

47

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

В.Н.Байер, А.Г.Грозин

**ИНКЛЮЗИВНОЕ РОЖДЕНИЕ  
КВАРКОНИЯ В  $e^-e^+$  АННИГИЛЯЦИИ**

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79-63

Новосибирск

INCLUSIVE PRODUCTION OF QUARKONIA  
IN  $e^+e^-$  ANNIHILATION

V.N.Baier, A.G.Grosin

A b s t r a c t

Inclusive cross sections of production of quarkonium states (for ex.  $\Psi$  and  $\Psi_c$ ) in  $e^+e^-$  annihilation has been found in the main logarithmic approximation (MLA) of QCD. This cross section is expressed through structure function  $W(x_0, q^2)$  (see eq. (3)), for which expression (4) is valid, where  $W_p^s(x_0, q^2)$  known in MLA structure functions of partons and  $f(x)$  are fragmentation functions. The functions of fragmentation of quark into vector or pseudoscalar meson (see eqs. (7) and (8)) and of gluon into pseudoscalar meson (see eqs. (10)) calculated in the lowest order of QCD. The function  $W(x_0, q^2)$  has been found near threshold in explicit form and at energy  $E = 18$  GeV by numerical calculations. The results presented at Fig. 3 for  $\Psi$  meson and at Fig. 4 for  $\Psi_c$  meson (dashed lines indicate function near threshold, full lines are for electron energy  $E = 18$  GeV).

ИНКЛЮЗИВНОЕ РОЖДЕНИЕ КВАРКОНИЯ В  $e^-e^+$  АННИГИЛЯЦИИ

Принято считать, что квантовая хромодинамика (КХД) позволяет удовлетворительно описывать процессы с большой передачей импульса, где ввиду малости эффективной константы связи  $\alpha_s(q^2)$  применима теория возмущений. Однако стадия процесса взаимодействия, при которой партонны (кварки и глюоны) превращаются в физические адроны (предполагается, что это происходит при характерных масштабах "запирания" партоннов), теорией в настоящее время не описывается. Можно ожидать, что одним из исключений из этого правила является образование связанных состояний из тяжелых кварка и антикварка - кваркония (семейства  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  и т.п.). Кварконий занимает выделенное положение в физике элементарных частиц вследствие его малых размеров (много меньших масштаба запирания), нерелятивистского движения составляющих и относительной слабости взаимодействия между ними, что позволяет описывать его в рамках нерелятивистской потенциальной модели. В резонансной области ( $e^-e^+ \rightarrow \Psi$  и т.п.) описание процесса в КХД дает вполне удовлетворительный результат /1/. В данной работе изучено инклюзивное рождение кваркония в  $e^-e^+$  аннигиляции.

Вблизи порога рождения основной вклад в сечение дает диаграмма, на которой интересующая нас пара кварк-антикварк рождается фотоном, а затем вследствие излучения глюонов образуется кварконий. Однако этот вклад степенным образом убывает с ростом энергии. Поэтому в асимптотической области выживают лишь вклады диаграмм, на которых кварконий образуется в партонном каскаде. Для вычисления этих вкладов можно воспользоваться главным логарифмическим приближением (ГЛП) КХД (см. напр. /2/) (предполагается, что  $\alpha_s(q^2) \ll 1$ ,  $\alpha_s(q^2) \ll 1$  ( $l = \ln \frac{q^2}{\mu^2}$ )), проводится суммирование членов  $(\alpha_s l)^n$  и отбрасываются члены вида  $\alpha_s (\alpha_s l)^n$ . Степенные поправки имеют относительный порядок малости  $m_\Psi^2/q^2$  (для рождения  $\Psi$  мезона) и для того, чтобы они не превышали других отбрасываемых членов ( $\sim \alpha_s$ ), необходимо, чтобы  $\frac{m_\Psi^2}{q^2} \leq \alpha_s$  или  $\sqrt{q^2} \geq \frac{m_\Psi}{\sqrt{\alpha_s}}$ . Развитие

интересующего нас каскада происходит на расстояниях много меньших  $1/m_q$  ( $m_q$  — масса тяжелого кварка), на которых тяжелый кварк может считаться ультрарелятивистским. Рождение тяжелого кварка происходит на длинах  $\sim 1/m_q \ll 1/m_q \alpha_s$  (радиус кваркония), в силу чего формирование связанного состояния  $q\bar{q}$  не зависит от деталей поведения соответствующей волновой функции и определяется одним параметром  $|\psi(0)|^2$ , который может быть взят непосредственно из эксперимента (из распадов кваркония в резонансной области). Поскольку  $1/m_q \ll 1/\mu$  ( $\mu$  — характерный импульс заперания  $\mu \sim 300$  МэВ/с), то для рассмотрения этого процесса можно пользоваться теорией возмущений. Из сказанного следует, что приведенный выше механизм предсказывается теорией однозначно и не содержит подгоночных параметров.

Если заперание описывается некоторым эффективным полем, то естественно предположить, что это поле рождает легкие кварки (и определяется их массой). Но тогда рождение полем тяжелых кварков будет идти с пренебрежимо малой вероятностью. Во всяком случае, сравнение опыта с предсказаниями теории позволит установить, существуют ли другие механизмы образования мезонов из тяжелых кварков, для которых, в принципе, должны быть существенны большие расстояния, что несомненно полезно для понимания эффекта заперания.

Указанный выше механизм образования тяжелых мезонов в ГЛП изображен на рис. I(a) (подразумевается, что необходимо взять мнимую часть вклада этой диаграммы). Учитываются только вклады, содержащие минимальную степень  $\alpha_s$  (без логарифма), когда партон дает партон и мезон. Вершину этого перехода следует заменить на диаграмму низшего порядка теории возмущений, поскольку соответствующий вклад не содержит больших логарифмов. Для любых мезонов, в том числе состоящих из разных кварков, нужно учитывать диаграмму рис. I(b). Для С-четных мезонов из кварков одного аромата следует учитывать также диаграмму рис. I(v). Если для определенности обсуждать мезоны из с-кварков, то отсюда сразу следует качественное предсказание: рождение  $\psi$  мезона (но не  $\eta_c$ ) должно обязательно сопровождаться рождением двух очарованных мезонов ( $D$  или  $F$ ),

один из которых летит в той же струе, что  $\psi$  мезон.

Поскольку волновая функция мезона (системы  $q\bar{q}$ ) быстро убывает, если импульсы кварка и антикварка заметно отклоняются от  $p/2$ , то во вкладе диаграммы рис. I(b) можно вынести все медленно меняющиеся члены за знак интеграла:

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-\ell) \gamma^\mu \frac{\hat{\ell}+1}{\ell^2-1} \Gamma \chi(\ell) \frac{\hat{p}-\hat{\ell}-1}{(p-\ell)^2-1} \gamma^\nu = \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-\frac{p}{2}) \gamma^\mu (\frac{\hat{p}}{2}+1) \Gamma (\frac{\hat{p}}{2}-1) \gamma^\nu \psi_0 \quad (1)$$

где

$$\psi_0 = \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\chi(\ell)}{(\ell^2-1)((p-\ell)^2-1)} \quad (2)$$

здесь  $\chi(\ell)$  — бете-салпетеровская амплитуда,  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)$  — пропагатор глюона в аксиальной калибровке,  $\gamma$  — матрица  $\Gamma$  определяется состоянием кваркония ( $\Gamma = \gamma^5$  для псевдоскалярного мезона,  $\Gamma = \gamma^\lambda$  для векторного мезона), здесь и ниже масса тяжелого кварка  $m_q = 1$ . Аналогичная ситуация имеет место и для вклада диаграммы рис. I(v) (ниже мы убедимся, что степень виртуальности кварка на этой диаграмме, в существенной области интегрирования, определяется неравенством  $\ell^2-1 \gg \alpha_s^2$ ).

Из сказанного следует, что порядок величины инклюзивного сечения определяется множителем  $\alpha_s^2 |\psi(0)|^2$ , поскольку после выделения его выражение для сечения не содержит дополнительных малостей. Если бы волновые функции кваркония были кулоновскими, то для S-волновых состояний указанный множитель был бы равен  $\alpha_s^5$ , а для p-волновых состояний соответственно  $\alpha_s^3$ . По порядку величины это справедливо и для реальных волновых функций. Напомним, что при  $q^2 = m_\psi^2$  принятое значение  $\alpha_s(q^2) = 0,2$ .

ж) Для p-волновых состояний системы  $q\bar{q}$  фактор  $\alpha_s^2 / |\psi(0)|^2$

Инклюзивное сечение рождения тяжелого мезона можно записать в виде

$$\frac{d\sigma}{dx_0} = \sigma_{\mu\mu}(q^2) \frac{1}{x_0} W(x_0, q^2) \quad (3)$$

где  $\sigma_{\mu\mu}(q^2)$  - сечение образования пары мюонов при  $e^-e^+$  аннигиляции,  $q^2 = 4\epsilon^2$ ,  $W(x_0, q^2)$  - структурная функция,  $x_0 = \frac{q^2}{2p_0}$  - скейлинговая переменная. Ниже мы будем пользоваться судаковской параметризацией

$$p = p' + \frac{4m_q^2}{s'} q' = p' + \frac{4q'}{s'}, \quad q = q' + x_0 p'$$

где  $p'^2 = q'^2 = 0$ ,  $s' = 2p'q'$ . Любой импульс партона  $K = x p' + \alpha q' + K_\perp$

На диаграмме процесса рис. I(a) можно выделить две части: структурную функцию партонов  $W_p^s(\frac{x_0}{x}, q^2)$  и функцию фрагментации партона в мезон  $f(x)$ . Это разбиение несколько условно, поскольку  $f(x)$  включает в себя интеграл по  $K_\perp$  в нижней петле. В соответствии со сказанным

$$W(x_0, q^2) = \int_0^1 dx W_p^s(\frac{x_0}{x}, q^2) f(x) \quad (4)$$

заметим, что  $W_p^s$  и  $f$  являются векторами по сорту партонов.

Для вычисления интересующей нас структурной функции  $W(x_0, q^2)$  необходимо в нижний блок диаграммы рис. I(a) подставить механизмы, изображенные на рис. I(b) и I(v) с учетом того, что  $\ell \rightarrow \frac{p}{2}$  (см. формулу (I)), т.е. вычислить вклад диаграмм, изображенных на рис. I(г), и I(д). Первый из них можно записать в виде

$$W(x_0, q^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta^4(k-p-\frac{1}{2}q) g^4 \psi_0^2 S_p \left\{ W_q t^a t^a t^b t^b \cdot G(k) \gamma^\mu \left(\frac{\hat{p}}{2} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{\hat{p}}{2} + 1\right) \gamma^\nu (\hat{k} - \hat{p} + 1) \gamma^\nu \left(-\frac{\hat{p}}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\hat{p}}{2} + 1\right) \gamma^{\mu'} G(k) \mathcal{D}_{\mu\nu}(k - \frac{p}{2}) \mathcal{D}_{\mu'\nu'}(k - \frac{p}{2}) \right\} \quad (5)$$

6.

где след ( $S_p$ ) берется по спинам и цветам кварков,  $W_q$  - структурная функция кварка для фиксированного спинового и цветового состояния  $W_q = W_q(\hat{q}/2s') \frac{1}{N}$  (цветовая группа  $SU(N)$ ),  $t^a$  - генераторы цветовой группы,  $G(k)$  - пропагатор кварка,  $g$  - константа связи, остальные обозначения введены в (I).

Переходя к нерелятивистскому пределу, нетрудно убедиться, что  $|\Psi(0)|^2 = 32N \psi_0^2$ , здесь  $|\Psi(0)|^2$  - квадрат модуля нерелятивистской волновой функции мезона, где проведено суммирование по цветам и поляризациям кварков и усреднение по поляризации мезона (для векторного мезона).

С учетом (4), (5) имеем для функции фрагментации кварка в мезон:

$$f_q(x) = \alpha_s^2 |\Psi(0)|^2 \frac{C_2^2}{26N s'} (x-1)^3 \int \frac{dy'}{y'^4} d_{\mu\nu}(k - \frac{p}{2}) \cdot d_{\mu'\nu'}(k - \frac{p}{2}) S_p \left[ \hat{q}' (\hat{k} + 1) \gamma^\mu \left(\frac{\hat{p}}{2} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{\hat{p}}{2} + 1\right) \gamma^\nu \cdot (\hat{k} - \hat{p} + 1) \gamma^{\nu'} \left(-\frac{\hat{p}}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\hat{p}}{2} + 1\right) \gamma^{\mu'} (\hat{k} + 1) \right] \quad (6)$$

где

$$y = -K_\perp^2, \quad y' = y + 4(x - \frac{1}{2})^2, \quad d_{\mu\nu}(k) = k^2 \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu + k_\nu k_\mu}{k^2}, \quad C_2 = \frac{N-1}{2N}$$

Проводя в (6) вычисления, имеем для случая векторного мезона (напр.  $\psi$ ):

$$f_q^V(x) = \alpha_s^2 |\Psi(0)|^2 \frac{C_2^2}{8N} (x-1)^2 \left[ \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^4} - \frac{2x^2 - 3x - \frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^5} - \frac{x(x-1)}{(x-\frac{1}{2})^6} \right] \quad (7)$$

Соответственно для случая псевдоскалярного мезона (напр.  $\eta_c$ ) получаем:

$$f_q^P(x) = \alpha_s^2 |\Psi(0)|^2 \frac{C_2^2}{8N} (x-1)^2 \left[ \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^4} + \frac{x}{(x-\frac{1}{2})^5} - \frac{1}{3} \frac{x(x-1)}{(x-\frac{1}{2})^6} \right] \quad (8)$$

7.

В случае рождения псевдоскалярного мезона из одинаковых кварков необходимо учесть также вклад диаграммы рис.1(г). В этом случае структурная функция представляется в виде:

$$W(x_0, q^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k-p)^2 g^4 \psi_0^2 S_p(t^a t^b) S_p(t^b t^a) \cdot W_g^{-MM'} D_{\mu\nu}(k) D_{\mu\nu}(k) d_{SS'}(k-p) 2 S_p \left[ \gamma^{\nu} \left( \frac{p^{\nu}}{2} + 1 \right) \gamma^{\sigma} \left( -\frac{p^{\nu}}{2} + 1 \right) \cdot \gamma^{\sigma} G(k - \frac{p}{2}) \right] 2 S_p \left[ \gamma^{\nu} \left( \frac{p^{\nu}}{2} + 1 \right) \gamma^{\sigma} \left( -\frac{p^{\nu}}{2} + 1 \right) \gamma^{\sigma} G(k - \frac{p}{2}) \right] \quad (9)$$

где  $W_g^{-MM'}$  - структурная функция глюона при фиксированном цвете и поляризации:  $W_g^{-MM'} = W_g^{-MM'} \rho_{ab} = W_g^{-MM'} \frac{\delta_{ab}}{2(N^2-1)}$

Из (9) и (4) следует, что функция фрагментации глюона в псевдоскалярный мезон есть

$$f_g^P(x) = \alpha_s^2 |\psi(0)|^2 \frac{1}{8N} \left[ \frac{1}{x-1/2} + \frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} - 16 \frac{x-1/2}{x} \ln \frac{x}{x-1/2} \right] \quad (10)$$

Сходимость интеграла по  $y$  на нижнем пределе при вычислении (10) оправдывает сделанное выше предположение, что вклад области, где нарушается применимость формул типа (1) с выделенной величиной  $\psi_0$ , является несущественным.

Из полученных результатов следует, что инклюзивное сечение (3) в предельных случаях ведет себя следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \sim \begin{cases} (1-\omega)^2 & \omega \rightarrow 1 \\ 1/\omega & \omega \rightarrow 0 \end{cases}$$

где  $\omega = z/\alpha_0$ .

Найденные функции фрагментации следует подставить в формулу (4) и, используя известные структурные функции партонов (см. напр. [2]), взять интеграл по  $x$ . Однако, вследствие сложности функций  $W_p^S(x)$  это удастся провести только численно. Результаты такого вычисления для сечения инклюзивного рождения  $\psi$  и  $\psi_c$  мезонов приведены соответственно на рис.3 и 4.

На рис.3 (4) штриховая линия изображает структурную функцию  $\psi(\psi_c)$  мезона (фактор  $|\psi(0)|^2$  опущен) в зависимости от  $z/\alpha_0 = \omega$  экстраполированную в область энергий порядка их массы, когда  $W_g^S = 0$ ,  $W_g^S(x) = e_g \delta^2(1-x)$ . Эти функции вычислены соответственно по формулам (7) и (8). Структурная функция партона записывается в форме  $W_p^S(x) = \frac{1}{x} \sum e_q^2 D_p^q(x)$ , где  $D_p^q(x)$  - функции распределения, приведенные на рис.2. Сплошная кривая изображает функцию распределения валентных кварков, т.е. кварка в кварке того же сорта  $D_c^c(x)$  (все вычисления проведены для энергии начальных частиц  $E = 18$  ГэВ и конечной виртуальности  $\sim m_c^2$ ). Она получена численным решением уравнений баланса [2]. Резкий подъем справа обусловлен исходными кварками, несколько сместившимися в сторону меньших  $x$  вследствие излучения глюонов, небольшой подъем слева связан с тем, что валентные кварки могут рождаться из глюонов. Штриховая линия на рис.2 представляет функцию распределения глюонов в кварке  $D_q^g(x)$ . Подъем слева обязан тому, что мягкие глюоны излучаются с большей вероятностью. Пунктирная линия дает распределение морских кварков, т.е. кварков в кварке другого сорта  $D_q^c(x)$  подъем слева связан с тем, что все эти кварки родились из глюонов в составе пар. На рис.3 (4) сплошные линии изображают структурные функции  $\psi(\psi_c)$  мезонов в зависимости от  $z/\alpha_0 = \omega$  при  $E = 18$  ГэВ (также без множителя  $|\psi(0)|^2$ ), полученные из формулы (4) с использованием функций распределения, приведенных на рис.2.

Следует иметь в виду, что использованное выше приближение нарушается при  $\omega = \frac{1}{x} \leq \frac{m_{\psi}(\psi_c)}{E}$ . Для энергии  $E = 18$  ГэВ это ограничение означает, что  $\omega > 1/6$ . Полное сечение рождения  $\psi(\psi_c)$  мезонов с  $\omega > 1/6$  может быть найдено из формулы (3) с использованием  $|\psi(0)|^2$ , полученного из распада  $\psi \rightarrow e^+e^-$  (для  $\psi_c$  мезона было принято такое же значение этой величины):

$$\frac{\sigma_{\psi}}{\sigma_{\mu^+\mu^-}} = 3,0 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\sigma_{\psi_c}}{\sigma_{\mu^+\mu^-}} = 3,5 \cdot 10^{-4}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. V.A. Novikov et al. Phys. Reports 41C, N 1 (1978)

2. Ю.Л. Докшицер, Д.И. Дьяконов, С.И. Троян.

Физика элементарных частиц (материалы XIII зимней школы ЛИАФ, т. I) Ленинград, 1978

Ю.Л. Докшицер, Д.И. Дьяконов.

Физика элементарных частиц (материалы XIV зимней школы ЛИАФ, т. I) Ленинград 1979

Авторы благодарны А.И. Мильштейну и В.С. Фадину за  
обсуждение.

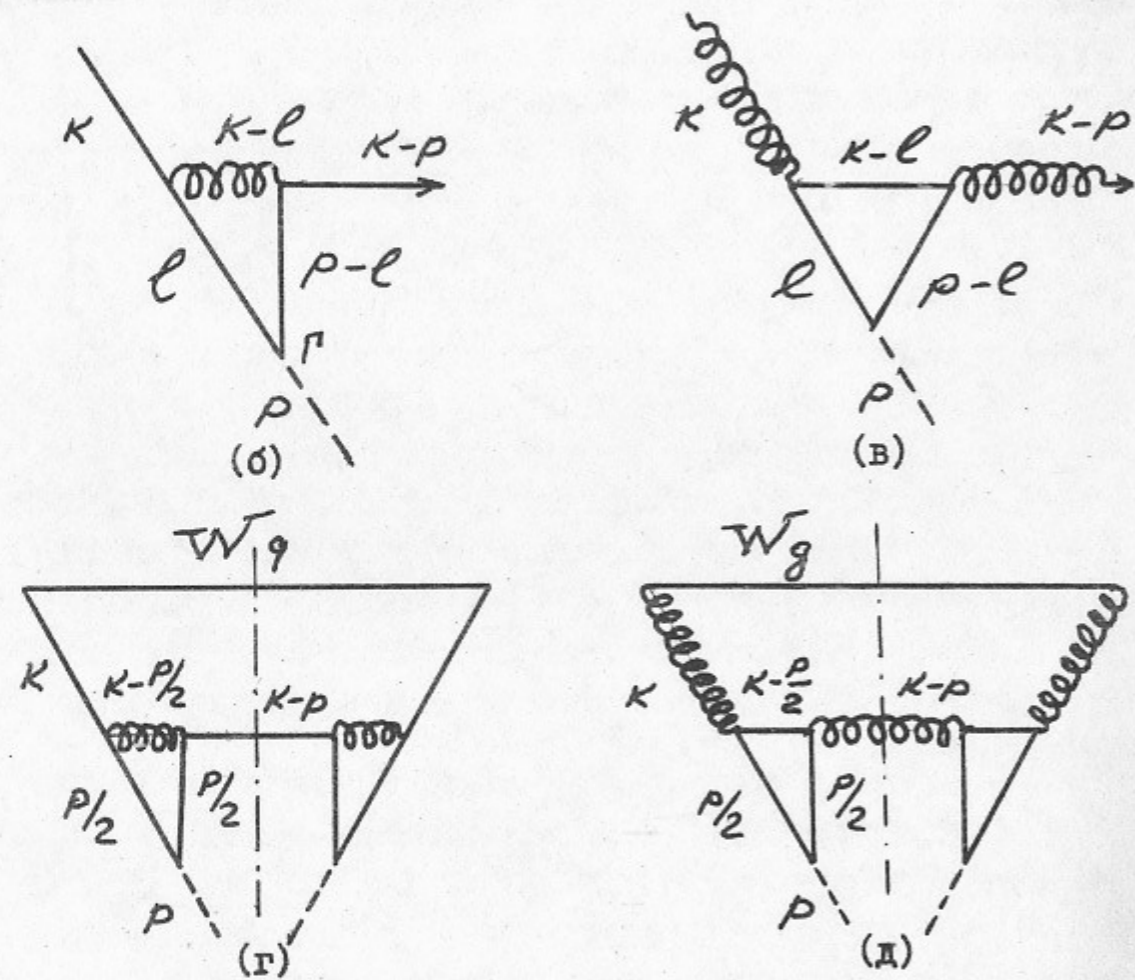
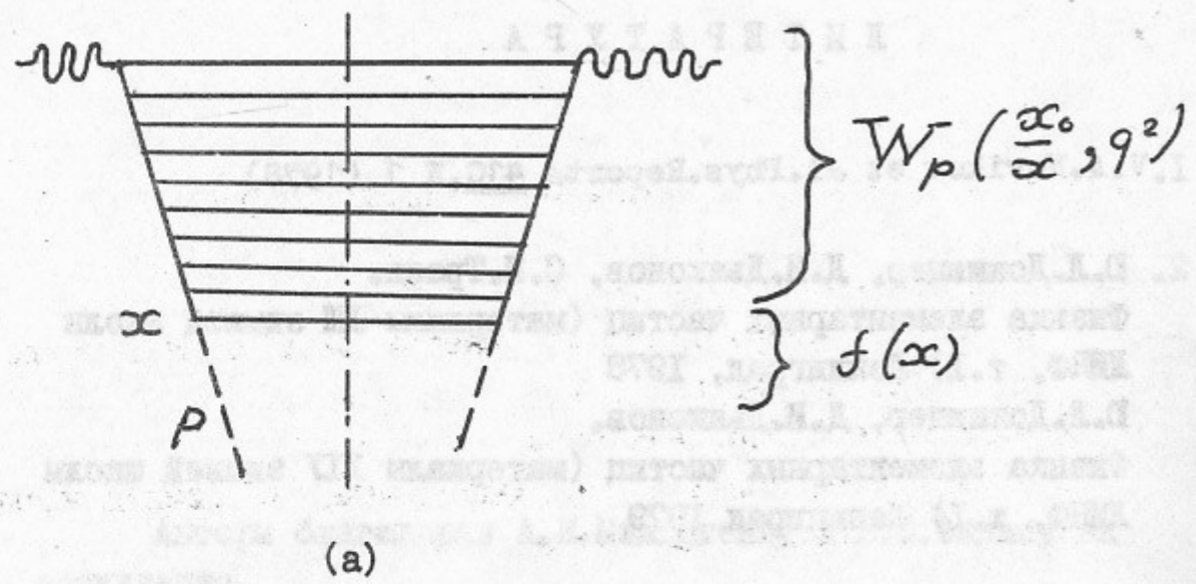


Рис.1

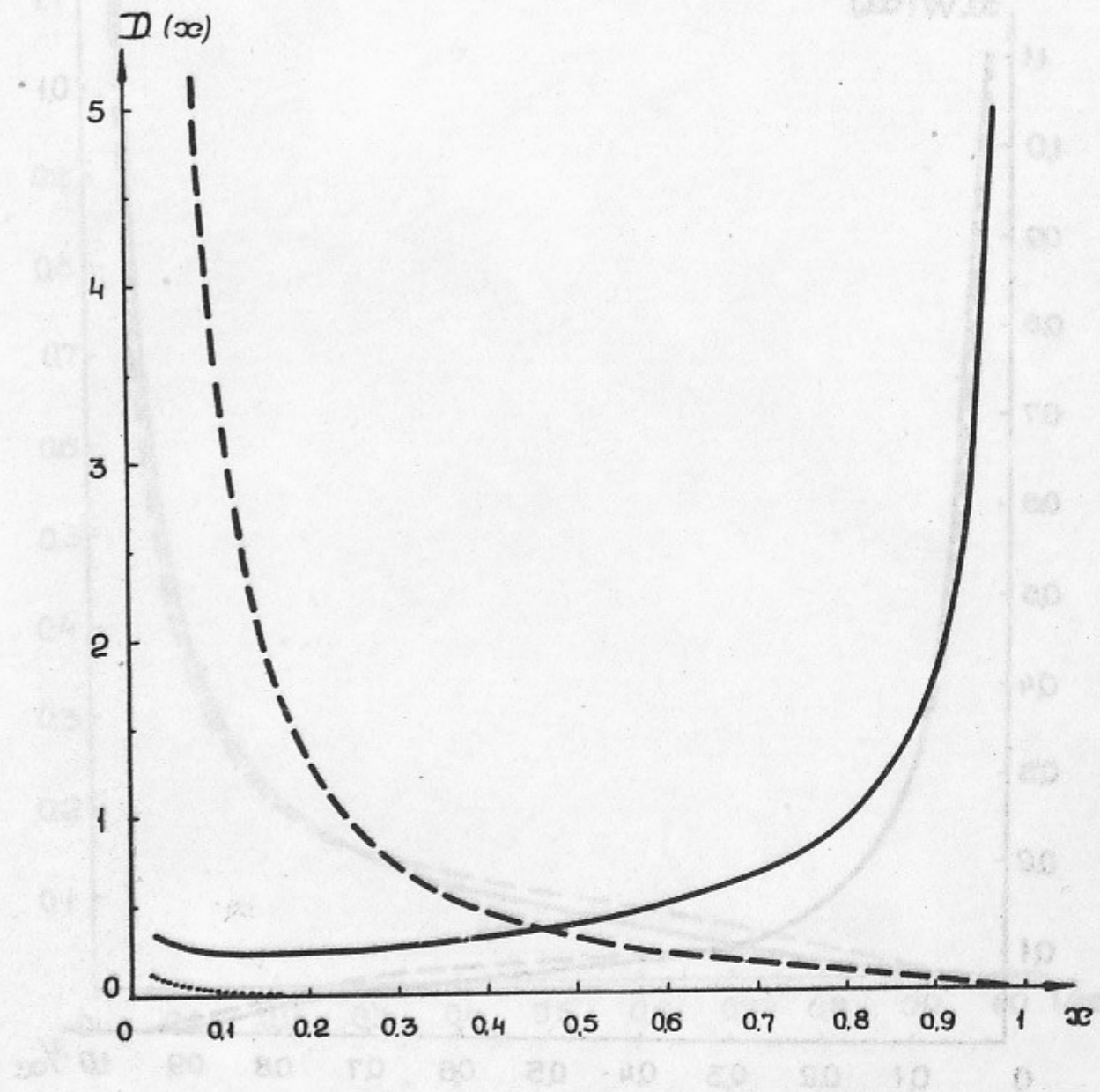


Рис.2.

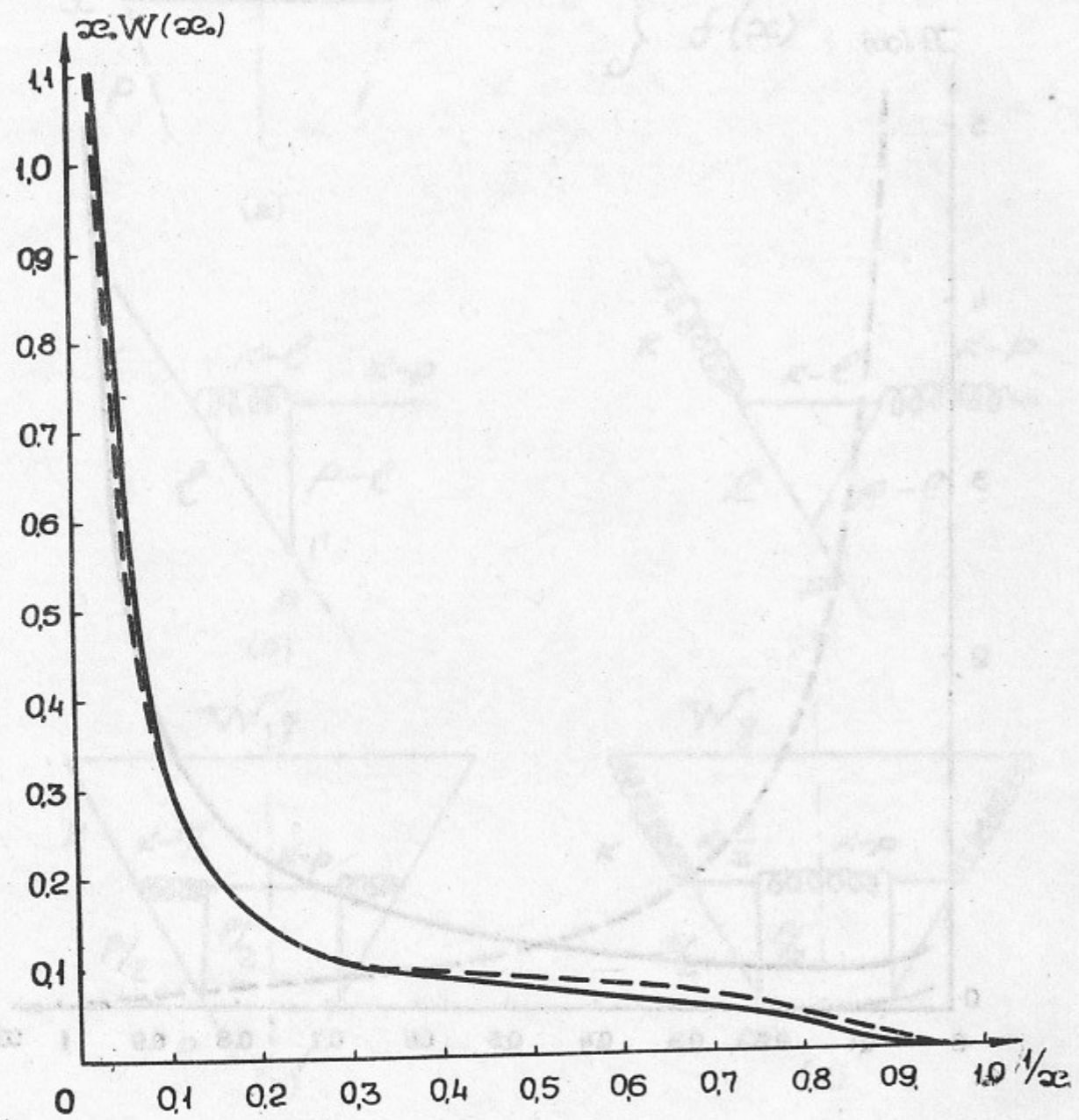


Рис.3.

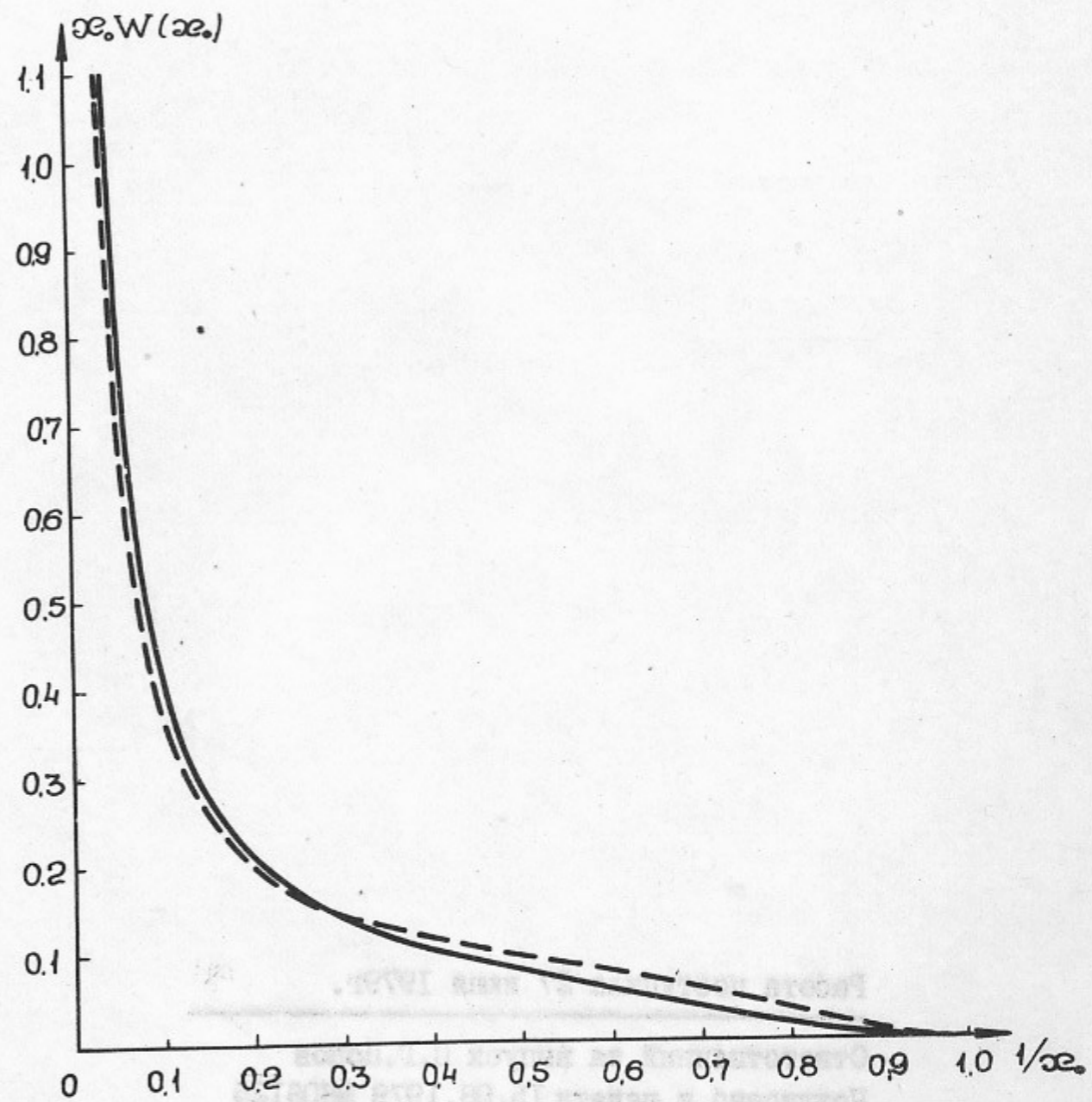
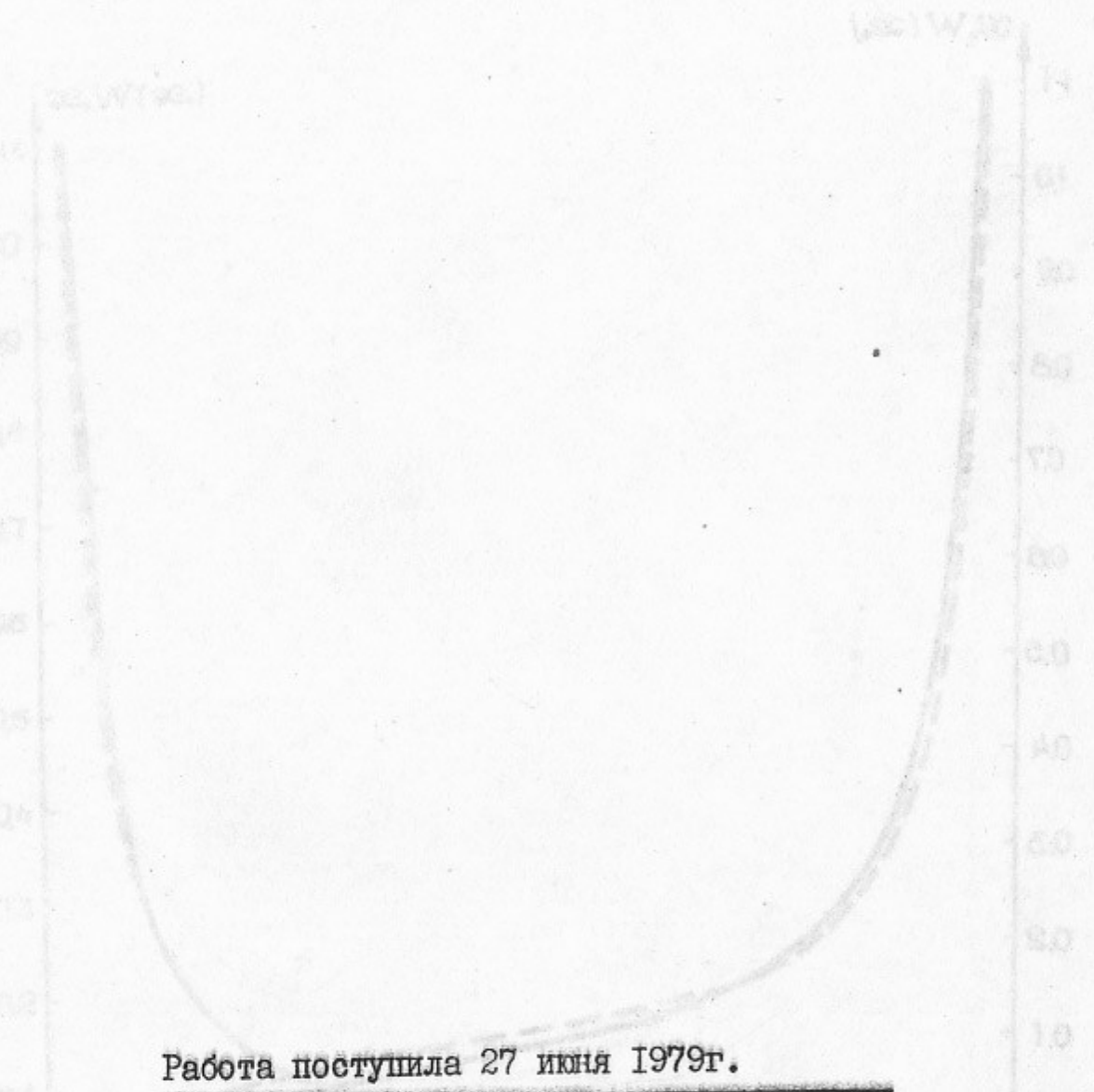


Рис.4.





Работа поступила 27 июня 1979г.

Ответственный за выпуск С.Г.Попов  
Подписано к печати 15.08.1979 МНО6125  
Усл.1,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 63

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР