28

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В.Ф.Дмитриев

производящий функционал для корреляционных функций гидродинамических течений, порождаемых случайной силой

ПРЕПРИНТ 81-114

Новосибирск

ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ СЛУЧАЙНОЙ СИЛОЙ

В.Ф.Дмитриев

В работе, на примере гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости строится производящий функционал для разновременных корреляционных функций неравновесных течений, порождаемых случайной внешней силой. Ряд теории возмущения для этого функционала совпадает с диаграммной техникой Вайлда. Для равновесных течений с его помощью доказана флуктуационно-диссипативная теорема.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах, связанных с исследованием свойств развитой турбулентности, удобным инструментом является предложенная Вайлдом /I/ диаграммная техника. Основной особенностью этой техники является введение в уравнения движения для динамических переменных q_i, p_i ланжевеновской случайной внешней силы f_i и затухания $\gamma_{ij}\dot{q}_j$. Внешняя сила выводит систему из термодинамического равновесия, а затухание обеспечивает стационарность неравновесного состояния. Распределение случайной силы является гауссовым со спектральной мощностью $F_{ij}(\omega)$. Если F_{ij} не зависит от ω и пропорционально затуханию, то система из термодинамического равновесия не выходит. Если же F_{ij} и γ_{ij} сосредоточены на существенно различных переменных i и j, так что область затухания может быть достигнута из области накачки через большое число актов взаимодействия, то в системе может развиваться турбулентность. Решая уравнения движения итерациями по случайной силе f_i мы можем в каждом порядке вычислить отклики системы на случайную силу и корреляционные функции динамических переменных.

Такой способ действия обладает очевидным недостатком, связанным с тем, что для выяснения свойств корреляционных функций необходимо анализировать весь ряд теории возмущения. Гораздо удобнее было бы пользоваться некоторым замкнутым выражением, порождающим весь этот ряд. В случае термодинамического равновесия средние вычисляются с помощью универсального распределения Гиббса $\rho_H \sim exp(-H/T)$, поэтому многие свойства симметрии различных корреляторов определяются свойствами гамильтониана H. Аналогичная ситуация имеет место и в теории поля, где усреднение ведется с весом $exp(iS)$, где действие $S=\int L(x)\,d^4x$ $L(x)$ – лагранжиан системы.

Целью настоящей работы является построение статистического распределения для динамической системы взаимодействующей со случайной внешней силой f_i с заданной спектральной мощностью. Возможность построения такого распределения, а также соответствующие правила Фейнмана были указаны в /2/.

В разделе I на примере гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости строится производящий функционал для корреляционных функций. В разделе 2 показывается эквивалентность этого функционала ряду теории возмущений. В разделе 3 для равновесных течений доказывается флуктуационно-диссипативная теорема.

I. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим гидродинамику вязкой несжимаемой жидкости описываемую уравнениями

$$\dot{v}_i + v_j \partial_j v_i - \nu \partial^2 v_i + \partial_i p = f_i \qquad \partial_i v_i = 0 \tag{I}$$

Эта система из 4-х уравнений при заданной $f_i(x)$ определяет для заданных граничных условий 4 величины $v_i(x)$ и $p(x)$. Случайная сила $f_i(x)$ распределена по гауссу

$$\rho_f \sim e^{-\frac{1}{2} f_i * F_{ij}^{-1} * f_j} \tag{2}$$

где введено обозначение

$$f_i * F_{ij}^{-1} * f_j = \int d^4x\, d^4x'\, f_i(x) F_{ij}^{-1}(x-x') f_j(x') \tag{3}$$

Корреляционная функция внешних сил, очевидно, есть

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = F_{ij}(x-x'). \tag{4}$$

Функция отклика определяется как

$$G_{ij}(x-x') = -i \left\langle \frac{\delta v_i(x)}{\delta f_j(x')} \right\rangle = -i \langle v_i f_k \rangle * F_{kj}^{-1} \tag{5}$$

Множитель $-i$ введен для того, чтобы в нулевом порядке по нелинейности Фурье-компонента этой функции имела вид

$$G_0(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\omega + i\nu k^2} \tag{6}$$

так что G_{ij} есть с точностью до множителя функция Грина уравнения (I).

В дальнейшем предполагается, что все поля обращаются в нуль на бесконечности как пространственной, так и временной, чтобы выражения типа (3) были определены. Еще одно предположение заключается в том, что в нашем ансамбле любые конфигурации

$v_i(x)$ и $p(x)$ удовлетворяющие уравнениям (I) при данной $f_i(x)$ встречаются с одинаковой вероятностью. Иными словами, случайная сила f_i максимально перемешивает систему. Как будет видно, именно такая ситуация отвечает ряду теории возмущения.

В этих предположениях функцию распределения по конфигурациям $v_i(x)$, $p(x)$ можно представить в виде

$$\rho \sim e^{-\frac{1}{2} f_i * F_{ij}^{-1} * f_j - i f_j * F_{jk}^{-1} * z_k + y_i * v_i}\, \delta(\dot{v}_i + v_j \partial_j v_i - \nu \partial^2 v_i + \partial_i p - f_i)\, \delta(\partial_i v_i)\, J(v_i) \tag{7}$$

где $J(v_i)$ – функциональный якобиан, возникающий из-за того, что $v_i(x)$ нелинейно входит в аргумент дельта-функции. Кроме того, мы обычным образом ввели источники $z_i(x)$ и $y_i(x)$. Представляя теперь дельта-функции в виде интегралов по дополнительным полям $w_i(x)$ и $U(x)$, находим

$$\rho \sim \exp\Big[-\frac{1}{2} f_i * F_{ij}^{-1} * f_j - i f_i * F_{jk}^{-1} * z_k + y_i * v_i + i w_j * f_j - i w_j * \dot{v}_j - i w_j * v_k \partial_k v_j + i w_j * \nu \partial^2 v_j - i w_j * \partial_j p + i U * \partial_j v_j\Big] J(v_i) \tag{8}$$

В этом выражении уже можно проинтегрировать по случайной силе. Ее роль возьмет на себя сопряженное ей поле $w_i(x)$. Если ввести затравочную функцию Грина (6) и вершину Γ_{jl}^{i}, имеющую в импульсном представлении вид

$$\Gamma_{jl}^{i}(k_1; k_2, k_3) = (k_3^{j} \delta_{il} + k_2^{l} \delta_{ij})\, \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3), \tag{9}$$

то можно упростить вид распределения

$$\rho \sim \exp\Big[-\frac{1}{2} z_i * F_{ij}^{-1} * z_j + z_i * w_i + y_i * v_i - \frac{1}{2} w_i * F_{ij} * w_j - w_j * G_0^{-1} * v_j + \frac{1}{2} w_i * \Gamma_{jl}^{i} * v_j * v_l - i w_j * \partial_j p + i U * \partial_j v_j\Big] J(v_i). \tag{10}$$

Первый член в экспоненте, квадратичный по источнику, несущественен и его можно опустить.

Рассмотрим теперь детерминант $J(v_i)$. Подобно тому, как это делается в калибровочных теориях поля /3/, его можно представить в виде интеграла по фермиевским полям $\varphi_i(x), \psi(x)$,

$$J = \int D\varphi_i D\varphi_i^+ D\psi D\psi^+ \exp\left[-i\varphi_j^+ * G_0^{-1} * \varphi_j + i\varphi_j^+ * \Gamma_{k\ell}^{j} * \varphi_k * v_\ell + \varphi_j^+ * \partial_j \psi + \psi^+ * \partial_j \varphi_j\right]. \tag{I1}$$

Для удобства последующих вычислений сделаем замену переменных. Введем

$$\begin{aligned} \varphi_j' &= \varphi_j + i\, G_0 * \partial_j \psi \\ \psi' &= i\, G_0 * \psi \end{aligned} \tag{I2}$$

тогда имеем

$$J \sim \int D\varphi_i' D\varphi_i^{+\prime} D\psi' D\psi^{+\prime} \exp\left[-i\varphi_j^{+\prime} * G_0^{-1} * \varphi_j' + i\partial_j \psi^{+\prime} * G_0^{-1} * \partial_j \psi' + \right.$$
$$\left. + (\varphi_j^{+\prime} - \partial_j \psi^{+\prime}) * \Gamma_{k\ell}^{j} * (\varphi_k' - \partial_k \psi') * v_\ell \right]. \tag{I3}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться только выражением (I3) и штрихи у $\varphi_i^{(x)}$ и $\psi^{(x)}$ будем опускать.

Проделав в (9) аналогичную замену переменных

$$\begin{aligned} w_j' &= w_j + i\,\partial_j u * G_0 \\ u' &= i u * G_0 \\ v_j' &= v_j + i\, G_0 * \partial_j p \\ p' &= i\, G_0 * p \end{aligned} \tag{I4}$$

и опуская затем штрихи, получим окончательный вид производящего функционала

$$\rho \sim \exp\left[\sigma_0 + \sigma_0^{gh} + \sigma_{int} + \sigma_{int}^{gh}\right] \tag{I5}$$

где

$$\sigma_0 = -w_i * G_0^{-1} * v_i + \partial_i u * G_0^{-1} * \partial_i p + z_i * (w_i - \partial_i u) + y_i * (v_i - \partial_i p) \tag{I6a}$$

$$\sigma_0^{gh} = -i\varphi_j^+ * G_0^{-1} * \varphi_j + i\,\partial_j \psi^+ * G_0^{-1} * \partial_j \psi \tag{I6в}$$

$$\sigma_{int} = \tfrac{1}{2}(w_i - \partial_i u) * \Gamma_{jk}^{i} * (v_j - \partial_j p) * (v_k - \partial_k p) - \tfrac{1}{2}(w_i - \partial_i u) * F_{ij} * (w_j - \partial_j u), \tag{I6c}$$

$$\sigma_{int}^{gh} = i(\varphi_j^+ - \partial_j \psi^+) * \Gamma_{k\ell}^{j} * (\varphi_k - \partial_k \psi) * (v_\ell - \partial_\ell p) \tag{I6a}$$

Если ввести величину $\Xi = Tr\left[\exp(\sigma_0 + \sigma_0^{gh} + \sigma_{int} + \sigma_{int}^{gh})\right]$ где Tr означает интегрирование по всем конфигурациям полей, то корреляционные функции и функции Грина выражаются через вариационные производные от Ξ по источникам

$$G_{ij}(x - x') = \frac{1}{\Xi} \frac{\delta^2 \Xi}{\delta y_i(x)\, \delta z_j(x')}\bigg|_{y_i, z_j = 0} = \langle (v_i - \partial_i p)(w_j' - \partial_j u) \rangle, \tag{I7a}$$

$$N_{ij}(x - x') = \frac{1}{\Xi} \frac{\delta^2 \Xi}{\delta y_i(x)\, \delta y_j(x')}\bigg|_{y_i, z_j = 0} = \langle (v_i - \partial_i p)(v_j - \partial_j p) \rangle. \tag{I7в}$$

2. <u>ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ. РОЛЬ "ДУХОВ"</u>

Для построения ряда теории возмущения нам необходимо выбрать нулевое приближение. На данном этапе удобно взять в качестве нулевого приближения

$$\Xi_0 = Tr\left[\exp(\sigma_0 + \sigma_0^{gh})\right] \tag{I8}$$

отнеся квадратичную форму содержащую F_{ij} в возмущение. Затравочные функции Грина в этом случае легко написать. В импульсном представлении

$$G_{ij}^{c}(\omega, \vec{k}) = \langle (v_i(\omega,\vec{k}) - i k_i p(\omega,\vec{k}))\cdot(w_j^*(\omega,\vec{k}) + i k_j u^*(\omega,\vec{k})) \rangle_0 =$$
$$= \langle v_i(\omega,\vec{k})\, w^*(\omega,\vec{k}) \rangle_0 + k_i k_j \langle p(\omega,\vec{k})\, u^*(\omega,\vec{k}) \rangle_0 = \tag{I9}$$
$$= G_0(\omega,\vec{k}) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}\right),$$

где $G_0(\omega,\vec{k})$ дается (6). Кроме того, есть еще затравочная функция Грина "духов"

$$D^0_{ij}(\omega,\vec{k}) = \left\langle \left(\varphi_i(\omega,\vec{k}) - i k_i \psi(\omega,\vec{k})\right)\left(\varphi^+_j(\omega,\vec{k}) + i k_j \psi^+(\omega,\vec{k})\right)\right\rangle_0 =$$

$$= i G_0(\omega,\vec{k})\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}\right). \qquad (20)$$

Конкретное выражение (20) для нулевой функции Грина "духов" выбрано из тех соображений, что именно комбинация $\varphi_i - \partial_i \psi$ входит во взаимодействие (I6а).

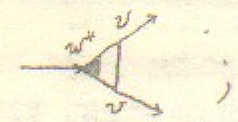
Из (I9) и (20) становится очевидной роль скалярных полей $u(x)$, $\psi(x)$, $p(x)$. Они обеспечивают поперечность корреляторов, сокращая их продольную часть.

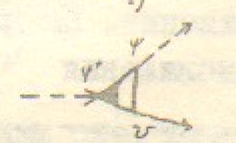
Введем графические обозначения. Будем изображать нулевую функцию Грина $G_0(\omega,\vec{k})$ тонкой линией со стрелкой, направленной от v к w^* , а функцию Грина "духов" - пунктиром.

G^0_{ij} = 

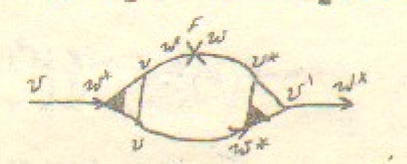
D^0_{ij} =  .

Кроме функций Грина у нас есть еще вершины, которые выглядят так

$\Gamma^i_{j\ell}$ =  ; $-F_{ij}$ =  ; и

"духовая" вершина $i\Gamma^j_{k\ell}$ = 

Легко убедиться, что этот ряд теории возмущений в точности совпадает с рядом теории возмущения Вайлда /I/. Выпишем для примера первые графики для G_{ij} и N_{ij} . Для G_{ij} ближайшая поправка дается диаграммой второго порядка по Γ



Ее аналитическое выражение есть

$$G^{(2)}_{ij}(k) = -G^0_{i\ell}(k)\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\Gamma^\ell_{mn}(-k;k_1,k-k_1)G^0_{mp}(k_1)F_{p2}(k_1)G^0_{2s}(-k_1)\cdot G^0_{nr}(k-k_1)\,\cdot \qquad (2I)$$

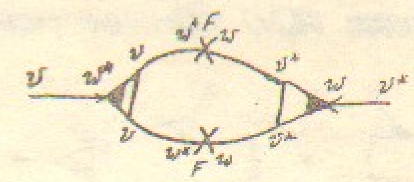
$$\cdot\Gamma^r_{st}(-k+k_1;-k_1,k)G^0_{tj}(k) = G^0_{i\ell}(k)\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\Gamma^\ell_{mn}(-k;k_1,k-k_1)N^0_{ms}(k_1)G^0_{nr}(k-k_1)\Gamma^r_{st}(-k+k_1;-k_1,k)G^0_{tj}(k),$$

где мы ввели затравочный коррелятор скоростей

$$N^0_{ms}(k) = -G^0_{mp}(k_1)F_{pq}(k_1)G^0_{qs}(-k_1) = G^0_{mp}(k_1)F_{pq}G^{0*}_{qs}(k_1). \qquad (22)$$

Знак минус у импульсов в вершинах возникает из-за того, что $w^*_i(k) = w_i(-k)$.

Аналогичный график дает поправку к N_{ij}



До сих пор у нас в графиках не возникали "духовые" линии. Для выяснения их роли рассмотрим коррелятор $\langle w_i(\omega,\vec{k}), w^*_j(\omega,\vec{k})\rangle$. С одной стороны, его можно найти точно используя (4). Вычисляя $\langle f_i(\omega,\vec{k}), f^*_j(\omega,\vec{k})\rangle$ с помощью функционала (8) легко показать, что*

$$\langle w_i(\omega,\vec{k})\, w^*_j(\omega,\vec{k})\rangle = 0. \qquad (23)$$

С другой стороны выпишем графики, дающие вклад в этот коррелятор. Очевидно, что все эти графики будут содержать замкнутые петли из тонких линий. Во втором порядке имеем два графика.

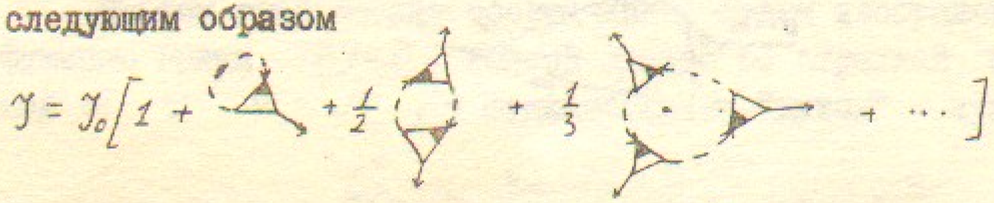
Легко видеть, что эти два графика в точности равны по величине и противоположны по знаку, так как "духи" являются фермионами. Ясно, что такая ситуация будет во всех порядках теории возмущения. Любой замкнутой петле из тонких линий будет соответствовать такая же петля из линий "духов", имеющая противоположный знак. Таким образом, роль "духов" сводится к сокращению замкнутых пе-

*Функционал (8) вообще говоря комплексный, поэтому $\langle w_i\, w^*_j\rangle$ не есть положительно определенная величина.

тель, так что в результате можно выкинуть "духи" и не учитывать все замкнутые петли. Получившаяся диаграммная техника в точности совпадает с техникой Вайлда, в которой замкнутые петли не появляются по построению.

3. ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАТИВНАЯ ТЕОРЕМА

Для дальнейшего удобно несколько упростить вид функционала (I5), воспользовавшись свойствами $G_0(k)$. Первое упрощение заключается в том, что детерминант (II) не зависит от $v_i(x)$ и его можно поэтому вообще не учитывать. Для доказательства разложим (II) по степени $v_i(x)$. Этот ряд можно изобразить следующим образом



В координатном представлении эти графики содержат $G_0(t=0)$ и $G_0(t-t_1)\cdot G_0(t_1-t)$, поскольку вершина не зависит от ω. Так как $G_0(t) = 0$ при $t < 0$, то все замкнутые петли также равны нулю, поэтому $J = J_0$, где J_0 – значение детерминанта при $v_i = 0$.

Второе упрощение возникает из-за того, что в диаграммную технику входит только поперечная часть вершины Γ^i_{je}

$$\Gamma^{\perp i}_{je}(k_1;k_2,k_3) = \Delta_{ip}(k_1)\Gamma^{p}_{qr}(k_1;k_2,k_3)\Delta_{qj}(k_2)\Delta_{re}(k_3), \qquad (24)$$

$$\Delta_{pq}(k) = \delta_{pq} - \frac{k_p k_q}{k^2}.$$

Если в функционале (I6) мы выбросим скалярные поля, а вместо вершины Γ возьмем $\Gamma^{\perp}$, то очевидно, что все графики, дающие вклад в поправки, к затравочным корреляторам не изменяются. Единственное изменение сводится к тому, что у затравочных корреляторов появляется продольная часть

$$G^{\parallel}_{ij}(\omega,k) = G_0(\omega,k)\frac{k_i k_j}{k^2}. \qquad (25)$$

которая не перенормируется взаимодействием и всегда может быть вычтена в конечном результате. Наконец еще одно небольшое упрощение: примем, что

$$F_{ij}(k) = F(k)\delta_{ij} \qquad (26)$$

Таким образом, мы получаем следующий относительно простой функционал

$$\rho \sim \exp\Big[z_i * w_i + y_i * v_i - \tfrac{1}{2} w_i * F_{ij} * w_j - w_i * G_0^{-1} * v_i + \tfrac{1}{2} w_i * \Gamma^{\perp i}_{jk} * v_j * v_k\Big], \qquad (27)$$

удобный для дальнейших преобразований.

Вид функционала (27) сразу подсказывает дальнейшие шаги: квадратичную форму в (27) естественно попытаться привести к привычному диагональному виду. Для этого сделаем замену, введем поле

$$\widehat{w}_i = w_i + F^{-1} * G_0^{-1} * v_i \qquad (28)$$

В этих переменных распределение ρ имеет более привычный вид:

$$\rho \sim \exp\Big[z_i * (\widehat{w}_i - F^{-1} * G_0^{-1} * v_i) + y_i * v_i - \tfrac{1}{2}\widehat{w}_i * F * \widehat{w}_i - \tfrac{1}{2} v_i * N_0^{-1} * v_i + \tfrac{1}{2}\widehat{w}_i * \Gamma^{\perp i}_{je} * v_j * v_e - \tfrac{1}{3!}\Pi_{ije} * v_i * v_j * v_e\Big], \qquad (29)$$

где $N_0(k)$ – дается (22) и возникла новая вершина

$$\Pi_{ije}(k_1,k_2,k_3) = \Gamma^{\perp i}_{je}(k_1;k_2,k_3)\frac{G_0^{-1}(k_1)}{F(k_1)} + \Gamma^{\perp j}_{ei}(k_2;k_3,k_1)\frac{G_0^{-1}(k_2)}{F(k_2)} + \Gamma^{\perp e}_{ij}(k_3;k_1,k_2)\frac{G_0^{-1}(k_3)}{F(k_3)}. \qquad (30)$$

Распределение (29) отвечает другим затравочным линиям

$$N^0_{ij}(k) = \langle v_i(\omega,k)\, v_j(-\omega,-k)\rangle = \sim\sim\sim$$

$$D^0_{ij}(k) = \langle \widehat{w}_i(k)\, \widehat{w}_j(-k)\rangle = - - -$$

для функции Грина $G_{ij}(k)$ имеем:

$$G_{ij}(k) = \Big\langle v_i(k)\Big(\widehat{w}_j(-k) - \frac{G_0^{-1}(-k)}{F(k)} v_j(-k)\Big)\Big\rangle = \langle v_i(k)\,\widehat{w}_j(-k)\rangle + \frac{G_0^{-1*}(k)}{F(k)} N_{ij}(k). \qquad (31)$$

Рассмотрим графики для $N_{ij}(k)$. Легко видеть, что в каждом графике вершины Π_{ijl} входят в виде комбинаций $\Pi_{ijl}(k_1,k_2,k_3)\,\Pi_{ijl}(-k_1,-k_2,-k_3)$, которые всегда действительны, в силу того, что

$$\Pi_{ijl}(-k_1,-k_2,-k_3) = \Pi^{*}_{ijl}(k_1,k_2,k_3). \qquad (32)$$

Вершина Γ^{1} вообще не имеет мнимой части, также как и линии N_0 и D_0. Таким образом, корреляционная функция скоростей $N_{ij}(k) = \langle v_i(k)\, v_j^{*}(k)\rangle$ действительна, как и должно быть. Мнимая часть коррелятора $\langle v_i(k)\, \hat{w}_j(-k)\rangle$ возникает из-за наличия мнимой части у вершины Π_{ijl}. Если $F(k)$ не зависит от ω и $F(k) = 8TVk^2$, что отвечает термодинамическому равновесию, то в силу свойств вершины Γ^{1i}_{jl} /4/

$$\Gamma^{1i}_{jl}(k_1;k_2,k_3) + \Gamma^{1j}_{li}(k_2;k_3,k_1) + \Gamma^{1l}_{ij}(k_3;k_1,k_2) = 0, \qquad (33)$$

мнимая часть вершины Π_{ijl} обращается в нуль. В этом случае

$$Im\, G_{ij}(k) = -\frac{1}{8T} N_{ij}(k) \qquad (34)$$

что и является в наших определениях флуктуационно-диссипативной теоремой.

Таким образом, использование производящего функционала упрощает исследование свойств корреляционных функций, по крайней мере в случае термодинамического равновесия. Можно надеяться, что он будет так же полезным и в неравновесном случае.

В заключение, автор выражает признательность В.В.Мазепусу за обсуждения затронутых выше вопросов.

Литература

I. H. W. Wyld, Ann. Phys. 14 (1961) 143.

2. В.И.Белиничер, М.А.Васильев, Е.С.Фрадкин, препринт ИАиЭ № 40 (1977).

3. L.D. Faddeev, V.N. Popov, Phys Lett, 25B (1967) 29.

4. А.М.Обухов, ДАН, I84 (1969) 309.