

34

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В.М.Малкин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ
УРОВНЯМИ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦЫ В
ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ

ПРЕПРИНТ 81 - 49



Новосибирск

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ УРОВНЯМИ
ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦЫ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЙНОМ
ПОЛЕ

В.М.Малкин

А Н Н О Т А Ц И Я

Установлено, что распределение расстояний между соседними уровнями энергии является пуассоновским для случайного потенциала произвольной природы, удовлетворяющего некоторым условиям малости.

ENERGY LEVEL SPACING DISTRIBUTION FOR A
PARTICLE IN A ONE-DIMENSIONAL RANDOM FIELD

V.M.Malkin

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The Poisson distribution of neighbouring level spacing for a random potential of arbitrary nature, satisfying some conditions of smallness, is derived.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ УРОВНЯМИ ЭНЕРГИИ
ЧАСТИЦЫ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ

В.В.Малкин

I. В в е д е н и е

Учет квантовых эффектов в системах, близких к неинтегрируемым классическим системам, затрудняется отсутствием достаточно простых правил квантования. Попытки статистического описания спектров таких систем основаны на том обстоятельстве, что относительно узкий интервал энергий может содержать много уровней с одинаковыми квантовыми числами. Подобное положение имеет место для высоквозбужденных состояний тяжелых ядер. Однако возможность применения хорошо разработанной статистической теории их спектров [1] к неинтегрируемым системам остается неясной, поскольку данная теория использует предположение о равновероятности всех взаимодействий¹⁾, которое для относительно простых систем может оказаться неправильным. Тем не менее, не исключено, что это предположение по каким-то причинам верно или не очень существенно. Проведенные в последнее время численные расчеты [2] уровней энергии простейших эргодических в классическом пределе систем качественно согласуются с предсказанным теорией [1] распределением расстояний между соседними уровнями, но не гарантируют его количественной правильности. Напомним, что это распределение с хорошей точностью описывается формулой Вигнера:

$$P(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\frac{\pi s^2}{4}} \quad (1)$$

1) Формально это предположение выражается в требовании инвариантности вероятностной меры, задаваемой на ансамбле случайных матриц определенной симметрии, относительно всех сохраняющих симметрию унитарных преобразований. Симметрия ансамбля определяется симметрией гамильтониана.

Нижее речь идет о системах, которым соответствует ортогональный ансамбль Дайсона или, в другом варианте теории, гауссовский ансамбль Вигнера.

Вопрос о принципиальной возможности использования статистических ансамблей для описания свойств спектра отдельной системы здесь и в дальнейшем не затрагивается.

Энергия измеряется здесь в средних расстояниях между уровнями, $P(s)ds$ есть вероятность найти два соседних уровня, расстояние между которыми заключено между s и $s+ds$, в последовательности большого количества уровней одинаковой симметрии с единичной средней плотностью.

Для выяснения существенности использованных при выводе (I) предположений могут оказаться полезными примеры систем с известным распределением расстояний между уровнями энергии. В работе [3] с целью построения такого примера рассматривалось одномерное уравнение Шредингера с потенциалом в виде последовательности случайно расположенных δ -образных пиков. Из результата, в частности, следовало, что при $S \ll I$ расталкивание уровней является экспоненциально сильным:

$$\ln P(s) \approx -\frac{1}{S^2} \quad (2)$$

Недавно для случайного потенциала марковского типа была получена другая зависимость $P(s)$ [4]:

$$P(s) = e^{-s} \quad (3)$$

Вывод основывался на свойстве локализации собственных состояний в одномерной неупорядоченной системе²⁾. Для использованного в [4] потенциала это свойство было доказано в [5]. Ранее, в последующем за [6] цикле работ, оно было установлено для неупорядоченной решетки Кронига-Пенни и, в частности, для рассмотренной в [3] последовательности δ -образных пиков. Ссылки на соответствующие работы, сопоставление с экспериментальными данными, а также качественные доводы в пользу локализации собственных состояний в любой одномерной неупорядоченной системе можно найти в обзорах [7].

Результат настоящей работы согласуется с [4] и является новым подтверждением универсальности (3) в одномерных неупорядоченных системах. Причины отличия (3) от (I) обсуждаются в конце работы. Там же приводится качественный вывод (3), основанный на соображениях, аналогичных использованным в [8], [9] при получении асимптотики $P(s)$

2) Имеется ввиду экспоненциальное убывание каждой (с вероятностью единица) собственной функции при удалении от точки, где эта функция максимальна.

в области малых S . Установление границ применимости этих соображений показывает, что предсказания [9] не могут служить разумной альтернативой распределения (I).

Основная часть работы посвящена формальному выводу распределения (3). Это распределение получено прямым расчетом для случайного потенциала произвольной природы, удовлетворяющего некоторым условиям малости. Последние по существу совпадают с условиями применимости теории возмущений для функции Грина уравнения Шредингера и могут быть сформулированы следующим образом: корреляционный радиус потенциала и длина волны частицы малы по сравнению с длиной пробега частицы. Эти условия сводятся к неравенствам на энергию частицы k^2 , длину корреляций a и величину u потенциала³⁾:

$$\frac{ua}{k} \ll 1, \quad \frac{u^2 a}{k^2} \ll 1. \quad (4)$$

Здесь действие измеряется постоянной Планка, а масса - удвоенной массой частицы. Корреляционные функции считаются достаточно быстро затухающими на расстояниях больших a , так что

$$S |F_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n)| d\xi_1 \dots d\xi_n \leq u(u a)^n.$$

$n+1$ - точечная корреляционная функция F_{n+1} зависит только от n переменных в силу предполагаемой однородности случайного поля.

2. Схема расчета

Определим амплитуду и фазу функции ψ , удовлетворяющей одномерному уравнению Шредингера

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x) \right] \psi = k^2 \psi,$$

следующими соотношениями:

$$\psi = A \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \tilde{k} A \cos \varphi \quad (5)$$

Постоянную \tilde{k} выберем ниже из соображений удобства, пока же заметим, что при любом выборе \tilde{k} фаза волновой функции кратна π

3) Эквивалентность неравенств (4) и сформулированных выше физических условий легко проверить, оценив длину пробега e в борновском приближении. Длина системы считается достаточно большой: $L \gg e$

во всех точках, где $\psi = 0$. Фаза ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \tilde{\kappa} + \frac{\kappa^2 - \tilde{\kappa}^2 - u}{\tilde{\kappa}} \sin^2 \psi \quad (6)$$

В дальнейшем, для простоты, рассматриваются решения (6) с нулевым начальным условием $\psi(x, \kappa)|_{x=0} = 0$, энергия N -ого уровня определяется фиксацией фазы при $x=L$:

$$\psi(x, \kappa)|_{x=L} = \pi N - \alpha,$$

системы со всевозможными α из интервала $(0, \pi)$ считаются равновероятными представителями ансамбля.

Если выбрать $\tilde{\kappa}$ не зависящим от κ , то $\psi(x, \kappa)$ будет монотонно возрастающей функцией κ при любом положительном x . Действительно, в этом случае для функции $\chi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \kappa}$ получается уравнение

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 2 \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} \sin^2 \psi + \frac{\kappa^2 - \tilde{\kappa}^2 - u}{\tilde{\kappa}} \chi \sin 2\psi,$$

из которого следует, что кривая $\chi(\kappa)$ не может перейти при увеличении κ из области $\chi > 0$ в область $\chi < 0$.

Рассмотрим плотность вероятности совместного распределения двух фаз $\psi(x, \kappa_1)$ и $\psi(x, \kappa_2)$:

$$P(\psi_1, \psi_2 | x, \kappa_1, \kappa_2) = \left\langle \prod_{n=1}^2 \delta(\psi(x, \kappa_n) - \psi_n) \right\rangle \quad (7)$$

Угловые скобки означают усреднение по всевозможным реализациям случайного потенциала $u(x)$. Вероятность $Q(\kappa_1, \kappa_2)$ отсутствия уровней в интервале (κ_1, κ_2) связана с функцией (7) очевидным соотношением

$$Q(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_2 P(\psi_1, \psi_2 | L, \kappa_1, \kappa_2) \quad (8)$$

Посредством несложных преобразований последнее можно переписать в виде

$$Q(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \mathcal{F}(\theta | L, \kappa_1, \kappa_2), \quad (9)$$

$$\mathcal{F}(\theta | x, \kappa_1, \kappa_2) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_2 P(\psi_1, \psi_2 + \theta | x, \kappa_1, \kappa_2).$$

Функция $Q(\kappa - \frac{\tilde{\kappa}}{2}, \kappa + \frac{\tilde{\kappa}}{2})$ имеет узкий (ширины порядка L^{-1}) максимум по κ , зависимость от κ является плавной. Имея ввиду результат последующих вычислений, введем независимое от κ обозначение $Q(S)$ для функции $Q(\kappa - \frac{\tilde{\kappa}}{2}S, \kappa + \frac{\tilde{\kappa}}{2}S)$, в которой $\tilde{\kappa}$ есть среднее расстояние между уровнями. Искомая плотность вероятности $P(S)$ связана с $Q(S)$ известной формулой (см., например, [1], стр. 395):

$$P(S) = \frac{d^2 Q(S)}{dS^2} \quad (10)$$

Таким образом, для отыскания $P(S)$ достаточно вычислить функцию распределения (7). Это будет сделано в следующих разделах с помощью метода Кляцкина - Татарского [10]. Вычисления оказываются более простыми, если выбрать $\tilde{\kappa}$ равным κ . При таком выборе $\tilde{\kappa}$ упрощается уравнение (6):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \kappa - \frac{u}{\kappa} \sin^2 \psi, \quad (11)$$

однако фаза $\psi(x, \kappa)$, вообще говоря, не является монотонно возрастающей функцией κ , и формула (8), предполагающая монотонность фазы перестает быть точной. Тем не менее, эта формула остается применимой, поскольку ее погрешность стремится к нулю при $L \rightarrow \infty$ и фиксированном S . Для оценки погрешности достаточно заметить возможность перехода от случая $\tilde{\kappa} = \kappa$ к случаю $\tilde{\kappa} = \text{const}$ с изменением $\tilde{\kappa}$ всего лишь на величину порядка ширины распределения $Q(\kappa_2, \kappa_1)$ по $\kappa_2 - \kappa_1$, т.е. порядка L^{-1} , и воспользоваться тождеством

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\kappa}} \Big|_{x, \kappa = \text{const}} = \frac{\sin 2\psi}{2\tilde{\kappa}},$$

которое следует из определения фазы.

3. Уравнение для $\mathcal{F}(\theta | x, \kappa_1, \kappa_2)$

Дифференцируя (7) по x и учитывая (11), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\psi_1, \psi_2 | x, \kappa_1, \kappa_2)}{\partial x} &= \sum_{n=1}^2 \frac{\partial}{\partial \psi_n} \left\{ -\kappa_n P(\psi_1, \psi_2 | x, \kappa_1, \kappa_2) + \right. \\ &\left. + \frac{\sin^2 \psi_n}{\kappa_n} \left\langle u(x) \prod_{m=1}^2 \delta(\psi(x, \kappa_m) - \psi_m) \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Для получения замкнутого уравнения необходимо выразить $\langle u(x) \prod_{m=1}^n \delta(\varphi(x, \kappa_m) - \varphi_m) \rangle$ через $P(\varphi_1, \varphi_2 | x, \kappa_1, \kappa_2)$. Это можно сделать с помощью описанного в [10] метода последовательных приближений. Воспользуемся известным разложением усредненного произведения случайной функции на функционал от нее по корреляционным функциям (кумулянтам) F_n случайного поля (см., например, [11]):

$$\langle u(x) R[u(x')] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \times \quad (13)$$

$$\times F_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) \left\langle \frac{\delta^n R[u(x)]}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_n)} \right\rangle$$

Вычисление вариационных производных функционала $\prod_{m=1}^n \delta(\varphi(x, \kappa_m) - \varphi_m)$ в области $|x_1, \dots, x_n - x| \leq a$ (по которой фактически идет интегрирование в (13)) сводится к вычислению вариационных производных фаз $\varphi(x, \kappa)$ в той же области. Последние можно найти итерациями. Покажем это на примере младших производных. Интегрирование (16) по x дает:

$$\varphi(x) = \kappa x - \frac{1}{\kappa} \int_0^x dx_2 u(x_2) \sin^2 \varphi(x_2) \quad (14)$$

Варьируя (14), получаем:

$$\frac{\delta \varphi(x)}{\delta u(x_1)} = -\frac{1}{\kappa} \left\{ \Pi(x-x_1) \sin^2 \varphi(x_1) + \int_{x_1}^x dx_2 u(x_2) \frac{\delta \varphi(x_2)}{\delta u(x_1)} \sin 2\varphi(x_2) \right\} \quad (15)$$

Здесь $\Pi(\xi)$ - единичная ступенька:

$$\Pi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

В области $|x-x_1| \leq a$ уравнение (15) решается итерациями. После того, как решение найдено, входящие в ответ фазы $\varphi(x, \kappa_m)$ следует выразить через задаваемое δ -функциональным множителем $\delta(\varphi(x) - \varphi)$ значение $\varphi(x) = \varphi$. Это можно сделать итерировав уравнение

$$\varphi(x_1) = \varphi(x) - \kappa(x-x_1) + \frac{1}{\kappa} \int_{x_1}^x dx_2 u(x_2) \sin^2 \varphi(x_2)$$

Отыскав аналогичным способом высшие вариационные производные фаз в виде функциональных рядов Тейлора в окрестности точки x , можно повторно использовать формулу (13) для вычисления средних значений вариационных производных функционала $\prod_{m=1}^n \delta(\varphi(x, \kappa_m) - \varphi_m)$ и т.д. Если ограничиться учетом членов заданного порядка малос-

ти по параметрам (4), то замкнутое уравнение для $P(\varphi_1, \varphi_2 | x, \kappa_1, \kappa_2)$ получится после конечного числа итераций. В частности, учет первых не исчезающих членов приводит к уравнению

$$\frac{\partial P(\varphi_1, \varphi_2 | x, \kappa_1, \kappa_2)}{\partial x} = \sum_{n=1}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left\{ -\kappa_n + \frac{\sin^2 \varphi_n}{\kappa_n} \times \right. \quad (16)$$

$$\left. \times \sum_{m=1}^2 \frac{1}{\kappa_m} \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \int_0^{\infty} d\xi F_2(\xi) \sin^2(\varphi_m - \kappa_m \xi) \right\} P(\varphi_1, \varphi_2 | x, \kappa_1, \kappa_2)$$

При его выводе предполагалось, что $\langle u \rangle = 0$. Это условие можно рассматривать как определение начала отсчета энергии. Перейдем в (16) к переменным φ, θ :

$$\varphi_n = \varphi + (-1)^n \frac{\theta}{2}, \quad n = 1, 2$$

и сделаем преобразование Фурье по φ :

$$P_{\pm}(\theta | x, \kappa_1, \kappa_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi e^{it\varphi} P(\varphi - \frac{\theta}{2}, \varphi + \frac{\theta}{2} | x, \kappa_1, \kappa_2)$$

Коэффициенты в уравнении (16) (а также в уравнениях, получающихся при учете членов более высокого порядка) являются периодическими функциями φ с периодом π . Поэтому в уравнении для P_{\pm} присутствуют только функции P_{\pm} с t' , отличающимися от t на четное число. В частности, функция P_0 , через которую выражается \mathcal{S} :

$$\mathcal{S}(G | x, \kappa - \frac{\kappa}{2}, \kappa + \frac{\kappa}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' P_0(\theta' | x, \kappa - \frac{\kappa}{2}, \kappa + \frac{\kappa}{2}) \quad (17)$$

связана со всевозможными P_{2n} , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. В нулевом приближении по параметрам (4) и $\frac{\kappa}{k}$ эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial P_{2n}}{\partial x} \approx 2in\kappa P_{2n}$$

Различные собственные значения оператора сдвига $\lambda_n \approx 2in\kappa$ отстоят друг от друга не менее, чем 2κ . Поправки к λ_n , возникающие при учете опущенных членов, малы по сравнению с κ , а собственные функции, соответствующие разным n , слабо связаны. Их связь можно учесть последовательными приближениями по перечисленным параметрам. В нулевом приближении зависимость собственных функций от θ произвольна, т.е. каждое из собственных значений вырождено с бесконечной кратностью. Поэтому в первом приближении приходится решать секулярное уравнение (см., напри-

мер, [12]). В рассматриваемом случае оно имеет вид

$$\frac{\partial P_{2n}}{\partial x} = \left\{ 2in\kappa - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + A_\kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta - n^2 \cos^2 \theta \right) \right\} P_{2n} \quad (18)$$

Здесь A_κ - положительная величина, пропорциональная компоненте Фурье корреляционной функции F_2 :

$$A_\kappa = \frac{1}{2\kappa^2} \int_0^\infty d\xi F_2(\xi) \cos 2\kappa\xi.$$

Нетрудно показать, что при $n \neq 0$ все решения (18) экспоненциально затухают с ростом x на длине порядка длины пробега частицы ($e \sim A_\kappa^{-1}$). Связанные с этими решениями поправки к P_0 (которые возникают в следующих приближениях) несущественны. Таким образом, достаточно решить секулярное уравнение при $n = 0$. Учитывая (17), его можно проинтегрировать по θ :

$$\frac{\partial S(\theta|x, \kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2})}{\partial x} = \left(-\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + A_\kappa \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) S \quad (19)$$

Начальное условие к уравнению (19) имеет вид

$$S|_{x=0} = \begin{cases} 1, & \theta > 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases} \equiv \Pi(\theta)$$

4. Распределение расстояний между соседними уровнями

Введем более удобные для дальнейшего обозначения

$$y = A_\kappa x$$

$$\tilde{P}(\theta|y, \kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2}) = P(\theta|y, \kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2}) - \Pi(\theta) \quad (20)$$

$$\alpha = \frac{\alpha}{A_\kappa} \quad \left(= \frac{\alpha}{A_\kappa} s \sim \frac{e}{L} s \right)$$

Функция \tilde{P} обращается в нуль при $x = 0$, а при $x > 0$ терпит единичный разрыв в точке $\theta = 0$:

$$\tilde{P} \Big|_{\theta=+0}^{\theta=-0} = -1 \quad (21)$$

Параметр α мал по сравнению с единицей, поскольку рассматриваются не слишком большие s : $s \ll 4/e$

Применим к \tilde{P} преобразование Лапласа:

$$\mathcal{P}_\lambda(\theta|\kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2}) = \int_0^\infty dy e^{-\lambda y} \tilde{P}(\theta|y, \kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2}) \quad (22)$$

Из (19) - (22) следует:

$$\lambda \mathcal{P}_\lambda = \left(-\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \mathcal{P}_\lambda, \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_\lambda \Big|_{\theta=-0}^{\theta=+0} = -\frac{1}{\lambda}. \quad (24)$$

Внутри каждого из интервалов $\pi n < \theta < \pi(n+1)$; $n=0, \pm 1, \dots$ можно ввести новую переменную:

$$z = \text{ctg} \theta \quad ; \quad \mathcal{P}_\lambda(\theta) \equiv \mathcal{F}_\lambda(z).$$

Функция \mathcal{F}_λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_\lambda}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial \mathcal{F}_\lambda}{\partial z} = \frac{\lambda}{1+z^2} \mathcal{F}_\lambda \quad (25)$$

При $z \rightarrow \pm\infty$ решения этого уравнения имеют асимптотики $e^{-\alpha z}$ и const . Условие регулярности на $-\infty$ по z определяет решение с точностью до постоянного множителя. Коэффициент

$$R_\lambda = \frac{\mathcal{F}_\lambda(-\infty)}{\mathcal{F}_\lambda(+\infty)}$$

определен однозначно. Следовательно,

$$\mathcal{P}_\lambda(\pi n) = \begin{cases} \mathcal{P}_\lambda(+0) R_\lambda^n, & n=1, 2, \dots \\ \mathcal{P}_\lambda(-0) R_\lambda^n, & n=-1, -2, \dots \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при больших положительных $\text{Re} \lambda$ коэффициент R_λ мал и заведомо выполняется неравенство $|R_\lambda| < 1$. Требуя ограниченности $\mathcal{P}_\lambda(\theta)$ при $\theta \rightarrow -\infty$, находим

$$\mathcal{P}_\lambda(-0) = 0 \quad (26)$$

С учетом этого условия (24) принимает вид

$$\mathcal{P}_\lambda(+0) = -\frac{1}{\lambda} \quad (27)$$

Теперь можно найти $\mathcal{P}_\lambda(\theta)$ в области $0 < \theta < \pi$. Это позволит вычислить R_λ и

$$\mathcal{P}_\lambda(\pi n + \theta) = R_\lambda^n \mathcal{P}_\lambda(\theta), \quad n=1, 2, \dots, \quad (28)$$

после чего для отыскания $\tilde{F}(\Theta)$ останется обратить преобразование Лапласа (22). Ниже речь будет идти только о положительных Θ ⁴⁾. Для них вклад в $\mathcal{P}(\Theta) = 1 + \tilde{F}(\Theta)$ дает точка $\lambda = 0$ и полюсы коэффициента R_λ . Каждому полюсу $\lambda = \lambda_p$ соответствует нуль функции $f_\lambda(+\infty)$, определяемой по заданному значению $f_\lambda(-\infty)$. Иными словами, $f_{\lambda_p}(\varrho)$ имеет асимптотики

$$f_{\lambda_p} \sim \begin{cases} \text{const}, & \varrho \rightarrow -\infty \\ e^{-\alpha\varrho}, & \varrho \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Для отыскания λ_p удобно сделать замену

$$g_\lambda(\varrho) = e^{-\alpha\varrho/2} f_\lambda(\varrho)$$

Новая функция удовлетворяет уравнению

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{\lambda}{1+\varrho^2}\right) g_\lambda = -\frac{\alpha^2}{4} g_\lambda \quad (29)$$

Собственные значения λ_p определяются из условий

$$g_\lambda(\varrho) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varrho \rightarrow \pm \infty$$

Очевидно, все λ_p вещественны и отрицательны. Расположим их в порядке убывания:

$$0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

Тогда P -ому значению λ соответствует такая глубина потенциальной ямы $\frac{\lambda}{1+\varrho^2}$, при которой энергия P -ого связанного состояния равна $-\alpha^2/4$. Вычисляя λ_1 , яму можно считать δ -образной, поскольку в данном случае состояние с энергией $-\alpha^2/4$ является основным и масштаб изменения собственной функции порядка $\alpha^{-1} \gg 1$. Сделав в (29) замену

$$\frac{\lambda}{1+\varrho^2} \rightarrow \pi \lambda \delta(\varrho), \quad (30)$$

находим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\pi \kappa}{2} \\ g_{\lambda_1} &= -e^{-\alpha|\varrho|/2} \end{aligned} \quad (31)$$

Для λ_2 справедлива оценка

$$\lambda_2 \sim \ln \alpha$$

4) В области $\Theta < 0$ имеем $\mathcal{P}_\lambda = 0$, $\mathcal{P} = 0$. Этот результат очевиден заранее, так как при надлежащем определении фаз разность $\Theta(x, \kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2}) = \Psi(x, \kappa + \frac{\alpha}{2}) - \Psi(x, \kappa - \frac{\alpha}{2})$ является монотонно возрастающей функцией x .

Вклад полюса λ_p в $\mathcal{P}(\Theta/L, \kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2})$ пропорционален

$$\exp(\lambda_p A_{\kappa L}) \sim \exp(\lambda_p \frac{L}{e})$$

При $P \geq 2$ этот вклад экспоненциально мал по параметру L/e (речь идет о не слишком малых S : $\ln \frac{1}{S} \ll \frac{L}{e}$). Таким образом, существенны только полюсы $\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_1$. Для их учета достаточно найти g_λ в области $|\lambda| \leq \infty$. В этой области потенциал в (29) можно по-прежнему считать δ -функцией (30). Пользуясь данным приближением, находим:

$$f_\lambda = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} R_\lambda, & \varrho < 0 \\ -\frac{1}{\lambda} [1 - (1 - R_\lambda)e^{-\alpha\varrho}], & \varrho > 0 \end{cases}, \quad (32)$$

$$R_\lambda = \left(1 + \frac{\pi \lambda}{\alpha}\right)^{-2}$$

Теперь легко вычислить $\mathcal{P}(\Theta/L, \kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2})$, затем по формуле (8) — $Q(\kappa - \frac{\alpha}{2}, \kappa + \frac{\alpha}{2}) = Q(S)$ и, наконец, $P(S)$. Удобнее, однако, поменять местами процедуры обращения преобразования Лапласа и интегрирования по Θ в (8). Сделав это и воспользовавшись формулами (20), (32), получим:

$$Q(S) = e^{-S} \quad (33)$$

При вычислениях опущены малые по параметру α члены и учтено то обстоятельство, что с принятой в (19) точностью $\bar{x} = \frac{\pi L}{L}$. Подставляя (33) в (10), приходим к формуле (3).

Описанный в данном разделе расчет целиком основан на уравнении (19), в котором коэффициент при старшей производной обращается в нуль при Θ кратных π . В окрестности особой точки $\Theta = \pi n$ могут играть роль опущенные при выводе (19) члены. Наиболее существенные из них получаются разложением по "параметрам"

$$\begin{aligned} \frac{4e}{\kappa} (\Theta - \pi n) \frac{\partial}{\partial \Theta} &: \frac{4e}{\kappa} \frac{\kappa}{\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ \frac{4^2 e}{\kappa^3} (\Theta - \pi n)^2 \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} &, \quad \frac{4^2 e}{\kappa^3} \frac{\kappa}{\pi} (\Theta - \pi n) \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \\ \frac{4^2 e}{\kappa^3} \frac{\kappa^2}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} & \end{aligned}$$

Подобные поправки возникают и в уравнениях (23), (25). На асимптотике $f_\lambda \rightarrow \text{const}$ (или, что то же самое, $\mathcal{P}_\lambda \xrightarrow{\Theta \rightarrow \pi n} \text{const}$) все поправки пренебрежимо малы. На асимптотике $\mathcal{P}_\lambda \sim e^{-\alpha \varrho}$

они начинают сказываться лишь при очень больших $|\operatorname{ctg} \theta|$, когда величина $e^{-\alpha \operatorname{ctg} \theta}$ уже является экспоненциально большой (если $\theta \rightarrow \pi n - 0$) или малой (если $\theta \rightarrow \pi n + 0$) по параметрам (4). Убывающая экспонента ($\theta \rightarrow \pi n + 0$) становится пренебрежимо малой еще в области применимости уравнения (19). Коэффициент при растущей экспоненте ($\theta \rightarrow \pi n - 0$) с высокой точностью равен нулю, поскольку в противном случае функция $1 - \mathcal{F}(\theta)$ не может быть положительной и монотонно убывающей. Таким образом, несмотря на наличие особенностей, использование (19) оправдано.

5. Обсуждение

Исключая из рассмотрения функции, меняющиеся на малом по сравнению со всеми характерными длинами масштабе, легко сформулировать задачу отсканирования уровней энергии частицы на языке случайных матриц конечной размерности. В такой формулировке отличие (3) от (1) можно объяснить следующим образом. Разделим мысленно одномерную неупорядоченную систему на много подсистем, размер каждой из которых заметно превышает масштаб локализации собственных функций. Подпространство, натянутое на собственные функции, локализованные внутри одной и той же подсистемы, мало меняется при переходе от одной случайной матрицы к другой; оно, в некотором отношении, близко к инвариантному подпространству ансамбля. При наличии большого числа статистически независимых инвариантных подпространств распределение расстояний между соседними уровнями является пуассоновским (см. [1], стр. 300). В противоположность этому распределение (1) получается экстраполяцией линейного закона расталкивания уровней при малых S (см. [1], стр. 200), который может быть правильным лишь в отсутствие инвариантных подпространств. Более строгие обоснования (1) используют еще более сильное предположение — о равновероятности всех взаимодействий.

Полезно также сопоставить (3) с отличающимися от (1) предсказаниями относительно распределения $P(S)$, сделанными в работах [8], [9]. В этих работах для отыскания уровней энергии стохастических в классическом пределе систем (K -систем) использовалась обычная квазиклассическая асимптотика решений уравнения Шредингера. В системе со стохастически неустойчивыми классическими траекториями фаза квазиклассической волновой функции,

очевидно, испытывает неустойчивость. Тем же свойством обладает определенная согласно (5) фаза точной волновой функции в одномерном случайном поле: среднеквадратичное значение разности двух фаз

$$\Theta(x, \kappa - \frac{x}{L}, \kappa + \frac{x}{L}) = \Psi(x, \kappa + \frac{x}{L}) - \Psi(x, \kappa - \frac{x}{L})$$

экспоненциально растет с увеличением x , пока не достигнет величины порядка единицы. (В этом легко убедиться, например, с помощью уравнения (19)). При одинаковых начальных значениях двух фаз первоначальный толчок, приводящий к их быстрому расхождению, возникает из-за различия энергий. Пусть l — длина на которой Θ удваивается (она совпадает по порядку величины с длиной пробега частицы), тогда

$$\langle \Theta^2(x, \kappa - \frac{x}{L}, \kappa + \frac{x}{L}) \rangle^{1/2} \sim x l e^{x/l} \sim S \exp(\frac{L}{l} / \ln \frac{L}{l})$$

Найденный в задаче о "скользящих" электронах [8] асимптотический закон расталкивания уровней относится к области столь малых S , при которых фазы в среднем не успевают разойтись на величину порядка единицы на длине системы. Нетрудно видеть, что это требование выполняется не при $S \ll 1$, а при экспоненциально малых S :

$$\ln \frac{1}{S} > \frac{L}{l} \quad (34)$$

В области, определяемой неравенством, противоположным (34) расталкивание соседних уровней не существенно и распределение $P(S)$ должно быть пуассоновским⁵⁾. Этот вывод подтверждается формальным совпадением полученного в [8] выражения для уровней энергии с известным выражением для интегрируемых систем, из которого при весьма мягких ограничениях на виды функциональной зависимости следует распределение (3) (см. [13]). Свидетельством в пользу того же результата является наличие (в пределе $L \rightarrow \infty$) у оператора Гамильтона рассмотренной в [8] системы бесконечного числа инвариантных подпространств, соответствующих различным значениям квазиимпульса.

⁵⁾ Речь идет о не слишком больших S . В области $S > (L/l)^{1/2}$ регулярное расхождение фаз уже не может компенсироваться их диффузией. Именно к этой области, а не $S \gg 1$, относится вторая из найденных в [8] асимптотик.

Рассуждения, подобные изложенным при выводе (34), показывают, что данное в [9] обобщение закона расталкивания уровней при малых S на ограниченные системы может относиться лишь к области

$$\ln \frac{1}{S} > \frac{\tilde{L}}{e}, \quad (35)$$

где \tilde{L} - характерная длина участка классической траектории частицы, заключенного между двумя последовательными прохождениями через фиксированный элемент фазового объема. Для достаточно малого элемента объема $\tilde{L} \gg e$. Продолжая рассуждения [12] о статистической независимости фаз, успевающих разойтись на малой по сравнению с \tilde{L} длине, приходим к выводу об отсутствии расталкивания уровней при выполнении неравенства, противоположного (35). Между тем, надежно установлено (см., например, [2]), что расталкивание уровней в К-системах имеет место по крайней мере в области $S \lesssim 1$. Причина противоречия заключается, по-видимому, в некорректности использования обычной квазиклассической асимптотики волновых функций для отыскания уровней энергии неинтегрируемых систем. Примеры противоречий такого рода хорошо известны [14].

Автор глубоко благодарен Е.В.Чирикову, В.Г.Зелевинскому, Д.Л.Шепелянскому, Д.Д.Рютову, Г.В.Ступакову за обсуждение работ и полезные замечания.

Л и т е р а т у р а :

- I. Statistical Theories of Spectra: Fluctuations (A Collection of Reprints and Original Papers With an Introductory Review by C.E. Porter). Acad. Press, New York and London, 1965.
2. S.W. McDonald, A.M. Kaufman, Phys. Rev. Lett., 42, 1129 (1979); G. Casati, F. Valz-Gris, I. Guarneri, Let. Nuovo Cim., 28, 279 (1980).
3. В.Л.Покровский. Письма в ЖЭТФ, 4, 140 (1966).
4. S.A. Molchanov. Commun. Math. Phys., 78, 429 (1981).
5. С.А.Молчанов. Изв.АН СССР, 42, 70 (1978).
6. M.F. Mott, W.D. Twose. Adv. Phys., 10, 107 (1961); перевод: УФН, 79, 691 (1963).
7. M.F. Mott. Adv. Phys., 16, 49 (1967); перевод: Электроны в неупорядоченных структурах. "Мир", М., 1969. М.В.Садовский. УФН, 133, 223 (1981).
8. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко. ЖЭТФ, 65, 643 (1973).
9. Г.М.Заславский. ЖЭТФ, 73, 2089 (1977); УФН, 129, 211 (1979).
10. В.И.Кляцкин, В.И.Татарский. Изв. вузов - Радиофизика, 15, 1433 (1972).
11. В.И.Кляцкин. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. "Наука", М., 1980, стр.51.
12. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. "Наука", М., 1974, стр.169.
13. M.V. Berry, M. Tabor. Proc. Roy. Soc., A 356, 375 (1977).
14. В.И.Арнольд. Функциональный анализ, 6, 12 (1972).
M.V. Berry, K.E. Mount. Rep. Prog. Phys., 35, 315 (1972).
W.H. Miller. J. Chem. Phys., 62, 2119 (1975).

Работа поступила - 7 мая 1981 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 11.05-1981 г. МН 06273
Усл. 1,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.
Тираж 170 экз. Бесплатно
Заказ № 49.

Отпечатано на роталпринте ИЯФ СО АН СССР