

M.19

27

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР



В.М.Малкин

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПУЧКА
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ
В ПЛАЗМЕ ~~и~~

II. Нелинейное затухание звука

ПРЕПРИНТ 81 - 112



НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ
ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ

II. Нелинейное затухание звука

В.М. Малкин

АННОТАЦИЯ

Рассмотрено взаимодействие плазмы с пучком релятивистских электронов в том диапазоне параметров, в котором неустойчивость системы относительно возбуждения ленгмюровских волн стабилизируется рассеянием последних на нелинейно затухающем звуке. Найдены функция распределения электронов пучка и спектр ленгмюровских волн, чем существенно расширена область применимости теории релаксации.

NONLINEAR RELAXATION OF A RELATIVISTIC
ELECTRON BEAM IN A PLASMA

II. Nonlinear sound damping

V.M.Malkin

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The interaction of a plasma with a relativistic electron beam is considered in the range of parameters where the instability of the system relatively to the excitation of Langmuir waves is saturated as a result of their scattering by a nonlinearly damping sound. The electron beam distribution function and the spectrum of Langmuir waves are found, that extends substantially the range of applicability of the relaxation theory.

I. Введение

В статье [1] была описана релаксация пучка при доминировании четырехплазмонного процесса. Область применимости результатов [1] оказалась ограниченной сверху условием малости нелинейных поправок к затуханию звука. Режимы релаксации, в которых хотя бы одна из них не мала, рассматриваются в настоящей статье. Сначала учитывается обусловленная упругим рассеянием плазмонов на звуке поправка¹⁾ $\lambda_{\vec{q}}$ (именно она становится существенной на пределе применимости [1]). Это делается с помощью незначительной модификации расчетов [1]. Большая часть статьи посвящена учету поправки $\tilde{\gamma}_{\vec{q}}$, связанной с неупругим рассеянием плазмонов. Ниже эта поправка называется "нелинейным затуханием звука". Следует заметить, что такое название условно, поскольку, вопреки распространенному мнению [2], величина $\tilde{\gamma}_{\vec{q}}$ не обязательно является положительной даже при изотропном ленгмювском спектре. Учет $\tilde{\gamma}_{\vec{q}}$ оказывается весьма сложной задачей, неразрешимой на уровне одних оценок. Выбрать правильные оценки удастся лишь решив задачу аналитически. Результат заметно отличается от предсказаний [1], иными словами, релаксация существенно зависит от характера затухания звука.

2. "Упругая" поправка к затуханию звука

Величина $\lambda_{\vec{q}}$ дается третьей из формул (I.16). В этой формуле переменная интегрирования \vec{k} пробегает плоскость, перпендикулярную вектору \vec{q} и проходящую через его середину. Переменная \vec{k}_1 , связанная с \vec{k} соотношением $\vec{k}_1 = \vec{k} - \vec{q}$, пробегает при этом плоскость, симметричную первой относительно начала координат. Вклад в $\lambda_{\vec{q}}$ дает лишь анизотропная часть спектра $N_{\vec{k}}$, которая, согласно (I.53), отлична от нуля в окрестности $\Delta\theta$ плоскости $k_z = 1$. Следовательно, величина $|\lambda_{\vec{q}}|$ максимальна в окрестности точек $\vec{q} = (0, 0, \pm 2)$, где

$$|\lambda_{\vec{q}}| \sim gN' \quad (I)$$

¹⁾Здесь и в дальнейшем используются обозначения статьи [1]. Ссылки на формулы этой статьи даются с римской цифрой "I" в круглых скобках.

Условие $|\lambda| < \delta$ сводится здесь к неравенству (I.108). Определяя уровень звука из уравнений $St_r = St_a = 0$ при $\delta < gW\Delta\theta$, следует учитывать $\lambda_{\vec{q}}$:

$$F_{\vec{q}} = \frac{\delta_{\vec{q}} f_{\vec{q}}}{\delta_{\vec{q}}^2 - \lambda_{\vec{q}}^2}, \quad A_{\vec{q}} = \frac{\lambda_{\vec{q}} f_{\vec{q}}}{\delta_{\vec{q}}^2 - \lambda_{\vec{q}}^2}. \quad (2)$$

Если бы с увеличением концентрации пучка разность $\delta_{\vec{q}} - \lambda_{\vec{q}}$ обращалась в нуль в некоторой точке \vec{q}_0 , то величина $F_{\vec{q}_0}$ становилась бы бесконечно большой и упругое рассеяние плазмонов мгновенно делало их спектр одинаковым на плоскостях, проходящих через точки $\vec{k} = \pm \frac{\vec{q}_0}{2}$ перпендикулярно вектору \vec{q}_0 . Но при таком спектре $\lambda_{\vec{q}_0} = 0$. Полученное противоречие показывает, что знаменатель в (2) не обращается в нуль; он только становится достаточно малым, после чего рассеяние плазмонов симметризует анизотропную часть спектра и останавливает рост $|\lambda|$ на уровне δ :

$$|\lambda| \sim \delta. \quad (3)$$

При этом несимметричная часть спектра $\delta N'_k$ оказывается малой по сравнению с анизотропной частью N'_k и, вместо (I), следует пользоваться оценкой

$$|\lambda| \sim g \delta N'. \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает:

$$\delta N' \sim \frac{\delta}{g}. \quad (5)$$

Условие $\delta N' < N'$, разумеется, эквивалентно противоположному (I.108) неравенству

$$\delta_0 > \delta \Delta\theta. \quad (6)$$

Столь малое значение $\delta N'$ обеспечивается быстрым рассеянием плазмонов из области возбуждения в симметричную область. Обратное время этого процесса в $N/\delta N'$ раз больше инкремента пучковой неустойчивости и, соответственно, в $N'/\delta N'$ раз больше Γ :

$$\Gamma' \sim \gamma \frac{N}{\delta N'} \sim \Gamma \frac{N'}{\delta N'}. \quad (7)$$

Оценки энергии ленгмюровских волн, длины релаксации пучка и анизотропной добавки к спектру остаются такими же, как в статье [I]. Аналитическое решение задачи для пучка с малым угловым разбросом также сводится к полученному ранее, достаточно лишь

заменить в окончательных формулах δ_0 на $2\delta_0$, что соответствует симметризации спектра. Такой же результат получился бы при возбуждении двумя одинаковыми (в каждой точке пространства!) встречными пучками. Заметим, что встречный пучок может естественным образом возникать в гофрированном магнитном поле из-за отражения рассеиваемых ленгмюровской турбулентностью электронов основного пучка от пробки.

3. Область применимости

После отказа от ограничения (I.108), наиболее жестким из оставшихся условий применимости может быть, в зависимости от соотношения между δ и g , одно из неравенств (I.109), (I.111). Второе из них — условие малости обратного времени нелинейных процессов по сравнению с частотой ионного звука — оказывается не очень существенным. Действительно, упругое рассеяние ленгмюровских волн на флуктуациях плотности возникает в нулевом приближении по параметру g и идет точно так же, как при независимых от времени флуктуациях. Оно описывается стандартным кинетическим уравнением до тех пор, пока обратное время рассеяния меньше ширины ленгмюровского спектра. Что касается справедливости кинетического уравнения для звука, то при меняющемся с характерным временем рассеяния ленгмюровском спектре ее необходимым условием, разумеется, было бы (I.111). Однако в стационарном случае для справедливости данного уравнения требуется лишь малость перенормировки частоты звука и случайность фаз ленгмюровских волн. В этом можно убедиться с помощью полученных в [3] обобщенных кинетических уравнений, которые отличаются от стандартных перенормировкой частоты звука и наличием старших производных по времени от корреляторов звуковых возмущений, — в стационарном случае производные по времени не существенны. Таким образом, (I.111) следует заменить более мягким условием:

$$\frac{g^2 W^2}{\delta} \sim \Gamma < 1. \quad (8)$$

Сравнивая (I.109), (I.110), (8), нетрудно установить, что граница применимости полученных результатов определяется нелинейным затуханием звука, если $\delta < g^2$, и перенормировкой звуковой частоты, если $\delta > g^2$. Для размытого пучка эти условия можно представить в виде

$$\gamma_0 < \min \left\{ \frac{\nu}{g^2}, \frac{g^2}{\nu} \right\}. \quad (9)$$

Выше предполагалось, что время нелинейного взаимодействия волн порядка Γ^{-1} . Это так, если инкремент неустойчивости является четной функцией \vec{k} (создается двумя одинаковыми встречными пучками). В отсутствие встречного пучка, рассеяние плазмонов из области возбуждения в симметричную область идет быстрее и, вместо (8), следует пользоваться условием

$$\Gamma' < 1,$$

которое при $\Delta\theta \sim 1$ сводится к неравенству

$$\gamma_0 < \nu^{1/3}. \quad (10)$$

При

$$g^3 < \nu < g^{3/2} \quad (11)$$

неравенство (10) является более жестким, чем (9), и область применимости теории ограничивается требованием случайности фаз ленгмюровских волн²⁾

4. Уравнение для спектра

$$\text{Пусть } \nu < g^2, \quad (12)$$

если речь идет о четном инкременте, и

$$\nu < g^3 \quad (13)$$

в противном случае. Тогда в области

$$\gamma_0 > \frac{\nu}{g^2} \quad (14)$$

затухание звука является нелинейным для пучка с произвольным угловым разбросом. Соотношения (I.37), (I.38) не зависят от затухания звука и остаются справедливыми при тех же условиях, что и раньше. Для замыкания системы оценок требуется установить

²⁾ В области $\Gamma' > 1$ становится непригодной обычная формулировка теории слабой турбулентности, основанная на разложении электрического поля по плоским волнам. Тем не менее, в рамках приближения случайных фаз можно получить замкнутое статистическое описание. Для этого надо раскладывать поле по собственным колебаниям неоднородной системы, считая в нулевом приближении возмущение плотности статическим. В случае пучка с малым угловым разбросом возмущение плотности близко к синусоидальному с волновым числом $q \approx 2$, что делает возможным аналитическое исследование релаксации.

связь времени рассеяния ленгмюровских волн с их энергией. Если воспользоваться грубой оценкой нелинейного затухания звука:

$$\tilde{\nu} \sim g^2 W, \quad (15)$$

то получится

$$\Gamma \sim \frac{g^2 W^2}{\tilde{\nu}} \sim W \quad (16)$$

и, согласно (I.38),

$$W \sim \frac{\gamma_0}{\Delta\theta^3}. \quad (17)$$

Условие $\tilde{\nu} > \nu$ малости линейного затухания звука, предполагавшееся в (16), действительно выполняется в силу (14). Тем не менее, оценки (16), (17) нельзя считать обоснованными, поскольку имеется ряд принципиально иных, но столь же вероятных возможностей. Например, величина $\tilde{\nu}_{\vec{q}}$ могла бы быть отрицательной, а сумма $\tilde{\nu}_{\vec{q}} + \tilde{\nu}_{-\vec{q}}$ положительной и в некоторой области близкой к нулю. В этом случае задаваемое оценкой (I.38) значение Γ достигалось бы при относительно низкой энергии ленгмюровских волн:

$$W \sim \frac{\tilde{\nu}}{g^2} \sim \frac{\nu}{g^2}. \quad (18)$$

На уровне оценок невозможно выбрать какой-либо из вариантов. Поэтому перейдем к точному решению задачи. Как и в статье [1], оно будет получено для пучка с малым угловым разбросом ($\Delta\theta \ll 1$). Анизотропная часть возбуждаемого таким пучком ленгмюровского спектра мала. Изотропные части величин $\Gamma_{\vec{k}}$, $u_{\vec{k}}$, $F_{\vec{q}}$ по-прежнему даются формулами (I.50) - (I.52), надо лишь заменить в (I.52) линейное затухание звука полным³⁾:

$$F_{2k_1} = \frac{\pi^2 g^2 k_1}{\nu_{2k_1} + \tilde{\nu}_{2k_1}} \int_{k_1}^{\infty} dk_2 k_2 \left(1 - 2 \frac{k_1^2}{k_2^2}\right)^2 N_{k_2}, \quad (19)$$

$$\tilde{\nu}_{2k_1} = \pi^2 g^2 k_1 \left[N_{k_1} + 4 \int_{k_1}^{\infty} \frac{dk_2}{k_2} \frac{k_1^2}{k_2^2} \left(1 - 2 \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) N_{k_2} \right]. \quad (20)$$

³⁾ Пользуясь (20), нетрудно построить примеры изотропных спектров, для которых величина $\tilde{\nu}_{\vec{q}}$ отрицательна в некотором интервале значений q .

Вывод соотношений, определяющих ленгмюровский спектр, совершенно аналогичен проведенному в статье [1]: сначала анизотропная часть спектра выражается через изотропную и усреднением St_N по углу для последней выводится уравнение, содержащее средние значения инкремента пучковой неустойчивости и его квадрата, — первое из них вычисляется сразу, а второе — после отыскания функции распределения электронов пучка по углу, которая оказывается универсальной и такой же, как в [1], — затем уравнение записывается в удобной для исследования форме. Учитывая условие внешней устойчивости спектра, результат можно представить в виде соотношений (I.80), (I.81). Фигурирующая в этих соотношениях функция $N(\omega)$ по-прежнему вводится согласно (I.73) и удовлетворяет условию нормировки (I.74); величина α определяется формулой

$$W = \frac{2\gamma_0}{\Delta\theta^3} \frac{A\alpha}{\pi^2}, \quad (21)$$

где A — число (I.72); $\tilde{\Gamma}(\omega)$ получается из (I.82) заменой γ_0 на $2\gamma_0$:

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \frac{\sqrt{\omega-1}}{\omega^{-3/2} + \frac{\gamma_0}{4\gamma_0}}, \quad (22)$$

а функция $\Gamma(\omega)$, связанная с Γ_k соотношением

$$\Gamma_k = \frac{\pi W}{2\alpha k^5} \Gamma(k^2), \quad (23)$$

дается формулой (I.76), в которой

$$F(\omega_1) = \frac{\Psi(\omega_1)}{\Phi(\omega_1)}, \quad (24)$$

$$\Psi(\omega_1) = \int_{\omega_1}^{\infty} d\omega_2 (\omega_2 - 2\omega_1)^2 N^2(\omega_2), \quad (25)$$

$$\Phi(\omega_1) = \delta + \omega_1 \left[N(\omega_1) + 4 \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{d\omega_2}{\omega_2^2} (\omega_2 - 2\omega_1) N(\omega_2) \right], \quad (26)$$

$$\delta = \frac{4\pi \gamma_0 \Delta\theta^3}{A g^2 \gamma_0} \ll 1. \quad (27)$$

Таким образом, для отыскания ленгмюровского спектра приходится решать нелинейное интегральное уравнение. Оно зависит от углового разброса пучка через параметр δ . Пренебрегать малой величиной δ в (26) нельзя, так как при $\delta = 0$ интеграл от $F(\omega_1)$ в (I.76) расходится на нижнем пределе. Кроме того, за-

ранее не ясно, мало ли δ по сравнению со вторым слагаемым в (26): из двух возможных типов решений, указанных в начале данного раздела, только один удовлетворяет этому условию. Между тем, отмеченные выше простейшие возможности далеко не исчерпывают список правдоподобных вариантов. Опуская перечисление этих вариантов и доказательство внутренней противоречивости большинства из них, остановимся подробнее на самосогласованном решении задачи, которое, по-видимому, единственно.

Спектральная плотность ленгмюровских волн оказывается отличной от нуля в сферическом слое

$$\omega_m < \omega < \omega_m, \quad \omega_m > 1.$$

Согласно (I.80), (I.81), внутри этого слоя $\Gamma(\omega) = \tilde{\Gamma}(\omega)$, а вне него $\Gamma(\omega) \geq \tilde{\Gamma}(\omega)$. Следовательно,

$$\frac{d\Gamma(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_m+0} \geq \frac{d\tilde{\Gamma}(\omega_m)}{d\omega_m} = \frac{d\Gamma(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_m-0}, \quad (28)$$

$$\frac{d\Gamma(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_m-0} \leq \frac{d\tilde{\Gamma}(\omega_m)}{d\omega_m} = \frac{d\Gamma(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_m+0}. \quad (29)$$

Учитывая определение (I.76) функции $\Gamma(\omega)$, граничные условия (28), (29) можно представить в виде

$$F(\omega_m+0) \geq F(\omega_m-0), \quad (30)$$

$$F(\omega_m-0) \leq F(\omega_m+0). \quad (31)$$

Функция $F(\omega)$, имеющая смысл спектральной плотности энергии звука, всюду неотрицательная, а в области $\omega > \omega_m$ равна нулю. Поэтому (30) выполняется только при

$$F(\omega_m-0) = 0. \quad (32)$$

С помощью (24) — (26) условие (31) может быть заменено требованием

$$N(\omega_m-0) \geq N(\omega_m+0), \quad (33)$$

из которого следует

$$N(\omega_m+0) = 0. \quad (34)$$

Поскольку в (28), (29) имеют место равенства, должны выполняться еще и условия

$$\left. \frac{d^2 \Gamma(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_m+0} \geq \left. \frac{d^2 \tilde{\Gamma}(\omega_m)}{d\omega_m^2} \right|_{\omega_m} = \left. \frac{d^2 \Gamma(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_m-0}, \quad (35)$$

$$\left. \frac{d^2 \Gamma(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_m-0} \geq \left. \frac{d^2 \tilde{\Gamma}(\omega_m)}{d\omega_m^2} \right|_{\omega_m} = \left. \frac{d^2 \Gamma(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_m+0}. \quad (36)$$

Однако они не приводят к дополнительным ограничениям, так как оказываются эквивалентны требованиям

$$\left. \frac{dF(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m-0} \leq 0, \quad (37)$$

$$\left. \frac{dN(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m+0} \geq 0, \quad (38)$$

автоматически справедливым для положительных в интервале (ω_m, ω_M) функций $N(\omega)$, $F(\omega)$.

5. Построение спектра

В области $\omega < \omega_m$ функциональный вид $F(\omega)$ известен, $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ являются здесь полиномами второй степени:

$$\varphi(\omega) = \delta + \omega(I_1 - \omega I_2), \quad (39)$$

$$\psi(\omega) = \gamma_0 - \gamma_1 \omega + \gamma_2 \omega^2. \quad (40)$$

Коэффициенты даются формулами:

$$I_1 = 4 \int_{\omega_m}^{\omega_M} \frac{d\omega}{\omega} N(\omega),$$

$$I_2 = 8 \int_{\omega_m}^{\omega_M} \frac{d\omega}{\omega^2} N(\omega); \quad (41)$$

$$\gamma_0 = \int_{\omega_m}^{\omega_M} d\omega \omega^2 N^2(\omega),$$

$$\gamma_1 = 4 \int_{\omega_m}^{\omega_M} d\omega \omega N^2(\omega), \quad (42)$$

$$\gamma_2 = 4 \int_{\omega_m}^{\omega_M} d\omega N^2(\omega).$$

Зная $F(\omega)$ в области $\omega < \omega_m$, можно вычислить функции

$$\Gamma_0(\omega) = \int_0^{\omega_m} d\omega_1 (\omega + 2\omega_1)^2 F(\omega_1), \quad (43)$$

$$\Gamma_1(\omega) = \tilde{\Gamma}(\omega) - \Gamma_0(\omega). \quad (44)$$

Далее можно найти $F(\omega)$, в области $\omega_m < \omega < \omega_M$ из интегрального уравнения

$$\Gamma_1(\omega) = \int_{\omega_m}^{\omega} d\omega_1 (\omega - 2\omega_1)^2 F(\omega_1). \quad (45)$$

Это уравнение разрешимо при условии

$$\Gamma_1(\omega_m) = 0. \quad (46)$$

Решение есть

$$F(\omega) = \hat{R}_1 \frac{1}{\omega^2} \frac{d\Gamma_1(\omega)}{d\omega}, \quad (47)$$

где \hat{R}_1 - линейный оператор (I.91).

Таким образом, отношение функций $\psi(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ известно при всех частотах. Если бы были известны сами функции ψ и φ , то ленгмювский спектр можно было бы найти с помощью одной из формул

$$N^2(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \hat{R}_2 \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}, \quad (48)$$

$$N(\omega) = \hat{R}_2 \frac{\varphi(\omega) - \delta}{\omega}, \quad (49)$$

где \hat{R}_2 - линейный оператор (I.92). Теперь же эти формулы всего лишь позволяют переписать исходное интегральное уравнение в ином виде:

$$\left[\hat{R}_2 \frac{\varphi(\omega) - \delta}{\omega} \right]^2 + \frac{1}{\omega^2} \hat{R}_2 \frac{d}{d\omega} [F(\omega) \varphi(\omega)] = 0 \quad (50)$$

Как будет ясно из результата, величина δ существенна только при вычислении $\Gamma_1(\omega)$, а в (49), (50) может быть опущена. Это, однако, не очень упрощает уравнение (50). Заметно упростить его удастся вблизи верхней границы спектра, в области

$$\frac{\omega_M - \omega}{\omega_m} \ll 1. \quad (51)$$

В ней:

$$F(\omega) \approx F'(\omega_M - \omega), \quad (52)$$

$$F' \equiv - \frac{dF(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_m-0} ; \quad (53)$$

$$\hat{R}_2 \approx 1, \quad N(\omega) \approx \frac{\varphi(\omega)}{\omega} ; \quad (54)$$

$$N^2(\omega) + F' \frac{d}{d\omega} \frac{\omega_m - \omega}{\omega_m} N(\omega) = 0. \quad (55)$$

Уравнение (55) легко решается:

$$N(\omega) = \frac{BF'}{\omega_m - \omega + B\omega_m}. \quad (56)$$

Постоянная интегрирования B , как выяснится в дальнейшем, представима в виде

$$B = \delta^\xi, \quad 0 < \xi < 1, \quad (57)$$

где ξ - параметр, зависящий от γ_e/γ_0 . Рассмотрим сначала случай

$$\xi \gg (\ln \frac{1}{B})^{-1}, \quad (58)$$

в котором

$$B \ll 1. \quad (59)$$

В данном случае главный вклад в $\varphi(\omega)$ дает узкая окрестность верхней границы спектра, что позволяет вычислить $\varphi(\omega)$ во всей области $\omega < \omega_m$ с помощью выражения (56) для $N(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \frac{(2\omega - \omega_m)^2}{\omega_m} BF'^2 \left(1 - \frac{B\omega_m}{\omega_m - \omega + B\omega_m}\right) [1 + O(B)]. \quad (60)$$

Зная $\varphi(\omega)$, легко найти весь ленгмювский спектр. Формула (48) теперь, очевидно, непригодна для этой цели, зато можно вычислить

$$\varphi(\omega) = \frac{\psi(\omega)}{F(\omega)} \quad (61)$$

и воспользоваться формулой (49). Найденная указанным способом функция $N(\omega)$ зависит от шести параметров, значения которых

пока неизвестны⁴⁾:

$$\omega_m, \omega_m, B \text{ (или } \xi), F', I_1, I_2. \quad (62)$$

Они однозначно определяются условиями (32), (34), (46), (4I), (53).

Все дальнейшие расчеты существенно упрощаются, если пренебречь малыми по параметру $(\ln \frac{1}{B})^{-1}$ членами. В этом приближении вклад в

$$(\hat{R}_2 - 1) \frac{\varphi(\omega)}{\omega}$$

дает только область (5I), что позволяет сразу вычислить $N(\omega)$ по формуле (49):

$$N(\omega) = \frac{BF'}{\omega_m - \omega + B\omega_m} + \frac{4BF'}{\omega_m} \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^{3/2} \rho_n \left(\frac{\omega_m - \omega}{B\omega_m} + 1\right) \times \\ \times \left[\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \rho_n \frac{\omega_m}{\omega}\right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} \rho_n \frac{\omega_m}{\omega}\right) \right]. \quad (63)$$

Первое слагаемое в (63) существенно в области

$$\frac{\omega_m - \omega}{\omega_m} \lesssim \left(\ln \frac{1}{B}\right)^{-1}.$$

При записи условия (34) оно должно быть опущено. В результате из (34) следует:

$$\frac{\omega_m}{\omega_m} = \exp\left\{\frac{2}{\sqrt{7}} (\pi - \arctg \sqrt{7})\right\} \approx 4.31. \quad (64)$$

С помощью (63) легко выразить параметры (4I) через остальные:

$$I_1 = \frac{4\sqrt{2} BF'}{\omega_m} \left(\frac{\omega_m}{\omega_m}\right)^{3/2} \rho_n \frac{1}{B}, \quad (65)$$

$$I_2 \equiv \frac{1}{\omega_m} [I_1 - (I_1 - \omega_m I_2)] = \frac{I_1}{\omega_m} [1 + O(\frac{1}{B})]. \quad (66)$$

Переходя к вычислениям, связанным с функцией $\tilde{\Gamma}(\omega)$, ограничимся случаем⁵⁾

⁴⁾ Параметры (42) уже выражены через остальные, в силу (60).

⁵⁾ Если $\gamma_e \gg \gamma_0$, то неустойчивость срывается при малом угловом разбросе пучка и эффективность нагрева плазмы не может быть высокой.

$$\gamma_e \ll \gamma_0. \quad (67)$$

В этом случае оказывается

$$1 \ll \omega_m^{3/2} \ll \frac{\gamma_0}{\gamma_e}, \quad (68)$$

и в области спектра $\tilde{\Gamma}(\omega)$ можно упростить:

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \omega^2 - \frac{1}{2}\omega - \frac{\gamma_e}{4\gamma_0} \omega^{7/2}. \quad (69)$$

Функция $\Gamma_0(\omega)$ проста с самого начала:

$$\Gamma_0(\omega) = c_2 \omega^2 - c_1 \omega + c_0. \quad (70)$$

Необходимая информация о коэффициентах квадратного трехчлена (70) дается соотношениями

$$c_2 \approx \frac{\omega_m^2 F'(\omega_m)}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_m}{\omega_M} \right)^{3/2} \frac{1-\xi}{\xi}, \quad (71)$$

$$c_0 \sim c_1 \omega_m \sim c_2 \omega_m^2 \frac{\ln \ln \frac{1}{\beta}}{\ln \frac{B}{\beta}}. \quad (72)$$

Итак, $\Gamma_1(\omega)$ имеет вид

$$\Gamma_1(\omega) = (1-c_2)\omega^2 + (c_1 - \frac{1}{2})\omega - c_0 - \frac{\gamma_e}{4\gamma_0} \omega^{7/2}. \quad (73)$$

В силу (46),

$$1-c_2 = \frac{1}{2\omega_m} - \frac{c_1\omega_m - c_0}{\omega_m^2} + \frac{\gamma_e}{4\gamma_0} \omega_m^{3/2}. \quad (74)$$

Малые поправки к c_2 не всегда существенны, поэтому, наряду с (74), полезно иметь ввиду и более грубое условие

$$c_2 \approx 1. \quad (75)$$

Подставив (73) в (47), нетрудно вычислить $F(\omega_m)$, F' и исключить из результата разность $1-c_2$ с помощью (74):

$$F(\omega_m) = \sqrt{2} \left(\frac{\omega_m}{\omega_M} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{2\omega_m^2} - \frac{c_1\omega_m - c_0}{\omega_m^3} - \frac{\gamma_e}{4\gamma_0} \frac{3}{11} \left(\frac{35}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_m}{\omega_M} + 8 \right) \omega_m^{1/2} \right\}, \quad (76)$$

$$F' = \sqrt{2} \left(\frac{\omega_m}{\omega_M} \right)^{3/2} \left\{ \frac{1+c_1}{\omega_m^3} + \frac{\gamma_e}{4\gamma_0} \frac{3}{22} \left(\frac{35}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_m}{\omega_M} + 8 \right) \omega_m^{-1/2} \right\}. \quad (77)$$

При

$$\omega_m \frac{\ln \ln \frac{1}{\beta}}{\ln \frac{B}{\beta}} \ll 1 \quad (78)$$

члены, содержащие c_0, c_1 , пренебрежимо малы и из (32), (76), (77) следует:

$$\omega_m = \left[\frac{22}{3 \left(\frac{35}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_m}{\omega_M} + 8 \right)} \frac{\gamma_0}{\gamma_e} \right]^{2/5} \approx 0.43 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_e} \right)^{2/5}, \quad (79)$$

$$F' = \frac{5}{(2\omega_m\omega_M)^{3/2}} \approx 2.48 \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_0} \right)^{6/5}. \quad (80)$$

Условие (75) в сочетании с формулой (71) позволяет найти ξ :

$$\xi = \frac{5}{16\omega_m} \approx 0.17 \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_0} \right)^{2/5}. \quad (81)$$

Предположения (58), (78) оказываются эквивалентными и выполняются в области

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_e} \ll \left(\ln \frac{1}{\beta} \right)^{5/2}. \quad (82)$$

Зная ленгмювский спектр, можно вычислить все характеристики релаксации. Для простоты ограничимся оценками⁶⁾.

Энергия ленгмювских волн определяется формулами (I.74), (21):

$$W \sim \frac{\gamma_e}{\Delta\theta^3} \delta^\xi \ln \frac{1}{\beta}. \quad (83)$$

Если угловой разброс пучка не слишком мал:

$$\ln \frac{1}{\Delta\theta} < \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_e} \right)^{2/5}, \quad (84)$$

то оценка (83) представима в виде

$$W \sim \frac{\gamma_e}{\Delta\theta^3} \left(\frac{\gamma}{g^2\gamma_0} \right)^{0.17 \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_0} \right)^{2/5}} \ln \frac{g^2\gamma_0}{\gamma}. \quad (85)$$

Согласно (I.69), угловой разброс пучка в области (84) меняется по закону

$$\Delta\theta^5 = \Delta\theta_0^5 + \frac{\pi}{e}, \quad (86)$$

6) Численные коэффициенты в последующих формулах можно установить лишь удержав малые по параметру $(\ln \frac{1}{\beta})^{-1}$ члены. Без этого ξ определено с точностью до слагаемых порядка $\xi (\ln \frac{1}{\beta})^{-1} \sim (\ln \frac{1}{\beta})^{-1}$, а $B = \delta^\xi$ - с точностью до множителя порядка единицы.

где

$$l \sim \frac{\rho_0}{\nu_e \ln \frac{g^2 \gamma_0}{\nu}} \left(\frac{\gamma_0}{\nu_e} \right)^{1/5} \left(\frac{g^2 \gamma_0}{\nu} \right)^{0.17} \left(\frac{\nu_e}{\gamma_0} \right)^{2/5} \quad (87)$$

длина релаксации по углу.

Доля потерянной пучком энергии связана с угловым разбросом соотношением

$$\varepsilon \sim \left(\frac{\nu_e}{\gamma_0} \right)^{4/5} \Delta \theta^2. \quad (88)$$

В точке $z_c \sim l$ срыва неустойчивости (обусловленного изотропизацией пучка) эта доля составляет

$$\varepsilon \sim \left(\frac{\nu_e}{\gamma_0} \right)^{4/5}. \quad (89)$$

Все перечисленные оценки относились к случаю (82). Если выполняется противоположное условие:

$$\frac{\gamma_0}{\nu_e} \gg \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{5/2}, \quad (90)$$

то ленгмюровский спектр не зависит от ν_e и остается качественно таким же, как на границе областей (82), (90). Зависимость всех физических величин от δ на границе области (82) известна, поэтому при выполнении (90) не составляет труда получить универсальные (не содержащие ни одного параметра) уравнение для спектра и решить данное уравнение численно. Ограничимся, как и выше, оценками. Соотношения, аналогичные (83)–(87), получаются из последних заменой ν_e на $\gamma_0 / (\ln \frac{1}{\delta})^{5/2}$. В частности, закон (86) не меняется, а оценки (85), (87) приобретают вид

$$W \sim \frac{\gamma_0}{\Delta \theta^3} \left(\ln \frac{g^2 \gamma_0}{\nu} \right)^{-3/2}, \quad (91)$$

$$l \sim \frac{\rho_0}{\gamma_0} \ln^2 \frac{g^2 \gamma_0}{\nu}. \quad (92)$$

Потерянная пучком энергия дается формулой

$$\varepsilon \sim \frac{\nu_e}{\gamma_0} \left(\ln \frac{g^2 \gamma_0}{\nu} \right)^{1/2} \Delta \theta^2. \quad (93)$$

Стоит заметить, что (91) совпадает с грубой оценкой (17) с точностью до логарифмического множителя. Его появление обусловлено сдвигом спектра в область

$$k \sim k_m = \omega_m^{1/2} \sim \left(\ln \frac{g^2 \gamma_0}{\nu} \right)^{1/2} \gg 1 \quad (94)$$

и логарифмически большим вкладом области $\omega \ll \omega_m$, где $\tilde{\nu} \gg \omega$, в $\Gamma(\omega)$. Действительно, знание этих обстоятельств позволяет усовершенствовать оценки (I.32), (I.33), (I6) следующим образом:

$$\frac{\kappa}{\kappa_m^2} N \sim \Gamma N', \quad (95)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa_m} N' \Delta \theta \sim \frac{\kappa}{\kappa_m} N, \quad (96)$$

$$\Gamma \sim W \ln \frac{1}{\delta} \sim W \cdot \kappa_m^2. \quad (97)$$

Оценки (95)–(97) приводят к правильным, т.е. согласующимся с точным решением задачи, соответствующим случаю (90), выражениям для энергии, времени рассеяния и анизотропной добавки к спектру ленгмюровских волн:

$$W \sim \frac{\gamma_0}{\kappa_m^3 \Delta \theta^3}, \quad (98)$$

$$\Gamma \sim \frac{\gamma_0}{\kappa_m \Delta \theta^3}, \quad (99)$$

$$\frac{N'}{N} \sim \frac{\Delta \theta}{\kappa_m}. \quad (100)$$

Примечательно, что, вследствие сдвига в область $k \gg 1$, спектр оказывается почти изотропным даже при $\Delta \theta \sim 1$.

6. Заключение

Полученные выше результаты применимы до тех пор, пока перенормировка частоты ионного звука мала, а фазы ленгмюровских волн случайны. Первое условие выполняется при

$$W < \omega_m, \quad (101)$$

для выполнения второго обратное время рассеяния волны должно быть меньше масштаба изменения ленгмюровского спектра по частоте. Если инкремент четен, должно быть

$$\Gamma < \omega_m B, \quad (102)$$

в противном случае -

$$\Gamma' < \omega_m B. \quad (103)$$

В обоих случаях более жестким является условие случайности фаз. Условие (101) может составить ему конкуренцию только при четном возбуждении в области универсального спектра (90). В этом случае (101) эквивалентно (102) и, для размытого пучка, сводится точностью до логарифмического множителя к неравенству

$$\gamma_0 < 1. \quad (104)$$

Сравнивая область (104) с областью применимости результатов статьи [1], нетрудно установить, что первая является в γ^{-1} раз более широкой. В случае затухания звука на электронах в дейтериевой плазме с температурой $T_e = T \sim 20$ кэВ

$$\gamma \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} g \sim 10^{-3}.$$

Относительно области применимости теории по параметру γ_0/γ_e остается справедливым все сказанное в заключении к статье [1]. Ограничения на этот параметр накладываются не внутренними свойствами теории, а требованием эффективности нагрева плазмы. Максимальное значение к.п.д. нагрева достигается при $\gamma_e \sim \gamma_0$ и оказывается порядка единицы. Существенно, что в рассмотренных режимах релаксации энергия пучка передается плазме посредством затухания ленгмювских волн при кулоновских столкновениях электронов с ионами и, следовательно, идет на нагрев основной массы электронов. Принципиально возможные каналы диссипации, связанные с перекачкой энергии по спектру при индуцированном рассеянии ленгмювских волн на ионах и неупругом рассеянии на флуктуациях плотности, в данном случае отсутствуют, поскольку указанные процессы слабы (при очень мягких ограничениях снизу на угловой разброс пучка) и не влияют на структуру спектра. Они лишь слегка размывают его границы, не приводя к выходу энергии из резонансной области частот. Энергетический баланс в этой области поддерживается за счет того, что значительная часть излучаемой пучком энергии им же и поглощается. Таким образом, на представляющих интерес стадиях релаксации свойственный многим задачам теории турбулентности "инерционный" интервал, разделяющий области возбуждения и поглощения, отсутствует, а возможные в этом интервале степенные [4] и не степенные [5] универсальные спектры не реализуются.

Л и т е р а т у р а

1. Малкин В.М. Нелинейная релаксация пучка релятивистских электронов в плазме. I. Четырехплазменное взаимодействие.
2. Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. Атомиздат, М., 1971, с.203.
3. Малкин В.М. Физика плазмы, 1981, 7, в.6.
4. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. ЖЭТФ, 1978, 75, 904.
5. Канашов А.А., Рубенчик А.М. ДАН, 1980, 253, III2.

Работа поступила - I сентября 1981г.

Ответственный за выпуск - С.Г. Попов

Подписано к печати 15.10-1981г. МН 15057

Усл. I, I печ. л., 0,9 учетно-изд. л.

Тираж 290 экз. Бесплатно

Заказ № II2.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР