

13

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

С.А.Никитин, Е.Л.Салдин

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ПРО-
ДОЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЦ
В НАКОПИТЕЛЕ ВЭПП - 4

ПРЕПРИНТ 81 - 19



О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ
ЧАСТИЦ В НАКОПИТЕЛЕ ВЭШ-4

С.А.Никитин, Е.Л.Салдин

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассчитан вариант получения продольной поляризации частиц в накопителе ВЭШ-4 с использованием сверхпроводящего соленоида, поворачивающего спин вокруг скорости на угол \mathcal{L} ("сибирская змейка" I рода). Решена задача о компенсации возмущения, вносимого соленоидом в орбитальное движение. Проведенный анализ радиационной кинетики спина показывает, что в районе 2 ГэВ время деполяризации может составлять несколько часов. Обсуждается способ инъекции поляризованного пучка из бустерного накопителя ВЭШ-3 в накопитель ВЭШ-4.

§ I. Введение

Примеры реализации динамически устойчивого продольного направления поляризации в накопителях описаны в обзоре /1/.

Возможным способом организации продольной поляризации в экспериментальной промежутке накопителя ВЭПП-4 является размещение в противоположном промежутке соленоида, поворачивающего спин частицы на угол $\varphi = \pi$. При этом устойчивое направление поляризации \vec{n} ($\vec{n}(\theta) = \vec{n}(\theta + 2\pi)$) лежит в плоскости орбиты и составляет угол со скоростью частицы, равный $\sqrt{1 - \beta^2}$, где азимут $\theta = 0$ в месте размещения соленоида ($V = E(\text{МэВ})/406$). В такой схеме за один оборот частицы в накопителе ($\theta \rightarrow \theta + 2\pi$) её спин поворачивается вокруг оси \vec{n} всегда на угол, равный π и поэтому спиновые резонансы отсутствуют (см. рис. I). Необходимый интеграл поля соленоида составляет $46 \cdot V \cdot \text{кГс} \cdot \text{м}$. Конкретная схема предусматривает размещение сверхпроводящего соленоида с длиной 2,5 м полем ~ 80 кГс на одном из свободных участков (длина ~ 7 м) технического промежутка. На таком участке предполагается также размещение 4-х повернутых на 45° квадрупольей (градиент ~ 1 кГс/см), длина 2,5 см), с помощью которых компенсируется связь радиальных и вертикальных колебаний, вносимая соленоидом.

Поляризация частиц осуществляется в накопителе ВЭПП-3 (естественное время поляризации ~ 20 мин при $E = 2,1 \text{ ГэВ}$). Перепускание поляризованного пучка из ВЭПП-3 в ВЭПП-4 происходит при включенном соленоиде в ВЭПП-4. При этом поляризация инжектируемого пучка на впуске должна лежать в плоскости орбиты и составлять со скоростью угол, равный πV . Этому условию можно удовлетворить при минимальных переделках канала инжекции, если производить перепуск поляризованного при определенной энергии $1,906 \text{ ГэВ}$, когда $V = 4,33$. В этом случае достаточно установить в канале перед последним поворотным (на 90°) магнитом импульсный соленоид, осуществляющий поворот спина на $\pi/2$ (см. рис. I). Длина свободного для размещения участка 8 метров. Необходимый интеграл поля соленоида равен $100 \text{ кГс} \cdot \text{м}$.

Для экспериментов на встречных продольно-поляризованных пучках, в которых изучаются процессы взаимодействия, идущие в

однофотонном канале (например, $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$) достаточно иметь только поляризованным только один из встречных пучков. При размещении соленоида на центральном участке промежутка между электронным и позитронным впусками возможен перепуск как поляризованных электронов, так и поляризованных позитронов. При размещении соленоида на участке позитронного впуска возможен перепуск только поляризованных электронов. Изменение направления поля в импульсном соленоиде канала позволяет готовить в экспериментальном промежутке ВЭП-4 пучки произвольной спиральности.

Анализ кинетики спина в накопителе показывает, что время деполаризации в данной схеме может составлять ~ 1.5 часа на энергии 2 GeV . Увеличение светимости на этой энергии возможно при использовании "теплой" змейки, размещенной в боковом месте встречи. При этом время деполаризации меняется незначительно. Все это открывает возможность для проведения экспериментов по физике высоких энергий на встречных продольно поляризованных пучках.

§ 2. Компенсация возмущения, вносимого соленоидом в орбитальное движение

В приближении, когда поле внутри соленоида можно считать однородным, а область неоднородного краевого поля бесконечно малой, нетрудно получить матрицу преобразования фазового пространства X, X', Z, Z' , соответствующую прохождению частицы через весь соленоид, включая края (см., например, /3/):

$$M_S = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos d}{2} & \frac{\sin d}{K} & \frac{\sin d}{2} & \frac{1-\cos d}{K} \\ -K \frac{\sin d}{4} & \frac{1+\cos d}{2} & -\frac{K(1-\cos d)}{4} & \frac{\sin d}{2} \\ -\frac{\sin d}{2} & -\frac{(1-\cos d)}{K} & \frac{1+\cos d}{2} & \frac{\sin d}{K} \\ \frac{K(1-\cos d)}{4} & -\frac{\sin d}{2} & -\frac{K \sin d}{4} & \frac{1+\cos d}{2} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

где $d = K \cdot l_s$, l_s - длина соленоида, $K = \frac{H_s}{HR}$ (H_s - поле соленоида, HR - жесткость накопителя). Для электрона величина

α с точностью 10^{-3} равна φ - углу поворота спина в продольном поле. По условию эксперимента $\alpha \approx \varphi = \pi$, поэтому

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{K} \\ 0 & 0 & -\frac{K}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{K} & 0 & 0 \\ \frac{K}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Из вида преобразования (2.2) следует, что соленоид, необходимый для эксперимента, дает полную связь X и Z - колебаний в накопителе.

Способ компенсации действия соленоида на орбитальное движение состоит в следующем. В первую очередь компенсируется вносимая соленоидом связь поперечных колебаний. Для этого служит схема (рис.2), указание на которую впервые дано в работе /2/. На схеме по обе стороны соленоида помещены по 2 тонких повернутых на 45° квадруполь (*skew*-линзы). Длины пустых промежутков между элементами схемы обозначены через l_1, l_2, l_3 и l_4 .

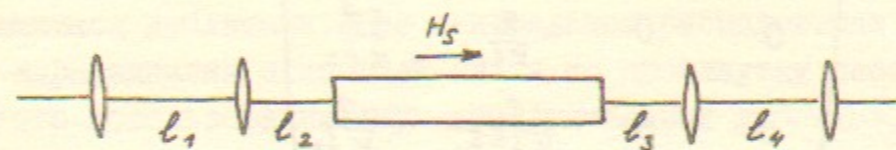


Рис.2

Полная матрица перехода M_{tot} 4×4 в такой системе равна

$M_{\text{tot}} = M_4 L_4 M_3 L_3 M_S L_2 M_2 L_1 M_1$
 где $M_i = \begin{pmatrix} I & Q_i \\ Q_i & I \end{pmatrix}$ - матрица тонкой *skew*-линзы, L_i - матрица пустого l_i - промежутка, $Q_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{F_i} & 0 \end{pmatrix}$, F_i - фокусное расстояние l_i - линзы. В общем случае

$$M_{\text{tot}} = \begin{pmatrix} M & m \\ n & N \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

где M, N, m, n — блочные матрицы 2×2 . Компенсация связи заключается в занулении диагональных блоков: $m = n = 0$, что в принципе требует подбор 8 параметров. Случай $\alpha = \pi$ обладает особой симметрией. Выбрав $l_2 = l_3 = 0$, $F_1 = -F_4 = f_1$, $F_2 = -F_3 = f_2$ и $l_1 = l_4 = l$, имеем

$$M_{\text{TOT}} = \begin{pmatrix} m & n \\ -n & -m \end{pmatrix}$$

причем, для зануления n требуется только 2 параметра, f_1 и f_2 например. При условии $n = 0$ возникают следующие соотношения:

$$1 + \left(\frac{l}{f_2}\right)^2 = \left(\frac{Kl}{2}\right)^2 \quad (2.4)$$

$$f_1 f_2 = 2l^2$$

и

$$M_{\text{TOT}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{Kf_2} & \frac{4l}{Kf_2} & 0 & 0 \\ -\frac{4l}{Kf_2^2 f_1} & \frac{2}{Kf_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{Kf_2} & -\frac{4l}{Kf_2} \\ 0 & 0 & \frac{4l}{Kf_2^2 f_1} & -\frac{2}{Kf_2} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Пример: $E = 2 \text{ GeV}$, $l_s = 250 \text{ см}$, $H_s = 84 \text{ кГс}$, $l = 200 \text{ см}$,
интегралы градиента поля в *skew*-линзах $\frac{HR}{F_1} = 22 \text{ кГс}$,
 $\frac{HR}{F_2} = 25 \text{ кГс}$.

В реальной ситуации необходимо учесть конечную длину *skew*-линз. Расчет реальной схемы компенсации связи проводился методом случайного поиска, в качестве начального приближения использовались параметры идеализированной схемы (см. формулу (2.4)). Приведем следующий пример: $E = 2 \text{ GeV}$, $l_s = 265 \text{ см}$, $H_s = 79 \text{ кГс}$, длина каждой *skew*-линзы 25 см ; $l_1 = 166 \text{ см}$, $l_2 = l_3 = 10 \text{ см}$, $l_4 = 160 \text{ см}$, градиенты линз — $G_1 = 0.94$, $G_2 = 1.01$, $G_3 = -1.09$, $G_4 = -0.97$ (в кГс/см); полная длина вставки 711 см .

Размещение такой схемы в техническом промежутке ВЭП-4 без подвижки существующих в нем дублетов возможно в трех вариантах: размещение на участке позитронного впуска; на участке электронного впуска; на центральном участке промежутка.

При любом расположении в промежутке системы, описываемой матрицей (2.5), очевидно, что фокусирующие свойства накопителя при этом нарушаются. Для ВЭП-4 это означает, что промежуток перестает быть единичным. Поэтому следующий этап компенсации влияния соленоида состоит в перестройке фокусирующей системы промежутка с тем, чтобы по полной матрице перехода промежуток со вставкой был эквивалентен промежутку без вставки. В общем случае для этого требуется подбор 6 линз, так как гамильтоновы матрицы двух степеней свободы без связи имеют не больше 6 независимых коэффициентов. Дополнительные условия, например, ограничение величины отгибающей пучка, увеличивает число необходимых линз. В промежутке ВЭП-4 имеется 8 линз (4 дублета).

Подбор оптики промежутка с целью компенсации возмущения, вносимого системой (2.5), для трех (см. выше) вариантов её размещения проводился с помощью программы оптимизации магнитной структуры /6/. В случае размещения соленоида на одном из участков инжекции возмущение фокусировки полностью компенсируется имеющимися дублетами. При центральном расположении соленоида для выравнивания отгибающей пучка по промежутку необходимо кроме того использование двух дополнительных дублетов, расположенных симметрично на участках впуска. Достоинством такого варианта является его симметрия по перепуску поляризованных частиц (см. § I). Вид β -функций для обсуждаемых вариантов постановки соленоида в промежуток приведен на рис. 3 и 4. Для варианта с центральным размещением параметры дополнительных линз следующие: длина каждой 25 см , градиент поля $\sim 100-200 \text{ Гс/см}$.

С технической точки зрения необходимо также проанализировать поведение поперечных размеров пучка внутри вставки с соленоидом. Способ расчета параметров пучка в условиях локализованной связи описан в приложении IV. На рис. 5 показана вариация проекций пучка (A_x, A_z) на оси X и Z , нормированных на входной радиальный размер, по участку, включающему соленоид и *skew*-линзы.

§ 3. Кинетика продольной поляризации

Для рассматриваемой схемы время существования продольной поляризации пучка в накопителе ВЭП-4 полностью определяется деполяризующим воздействием квантовых флуктуаций энергии. Общее выражение для времени деполяризации имеет согласно /4/ следующий вид:

$$\tau_d = \tau_p \langle |K|^3 \rangle / \left\langle \left(1 - \frac{2}{9} (\vec{n}\vec{v})^2 + \frac{11}{18} \left(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r} \right)^2 \right) |K|^3 \right\rangle \quad (3.1)$$

где K - безразмерная кривизна орбиты, скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по узимуту накопителя, $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r}$ - параметр спин-орбитальной связи. Величина τ_p равна времени радиационной поляризации в накопителе при выключенном соленоиде:

$$\tau_p = \left[\frac{5\sqrt{3}}{8} \frac{c_e \lambda_c \gamma^5}{R^3} \langle |K|^3 \rangle \right]^{-1} = \frac{1964}{E^5} \text{ (nec)} \quad (3.2)$$

R - средний радиус, $\lambda = h/m$, $c_e = e^2/m$.

Первые два слагаемых в знаменателе выражения для τ_d учитывают прямое деполяризующее воздействие синхротронного излучения (излучение с переворотом спина). Последнее слагаемое учитывает деполяризующее влияние квантовых флуктуаций энергии при наличии спин-орбитальной связи. В нашем случае вводимая соленоидом спин-орбитальная связь без учета бетатронных колебаний согласно приложению I равна:

$$\left(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r} \right)^2 = v^2 \left(\pi - \int_0^\theta K d\theta' \right)^2 + \frac{\pi^2}{4} \sin^2 \pi v \quad (3.2)$$

где θ - текущий азимут. Поэтому слагаемое в выражении для τ_d , учитывающее влияние спин-орбитальной связи, в v^2 раз больше и является доминирующим.

В "гладком" приближении без учета бетатронных колебаний имеем следующее простое аналитическое выражение для величины τ_d :

$$\tau_d \approx \tau_p \left[\frac{11}{18} \left\langle \left(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r} \right)^2 \right\rangle \right]^{-1} = \frac{54}{11} \frac{\tau_p}{j^2 v^2} \quad (3.3)$$

Вычисление величины τ_d из простых физических рассуждений приведено в приложении II. Так как время деполяризации, оцененное по формуле (3.3) на энергии 2 GeV оказывается ~ 1 часа (что сравнимо со временем жизни пучка), то возникает практическая необходимость в уточнении выражения для $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r}$. Вклад радиальных бетатронных колебаний в величину параметра спин-орбитальной связи вычислен в приложении III. Вследствие компенсации связи от соленоида влиянием вертикального бетатронного движения на спин мы пренебрегаем всюду, кроме участка, содержащего соленоид и повернутые линзы. В этом приближении полные выражения для компонент вектора $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r}$ имеют вид:

$$\sqrt{\left(\gamma \frac{\partial n_x}{\partial r}(\theta) \right)^2 + \left(\gamma \frac{\partial n_y}{\partial r}(\theta) \right)^2} = \frac{\pi v}{2R} \left\{ c_2 \Psi_1 + d_2 \Psi_1' + \frac{1}{\cos \pi v_x} \sqrt{\frac{\mathcal{H}(\theta)}{\beta_1}} \times \right. \\ \left. \times \left[(c_2 \beta_1 - d_2 \alpha_1) \cos(\pi v_x + \phi(\theta)) - R d_2 \sin(\pi v_x + \phi(\theta)) \right] \right\} + v \left(\pi - \int_0^\theta K d\theta' \right) \quad (3.4)$$

$$\gamma \frac{\partial n_z}{\partial r}(\theta) = -\frac{\pi v \cos \pi v}{2R} \left\{ a_2 \Psi_1 + b_2 \Psi_1' + \frac{1}{\cos \pi v_x} \sqrt{\frac{\mathcal{H}(\theta)}{\beta_1}} \times \right. \\ \left. \times \left[(a_2 \beta_1 - b_2 \alpha_1) \cos(\pi v_x + \phi(\theta)) - R b_2 \sin(\pi v_x + \phi(\theta)) \right] \right\} - \frac{\pi}{2} \sin \pi v$$

где $\Psi_1, \beta_1, \Psi_1', \alpha_1$ - дисперсионная функция, β - функция и их производные на входе ($\theta = 0$) участка с соленоидом (рис.2); $\mathcal{H}(\theta) = \frac{\psi^2 + (\alpha\psi + \beta\psi')^2}{\beta}$, $\phi(\theta)$ - фаза радиальных бетатронных колебаний, возбуждаемых при скачке энергии на азимуте θ : $\phi(\theta) = \arccos\left(\frac{-\psi}{\sqrt{\beta_1}}\right) - \int_0^\theta \frac{R d\theta'}{\beta}$; v_x - частота бетатронных колебаний по x . Коэффициенты a_2, b_2, c_2, d_2 зависят от конкретной схемы компенсации связи и определяют преобразование

$$\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix}_{\theta_2} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\theta_1=0}$$

θ_2 - азимут, где начинается область однородного поля в соленоиде.

Подстановка (3.4) в (3.1) и численное интегрирование позволяют протабулировать величину τ_d как функцию v и v_x :

$$\tau_d = \frac{54}{11} \frac{\tau_p}{\pi^2 v^2} B(v, v_x) \quad (3.5)$$

где фактор $B(v, v_x)$ зависит также от выбранной схемы размещения соленоида внутри промежутка и схемы компенсации его влияния на орбитальное движение. На рис.7 приведена вычисленная с помощью формул (3.4) и (3.5) зависимость времени деполяризации от энергии ($v_x = 9.15$) для трех вариантов размещения соленоида (см. § 2). Из рисунка видно, что в области энергии $\sim 2 \text{ GeV}$ (интересной с точки зрения экспериментов с τ -лептонами) во всех вариантах время деполяризации практически одно и то же: $\tau_d \sim 1.6$ час. Поэтому выбор рабочего варианта может определяться только техническими соображениями. Отметим также, что величина τ_d сравнительно слабо зависит от частоты радиальных бетатронных колебаний в её рабочем диапазоне (см. рис.8).

Если время жизни пучка на энергии 2 GeV будет ~ 3 часа, то предпочтительным с точки зрения кинетики спина является использование соленоида с $\varphi = \pi/2$. Хотя степень продольной поляризации на этой энергии при этом падает в $\sqrt{2}$ раз (см. приложение I), тем не менее время деполяризации увеличивается в ~ 2 раза и составляет ~ 4 часов (см. рис.9). Поэтому средняя по времени жизни пучка степень продольной поляризации оказывается выше, чем при использовании соленоида с $\varphi = \pi$.

Светимость накопителя ВЭПП-4 на энергии 2 GeV может быть существенно повышена с помощью магнитной однородной "змейки", увеличивающей коэффициент квантовой диффузии. Поэтому важно проанализировать влияние такой "змейки" на время деполяризации пучка.

Пусть диффузия в "змейке" в N раз сильнее, чем в накопителе без "змейки". Тогда время деполяризации равно

$$\tau_d = \frac{\tau_p}{N \left(1 - \frac{2}{9} (\vec{n} \cdot \vec{v})^2 + \frac{11}{18} \left(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r} \right)^2 \right) + \frac{11}{54} \pi^2 v^2 B^{-1}(v, v_x)}$$

где индекс "о" означает, что величины берутся на азимуте размещения "змейки". На рис.10 показана зависимость $\tau_d(E)$ при постановке однородной "змейки" с $N=10$ (поле $\sim 20 \text{ кГс}$, длина $\sim 2 \text{ м}$) либо в место встречи В, либо в место встречи С. Соле-

ноид при этом помещен в центр технического промежутка. Набег фазы радиальных бетатронных колебаний между точками В и С не кратен 2π , поэтому (см. формулу (3.4)). $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r}(\theta_B) \neq \gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r}(\theta_C)$, что приводит к существенному отличию в характере зависимостей $\tau_d(E)$ для указанных вариантов.

Применение специальной "змейки" с вертикальным полем ($\langle |H_z|^3 \rangle \approx \langle H_z^3 \rangle$) дает интересную возможность поляризовать пучок в ВЭПП-4 на энергии 2 GeV при включенном соленоиде с $\varphi = \pi$. Эта возможность основана на использовании нового механизма радиационной поляризации частиц, предложенного в работе /4/. Степень равновесной поляризации согласно /4/ равна

$$\zeta = \frac{8 \langle |\vec{v}|^2 \vec{v} \times \vec{v} (\vec{n} - \gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r}) \rangle}{513 \langle |\vec{v}|^3 [1 - \frac{2}{9} (\vec{n} \cdot \vec{v})^2 + \frac{11}{18} (\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r})^2] \rangle}$$

Для иллюстрации приведем пример, когда две "змейки", каждая из которых увеличивает квантовую диффузию в N раз, помещены в боковые места встречи В и С. При этом $\vec{n} \cdot \vec{v} = 1$, а степень поляризации равна

$$\zeta = \frac{0.92 [\gamma \frac{\partial n_z}{\partial r}(\theta_B) + \gamma \frac{\partial n_z}{\partial r}(\theta_C)] N}{N \left[\frac{14}{9} + \frac{11}{18} [(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r}(\theta_B))^2 + (\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r}(\theta_C))^2] \right] + \frac{11}{54} \pi^2 v^2 B^{-1}(v, v_x)}$$

Для $N=12$ (поле $\sim 60 \text{ кГс}$, длина участка "змейки" с большим полем $\sim 10 \text{ см}$) при $E = 2 \text{ GeV}$, $v_x = 9.15$ имеем $\zeta \approx 0.4$, время поляризации $\sim 0,6$ часа. В планируемых экспериментах такая степень является еще приемлемой, поскольку в спиновую зависимость процессов взаимодействия встречных продольно-поляризованных пучков ζ входит линейно.

Мы глубоко благодарны Я.С.Дербенёву и А.М.Кондратенко за обсуждение всех физических аспектов данной работы. Нам приятно также поблагодарить В.А.Киселева за обсуждение возможных вариантов инжекции поляризованных пучков; А.А.Жоленца и М.В.Юркова за помощь в применении программы оптимизации магнитной структуры; Г.М.Тумайкина и С.П.Мишневa за стимулирующий интерес к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко и др. Препринт ИЯФ 76-112 (1976 г.) *Part. Acc.* 8, 115 (1978).
2. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Препринт ИЯФ 78-74 (1978г.).
3. R. Larsen, *SPEAR 107 (1971)*
4. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Препринт ИЯФ 72-68 (1972 г.) ЖЭТФ, 64, 1918 (1973).
5. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. Препринт ИЯФ 77-60 (1977 г.). *Part. Acc.* 9 (1979 г.).
6. А.А.Жоленц, И.Я.Протопопов, А.Н.Скринский. Препринт ИЯФ 76-110 (1976 г.).
7. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский, ЖЭТФ 60, 1216 (1971).

Приложение I

Вычислим направление спина равновесной частицы $\vec{n}(\theta) = \vec{n}(\theta + 2\pi)$ для накопителя, содержащего соленоид, который вращает спин на угол φ . После этого, дифференцируя $\vec{n}(\theta)$ по энергии, найдем величину $\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial E}(\theta)$, по смыслу аналогичную дисперсионной функции в орбитальном движении. При этом мы не учитываем вклад бетатронных колебаний в спин-орбитальную связь, который будет рассмотрен в приложении III.

Кинематика спина в накопителе выглядит как обычное вращение вектора в трехмерном пространстве. Удобно использовать для наших целей формализм, основанный на представлении трехмерного вращения в виде адекватного унитарного преобразования в двумерном комплексном пространстве спиноров [7]. Спинорная матрица произвольного вращения выглядит, как

$$M = I \cos \frac{\Phi}{2} - i \sin \frac{\Phi}{2} (\hat{\sigma}_x \cos \alpha_x + \hat{\sigma}_y \cos \alpha_y + \hat{\sigma}_z \cos \alpha_z)$$

где Φ - угол поворота спина вокруг оси, задаваемой направляющими косинусами $\cos \alpha_i$; матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

вместе с единичной матрицей I образуют систему независимых матриц, линейная комбинация которых и дает матрицу M :

$$M = I C_0 - i \hat{\sigma}_x C_x - i \hat{\sigma}_y C_y - i \hat{\sigma}_z C_z$$

В соответствии с указанным выше физическим смыслом коэффициентов C_i выполняется соотношение

$$C_0^2 + C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = 1$$

причем C_i - действительные числа. Чтобы найти $\vec{n}(\theta) = \vec{n}(\theta + 2\pi)$ необходимо перемножением матриц отдельных участков накопителя получить обратную матрицу M для данного азимута θ . Из определения M через Φ и $\cos \alpha_i$ следует, что

$$n_i(\theta) = \mp \frac{C_i}{\sqrt{1-C_0^2}}, \quad i = x, y, z$$

Угол ϕ , определяемый соотношением $C_0 = \cos \frac{\phi}{2}$, имеет теперь смысл полного угла прецессии спина вокруг направления $\vec{n}(\theta)$, набираемый за один оборот частицы в накопителе, т.е.

$$\phi = 2\pi \nu_{pz}$$

где ν_{pz} — эффективная частота прецессии. В нашем случае, если соленоид стоит на азимуте $\theta = 0$, обратная матрица записывается

$$M(\theta) = R(0|\theta) R_S R(\theta|2\pi)$$

где $R_S = I \cos \frac{\varphi}{2} - i \hat{\sigma}_y \sin \frac{\varphi}{2}$ — матрица соленоида (φ — угол поворота спина в продольном поле), а $R(0|\theta)$ и $R(\theta|2\pi)$ — матрицы вращения спина в ведущем поле накопителя. Отметим, что вращение спина мы рассматриваем в подвижной системе ортов, один из которых направлен по скорости.

Имеем:

$$R(0|\theta) = I \cos \frac{\nu\theta}{2} - i \hat{\sigma}_z \sin \frac{\nu\theta}{2}$$

$$R(\theta|2\pi) = I \cos \frac{\nu(2\pi-\theta)}{2} - i \hat{\sigma}_z \sin \frac{\nu(2\pi-\theta)}{2}$$

После перемножения матриц получим

$$M(\theta) = I \cos \pi \nu \cos \frac{\varphi}{2} + i \hat{\sigma}_x \sin(\nu\theta - \nu\pi) \sin \frac{\varphi}{2} - i \hat{\sigma}_y \cos(\nu\theta - \pi) \sin \frac{\varphi}{2} - i \hat{\sigma}_z \sin \pi \nu \cos \frac{\varphi}{2}$$

Откуда:

$$n_x = \pm \frac{\sin \nu(\theta - \pi) \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \xi}$$

$$n_y = \mp \frac{\cos \nu(\theta - \pi) \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \xi}$$

$$n_z = \mp \frac{\sin \pi \nu \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \xi}$$

где $\sin \xi = \sqrt{1 - \cos^2 \pi \nu \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$. Дифференцируя n_i по энергии, получим

$$\gamma \frac{\partial n_x}{\partial E} = \pm \left\{ F \sin \nu(\theta - \pi) \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\sin \xi} \left[\nu(\theta - \pi) \cos \nu(\theta - \pi) \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \sin \nu(\theta - \pi) \cos \frac{\varphi}{2} \right] \right\}$$

$$\gamma \frac{\partial n_y}{\partial E} = \mp \left\{ F \cos \nu(\theta - \pi) \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\sin \xi} \left[\nu(\theta - \pi) \sin \nu(\theta - \pi) \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \cos \nu(\theta - \pi) \cos \frac{\varphi}{2} \right] \right\}$$

$$\gamma \frac{\partial n_z}{\partial E} = \mp \left\{ F \sin \pi \nu \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\sin \xi} \left[\pi \nu \cos \pi \nu \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \sin \pi \nu \sin \frac{\varphi}{2} \right] \right\}$$

$$F = -\frac{1}{2 \sin^3 \frac{\varphi}{2}} \left(\pi \nu \sin 2\pi \nu \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \cos^2 \pi \nu \right)$$

При $\varphi = \pi$ имеем

$$n_z = 0, \quad \gamma \frac{\partial n_z}{\partial E} = \mp \frac{\pi}{2} \sin \pi \nu$$

$$n_x = \pm \sin \nu(\theta - \pi), \quad \gamma \frac{\partial n_x}{\partial E} = \pm \nu(\theta - \pi) \cos \nu(\theta - \pi)$$

$$n_y = \mp \cos \nu(\theta - \pi), \quad \gamma \frac{\partial n_y}{\partial E} = \pm \nu(\theta - \pi) \sin \nu(\theta - \pi)$$

$$\left(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial E} \right)^2 = \nu^2 (\pi - \theta)^2 + \frac{\pi^2}{4} \sin^2 \pi \nu$$

Поскольку $\cos \frac{\phi}{2} = \cos \pi \nu \cos \frac{\varphi}{2} = 0$ ($\varphi = \pi$), то $\phi = (2k+1)\pi$ (k — целое) и, следовательно, при любой энергии

$$\nu_{pz} = \frac{2k+1}{2}$$

Поэтому спиновые резонансы в такой схеме невозможны. Особенностью схемы является также то, что на азимуте $\theta = \pi$ ориен-

тация спина $\vec{n}(\pi)$ не зависит от энергии: $n_x = n_z = 0, n_y = \pm 1$.
 При вычислении времени деполаризации важна величина $\langle (\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r})^2 \rangle$

Она равна

$$\langle (\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r})^2 \rangle = \frac{\pi^2 v^2}{3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\sin^2 \pi v}{v^2} \right)$$

Второе слагаемое в последнем выражении связано с отклонениями угла поворота спина неравновесной частицы в соленоиде от значения π . Однако, эта поправка незначительна. Её максимальное значение при полуцелых значениях v составляет

$$\frac{3}{4v^2} = \frac{3}{4(4,5)^2} \quad (E = 2 \text{ GeV})$$

Как видно из полученных формул, положить спин в плоскость орбиты и направить его в одном из промежутков вдоль скорости можно и в случае применения соленоида с $\varphi = \pi/2$.

Действительно, при выделенных значениях энергии, (например, $E = 1760 \text{ MeV}$), при которых $v = K$ (K - целое), равновесной направление спина такое же, как в случае $\varphi = \pi$:

$$n_x = \pm \sin v(\theta - \pi)$$

$$n_y = \mp \cos v(\theta - \pi)$$

$$n_z = 0$$

Но спин-орбитальная связь уже другая:

$$\gamma \frac{\partial n_x}{\partial r} = \pm v(\theta - \pi) \cos v(\pi - \theta)$$

$$\gamma \frac{\partial n_y}{\partial r} = \mp v(\theta - \pi) \sin v(\pi - \theta)$$

$$\gamma \frac{\partial n_z}{\partial r} = \pm \pi v$$

Скорость деполаризующих процессов в такой схеме в 4 раза выше, чем в предыдущей схеме, поскольку

$$\langle (\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r})^2 \rangle = \langle v^2(\pi - \theta)^2 + \pi^2 v^2 \rangle = \frac{4}{3} \pi^2 v^2$$

Нетрудно показать, нецелая часть частоты прецессии составляет $1/4$.

Рассмотрим еще один пример. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $v = \frac{2k+1}{2}$ (например, $E = 2 \text{ GeV}$) имеем

$$n_x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sin v(\theta - \pi) \quad \gamma \frac{\partial n_x}{\partial r} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} [v(\theta - \pi) \cos v(\theta - \pi) - \frac{\pi}{4} \sin v(\theta - \pi)]$$

$$n_y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \cos v(\theta - \pi) \quad \gamma \frac{\partial n_y}{\partial r} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} [v(\theta - \pi) \sin v(\theta - \pi) + \frac{\pi}{4} \cos v(\theta - \pi)]$$

$$n_z = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \gamma \frac{\partial n_z}{\partial r} = \mp \frac{\pi \sqrt{2}}{8}$$

$$(\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r})^2 = v^2 \frac{(\theta - \pi)^2}{2} + \frac{\pi^2}{16}$$

$$\langle (\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial r})^2 \rangle = \frac{\pi^2 v^2}{6} + \frac{\pi^2}{16}$$

Нецелая часть частоты прецессии равна 0,5.

Приложение II

Особенностью рассматриваемой схемы, является то, что спин в равновесном положении лежит полностью в плоскости орбиты. Поэтому, если пренебречь бетатронными колебаниями по Z , считая, что связь компенсирована, то движение спина неравновесной частицы происходит в той же плоскости. Эта особенность позволяет наглядно представить процесс деполяризации пучка квантовыми флуктуациями энергии.

Частота прецессии спина относительно скорости равна $\frac{d\psi}{dt} = \mu' H_z$, где μ' - аномальный магнитный момент. Отклонение частоты прецессии спина от равновесного значения определяется [5]:

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right) = \frac{\mu'(H_z + \frac{2H_z}{2X}X)}{\omega_0(1 - \frac{X}{\rho})} - \frac{\mu'H_z}{\omega_0}$$

где ρ - радиус поворота магнита, X - радиальное смещение, ω_0 - равновесная частота обращения. Последнее выражение можно записать в виде

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right) = \frac{v}{R} g_x(\theta) X(\theta)$$

где X подчиняется известному уравнению

$$X'' + g_x X = R \mathcal{K} \frac{\delta r}{r}$$

(R - средний радиус, \mathcal{K} - безразмерная кривизна). Следовательно, если скачок энергии частицы произошел на азимуте θ_0 , то к моменту времени, соответствующему азимуту θ , спин повернется на дополнительный угол

$$\Delta\psi = v \int_{\theta_0}^{\theta} \mathcal{K}(\theta') \eta(\theta') \frac{\delta r}{r} d\theta' - \frac{v}{R} \int_{\theta_0}^{\theta} X'' \eta(\theta') d\theta' \quad \text{II.1}$$

где $\eta(\theta) = (-1)^{\text{entier}(\frac{\theta}{2\pi})}$, $\text{entier}(y)$ - целая часть y . Функция $\eta(\theta)$ описывает отражения угла после прохождения частицей соленоида, расположенного на азимуте $\theta = 0$.

За время радиационного затухания отклоненная частица релаксирует к равновесной траектории, однако, направление спина при этом не восстанавливается. Эволюцию энергии можно записать в виде:

$$\frac{\delta r}{r}(\theta) = \frac{\delta r}{r}(\theta_0) e^{(i\nu_s - \lambda)\theta}$$

где λ - декремент радиационного затухания, ν_s - частота синхротронных колебаний. Вычислим вклад первого слагаемого в выражении для $\Delta\psi$. Второе слагаемое учитывает влияние бетатронных колебаний, которое, как будет показано в приложении III, имеет порядок $\sim 1/\nu_x$ (ν_x - частота бетатронных колебаний по X). Для жесткой машины в первом приближении ими можно пренебречь. Итак,

$$\Delta\psi^{(00)} = v \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \mathcal{K} \eta \frac{\delta r}{r} d\theta = v \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \mathcal{K} \eta \frac{\delta r}{r}(\theta_0) d\theta \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\pi k - 2\pi k \lambda + 2i\pi k \nu_s}$$

Так как $2\pi\lambda \ll 1$, $2\pi\nu_s \ll 1$, сумма геометрической прогрессии равна $1/2$. Поэтому имеем

$$\Delta\psi^{(00)} = v(\pi - \theta_0) \frac{\delta r}{r}(\theta_0) \quad \text{II.2}$$

Очевидно, суммарный эффект большого числа скачков энергии за время $\Delta t \gg \frac{1}{\lambda}$ запишется в виде

$$\Delta\psi_{\Sigma} = \sum \Delta\psi^{(00)}(\theta_i, \frac{\delta r_i}{r_i})$$

Изменение проекции спина на равновесное направление определяется суммарным поворотом

$$\delta S_{||} = \frac{(\Delta\psi_{\Sigma})^2}{2}$$

Наличие ВЧ системы, восполняющей средние потери на оборот, приводит к тому, что отклонения энергии от равновесной имеют оба знака. При этом, вследствие, статистического характера скачков

$$\overline{\Delta\psi_{\Sigma}} = 0, \quad \overline{\Delta\psi_{\Sigma}^2} \neq 0$$

$$\overline{\delta S_{||}} = \sum_i v^2 \frac{(\pi - \theta_i)^2}{2} \left(\frac{\delta r_i}{r} \right)^2$$

Учитывая известные выражения для коэффициента диффузии по энергии

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{\left(\frac{\delta r}{r} \right)^2} = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{\nu_e \lambda_c \gamma^5}{R^3} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}|^3 d\theta$$

($\lambda_c = \hbar/mc$, $\nu_e = e^2/mc^3$, $c = 1$) и времени поляризации в обычном накопителе без соленоида

$$\tau_p^{-1} = \frac{5\sqrt{3}}{8} \frac{\nu_e \lambda_c \gamma^5}{R^3} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{K}|^3 d\theta$$

нетрудно получить соотношение для средней скорости изменения проекции спина:

$$\tau_d^{-1} = \frac{\overline{\Delta S_{||}}}{\Delta t} = \frac{11}{18} \frac{v^2}{c \tau_p} \frac{\int_0^{2\pi} |\mathcal{K}|^3 (\pi - \theta)^2 d\theta}{\int_0^{2\pi} |\mathcal{K}|^3 d\theta} \quad \text{III.3}$$

Найдем точное решение уравнения движения спина неравновесной частицы в накопителе с соленоидом, вращающим спин на угол π .

В общем случае движение спина неравновесной частицы описывается уравнением /5/

$$\frac{d\vec{S}}{d\theta} = \vec{W} \times \vec{S} \quad \text{(III.1)}$$

где $\vec{W} = (W_x, W_y, W_z) = \left(\frac{v}{R} z'', \omega_0 \left(1 - \frac{\delta r}{r}\right), \mathcal{K} \left(1 + \frac{\delta r}{r}\right) - \frac{v}{R} x'' \right)$

$\omega_0 = \frac{e}{m\gamma\omega_c} H_y$, ω_0 - равновесная частота обращения.

После скачка энергии на азимуте θ_0 частица движется по отклоненной траектории

$$x = x_b + \psi \frac{\delta r}{r}$$

z - колебания при этом отсутствуют всюду, кроме вставки с соленоидом. Представим x_b в форме Флоке: $x_b = c f e^{i\nu_k \theta} + \text{к.с.}$. Тогда из начальных условий в момент скачка

$$x(\theta_0) = x'(\theta_0) = 0$$

нетрудно получить выражение для комплексной амплитуды бетатронных колебаний:

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{H}_0} \exp(i\phi_0) \frac{\delta r}{r} \quad \text{(III.2)}$$

где $\phi_0 = \arccos(-\psi_0 / \sqrt{\mathcal{H}_0 \beta_0}) - \mu_0$,

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\psi_0^2 + (\alpha \cdot \psi_0 + \beta \cdot \psi_0')^2}{\beta_0}, \quad \mu_0 = \int_0^{\theta_0} \frac{R d\theta}{|f|^2} -$$

- набег фазы бетатронных колебаний, α и β - амплитудные функции ($\beta = |f|^2$, $\alpha = -|f'|/|f|$), индекс "0" относится к азимуту θ_0 . Заданием траектории частицы определяются дополнительные поля, воздействующие на спин.

Решение уравнения (III.1) первоначально найдем на участке, содержащем соленоид и skew-линзы, компенсирующие связь (рис.6).

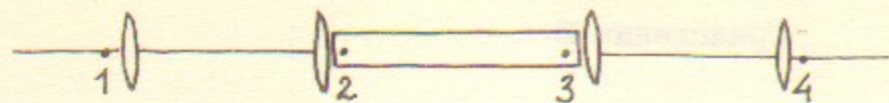


Рис.6

При этом уравнение (III.1) имеет вид:

$$\dot{S}_x = \omega_0 \left(1 - \frac{\delta r}{r}\right) S_z + \frac{v}{R} x'' S_y$$

$$\dot{S}_y = -\frac{v}{R} x'' S_x - \frac{v}{R} z'' S_z$$

$$\dot{S}_z = \frac{v}{R} z'' S_y - \omega_0 \left(1 - \frac{\delta r}{r}\right) S_x$$

В линейном приближении по $\frac{\delta r}{r}$ найдем изменения компонент спина при однократном прохождении частицы данной системы. Рассмотрим отдельно вклады от участков без продольного поля (1-2 и 3-4) по Рис.6) и от участка с однородным продольным полем (2-3), вращающим частицу и спин на угол $\omega_0(\theta_3 - \theta_2) = \pi$. На участках 1-2 и 3-4 найдем

$$\Delta S_x = -\frac{v}{R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x'' S_y d\theta + \frac{v}{R} \int_{\theta_3}^{\theta_4} x'' S_y d\theta = \frac{v}{R} S_y (x'_1 + x'_4) \quad (III.4)$$

$$\Delta S_z = -\frac{v}{R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} z'' S_y d\theta + \frac{v}{R} \int_{\theta_3}^{\theta_4} z'' S_y d\theta = 0$$

$$\Delta S_y = -\frac{v}{R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x'' S_x d\theta + \frac{v}{R} \int_{\theta_3}^{\theta_4} x'' S_x d\theta = \frac{v}{R} S_x (x'_1 + x'_4)$$

Здесь учтено, что изменения поперечных к скорости компонент на участке 1-2 после прохождения участка 2-3 должны входить с другим знаком, и, кроме того, $S_y = S_y = const$ на этих участках, $S_x(\theta_1) = S_x(\theta_2) = -S_x(\theta_3) = -S_x(\theta_4) = S_x$, $x'(\theta_2) = -x'(\theta_3)$, $z'(\theta_2) = -z'(\theta_3)$.

На участке 2-3 имеем

$$\frac{d}{d\theta} (S_x + i S_z) = -i \omega_y (S_x + i S_z) + \frac{v}{R} S_y (x'' + i z'')$$

Откуда получим общее решение ($\Delta\theta = \theta_3 - \theta_2$):

$$\Delta (S_x + i S_z) = (S_{x_0} + i S_{z_0}) (e^{-i \omega_y \Delta\theta} - 1) + \frac{v}{R} S_y e^{-i \omega_y \Delta\theta} \int_0^{\Delta\theta} e^{i \omega_y \theta'} (x'' + i z'') d\theta'$$

Первое слагаемое представляет решение однородного уравнения и дает:

$$\Delta S_x = -2 S_x, \quad \Delta S_z = -\pi S_x \frac{\delta r}{r}$$

Второе слагаемое, описывающее решение неоднородного уравнения, вычисляем интегрированием по частям

$$e^{-i \omega_0 \Delta\theta} \int_0^{\Delta\theta} e^{i \omega_0 \theta} (x'' + i z'') d\theta = -[e^{i \omega_0 \theta} (x' + i z')]_0^{\Delta\theta} - i \omega_0 \int_0^{\Delta\theta} e^{i \omega_0 \theta} (x' + i z') d\theta$$

Вследствие вращения частицы в соленоиде имеем: $x'(\theta) + i z'(\theta) = (x'_0 + i z'_0) e^{-i \omega_0 \theta}$, поэтому

$$\Delta (S_x + i S_z) = i \frac{\pi v}{R} S_y (x'_2 + i z'_2) \quad (III.5)$$

Найдем изменение проекции S_y на участке 2-3:

$$\begin{aligned} \Delta S_y &= -\frac{v}{R} \left[\int_0^{\Delta\theta} x'' S_x(\theta) d\theta + \int_0^{\Delta\theta} z'' S_z(\theta) d\theta \right] = \\ &= -\frac{v}{R} \left[S_x \int_0^{\Delta\theta} (x'' \cos \omega_0 \theta - z'' \sin \omega_0 \theta) d\theta \right] = \\ &= -\frac{\pi v}{R} S_x z'_2 \end{aligned} \quad (III.6)$$

В итоге дополнительные изменения проекций спина неравновесной частицы при прохождении всего участка 1-4 равны

$$\Delta S_x = \frac{v}{R} S_y (x'_1 + x'_4) - \frac{\pi v}{R} S_y z'_2 \quad (III.7)$$

$$\Delta S_y = \frac{v}{R} S_x (x'_1 + x'_4) - \frac{\pi v}{R} S_x z'_2$$

$$\Delta S_z = \frac{\pi v}{R} S_y x'_2 - \pi S_x \frac{\delta r}{r}$$

Величины ΔS_x и ΔS_y можно объединить в дополнительный угол поворота спина в плоскости орбиты $\Delta \Psi = \sqrt{\Delta S_x^2 + \Delta S_y^2}$

$$\Delta \Psi_b = \frac{v}{R} (x_1' + x_4') - \frac{\pi v}{R} z_2' \quad (\text{III.8})$$

Суммирование $\Delta \Psi_b$ по многим оборотам с учетом дополнительного поворота из-за бетатронных колебаний на всей остальной части кольца дает

$$\Delta \Psi_b^{(m)} = -\frac{v}{R} \int_{\theta_0}^{\infty} x'' \eta(\theta) d\theta - \frac{v}{R} \sum_{k=1}^{\infty} [x_1'(2\pi k) + x_4'(2\pi k)] (-1)^k + \frac{\pi v}{R} \sum_{k=1}^{\infty} z_2'(2\pi k) (-1)^k$$

Так как

$$-\frac{v}{R} \int_{\theta_0}^{\infty} x'' \eta(\theta) d\theta = \frac{v}{R} [x_1'(\theta_0) - x_1'(2\pi) - x_4'(2\pi) + x_4'(4\pi) + x_4'(4\pi) - \dots] = \frac{v}{R} \sum_{k=1}^{\infty} [x_1'(2\pi k) + x_4'(2\pi k)] (-1)^k$$

то вклад бетатронных колебаний вне участка I-4 при суммировании полностью компенсируется первым слагаемым в выражении (III.8). В итоге

$$\Delta \Psi_b^{(m)} = \frac{\pi v}{R} \sum_{k=1}^{\infty} z_2'(2\pi k) (-1)^k \quad (\text{III.9})$$

Из выражения для ΔS_z (III.7) видно, что после прохождения участка I-4 спин неравновесной частицы выходит из плоскости орбиты. После скачка энергии траектория частицы релаксирует к равновесной, но спин при этом составит с плоскостью орбиты конечный угол:

$$\Delta \Psi_z^{(m)} = \pi \left[\frac{v}{R} \cos \pi v \sum_{k=1}^{\infty} x_2'(2\pi k) (-1)^k + \sin \pi v \frac{\delta r}{r} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \right] \quad (\text{III.10})$$

С учетом конкретного преобразования на участке I-2

$$x_2' = a_2 x_1 + b_2 x_1'$$

$$z_2' = c_2 x_1 + d_2 x_1'$$

(a_2, b_2, c_2, d_2 зависят от выбранной схемы компенсации связи) суммирование в III.9 и III.10 дает

$$\Delta \Psi_b^{(m)} = -\frac{\pi v}{2R} (c_2 \Psi_1 + d_2 \Psi_1') \frac{\delta r}{r} - \frac{\pi v}{R} \left\{ \frac{|c| [c_2 f_1 + d_2 (f_1' + i v_x f_1)] e^{i(\pi v_x + \phi_0)}}{1 + e^{i 2\pi v_x}} + \text{к.с.} \right\}$$

$$\Delta \Psi_z^{(m)} = -\frac{\pi v}{2R} \cos \pi v (a_2 \Psi_1 + b_2 \Psi_1') \frac{\delta r}{r} - \frac{\pi}{2} \sin \pi v \frac{\delta r}{r} -$$

$$- \frac{\pi v}{R} \cos \pi v \left\{ \frac{|c| [a_2 f_1 + b_2 (f_1' + i v_x f_1)] e^{i(\pi v_x + \phi_0)}}{1 + e^{i 2\pi v_x}} + \text{к.с.} \right\}$$

В последних выражениях значения функций Флоке f, f' и дисперсионной функции Ψ берутся в точке I (см. Рис.6), постоянные $|c|$ и ϕ_0 определены в (III.2). Перепишем полученные формулы для $\Delta \Psi_z^{(m)}$ и $\Delta \Psi_b^{(m)}$ в виде, удобном для вычислений:

$$\Delta \Psi_b^{(m)} = -\frac{\pi v}{2R} (c_2 \Psi_1 + d_2 \Psi_1') \frac{\delta r}{r} - \frac{\pi v}{2R} \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}} \frac{1}{\cos \pi v_x} [(c_2 \beta_1 - d_2 \alpha_1) \cos(\pi v_x + \phi_0) - R d_2 \sin(\pi v_x + \phi_0)] \frac{\delta r}{r} \quad (\text{III.11})$$

$$\Delta \Psi_z^{(m)} = -\frac{\pi v}{2R} \cos \pi v (a_2 \Psi_1 + b_2 \Psi_1') \frac{\delta r}{r} - \frac{\pi}{2} \sin \pi v \frac{\delta r}{r} -$$

$$- \frac{\pi v}{2R} \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}} \frac{\cos \pi v}{\cos \pi v_x} [(a_2 \beta_1 - b_2 \alpha_1) \cos(\pi v_x + \phi_0) - R b_2 \sin(\pi v_x + \phi_0)] \frac{\delta r}{r}$$

где β_1 и α_1 амплитудные функции в точке I. Формулы (III.11) позволяют точно посчитать параметр спин-орбитальной связи

$(r \frac{\partial n}{\partial r})^2$ в накопителе, содержащем локально компенсированный π - соленоид, поскольку

$$\Delta \varphi_0^{(0)} + \Delta \varphi^{(0)} = \sqrt{(r \frac{\partial n_x}{\partial r})^2 + (r \frac{\partial n_y}{\partial r})^2} \frac{\delta r}{r} \quad (\text{III.12})$$

$$\Delta \varphi_z = (r \frac{\partial n_z}{\partial r}) \frac{\delta r}{r}$$

Индекс "0" означает, что величины $r \frac{\partial n_x}{\partial r}$, $r \frac{\partial n_y}{\partial r}$, $r \frac{\partial n_z}{\partial r}$ являются функциями азимута θ . Заметим, что слагаемое $-\frac{\pi}{2} \sin \pi V \frac{\delta r}{r}$ в выражении для $\Delta \varphi_z^{(0)}$ было найдено нами также в приложении I при вычислении $r \frac{\partial n}{\partial r}$. Оно учитывает хроматичность соленоида в движении спина.

В "гладком" приближении

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{V_x^2} \right)^{1/2} e^{i(\pi - V_x \theta)} \frac{\delta r}{r} \quad (\text{III.13})$$

и $\alpha = 0$, $\psi' = 0$, $\psi = \frac{R}{V_x^2}$, $\beta = \frac{R}{V_x}$, поэтому формулы (III.11) будут иметь вид:

$$r \frac{\partial n}{\partial r}(\theta) = -\frac{\pi V}{2 V_x} \cos \pi V \left[\frac{a_2}{V_x} \left(1 - \frac{\cos V(\pi - \theta)}{\cos \pi V_x} \right) + b_2 \frac{\sin V(\pi - \theta)}{\cos \pi V_x} \right] - \frac{\pi}{2} \sin \pi V$$

$$\left[(r \frac{\partial n_x}{\partial r})^2 + (r \frac{\partial n_y}{\partial r})^2 \right]^{1/2} = -\frac{\pi V}{2 V_x} \left[\frac{c_2}{V_x} \left(1 - \frac{\cos V(\pi - \theta)}{\cos \pi V_x} \right) + d_2 \frac{\sin V(\pi - \theta)}{\cos \pi V_x} \right] + v(\pi - \theta) \quad (\text{III.14})$$

Относительную поправку по времени деполяризации, вычисленному в приложении III, можно получить из

$$\int_0^{2\pi} \left\{ (\Delta \varphi^{(0)} + \Delta \varphi_0^{(0)})^2 + (\Delta \varphi_z^{(0)})^2 \right\} d\theta / \int_0^{2\pi} (\Delta \varphi^{(0)})^2 d\theta =$$

$$= 1 + \frac{3}{8\pi V_x^4} (a_2^2 \cos^2 \pi V + c_2^2) \left(2\pi - \frac{4}{V_x} \operatorname{tg} \pi V_x + \frac{\pi}{\cos \pi V_x} + \frac{\sin \pi V_x}{V_x} \right) +$$

$$+ \frac{3}{2\pi V_x^2} \left(\frac{d_2}{\pi} + a_2 \frac{\cos \pi V \sin \pi V}{V} \right) \left(\pi - \frac{\operatorname{tg} \pi V_x}{V_x} \right) +$$

$$+ \frac{3}{8\pi V_x^2 \cos^2 \pi V_x} (b_2^2 \cos^2 \pi V_x + d_2) \left(\pi - \frac{\sin \pi V_x \cos \pi V_x}{V_x} \right) +$$

$$+ \frac{3}{4 V_x^2} \sin^2 \pi V$$

Пример конкретной схемы компенсации, приведенный в § 2, соответствует случаю $a_2 = 33$, $b_2 = 1$, $c_2 = -4.6$, $d_2 = .5$. Отметим также то, что в реальных условиях работы накопителя $|\cos \pi V_x| \sim 1$.

Специфика рассматриваемой схемы позволяет предложить простой способ расчета параметров пучка внутри вставки с соленоидом. Упрощающим обстоятельством является то, что связь поперечных колебаний локализована на участке, содержащем соленоид и *skew*-линзы. При этом эмиттанс пучка имеет ту же величину, что и в отсутствии вставки, поскольку фокусирующие свойства накопителя в целом сохранены и, кроме того, внутри вставки не содержится поворотных магнитов.

Пусть пучок в накопителе имеет радиальный эмиттанс $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}$, а вертикальный эмиттанс пренебрежимо мал: $\mathcal{E}_z = 0$. На фазовой плоскости X, X' , соответствующей азимуту, с которого начинается участок с локализованной связью, граничные частицы движутся по эллипсу:

$$\frac{(1+\alpha^2)}{\beta \mathcal{E}} X_0^2 + \frac{\beta}{\mathcal{E}} X_0'^2 + \frac{2\alpha}{\mathcal{E}} X_0 X_0' = 1 \quad (IV.1)$$

где α, β — обычные амплитудные функции накопителя. Уравнение (IV.1) отражает простой факт сохранения энергии в одномерном колебательном движении. Известно, что для линейных колебательных систем любого числа степеней свободы аналогичные инварианты также имеют квадратичную форму. Например, функция Гамильтона \mathcal{H} выражается как

$$\mathcal{H} = Y^T H Y \quad (IV.2)$$

где H — квадратная матрица и в нашем случае $Y = (X, X', Z, Z')$ (τ — знак транспонирования). Фазовые траектории с $\mathcal{H} = const$ проходят по 4-х поверхности 2-го порядка (IV.2). Поверхность эта является, конечно, замкнутой в силу сохранения величины \mathcal{H} , и поэтому её можно называть поверхностью фазового гиперэллипсоида. Профиль пучка находится проецированием соответствующего гиперэллипсоида, заполненного частицами, на плоскость X, Z . Проекция на плоскость X, X' и Z, Z' дает возможность для простого анализа транспортных систем со связью колебаний.

Эллипс (IV.1), который ограничивает ансамбль частиц, представляющий пучок, преобразуется внутри вставки в поверхность гиперэллипсоида, также являющуюся граничной вследствие известного свойства фазового пространства. Это свойство связано с тем, что фазовые траектории любой динамической системы (при этом не обязательно, чтобы уравнения движения были представлены в канонической форме) однозначно определяются заданием начальных условий и, следовательно, при движении не могут пересекаться. Чтобы найти параметры граничной 4-поверхности в произвольной точке внутри вставки, необходимо восстановить начальные условия, выразив их через компоненты вектора Y в данной точке. Вектор $Y = (X, X', Z, Z')$ связан с начальным вектором $Y_0 = (X_0, X_0', Z_0, Z_0')$ соотношением $Y = M Y_0$,

где M — матрица перехода 4x4, откуда

$$Y_0 = M^{-1} Y \quad (IV.3)$$

(для канонических переменных $M^{-1} = -S M^T S$, S — симплектическая матрица). Начальными условиями являются, с одной стороны, положение изображающей точки на фазовом эллипсе (IV.1) и, с другой стороны, $Z_0 = Z_0' = 0$. Из последних двух условий находим

$$\begin{aligned} X' &= P_1 X + Q_1 Z \\ Z' &= P_2 X + Q_2 Z \end{aligned} \quad (IV.4)$$

где коэффициенты P_i, Q_i выражаются через элементы m_i матрицы M^{-1} :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_5 & m_6 & m_7 & m_8 \\ m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = (m_{13}m_{12} - m_9m_{16})/\Delta$$

$$Q_1 = (m_{12}m_{15} - m_{11}m_{16})/\Delta$$

$$P_2 = (m_9m_{14} - m_{10}m_{13})/\Delta$$

$$Q_2 = (m_{11}m_{14} - m_{10}m_{15})/\Delta$$

$$\Delta = m_{10}m_{16} - m_{14}m_{12}$$

Подстановка (IV.3) в (IV.1) с учетом (IV.4) дает уравнение граничного эллипса в плоскости X, Z :

$$A x^2 + B z^2 + C xz = 1 \quad (IV.5)$$

где

$$\begin{aligned} A = & \frac{(1+d^2)}{\beta \epsilon} \left\{ (m_1 + m_4 P_2)^2 + P_1 m_2 [P_1 m_2 + 2(m_1 + m_4 P_2)] \right\} + \\ & + \frac{\beta}{\epsilon} \left\{ (m_5 + m_8 P_2)^2 + P_1 m_6 [P_1 m_6 + 2(m_5 + m_8 P_2)] \right\} + \\ & + \frac{2d}{\epsilon} \left\{ m_1 m_5 + P_1 (m_2 m_5 + m_1 m_6) + P_2 (m_4 m_5 + m_1 m_8) + \right. \\ & \left. + P_1^2 m_2 m_6 + P_1 P_2 (m_2 m_8 + m_4 m_6) + P_2^2 m_4 m_8 \right\} \\ B = & \frac{(1+d^2)}{\beta \epsilon} \left\{ (m_3 + m_4 Q_2)^2 + m_2 Q_1 [m_2 Q_1 + 2(m_3 + m_4 Q_2)] \right\} + \frac{\beta}{\epsilon} \left\{ (m_7 + m_8 Q_2)^2 + \right. \\ & \left. + m_6 Q_1 [m_6 Q_1 + 2(m_7 + m_8 Q_2)] \right\} + \frac{2d}{\epsilon} \left\{ m_2 m_6 Q_1^2 + Q_1 (m_3 m_6 + m_2 m_7) + \right. \\ & \left. + m_3 m_7 + Q_2 (m_4 m_7 + m_3 m_8) + Q_1 Q_2 (m_2 m_8 + m_4 m_6) + Q_2^2 m_4 m_8 \right\} \\ C = & 2 \frac{(1+d^2)}{\beta \epsilon} \left\{ (m_3 + m_2 Q_1 + m_4 Q_2)(m_1 + m_2 P_1 + m_4 P_2) \right\} + \frac{2\beta}{\epsilon} \left\{ (m_7 + \right. \\ & \left. + m_6 Q_1 + m_8 Q_2)(m_5 + m_6 P_1 + m_8 P_2) \right\} + \frac{2d}{\epsilon} \left\{ Q_1 (m_2 m_5 + m_1 m_6) + \right. \\ & \left. + m_3 m_5 + m_1 m_7 + Q_2 (m_4 m_5 + m_1 m_8) + 2P_1 Q_1 m_2 m_6 + P_1 (m_3 m_6 + m_2 m_7) \right\} \end{aligned}$$

Апертура камеры, требуемая под такой пучок определяется проекциями эллипса (IV.5) на оси X и Z (см. Рис.II):

$$A_x^2 = \frac{B}{AB - \frac{C^2}{4}} \quad (IV.6)$$

$$A_z^2 = \frac{A}{AB - \frac{C^2}{4}}$$

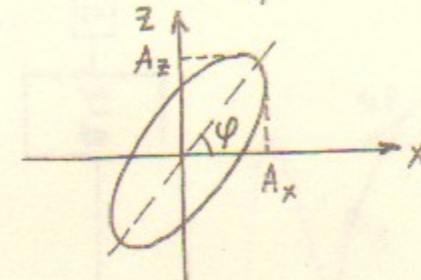


Рис.II

Наклон эллипса определится из

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{C}{A-B}$$

Учтем теперь конечный энергетический разброс в пучке $\sigma_\epsilon^2 = \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2$, что приведет к изменению найденных параметров эллипса (IV.5). Эти изменения зависят от локальных значений радиальной и вертикальной дисперсионных функций ψ_x и ψ_z :

$$(A_x^*)^2 = A_x^2 + \psi_x^2 \sigma_\epsilon^2 \quad (IV.6)$$

$$(A_z^*)^2 = A_z^2 + \psi_z^2 \sigma_\epsilon^2$$

$$\operatorname{tg} 2\psi^* = \frac{-\frac{C}{B} A_x^2 + 2\psi_x \psi_z \sigma_\epsilon^2}{A_x^2 - A_z^2 + (\psi_x^2 - \psi_z^2) \sigma_\epsilon^2}$$

Значение ψ_x и ψ_z находятся через матрицу M и величины ψ_x и ψ_x' на входе вставки.

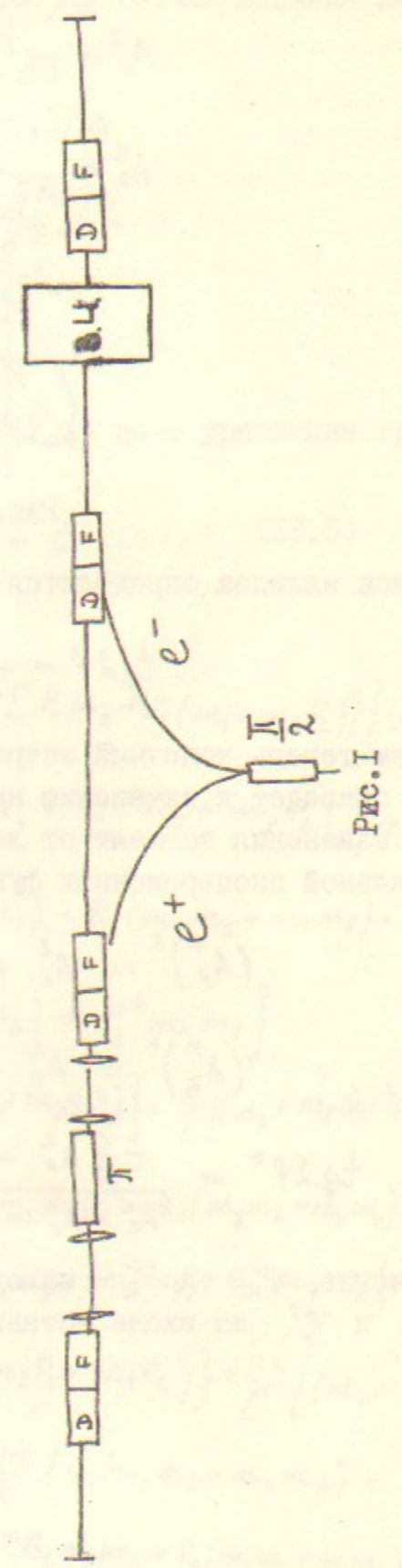
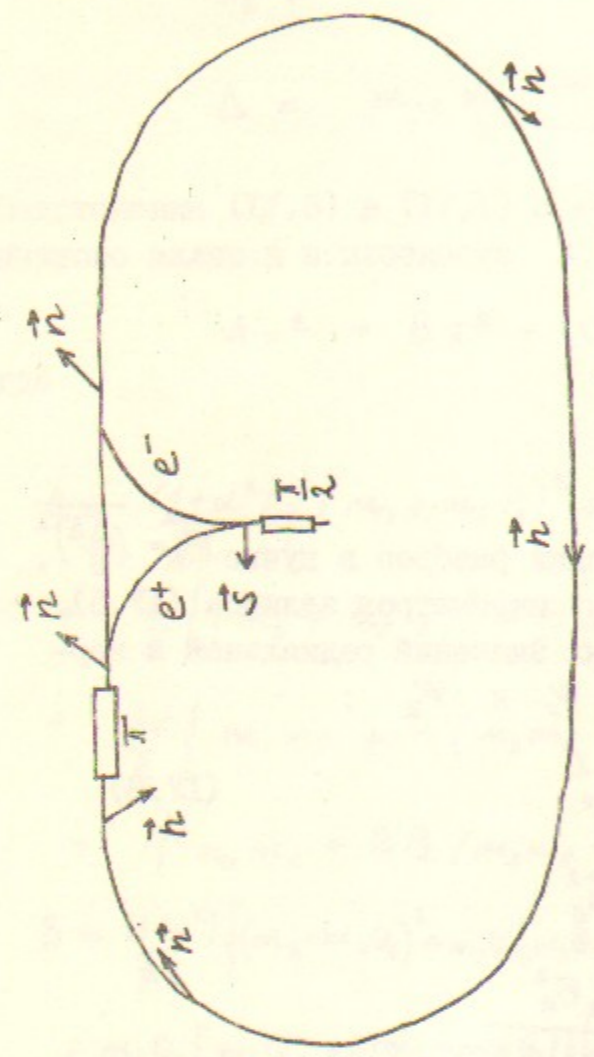


Рис. 1

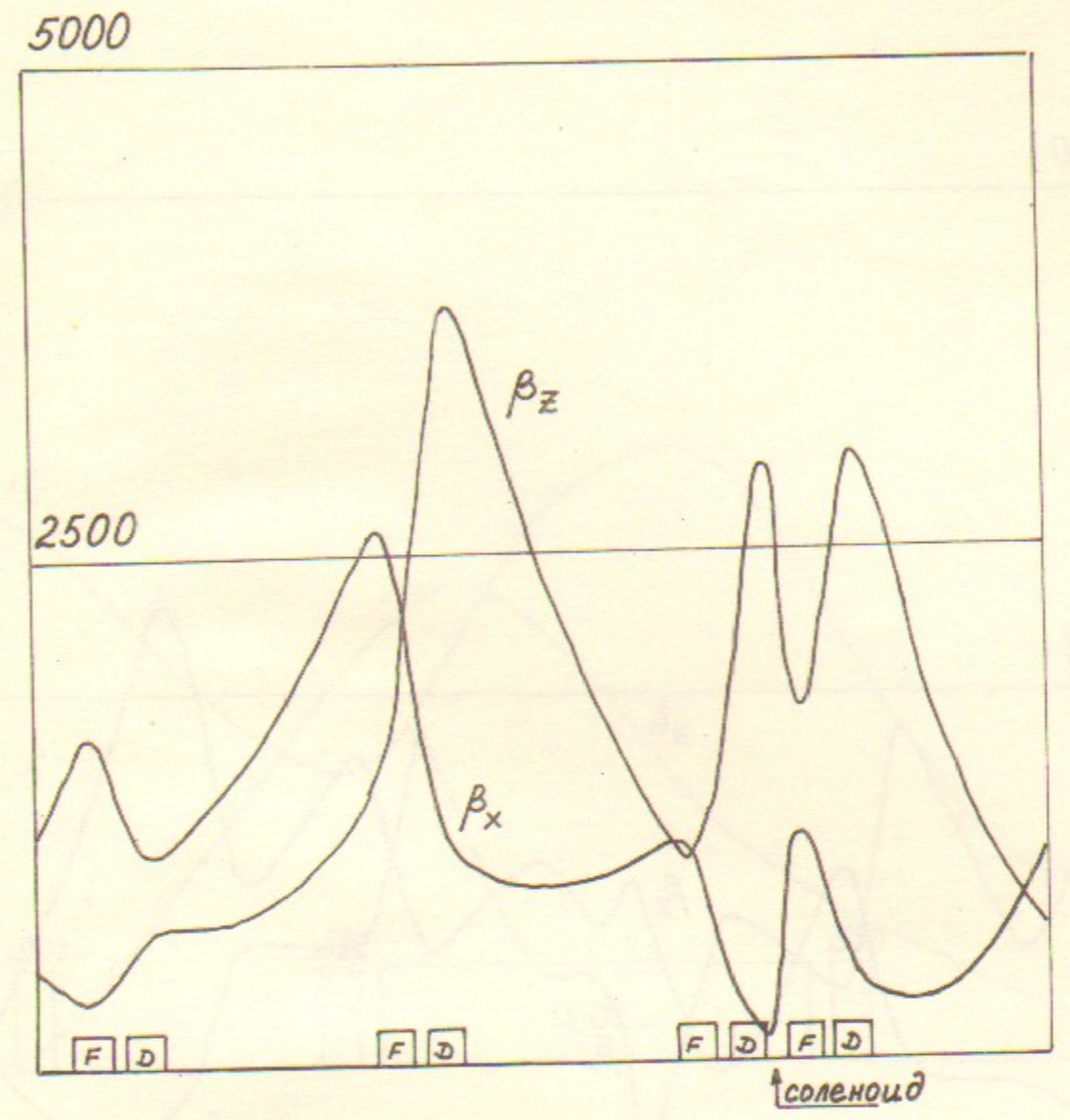


Рис. 3. Вид β -функций (в см) при размещении соленоида на участке впуска позитронов

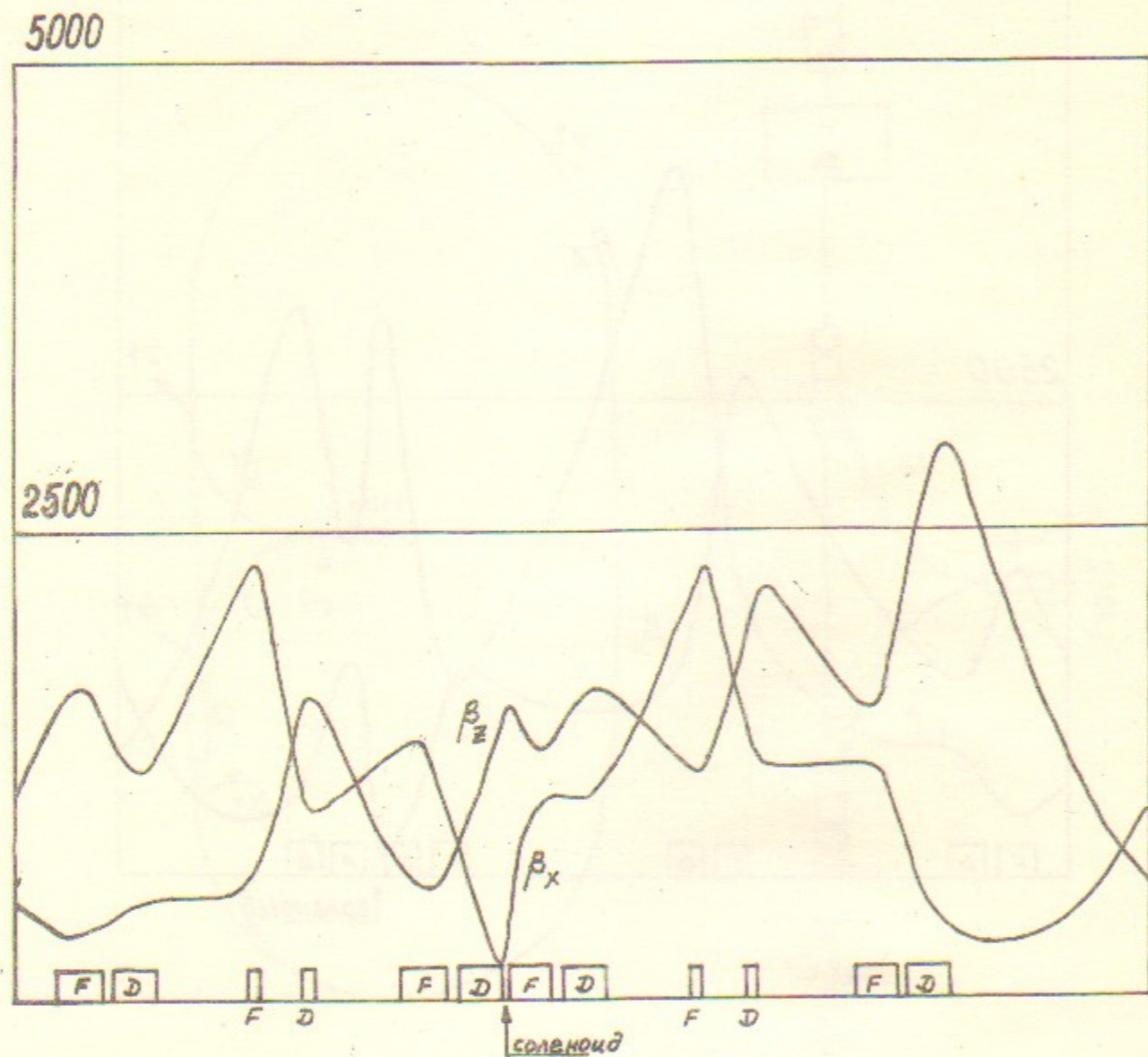


Рис.4. Вид β -функций (в см) при размещении соленоида в центре технического проемежутка.

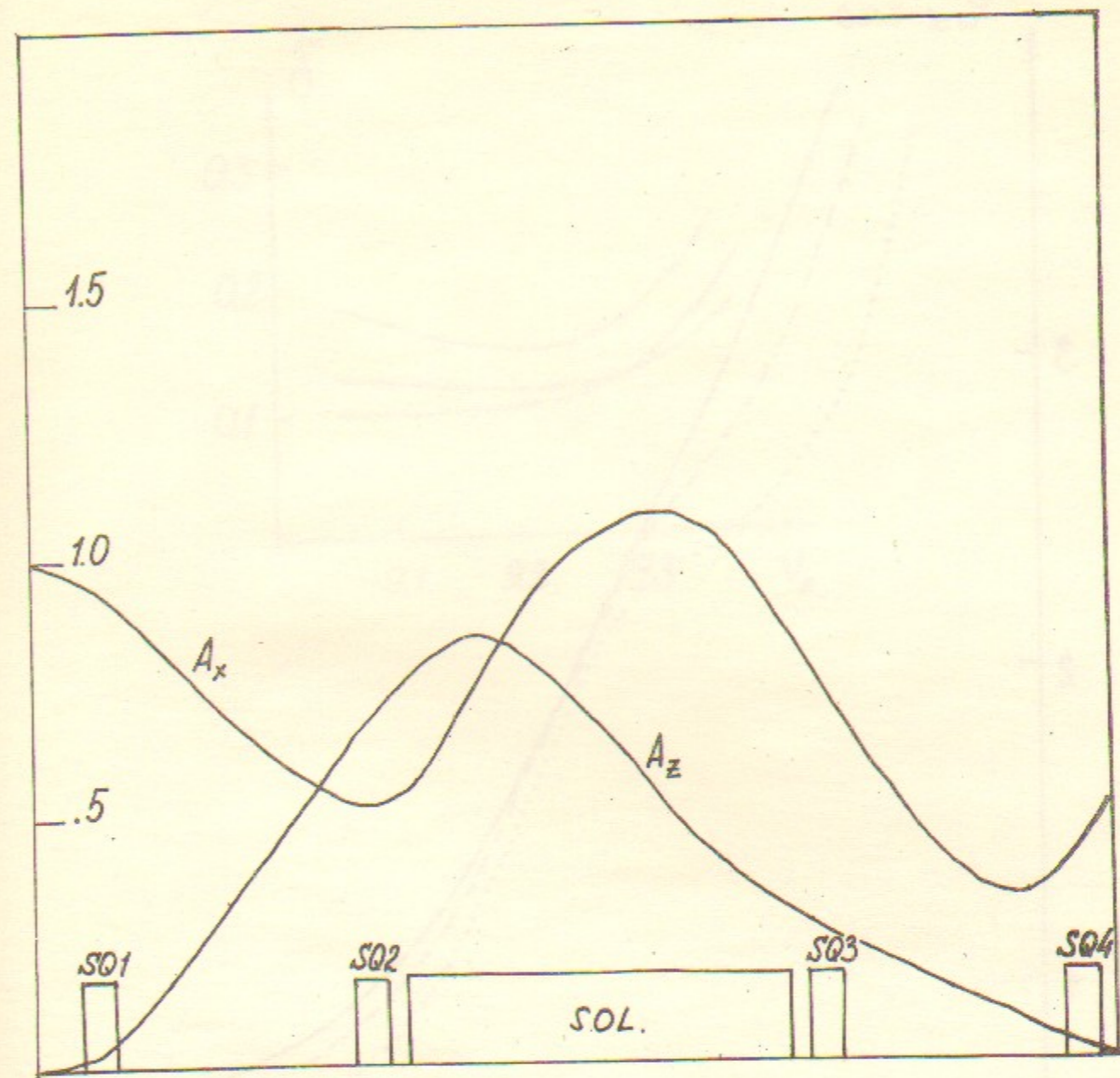


Рис.5. Радиальный (A_x) и вертикальный (A_z) размер пучка в относительных единицах на участке вставки с соленоидом. За единицу принят радиальный размер на входе вставки

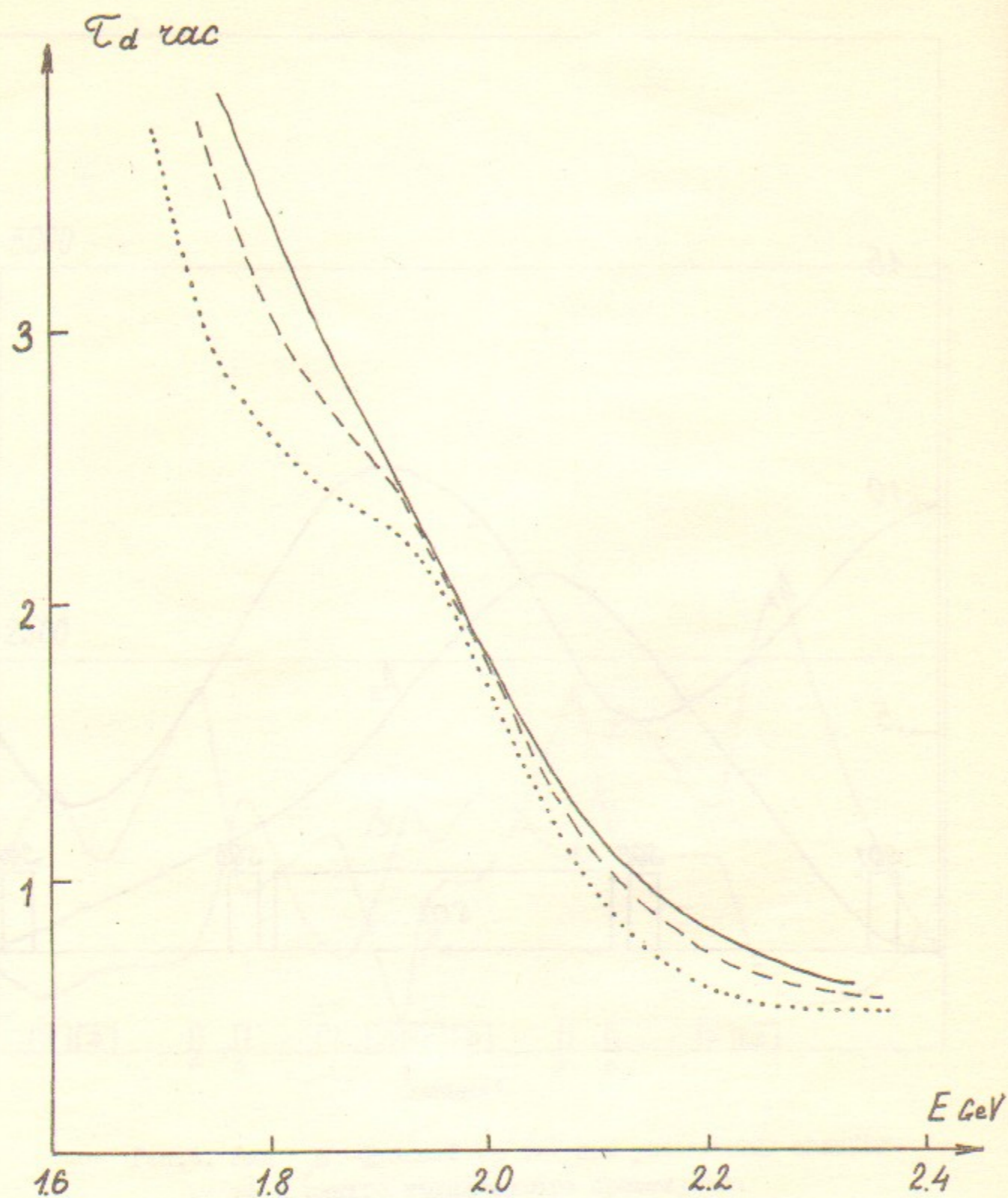


Рис.7. Зависимость времени деполаризации от энергии ($\nu_x=9.15$) для трех вариантов размещения соленоида ($\varphi=\pi$) в техническом промежутке ВЭП-4: ——— соленоид в центре промежутка; - - - - на участке позитронного впуска; на участке электронного впуска.

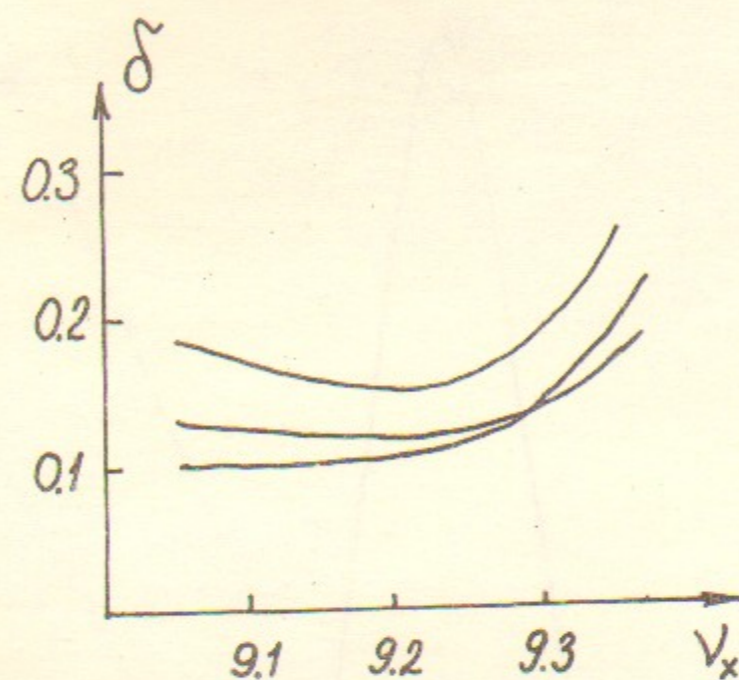


Рис.8. Относительная поправка в величину τ_d^{-1} , вносимая бетатронным движением, как функция частоты бетатронных колебаний ($E = 1.98 \text{ GeV}$) для трех мест размещения соленоида в промежутке (см.рис.7).

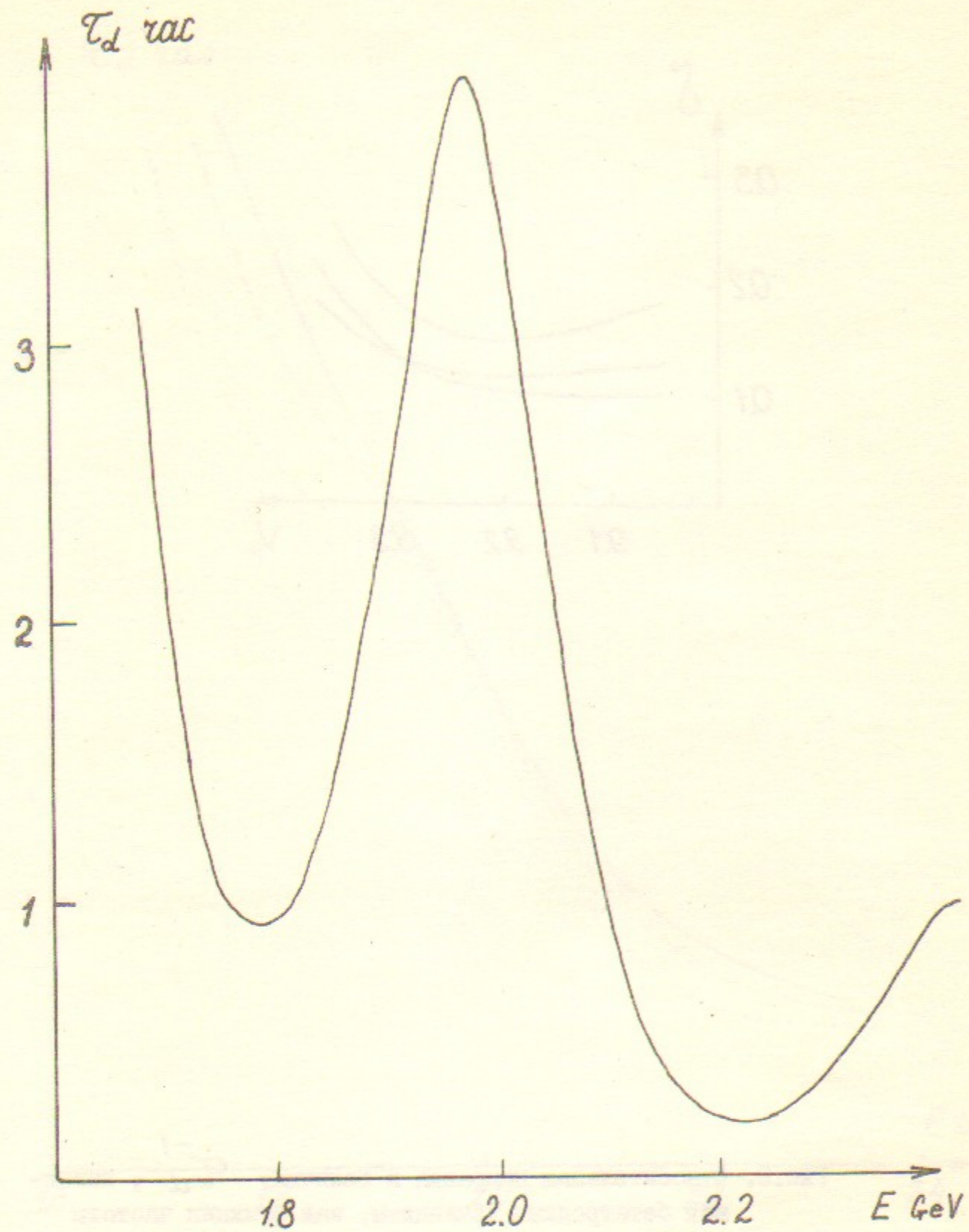


Рис.9. Зависимость $\tau_d(E)$ при использовании соленоида с $\varphi = \pi/2$ (бетатронное движение не учтено).

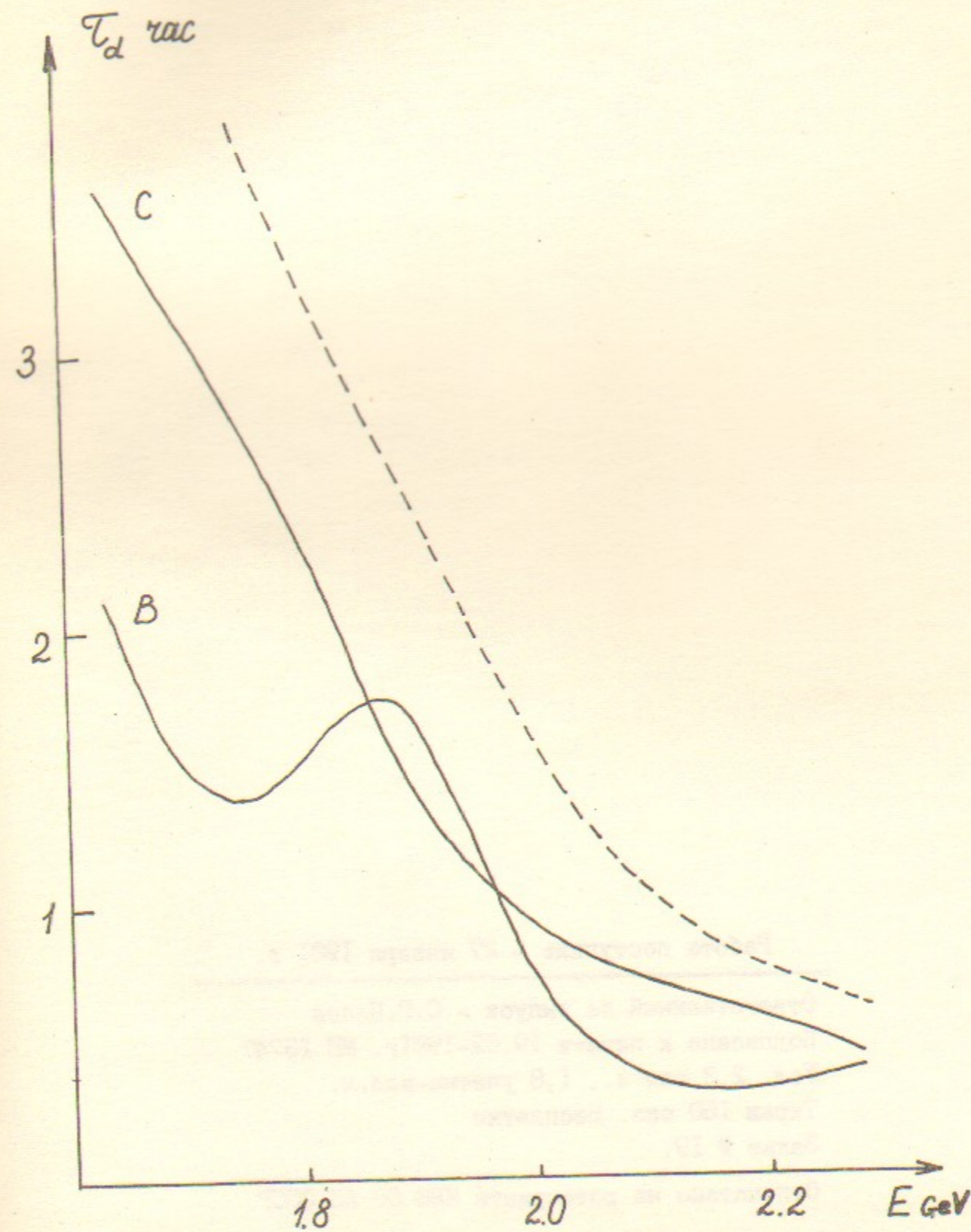


Рис.10. Зависимость времени деполаризации для соленоида с $\varphi = \pi$ в случае использования "змейки", увеличивающей коэффициент квантовой диффузии в $N=10$ раз, при размещении её в одном из боковых мест встречи (B или C). Для сравнения пунктиром показана кривая $\tau_d(E)$ без "змейки".