g \frac{e}{R_0} \cdot \frac{1}{(x-b)^2} \right\} \cdot \frac{\sin^2(x-b)}{2}$$

В выражениях (I3)

$$a = \frac{e\beta}{4e}; \quad b = m_z \frac{e}{R_0} \left(g + 2 \frac{dv_z}{d \ln \omega_0} \right); \quad g = \frac{1}{\omega_z^2}$$

$$\delta_0 = \frac{\chi_0 \beta c |f_z|^2 \max}{4\pi^3 \gamma} \cdot \bar{\omega}_z^{2|m_z|} \text{sign}(m_z) \cdot \left\langle \left(\frac{a_z}{2}\right)^{2|m_z|-2} \right\rangle \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(|m_z|-1)!} \cdot \frac{\partial^{|m_z|} U}{\partial z^{|m_z|}} \right]^2 ; \quad \chi_0 = \frac{e^2}{mc^2}$$

(I4)

и предполагается, что $\bar{\omega}_z$ на длине пластины постоянна.

Проанализируем полученные выражения для коэффициентов $a_{m,m'}$ в двух предельных случаях: $ab \gg 1$ и $ab \ll 1$. Реально первый случай соответствует большому хроматизму, второй - малому. При последующем рассмотрении мы будем полагать выполненным условие $l_b \leq 2l$.

$$3.1. \quad ab = m_z \frac{l_b}{4R_0} \left(g + 2 \frac{d\nu_z}{d \ln \omega_0} \right) \ll 1.$$

Заметим, что в указанной области параметров находится целый ряд накопителей, как существующих (CESR, PETRA, DORIS, PER, ВЭШ-4), так и проектируемых^{*}). В таблице I приведены значения параметров ab для некоторых из них.

Проанализируем выражения для реальной и мнимой части коэффициентов $a_{m,m'}$. В области параметров $l_b \leq 2l$, $ab \ll 1$ после интегрирования в (I3) получим:

$$\text{Re } a_{m,m'} = -N\delta_0 \cdot \left\{ \pi^2 Y_{m_c}(ab) Y_{m'_c}(ab) + \right.$$

$$\left. + m_z g \frac{e}{R_0} \left[\pi^2 \frac{\partial}{\partial b} [Y_{m_c}(ab) \cdot Y_{m'_c}(ab)] - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 4 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} (m'_c - m_c)}{m_c'^2 - m_c^2} - \frac{2ab \cos \frac{\pi}{2} (m'_c - m_c)}{[(m'_c - m_c)^2 - 1][(m'_c + m_c)^2 - 1]} \right) \right] \right\}. \quad (I5)$$

^{*}) Например: LEP.

(в третьем слагаемом $m'_c \neq m_c$, в четвертом $m'_c \neq \pm m_c \pm 1$). Первые два слагаемые в (I5) не зависят от длины согласованной линии и своим происхождением обязаны взаимодействию пучка с TEM-волной, возбужденной на дальнем по движению пучка крае пластины. Два других - пропорциональные длине l - связаны с возбуждением TEM-волны поперечным движением пучка внутри согласованной линии.

При $m'_c = m_c$ и условии $|\Delta\omega| \ll \omega_c$ выражения (I7) совпадают с действительной частью когерентного сдвига аксиально-продольной моды колебаний $\{m\}$. Так, для аксиальных дипольных колебаний действительная часть когерентного сдвига равна:

$$\text{Re } \Delta\omega = - \frac{N\chi_0 \beta c}{4\pi\gamma} |f_z|^2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \approx$$

$$\approx - \frac{N\chi_0 \beta c}{S_{\perp} \gamma} |f_z|^2$$

где S_{\perp} - поперечное сечение камеры; $|f_z|$ - модуль функции Флоке в месте расположения согласованной линии. Рассмотрим теперь выражения для мнимой части коэффициентов $a_{m,m'}$:

$$\text{Im } a_{m,m'} = -N\delta_0 \left\{ \pi^2 m_z g \frac{e}{R_0} Y_{m_c}(ab) Y_{m'_c}(ab) + \right.$$

$$\left. + \frac{4 \sin \frac{\pi}{2} (m'_c - m_c)}{m_c'^2 - m_c^2} - \frac{8a \left(b + m_z g \frac{e}{R_0} \right) \cos \frac{\pi}{2} (m'_c - m_c)}{[(m'_c - m_c)^2 - 1][(m'_c + m_c)^2 - 1]} \right\} \quad (I6)$$

причем во втором слагаемом $m'_c \neq m_c$, а в третьем $m'_c \neq \pm m_c \pm 1$.

При $m'_c = m_c$ и $|\Delta\omega| \ll \omega_c$ выражение (I6) соответствует мнимой части когерентного сдвига, знак которой определяет устойчивость аксиально-продольной моды колебаний. Первое слагаемое в (I6) при $m'_c = m_c$ соответствует быстрому затуханию, третье - так называемому "head-tail" эффекту.

Существенным отличием (I6) от подобного выражения, полученного в [1], является наличие независимого от параметра

$m_z \frac{e}{R_0} \left(q + 2 \frac{dV_z}{d \ln \omega_0} \right)$ второго слагаемого, которое отлично от нуля лишь для нечетной разности $m'_c - m_c$ и которое определяет сильную связь когерентных мод колебаний пучка с различной четностью, когда $\pi^2 N \delta_0 \sim \omega_c$.

В случае $ab \ll 1$, $m_z q \frac{e}{R_0} \ll 1$ найденные выражения для действительной и мнимой части коэффициентов $a_{m, m'}$ существенно упрощаются:

$$\operatorname{Re} a_{m, m'} = -\pi^2 N \delta_0 \delta_{m_c 0} \delta_{m'_c 0} \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} a_{m, m'} = -4N\delta_0 \frac{\sin \frac{\pi}{2}(m'_c - m_c)}{m_c'^2 - m_c^2}$$

Дисперсионное уравнение для определения собственных значений ω может быть получено из соответствующей системе (12) с коэффициентами (17) интегродифференциального уравнения:

$$(\omega - i\omega_c \frac{\partial}{\partial \varphi}) \chi(\varphi) = -\pi N \delta_0 \int_0^{2\pi} dx \chi(x) \theta(\sin \varphi - \sin x)$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases};$

а $\chi(\varphi)$ - периодическая функция с периодом 2π .

Это уравнение может быть решено только численными методами и здесь рассматриваться не будет. Вместо этого мы рассмотрим поведение первых трех собственных значений системы уравнений (12) в зависимости от параметра $\pi^2 N \delta_0$ при условии, что $\pi^2 N \delta_0 \sim \omega_c$. Оставляя в качестве первого приближения уравнения для первых трех синхротронных мод:

$$\begin{cases} \bar{\omega} \bar{\chi}_0 = -\pi^2 N \delta_0 \bar{\chi}_0 - 4i N \delta_0 (\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_{-1}) \\ (\bar{\omega} \pm \omega_c) \bar{\chi}_{\pm 1} = \pm 4i N \delta_0 \bar{\chi}_0; \quad \bar{\omega} = \omega - m_z \omega_z \end{cases} \quad (18)$$

получим следующее кубическое уравнение:

$$\bar{\omega}^3 + \pi^2 N \delta_0 \bar{\omega}^2 + [32(N\delta_0)^2 - \omega_c^2] \bar{\omega} - \pi^2 N \delta_0 \omega_c^2 = 0 \quad (19)$$

Условием существования комплексных корней уравнения (19), а, следовательно, и условием неустойчивости, является выполнение неравенства:

$$\left[2 \left(\frac{4}{\pi^2} \right)^2 - \frac{1}{3} - \Delta^2 \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{9} - \left(\frac{4}{\pi^2} \right)^2 - \Delta^2 \right]^2 \geq 0$$

где $\Delta = \frac{\omega_c}{\pi^2 N \delta_0}$

Численное решение этого неравенства дает критерий неустойчивости:

$$\Delta^{-1} \geq 0.57$$

Это условие практически совпадает с найденным в [4]: $\Delta \lesssim \pi$.

На рисунке I приведена зависимость инкремента неустойчивости от тока.

Для того, чтобы оценить поправки к найденным собственным значениями системы (18), оставим в (12) следующие два уравнения для мод $m_c = \pm 2$:

$$\begin{cases} \bar{\omega} \bar{\chi}_0 = N \delta_0 (-\pi^2 \bar{\chi}_0 - 4i (\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_{-1})) \\ (\bar{\omega} \mp \omega_c) \bar{\chi}_{\pm 1} = \mp 4i N \delta_0 \left(\bar{\chi}_0 + \frac{1}{3} (\bar{\chi}_2 + \bar{\chi}_{-2}) \right) \\ (\bar{\omega} \mp 2\omega_c) \bar{\chi}_{\pm 2} = \frac{4}{3} i N \delta_0 (\bar{\chi}_{-1} - \bar{\chi}_1) \end{cases} \quad (20)$$

Уравнение на собственные значения системы (20) можно записать в виде:

$$\bar{\omega}^3 + \pi^2 N \delta_0 \bar{\omega}^2 + \left[\frac{32(N\delta_0)^2}{1+c} - \omega_c^2 \right] \bar{\omega} - \pi^2 N \delta_0 \omega_c^2 = 0$$

где
$$c = \frac{64(N\delta_0)^2}{9} \cdot \frac{\bar{\omega}^2}{(\bar{\omega}^2 - \omega_c^2)(\bar{\omega}^2 - 4\omega_c^2)}$$

Отличие этого уравнения от уравнения (19) состоит в коэффициенте при первой степени $\bar{\omega}$. Можно, однако, увидеть, что вблизи любого из корней уравнения (19) поправка с составляет величину не более $5 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, точность найденных из уравнения (19) первых трех собственных значений системы (12) с коэффициентами (17) при условии, что $\pi^2 N \delta_0 \ll \omega_c$, составляет несколько процентов. Для анализа поведения спектра синхробетатронных колебаний при больших значениях параметра $\pi^2 N \delta_0$ проводилось численное решение системы (12), в которой оставалось до 30 уравнений для первых пятнадцати мод ($m_c = 0, \pm 1, \dots, \pm 15$). Результаты численного расчета показали следующее. При значении $\pi^2 N \delta_0 = 0.569$ в нижней части спектра появляется собственное значение с положительной мнимой частью, причем число уравнений с точностью до 10^{-3} не влияет на этот результат.

При больших значениях параметра $\pi^2 N \delta_0$ появляются новые собственные значения с положительной мнимой частью, что соответствует неустойчивости более высоких мод.

Таким образом, аналитические оценки и численный расчет позволяют с достаточной достоверностью утверждать, что при $\pi^2 N \delta_0 > 0.57$ синхробетатронные моды становятся неустойчивыми.

Наличие быстрого затухания не приводит к стабилизации этой неустойчивости. Действительно, если учесть в коэффициентах $a_{m,m'}$ слабые пропорциональные $m_z g \frac{e}{R_0}$, то кубическое уравнение (19) примет вид:

$$\bar{\omega}^3 + \pi^2 N \delta_0 (1+i\beta)(\bar{\omega}^2 - \omega_c^2) + [32(N\delta_0)^2(1+i\beta)^2 - \omega_c^2] \bar{\omega} = 0$$

где
$$\beta = m_z g \frac{e}{R_0}$$

Анализ этого уравнения показывает, что при любом значении $\beta \neq 0$ всегда существуют корни, лежащие в верхней полуплоскости переменной $\bar{\omega}$.

$$3.2. \quad m_z \frac{R_0}{4R_0} \left(g + 2 \frac{dv_z}{dv_m \omega_0} \right) \gg 1.$$

В этом случае выражения для действительной и мнимой частей $a_{m,m'}$ выглядят следующим образом:

$$\text{Re } a_{m,m'} = - \frac{N\delta_0}{ab} \cos \frac{(m'_c - m_c)\pi}{2} \cdot \left\{ \pi + 2m_z g \frac{e}{R_0} \ln \frac{(ab)^2}{(1+|m_c|)(1+|m'_c|)} \right\} \quad (21)$$

$$\text{Im } a_{m,m'} = N\delta_0 \frac{\cos \frac{\pi}{2}(m'_c - m_c)}{ab} \ln \frac{(ab)^2}{(1+|m_c|)(1+|m'_c|)}$$

Выражения (21) выписаны для наиболее существенных мод $|m_c| \sim |m'_c| \ll ab$. Пренебрегая медленной логарифмической зависимостью $a_{m,m'}$ от m_c и m'_c и заметив, что в этом случае $a_{m,m'}$ можно записать в виде:

$$a_{m,m'} = A \cos \frac{\pi}{2}(m'_c - m_c)$$

(A — независимая от m_c и m'_c постоянная), перепишем систему (12) следующим образом:

$$\begin{cases} (\bar{\omega} - 2n\omega_c) \bar{\chi}_{2n} = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-)^{n+k} \bar{\chi}_{2k} \\ (\bar{\omega} - (2n+1)\omega_c) \bar{\chi}_{2n+1} = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-)^{n+k} \bar{\chi}_{2k+1} \end{cases} \quad (22)$$

$$n = -\infty, \dots, +\infty$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - 2k\omega_c} = \frac{\pi}{2\omega_c} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2\omega_c} \quad (23)$$

получим систему независимых трансцендентных уравнений:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \bar{\omega}}{2\omega_c} = \frac{\pi A}{2\omega_c}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(\bar{\omega} - \omega_c)}{2\omega_c} = \frac{\pi A}{2\omega_c}$$

Эта система описывает нижнюю часть спектра синхробетатронных колебаний, то есть первые $n \sim a/b$ собственных частот. Не останавливаясь подробно на решении этих уравнений, заметим, что $\Im m \bar{\omega}$ однозначно определяется $\Im m A$, которая совпадает с мнимой частью когерентного сдвига "несвязанных" синхробетатронных мод. Таким образом, как и в случае $|A| \ll \omega_c$ устойчивость когерентных синхробетатронных колебаний определяется знаком хроматизма: при $\frac{d\nu}{d\omega} < 0$ колебания неустойчивы. Анализ верхней части спектра $\bar{\omega}_n (n \geq a/b)$ провести достаточно сложно. Здесь мы приведем только очевидную оценку

$$|\Im m \bar{\omega}_n| \leq \frac{N\delta_0}{n}$$

4. Взаимодействие синхротронных мод

Система интегральных уравнений, описывающая взаимодействие синхротронных мод, получается из системы (II) при условии $m_z = m_z = 0$. Полагая также, что Ψ - функция слабо меняется на длине пластины, получим:

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{\omega} - m_c \omega_c) \chi_{m_c}(y) = m_c \sum_{m'_c} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \mathcal{L}(x) \cdot \left\{ U^2 + \right. \\ \left. + \frac{R_0 \mu_c \omega_c \Psi(m_c + m'_c) \Delta}{2 p_s \cdot x} \cdot \frac{\partial U^2}{\partial x} \right\} \chi_{m_c}(xy) x \\ \times \int_0^{\infty} dy' \frac{dq}{dy'} \chi_{m'_c}(xy') \chi_{m'_c}(y') \end{aligned} \quad (24)$$

где $\lambda = \frac{\pi \mu_c \omega_c R_0^2}{2 N e^2} \Delta^3$, $\Delta = \frac{l_b}{2 R_0}$, $x = n \Delta$, $y = \frac{\Psi}{\Delta}$

$q(y) = \Delta^2 p(\Psi)$ - функция распределения по амплитудам синхротронного движения, нормированная условием:

$$\int_0^{\infty} dy^2 q(y) = \frac{1}{2\pi}$$

а функция $\mathcal{L}(x)$ имеет вид:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sin^2(u-x) \frac{l_b}{e_b} \cdot (u-x - m_c \nu_c \Delta)(u-x - m'_c \nu_c \Delta)}{(u-x)^2 u^2 - (\nu \Delta + x + i\varepsilon)^2}$$

С точностью до членов $\sim \nu_c \frac{l_b}{R_0}$ функция $\mathcal{L}(x)$ не зависит от m_c , m'_c и ν_c и определяется равенством

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\Delta}{4} \frac{\sin \frac{4l_b}{e_b} x}{x} + i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin^2 \frac{2l_b}{e_b} x}{x} \quad (25)$$

Решение системы уравнений (24) с функцией $\mathcal{L}(x)$, определенной выражением (25), будем искать для модельного распределения

$$q(y) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 1 & ; y \leq 1 \\ 0 & ; y > 1 \end{cases} \quad (26)$$

В результате подстановки (25) и (26) в (24) получим

$$(\omega - m_c \omega_c) \bar{\chi}_{m_c} = \sum_{m'_c} a_{m_c, m'_c} \bar{\chi}_{m'_c} \quad (27)$$

где

$$\bar{\chi}_{m_c} = \chi_{m_c}(\Delta);$$

$$a_{m_c, m'_c} = - \frac{2 m_c}{\pi \lambda} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \mathcal{L}(x) Y_{m_c}(x) Y_{m'_c}(x) \times$$

$$\times \left\{ U^2 + \frac{P_0 \mu_c \omega_c \Psi(m_c + m'_c) \Delta}{2 \rho_s x} \cdot \frac{\partial U^2}{\partial x} \right\}$$

В случае короткого сгустка $l_g \leq 2l$ (это условие выполняется для большинства накопителей) коэффициенты a_{m_c, m'_c} оказываются равными:

$$a_{m_c, m'_c} = i \frac{2 N \chi_0 c m_c}{\pi^3 \gamma l_g} \cdot \left\{ \Psi \cdot (m_c + m'_c) \cdot \frac{\partial U^2}{\partial x} \times \right. \quad (28)$$

$$\times \left. \frac{\cos \frac{\pi}{2} (m'_c - m_c)}{[(m'_c - m_c)^2 - 1][(m'_c + m_c)^2 - 1]} + \frac{2 d U^2}{\gamma_c l_g} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} (m'_c - m_c)}{m_c'^2 - m_c^2} \right\}$$

$$m'_c \neq m_c; \quad m'_c \neq \pm m_c \pm 1$$

где α - коэффициент уплотнения орбит. Дальнейшее упрощение системы (27) связано с тем фактом, что отношение первого слагаемого в (28) ко второму, как правило, много меньше единицы. Так, для накопителя ВЭШ-4 оно составляет величину порядка

$$\left(\frac{l_g \gamma_c}{h} \right) \sim 2 \cdot 10^{-2} \ll 1,$$

h - поперечный размер вакуумной камеры.

Пренебрегая поэтому первым слагаемым в (28) для всех a_{m_c, m'_c} , кроме коэффициента $m_c = m'_c$ (практически не зависящего от

m_c), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$(\Delta - m_c \omega_c) \bar{\chi}_{m_c} = i A \sum_{m'_c \neq m_c} m_c \frac{\sin \frac{\pi}{2} (m'_c - m_c)}{m_c'^2 - m_c^2} \bar{\chi}_{m'_c} \quad (29)$$

где

$$\Delta = \omega + i \frac{N \chi_0 c \Psi}{\pi^3 \gamma l_g} \cdot \frac{\partial U^2}{\partial x}; \quad A = \frac{4 N \chi_0 c d}{\pi^3 \gamma l_g^2 \gamma_c} U^2$$

Записав систему (29) в виде

$$i(\Delta - m_c \omega_c) \bar{\chi}_{m_c} = - \frac{A}{2} \sum_{m'_c \neq m_c} \frac{\sin \frac{\pi}{2} (m'_c - m_c)}{m'_c - m_c} \cdot \left\{ \bar{\chi}_{m'_c} + \right.$$

$$\left. + \bar{\chi}_{-m'_c} \cos \pi m'_c \right\};$$

умножив обе ее части на $e^{-i m_c \omega_c t}$ и суммируя по m_c получим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \xi(t) (x + y) - i \Delta x \quad (30)$$

где

$$x(t) = \sum_n \bar{\chi}_n e^{-i n \omega_c t}$$

$$y(t) = \sum_n \bar{\chi}_{-n} \cos \pi n e^{-i n \omega_c t}$$

$$\xi(t) = - \frac{A}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{n} e^{i n \omega_c t} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi A}{4} & ; \quad \omega_c t \in [0, \frac{\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \\ \frac{\pi A}{4} & ; \quad \omega_c t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

- периодические функции. Аналогичное уравнение можно получить и для y :

$$\dot{y}(t) = f(t)(x+y) + i\Delta y$$

Таким образом, задача определения спектра частот взаимодействующих синхротронных мод сводится к нахождению собственных значений Δ_k системы дифференциальных уравнений (30), (31). Собственные значения Δ должны быть определены из условия периодичности функций $x(t)$ и $y(t)$, непосредственно следующей из их определения. Из (30) и (31) для функции $\beta = x - y$ можно получить:

$$\ddot{\beta} - 2f(t)\dot{\beta} + \Delta^2\beta = 0$$

Решение этого уравнения при условии непрерывности β и $\dot{\beta}$ в точках разрыва функции $f(t)$ дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega_n = -i \frac{N \kappa_0 c}{\pi^3 \gamma \ell_b} \psi \frac{\partial U^2}{\partial \kappa} \pm \sqrt{(n\omega_c)^2 + \left(\frac{N \kappa_0 c d}{\pi^2 \gamma \ell_b^2 \nu_c} U^2 \right)^2}$$

$n = 1, 2, \dots$

Таким образом, для относительно коротких ступок ($\ell_b \leq 2\ell$) устойчивость когерентного синхротронного движения определяется, как и в случае слабой связи синхротронных мод, знаком произведения $\psi \frac{\partial U^2}{\partial \kappa} [I]$.

5. Некоторые замечания

1. Анализ показывает, что в случае длинного ступка ($\ell_b \gg 2\ell$) и при условии $\alpha \ll 1$, $\frac{N\delta_0 \ell}{\ell_b} \sim \omega_c$ может развиваться неустойчивость высоких $m_c \sim \ell_b/\ell$ синхробетатронных мод. При этом инкременты оказываются величинами, порядка $N\delta_0 \left(\frac{\ell}{\ell_b}\right)^2$.

2. Помимо работы [4] качественно схожие результаты (возникновение неустойчивости при $\Delta\omega \sim \omega_c$) получены также в работе [5]. Однако, в отличие от наших результатов, инкременты, найденные в [5], оказываются пропорциональными хроматизму. Это отличие, по-видимому, связано с некорректным исполь-

зованием в [5] усреднения по синхротронным переменным вблизи резонанса $\Delta\omega \sim \omega_c$.

3. В данной работе мы ограничились рассмотрением двухпроводной согласованной линии. Полученные результаты, можно без труда обобщить на случай двух симметрично расположенных пластин в металлической камере (трехпроводная линия), где поле может быть представлено в виде суперпозиции синфазной и противофазной TEM волн, которые при симметрии нагрузки не связаны между собой.

4. Сделаем оценку порогового тока для накопителей ВЭПП-4 и ВЭПП-3:

	ВЭПП-4	ВЭПП-3
Энергия (ГэВ)	$E = 1.85$	$E = 1.85$
Бетатронная частота	$\nu = 9.5$	$\nu = 5.2$
Синхротронная частота (Гц)	$\omega_c = 8 \cdot 10^4$	$\omega_c = 2 \cdot 10^5$
Число пар пластин	$N_n = 20$	$N_n = 5$
Пороговый ток (мА)	$I_n = 20$	$I_n = 500$

В заключение авторы считают приятным долгом поблагодарить Г.М.Тумайкина за поддержку и стимулирующий интерес к работе; Я.С.Дербенева, И.А.Коопа, Е.А.Переведенцева и Д.В.Пестрикова за полезные обсуждения вопросов, рассмотренных в работе.

Л и т е р а т у р а

1. Я.С.Дербенев и др. "Устойчивость бунчируемого пучка, взаимодействующего с согласованными линиями", препринт ИЯФ 7-72, (1972).
2. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, "Об устойчивости пучка, взаимодействующего с низкочастотным резонатором", препринт ИЯФ 326, (1969).
3. Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков, "Взаимодействие бунчируемого пучка с вакуумной камерой, с конечной проводимостью стенок", препринт ИЯФ 74-94, (1974).
4. R.D. Kohaupt, "Simplified presentation of head-tail turbulence", DESY M-80/19, (1980).
5. R. Talman, "The influence of finite oscillation frequency on the transverse head-tail effect", CERN/ISR-TH/81-17, (1981).
6. P. Wilson, L. Rivkin, "Threshold current for the transverse single-bunch instability in PEP", PEP-Note-374, (1982).
7. R.D. Kohaupt, "Transverse instability in PETRA", DESY M-80/13, (1980).

	R_0 (м)	ν	α	l_b (см)	\overline{ab}
CESR	120	9.2	$1.2 \cdot 10^{-2}$	2	$6.5 \cdot 10^{-3}$
ВЭПП-4	60	9.6	$1.6 \cdot 10^{-2}$	10	$4.5 \cdot 10^{-2}$
PETRA (7 ГэВ)	385	23	$2.7 \cdot 10^{-3}$	3	$2.8 \cdot 10^{-2}$
LEP	4770	70	$3 \cdot 10^{-4}$	2	$6.5 \cdot 10^{-3}$
ВЭПП-3 (2 ГэВ)	12	5.2	$6 \cdot 10^{-2}$	20	$1.5 \cdot 10^{-1}$

Таблица I. $\overline{ab} = \frac{ab}{m_z \frac{d\nu}{d\ln p}}$

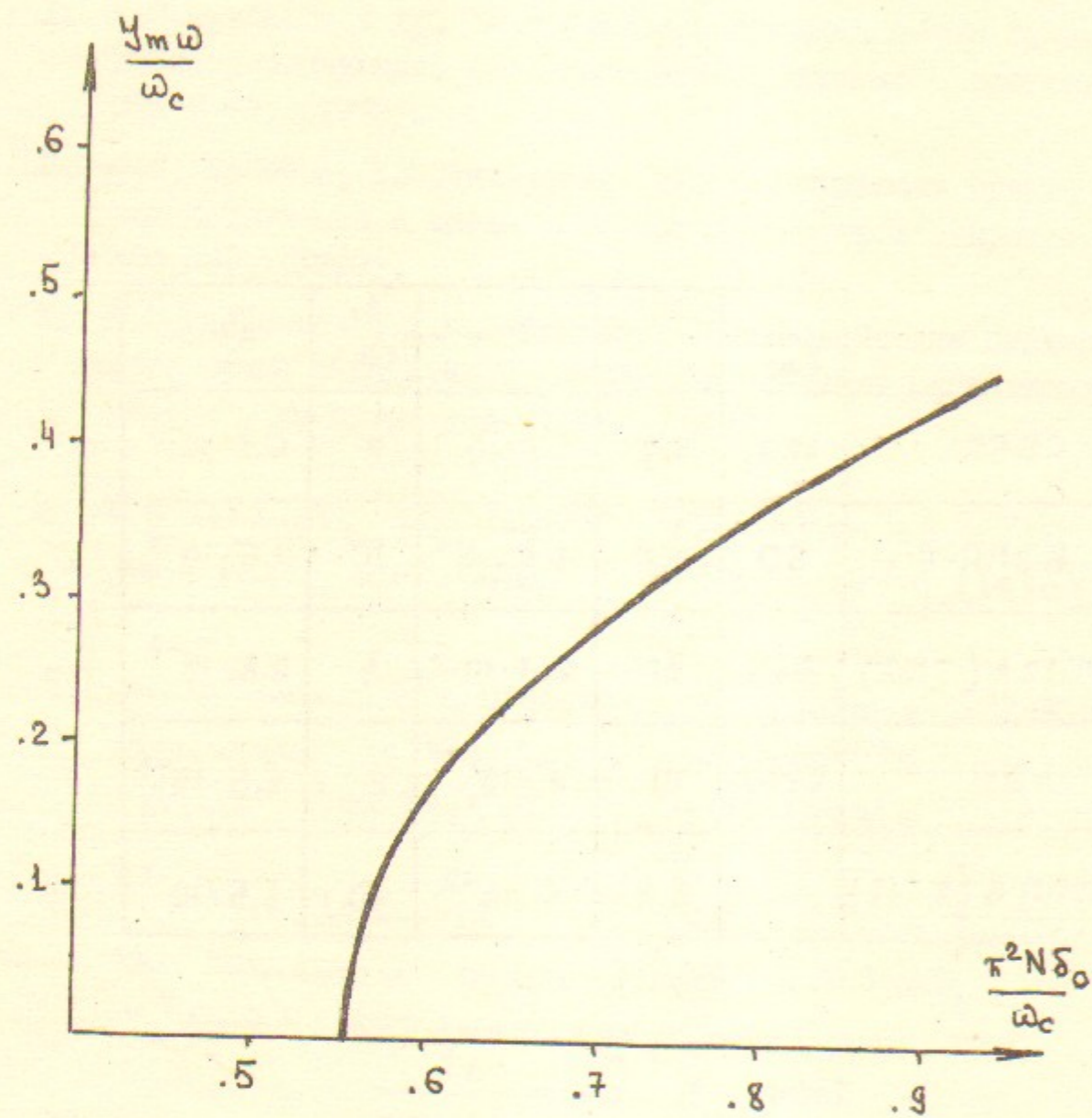


Рис. I

А.С.Артамонов, Н.И.Иноземцев

ЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД КОГЕРЕНТНЫХ
КОЛЕБАНИЙ ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

Препринт
№ 83- 83

Работа поступила - 14 июля 1983 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 19.7-1983 г. МН 17652
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 83.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90