

К. 89

57

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА
СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78-102

Новосибирск

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

АННОТАЦИЯ

Для масштабов, меньших масштаба диссипации η , спектр турбулентности быстро падает. Показано, что характер этого падения определяется сильным взаимодействием пульсаций разных масштабов и возникающим каскадным процессом. Для расчета использован аппарат функций Грина и диаграммная техника. Показано, что функции отклика и вершины совпадают в области $\eta k \gg 1$ с затравочными. Получено уравнение для спектрального тензора, вид решения найден с точностью до универсальной константы. Обрыв ряда позволяет найти приближенное значение константы, которое мало изменяется при учете следующего члена ряда.

Турбулентная жидкость представляет пример системы со многими степенями свободы, для которой поступление энергии извне и ее диссипация происходят на противоположных концах спектра. Для стационарного случая, если масштаб диссипации η мал по сравнению с масштабом возбуждения, равновесие в области малых масштабов существенно определяется потоком энергии. В теории Колмогорова [1] спектральная плотность энергии $F(k)$ имеет вид:

$$F(k) = \langle |\vec{u}(\vec{k})|^2 \rangle \sim k^{-11/3} \psi(k\eta)$$

где $\vec{u}(\vec{k})$ - Фурье-гармоника скорости $\vec{u}(\vec{x})$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \psi(y) = \text{const.}$ Попытки получить поведение системы в области $\eta k \ll 1$, исходя из уравнений гидромеханики, до сих пор не привели к полному успеху из-за математической сложности ситуации [2]. В области диссипации $\eta k \gg 1$ свойства системы исследовались в работе [3], использующей идеи предшествующих работ [4, 5] на основе предположения об основной роли для этой области деформации самых малых вихрей масштабом η . Ответ для спектра в предположении о несущественности взаимодействия мелкомасштабных пульсаций получен в виде

$$F(k) \sim \exp[-(\eta k)^\gamma] \quad (1)$$

Для проверки последнего предположения оценим вклад, который дает взаимодействия пульсаций масштабов одного порядка величины, если спектр пульсаций имеет вид (1). Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с вязкостью ν в представлении Фурье по пространственным координатам имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) u_i(\vec{k}, t) = -\frac{i}{2} P_{ijc}(\vec{k}) \int d\vec{q} u_j(\vec{q}, t) u_c(\vec{k}-\vec{q}, t)$$

где $P_{ijc}(\vec{k}) = \kappa_j \Delta_{ic}(\vec{k}) + \kappa_c \Delta_{ij}(\vec{k})$

$$\Delta_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{\kappa_i \kappa_j}{k^2}$$

Предположим, что $\vec{u}(\vec{k}) \sim \exp[-(\eta k)^\gamma]$, где $\gamma > 1$. Вклад области $q \sim \eta^{-2} \ll k$ есть $P(\vec{k}) u(\eta^{-2}) \eta^{-3} u(k) \sim \exp[-(\eta k)^\gamma]$ и совпадает по порядку величины с левой частью уравнения. Вклад области, где $q \sim |\vec{k}-\vec{q}| \sim k/2$ есть $P(\vec{k}) u^2(k/2) \sim \exp[-(\eta k)^\gamma 2^{1-\gamma}]$ и велик по сравнению с вкладом области $\eta q \sim 1$.

Таким образом, нелинейные взаимодействия пульсаций масштабов одного порядка величины играют в интервале $\eta\kappa \gg 1$ существенную роль. Для их более аккуратного учета в настоящей работе используется аппарат квантовой теории поля типа развитого Уайлдом [6]. В работах [7, 8] этот метод был применен для вычисления экспоненциального множителя в спектре при $\eta\kappa \rightarrow \infty$. Было показано, что хотя при $\eta\kappa \gg 1$ амплитуды пульсаций экспоненциально малы, в этом интервале осуществляется режим сильной связи, т.е. существует бесконечная подпоследовательность диаграмм, порядок величины которых в экспоненциальном приближении совпадает.

2. Диаграммные уравнения.

Диаграммная техника для теории турбулентности изложена в ряде работ [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Для целей настоящей работы удобна форма уравнений для величин теории, сходная с условиями унитарности S -матрицы квантовой теории [8]. Для вывода этих уравнений мы используем метод частичного суммирования диаграмм, как наиболее простой и наглядный. Разложение спектрального тензора $F_{ij}^r(\vec{\kappa}, t-t')$ имеет вид рис. I [6, 2]. На рис. I и



Рис. I

далее спектральный тензор обозначается жирной волнистой линией, а тензор Грина $G_{ij}(\vec{\kappa}, t-t')$ - жирной стрелкой. Соответствующие затравочные величины $F_{ij}^{(0)}$, $G_{ij}^{(0)}$ обозначены тонкими линиями. Затравочной вершине $\frac{1}{2}P_{ije}(\vec{\kappa})$ сопоставлена точка. Спектральный тензор внешней возбуждающей силы обозначен через Φ_{ij} .

Введем полные вершины, определяемые как суммы всевозможных графиков, обладающих одним выходом и некоторым количеством входов. Будем обозначать их заштрихованными многоугольниками. Они имеют простой физический смысл. Сделаем к внешней возбуждающей силе $F(\vec{\kappa}, t)$ малую неслучайную добавку $\vec{h}(\vec{\kappa}, t)$, разложим в ряд по \vec{h} отклик скорости, а результат усредним:

$$\langle \delta u_i(\vec{\kappa}, t) \rangle = \int \left\langle \frac{\delta u_i(\vec{\kappa}, t)}{\delta h_j(\vec{\kappa}', t')} \right\rangle_{\vec{h}=0} h_j(\vec{\kappa}', t') d^3\kappa' dt' + \\ + \int \left\langle \frac{\delta u_i(\vec{\kappa}, t)}{\delta h_j(\vec{\kappa}', t') \delta h_m(\vec{\kappa}'', t'')} \right\rangle_{\vec{h}=0} h_j(\vec{\kappa}', t') h_m(\vec{\kappa}'', t'') d^3\kappa' d^3\kappa'' dt' dt'' + \dots$$

В вариационные производные подставим $u_i(\vec{\kappa}, t)$ в виде функционального разложения по \vec{F} [6]. Почленное усреднение приводит к соотношениям рис. 2.

$$\left\langle \frac{\delta u_i(\vec{\kappa}, t)}{\delta h_j(\vec{\kappa}', t')} \right\rangle_{\vec{h}=0} = \leftarrow \delta(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}') \\ \left\langle \frac{\delta^2 u_i(\vec{\kappa}, t)}{\delta h_j(\vec{\kappa}', t') \delta h_m(\vec{\kappa}'', t'')} \right\rangle_{\vec{h}=0} = 2! \left\langle \delta(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}' - \vec{\kappa}'') \right\rangle \\ \dots \dots \dots \\ \left\langle \frac{\delta^n u_i(\vec{\kappa}, t)}{\delta h_{i_1}(\vec{\kappa}_1, t_1) \dots \delta h_{i_n}(\vec{\kappa}_n, t_n)} \right\rangle_{\vec{h}=0} = n! \left\langle \delta(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}_1 - \dots - \vec{\kappa}_n) \right\rangle$$

Рис. 2

Тензор Грина описывает осредненный отклик скорости в линейном приближении по $\vec{h}(\vec{\kappa}, t)$, треугольник - в квадратичном и т.д. Введем узловые вершины - суммы графиков, не разрезаемых по одной линии. Обозначим их незаштрихованными многоугольниками. Легко видеть, что справедливы соотношения рис. 3. Частичное суммирование диаграмм в рис. I приводит к уравнению рис. 4. Член с Φ_{ij} в уравнении рис. 4 опущен, т.к. в дальнейшем предполагается, что спектр внешней силы ограничен сверху, а система уравнений изучается в области волновых чисел, гораздо больших обратного основного масштаба турбулентности, который в настоящей работе

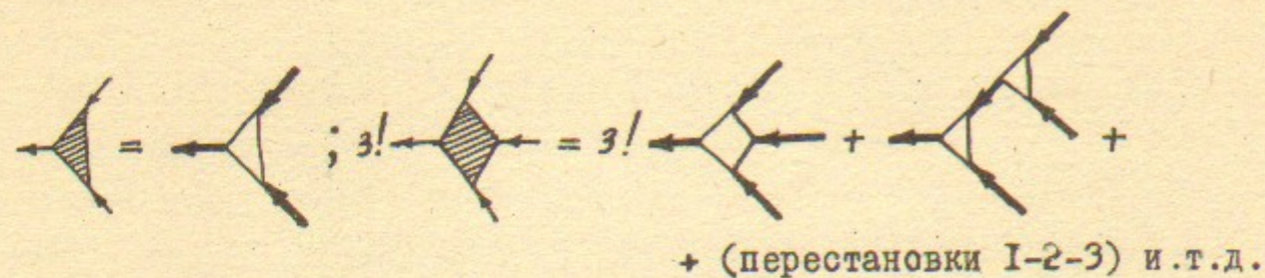


Рис.3

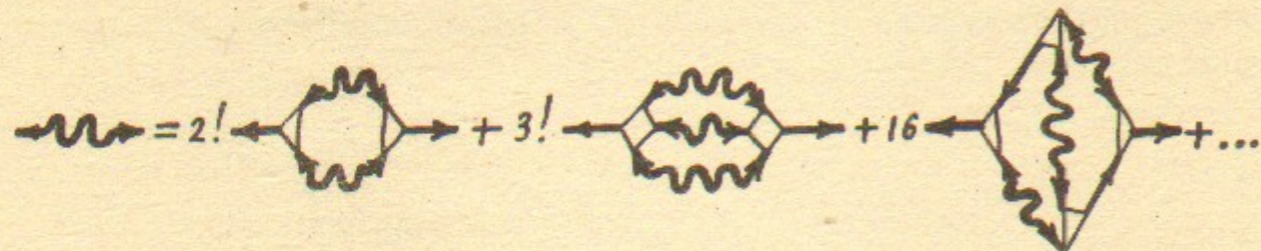
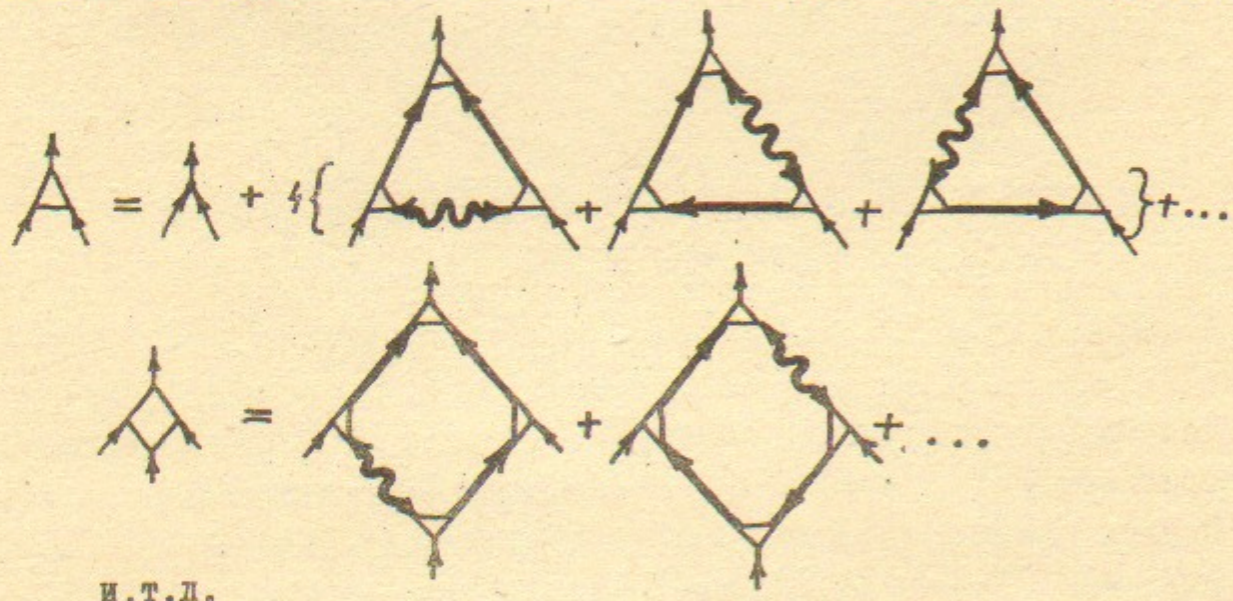


Рис.4

будет считаться совпадающим с колмогоровым масштабом η . Аналогичные уравнения можно написать для узловых вершин (см.рис.5).



и т.д.

Рис.5

3. Анализ уравнений.

Рассмотрим уравнения рис.4,5 в области, где волновые числа внешних линий велики по сравнению с величиной η^{-1} . Эти уравнения содержат спектральный тензор и узловые вершины, которые описывают затухание внешнего возмущения, внесенного в турбу-

лентный поток. Изучим вначале поведение узловых вершин в рассматриваемой области. Время затухания внесенного возмущения за счет действия вязкости равно $(\nu k^2)^{-1}$, а время его переноса движениями крупных масштабов на расстояние k^{-1} имеет порядок величины $(k u_\eta)^{-1}$. Если волновое число достаточно велико, то за время вязкого затухания возмущений область размера k^{-1} можно считать покоящейся по отношению к основному масштабу турбулентности. Поэтому переносные взаимодействия, которые в инерционном интервале существенно затрудняют анализ задачи [I2-I4] в интервале диссипации энергии незначительны. В то же время, амплитуды турбулентных пульсаций при $\eta k \gg 1$ экспоненциально малы и не могут повлиять на скорость затухания внесенного возмущения. Иными словами, в интервале диссипации энергии нелинейность должна учитываться лишь постольку, поскольку она является единственным источником энергии. Внешнее возмущение при $\eta k \gg 1$ затухает независимо от движения жидкости. В линейном приближении отклик описывается затравочным тензором Грина.

Покажем, что в пределе $\eta k \rightarrow \infty$ затравочная вершина не перенормируется. Будем искать решение для спектрального тензора при $\eta k \gg 1$ в виде:

$$F_{ij}^r(\vec{k}) = \Delta_{ij}(\vec{k}) \frac{\psi(k)}{4\pi k^2} \exp[-(\eta k)^\gamma], \quad (2)$$

где $\gamma > 1$, $\psi(k)$ - функция, которая меняется при $\eta k \gg 1$ не быстрее, чем степень. В силу быстрого убывания спектра при $\eta k > 1$, главный вклад в интегралы уравнений рис.5 дает область, где волновые числа F^r -линий порядка η^{-1} . Параметром разложения рядов для узловых вершин служит, таким образом, величина

$$\frac{u_\eta^2 k^2}{\nu^2 k^4} \sim (\eta k)^{-2}$$

В пределе $\eta k \rightarrow \infty$ параметр разложения мал и затравочная вершина не перенормируется. Остальные узловые вершины малы по тому же параметру. Уравнение рис.4 для спектрального тензора приобретает вид рис.6. Соображения, которые привели к обрыву рядов для узловых вершин, здесь не применимы, т.к. волновые чис-

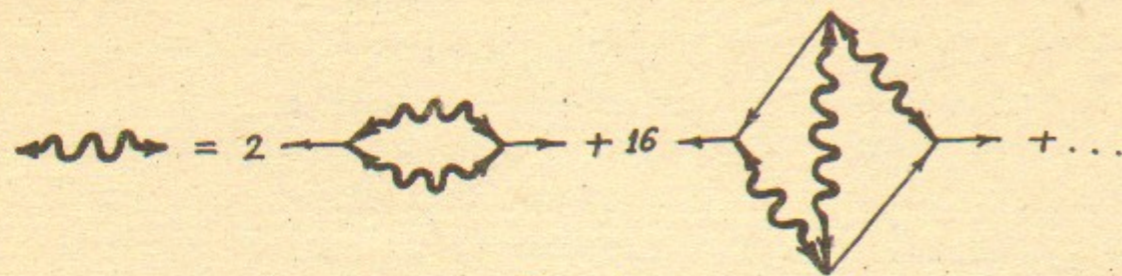


Рис. 6

ла F^i -линий в каждом графике связаны соотношением $\sum_{i=1}^n \vec{q}_i = \vec{k}$ и не могут быть все одновременно малыми.

Положим вначале $t' = t$ в спектральном тензоре F^i в левой части уравнения. В подинтегральное выражение графика, содержащего n волнистых линий, входит экспоненциальный множитель $\exp[-\sum_{i=1}^n (\eta q_i)^\gamma]$, где $\sum_{i=1}^n \vec{q}_i = \vec{k}$. Кроме того, имеется степенной множитель, возникающий от вершин, затравочных функций Грина и интегрирований по разностям времен. Главный вклад в интеграл даст область, где показатель экспоненты максимален. При $\gamma > 1$ максимум показателя экспоненты лежит при $\vec{q}_1 = \vec{q}_2 = \dots = \vec{q}_n = \vec{k}/n$ и график пропорционален $\exp[-(\eta k)^\gamma n^{1-\gamma}]$. Таким образом, все графики в правой части уравнения экспоненциально велики по сравнению со спектральным тензором (2) и уравнение рис.6 при $\gamma > 1$ не может быть удовлетворено. При $\gamma < 1$ показатель экспоненты максимален, когда волновые числа всех F^i -линий, кроме одной, малы. Это соответствует случаю, в котором главную роль играют взаимодействия коротковолновых пульсаций непосредственно с пульсациями основного масштаба. В работах [3-5] с помощью других методов было, однако, показано, что такие взаимодействия приводят к решению с $\gamma = 2$, а не с $\gamma < 1$. Поэтому единственным значением γ , которое не противоречит уравнениям, является $\gamma = 1$.

Изучим теперь скорость затухания временных корреляций в интервале диссипации энергии. Предположим, что затухание корреляций во времени также экспоненциальное

$$F^i(k, \tau) = F^i(k) \exp[-\alpha k^\mu \tau] \sim \psi(k) \exp[-\eta k - \alpha k^\mu \tau] \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение рис.6, мы снова получаем, что обе части уравнения имеют одинаковую асимптотику при $k \rightarrow \infty$ лишь

при $\mu = 1$.

Таким образом, корреляции при $\eta k \gg 1$ затухают со временем с той же скоростью, что и корреляции колмогорова масштаба η . Физически это означает, что хотя взаимодействия в интервале диссипации энергии происходят каскадным образом, существенной хаотизации при этом не происходит и время жизни корреляций на масштабе k^{-1} велико по сравнению с временем жизни внесенного неслучайного возмущения.

Вычислим приближенно предэкспоненциальный множитель $\psi(k)$ с помощью уравнения рис.6, в правой части которого оставлен лишь первый график. Подставив $F_{ij}^i(\vec{k}, \tau) = \Delta_{ij}(\vec{k}) E(k, \tau) / (4\pi k^2)$ $G_{ij}(\vec{k}, \tau) = \delta_{ij} \exp(-\nu k^2 \tau)$ в уравнение рис.6 и вычислив след, получаем уравнение:

$$E(k, t-t') = \frac{1}{4\pi} \int d^3q a(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t'} dt_2 \exp[-\nu k^2 (t+t'-t_1-t_2)] \cdot E(q, t_1-t_2) E(p, t_2-t_2) \quad (4)$$

где $\vec{p} = \vec{k} - \vec{q}$, $a(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{4k^2} P_{ijc}(\vec{k}) P_{i\alpha\beta}(\vec{k}) \Delta_{j\alpha}(\vec{p}) \Delta_{c\beta}(\vec{q})$.

Поскольку время затухания корреляций велико по сравнению с $(\nu k^2)^{-1}$, разности времен в функциях E в (4) можно положить равными нулю и выполнить интегрирование по t_1, t_2 . Уравнение (4) приобретает вид:

$$E(k) = \frac{1}{4\pi \nu^2 k} \int \frac{d^3q}{k^3} \frac{E(p) E(q)}{(pq/k^2)^2} a(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) \quad (5)$$

Подставив сюда $E(k) = \psi(k) \exp(-\eta k)$, имеем:

$$\psi(k) = \frac{1}{4\pi \nu^2 k} \int \frac{d^3q}{k^3} a(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) \exp[-\eta k (\frac{p+q}{k} - 1)] \frac{\psi(p) \psi(q)}{(pq/k^2)^2} \quad (6)$$

Показатель экспоненты содержит большой множитель ηk и главный вклад в интеграл даст область, где $\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}$ почти коллинеарны. Эффективная ширина области интегрирования поперек вектора \vec{k} порядка $\sqrt{k/\eta}$. В этой области $a(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) \sim (\eta k)^{-2}$. Предполагая, что главный вклад даст область, где $\vec{q} \sim \vec{k}/2$ получаем, что

$$\psi(\kappa) \sim \psi^2(\frac{\kappa}{2}) / [\nu^2 \kappa (\eta \kappa)^2]$$

Это означает, что (6) имеет степенное решение

$$\psi(\kappa) = C \nu^2 \kappa (\eta \kappa)^2 \quad (7)$$

где C — некоторая константа. На возможность такого решения было впервые указано в работе Крейчнана [15]. Покажем, что такое решение действительно имеется и вычислим величину C .

Интегрирование удобно выполнить в системе координат, в которой одна из осей параллельна вектору $\vec{\kappa}$: $d^3q = dq_{\parallel} d^2q_{\perp} = 2\pi q_{\perp} dq_{\perp} dq_{\parallel}$. Введем безразмерные переменные интегрирования $s = q_{\parallel}/\kappa$, $w = q_{\perp}/\kappa$. Тогда $d^3q = 2\pi \kappa^3 w dw ds$. Выполним интегрирование по методу Лапласа [16]. Для этого разложим множитель $a(\vec{\kappa}, \vec{p}, \vec{q})$ и показатель экспоненты по отношениям поперечных компонент векторов \vec{p} , \vec{q} к продольным и ограничимся членами низшего порядка

$$a(\vec{\kappa}, \vec{p}, \vec{q}) \approx \frac{w^2}{2} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{1}{s(1-s)} \right] \quad (8)$$

$$\eta(p+q) \approx \eta \kappa \left[1 + \frac{w^2}{2s(1-s)} \right] \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в (6) интегрируя по w , получаем уравнение для C :

$$C = C^2 \int_0^1 ds s^3 (1-s)^3 \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{1}{s(1-s)} \right] = \frac{C^2}{30} \quad (10)$$

откуда

$$E(\kappa) = 30 \nu^2 \kappa (\eta \kappa)^2 \exp(-\eta \kappa) \quad (11)$$

Вклад концов отрезка интегрирования в интеграл (10) мал, поэтому разложение $a(\vec{\kappa}, \vec{p}, \vec{q})$ и показателя экспоненты по w/s , $w/(1-s)$ является правомерным.

Таким образом, уравнение низшего приближения для спектра имеет аналитическое асимптотическое решение (11). Обсудим ситуацию, которая возникает в диаграммах высшего порядка. Выше

уже отмечалось, что каждая диаграмма содержит одинаковый экспоненциальный множитель, который сокращается в обеих частях уравнения. Размер области интегрирования по волновым числам вдоль $\vec{\kappa}$ как и в случае диаграммы низшего приближения, порядка κ . Ширина области интегрирования в поперечном направлении имеет порядок величины $\sqrt{\kappa/\eta}$. Угловой множитель $a(\vec{\kappa}, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n) \sim 1/(\kappa \eta)^{n-1}$. Параметром разложения служит, таким образом, величина $\psi(\kappa)/[\nu^2 \kappa (\eta \kappa)^2] \sim const$. Следовательно, малость в диаграммах высшего порядка, если она вообще имеется, может быть лишь численной. Чтобы оценить точность, с которой справедливо решение (11) необходимо вычислить диаграммы высшего порядка в разложении рис.6. Вычислим спектральную функцию с учетом диаграммы следующего порядка в уравнении рис.6. В правой части уравнения (6) появится дополнительное слагаемое

$$\mathcal{D} = \frac{1}{16\pi^2 \nu^4 \kappa^2} \int \frac{d^3p d^3q}{\kappa^6} \frac{A(\vec{\kappa}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{z}) \psi(p) \psi(q) \psi(z)}{(\frac{\vec{p}+\vec{q}}{\kappa})^2 (\frac{\vec{q}+\vec{z}}{\kappa})^2 (\frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{z}}{\kappa})^2} \exp[-\eta \kappa (\frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{z}}{\kappa} - 1)], \quad (12)$$

$$A(\vec{\kappa}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{z}) = \frac{1}{2\kappa^4} P_{i\alpha\beta}(\vec{\kappa}) P_{i\mu\nu}(\vec{\kappa}) P_{\alpha\gamma\delta}(\vec{p}+\vec{q}) P_{\gamma\epsilon\zeta}(\vec{q}+\vec{z}) \Delta_{\beta\epsilon}(\vec{z}) \Delta_{\delta\zeta}(\vec{p}) \Delta_{\alpha\mu}(\vec{q})$$

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{z} = \vec{\kappa}$$

Главный вклад в интеграл (12) даст область, где $\vec{\kappa}$, \vec{p} , \vec{q} , \vec{z} почти коллинеарны. Подставим (7) в (12) и возьмем интеграл по поперечным компонентам векторов \vec{p} , \vec{q} по методу Лапласа (см. Приложение). В результате получим вместо (10) уравнение:

$$1 = \frac{C}{30} + 2 \mathcal{J} C^2 \quad (13)$$

где

$$\mathcal{J} = \int_0^1 ds \int_0^{1-s} dw \frac{s^2 w^2 (1-s-w)^2}{(1-s)^2 (1-w)^2 (s+w)^2} [5s^2 - 8s - 1 + 3(s+w)(1-w) + \frac{2s(1+s-s^2)}{(s+w)(1-w)}] =$$

$$= \frac{1657}{96} \pi^2 - 168 - \frac{51}{72} \approx 2,17 \cdot 10^{-4} \quad (14)$$

Вклад в интеграл \mathcal{J} от области, где s, w либо $1-s-w$ малы, мал, поэтому выполненное в Приложении разложение по отношениям поперечных компонент векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{z}$ к продольным, является оправданным. Значение постоянной C , полученное с помощью уравнения (13), равно $C \approx 23$, что не слишком сильно отличается от предыдущего значения $C = 30$.

Таким образом, относительная ошибка, которая получается при отбрасывании второго члена в уравнении рис.6, невелика и составляет $\sim 0,2$. Можно надеяться, что ряды теории являются асимптотическими, и найденное значение C близко к истинному.

Подстановка (7) в (12) дает

$$D = \frac{C^2 \nu^2 \kappa (\eta \kappa)^6}{16 \pi^2} \int \frac{d^3 p d^3 q}{\kappa^6} A(\vec{\kappa}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{z}) \frac{p q z}{\kappa^3} \frac{\exp[-\eta \kappa \left(\frac{p+q+z}{\kappa} - 1\right)]}{\left(\frac{\vec{p}+\vec{q}}{\kappa}\right)^2 \left(\frac{\vec{q}+\vec{z}}{\kappa}\right)^2}$$

Показатель экспоненты содержит большой множитель $\eta \kappa \gg 1$ и вне области, где $p+q+z \approx \kappa$, т.е. $\vec{\kappa}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{z}$ почти коллинеарны, подынтегральное выражение экспоненциально мало. Поэтому интегрирование по поперечным компонентам векторов \vec{p}, \vec{q} можно выполнить по методу Лапласа. Выполним вначале интегрирование по \vec{p} в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\kappa} = \vec{p} + \vec{z}$ (см. рис.7), затем проинтегрируем выражение по \vec{q} в плоскости, перпендикулярной $\vec{\kappa}$. Введем безразмерные переменные интегрирования $v = p_{\perp}/\kappa, w_{\perp} = q_{\perp}/\kappa, t = q_{\parallel}/\kappa, s = q_{\parallel}/\kappa$. Тогда $d^3 p = 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel} = 2\pi \kappa^3 v dv dw_{\perp}$; $d^3 q = 2\pi q_{\perp} dq_{\perp} dq_{\parallel} = 2\pi \kappa^3 t dt ds$. С достаточной точностью можно также положить $\kappa \approx (1-s)\kappa$

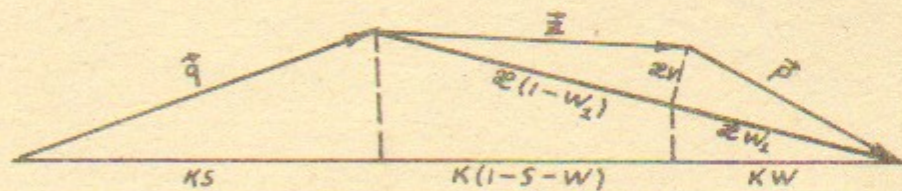


Рис.7

$w_{\perp} \approx w/(1-s)$. Показатель экспоненты и угловой множитель приобретает вид

$$-\eta \kappa \left(\frac{p+q+z}{\kappa} - 1\right) \approx -\frac{\eta \kappa}{2} \left[\frac{(1-s)^3 v^2}{w(1-s-w)} + \frac{t^2}{s(1-s)} \right]$$

$$A(\vec{\kappa}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{z}) \approx \frac{t^4}{(1-s)^4 s^2} \left[5s^2 - 8s - 1 + 3(s+w)(1-w) + \frac{2s(1+s-s^2)}{(s+w)(1-w)} \right]$$

Подставляя все эти выражения в \mathcal{D} и выполнив интегрирование по dv, dt в пределах $(0, \infty)$, мы получим:

$$\mathcal{D} = 2v^2 k (\eta k)^2 C^3 \mathcal{J}$$

где \mathcal{J} определяется выражением (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Колмогоров. Доклады АН СССР 30, 299, 1941.
2. А.С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Москва, Наука, 1967.
3. Е.А. Новиков. Доклады АН СССР 139, 331, 1961.
4. А.А. Townsend Proc. Roy. Soc. A 208, 534, 1951.
5. G.K. Batchelor J. Fluid Mech. 5, 113, 1959.
6. H.W. Wyld Annals of Physics 14, 143, 1961.
7. Г.А. Кузьмин. Журн. прикл. мех. и техн. физики 4, 63, 1971.
8. Г.А. Кузьмин, А.З. Паташинский. Препринт ИЯФ №84, 1970.
9. L.L. Lee, Annals of Physics 32, 292, 1965.
10. P.C. Martin, E.D. Siggia, M.A. Rose Phys. Rev. A 8, 423, 1973.
11. Г.А. Кузьмин, А.З. Паташинский. ИЭФ, 62, 1175, 1972.
12. Б.Б. Кадомцев в сб. "Вопросы физики плазмы" вып. 4 Атомиздат, 1964.
13. R.H. Kraichan. Physics of Fluids 7, 1723, 1964.
14. G.A. Kuzmin, A.Z. Patashinski Phys. Letters 56A, 163, 1976.
15. R.H. Kraichan J. Fluid Mech. 5, 497, 1959.
16. А. Эрдейн. Асимптотические разложения. Москва, 1962.

Работа поступила - 6 декабря 1978 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 25.XII-1978 г. МН 07966

Усл. 0,9 печ.л., 0,7 учетно-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № 102.

Отпечатано на ротационной ИЯФ СО АН СССР