72

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 115

Э.А.Кураев, С.И.Эйдельман

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССУ $e^+e^- \to \gamma\gamma$ С УЧЕТОМ ИЗЛУЧЕНИЯ ЖЕСТКИХ ФОТОНОВ

Новосибирск

1976

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССУ $e^+e^-\to\gamma\gamma$ С УЧЕТОМ ИЗЛУЧЕНИЯ ЖЕСТКИХ ФОТОНОВ

Э.А.Кураев, С.И.Эйдельман

А Н Н О Т А Ц И Я

Получены выражения для радиационных поправок к процессу $e^+e^-\to\gamma\gamma$ за счет излучения виртуальных и реальных фотонов произвольной частоты в α^3 приближении теории возмущений. Вычисления проводились в пренебрежении членами m^2/s где $\sqrt{s}$ – полная энергия в с.ц.и. e^+e^- пары. Особое внимание уделено процессу $e^+e^-\to3\gamma$, для которого получены различные распределения в системе трех конечных фотонов.

Процесс аннигиляции e^+e^- - пары в два и три фотона изучался в рамках квантовой электродинамики (кэд) на протяжении многих лет [1-6]. Этот процесс интересен со многих точек зрения, в частности, в связи с проверкой линейности урвнений кэд[4]. Интерес к процессу аннигиляции e^+e^- пары в фотоны в последнее время возрос в связи с экспериментами на встречных пучках с образованием тяжелых резонансов. При изучении радиационных распадов частиц семейства ψ, например, приходится анализировать конечные состояния, содержащие три фотона [7]. Здесь важным оказывается учет фонового процесса $e^+e^- \to 3\gamma$, идущего за счет чисто электромагнитного взаимодействия*.

В настоящей работе приводятся результаты расчетов в рамках кэд поправок к сечению двухквантовой аннигиляции e^+e^- пары при больших энергиях за счет излучения виртуальных и мягких (в системе центра инерции (с.ц.и.) реальных фотонов (п.1.), а также аналитические выражения для различных распределений в процессе аннигиляции e^+e^- пары в три фотона (п.2.). Вычисления проводятся в пренебрежении членами порядка m/ε

$$(m/\varepsilon)^2 \ll 1, \qquad (1)$$

где $s = 4\varepsilon^2$ - квадрат полной энергии в с.ц.и. e^+e^- пары, m - масса электрона. В этом пределе расчеты и результаты значительно упрощаются.

Расчеты поправок от излучения виртуальных и мягких реальных фотонов проводились ранее многими авторами, мы приводим их здесь для полноты изложения. Расчеты для процесса $e^+e^- \to 3\gamma$ проводились в логарифмическом приближении в работах. Б.В.Гашненбейна и М.В.Терентьева [4]. Наши же результаты являются точными в степенном приближении (1). Полное сечение аннигиляции e^+e^- пары в фотоны в α^3 порядка теории возмущений (т.в.) вычислялось Андреасси и др. [6], однако, их результаты неточны.

1. Матричный элемент процесса аннигиляции e^+e^- пары в два фотона

$$e_+(p_+) + e_-(p) \to \gamma(q_1) + \gamma(q_2) \qquad (2)$$

с точностью до членов порядка α^2 имеет вид [1,2]

*) Заметим, что изучение процесса $e^+e^- \to 3\gamma$ является критическим для проверки недавно предложенной С.Я.Гузенко [13] модели кэд, предсказывающей неаналитическое поведение (скачки) дифференциального сечения.

$$-4\pi\alpha i\,\bar{U}(P_-)\left[R_0+S_0-i\frac{\alpha}{\pi}(R_1+S_1)\right]V(-P_+) \tag{3}$$

где $U(P_-)$, $V(-P_+)$ – спиноры, отвечающие начальным электрону и позитрону; величины $R_0=-\kappa^{-1}\hat{e}_2\hat{P}_3\hat{e}_1$, $S_0=-\tau^{-1}\hat{e}_1\hat{P}_4\hat{e}_2$, где $\kappa=2P_-q_1/m^2$, $\tau=2P_-q_2/m^2$, $P_{3,4}=P_--q_{1,2}$; $e_{1,2}$ – вектора поляризации фотонов, соответствуют диаграммам рис. 1 а, б и описывают процесс в борновском приближении. Величины R_1, S_1, отвечают диаграммам рис.2.

Дифференциальное сечение для фотона с импульсом q_1, летящего в телесном угле dO_1 в с.ц.и. e^+e^-, просуммированное по спиновым состояниям конечных фотонов и усредненное по спиновым состояниям $e^+_,e^-$, имеет вид

$$d\sigma/dO_1=\frac{\alpha^3}{2S}\left[U+\frac{\alpha}{\pi}\mathrm{Re}\left(\mathcal{P}(\kappa,\tau)+\mathcal{P}(\tau,\kappa)\right)\right],\quad U=\frac{\kappa}{\tau}+\frac{\tau}{\kappa}. \tag{4}$$

Величина $\mathcal{P}(\kappa,\tau)$ в (4) имеет в приближении (I) следующий вид

$$\mathcal{P}(\kappa,\tau)=\frac{1}{32}\,\mathrm{Sp}(-\hat{P}_+)R_1\hat{P}_-(\bar{R}_0+\bar{S}_0) \tag{5}$$

где $\bar{A}=\gamma_0A^+\gamma_0$. Вклад в величину R_1, от диаграммы рис.2а будет

$$\begin{gathered}-2S\hat{e}_2\hat{P}_3\hat{e}_1\cdot\mathcal{J}+2\mathcal{J}_\sigma\left[-\hat{P}_-\gamma_\sigma\hat{e}_2\hat{P}_3\hat{e}_1+S\hat{e}_2\gamma_\sigma\hat{e}_1+\hat{e}_2\hat{P}_3\hat{e}_1\gamma_\sigma\hat{P}_+\right]+\\+2\mathcal{J}_{\varrho\sigma}\left[\hat{P}_-\gamma_\varrho\hat{e}_2\gamma_\sigma\hat{e}_1-\gamma_\sigma\hat{e}_1\hat{P}_3\hat{e}_2\gamma_\varrho-\hat{e}_2\gamma_\sigma\hat{e}_1\gamma_\varrho\hat{P}_+\right]+\\+2\mathcal{J}_{\varrho\sigma\tau}\cdot\gamma_\tau\hat{e}_1\gamma_\sigma\hat{e}_2\gamma_\varrho,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\mathcal{J},\mathcal{J}_\sigma,\mathcal{J}_{\sigma\tau},\mathcal{J}_{\varrho\sigma\tau}=(2i/\pi^2)\int d^4k\,[(0)(\kappa)(1)(2)]^{-1}(1,k_\sigma,k_\sigma k_\tau,k_\varrho k_\sigma k_\tau),$$

$$(0)=k^2-\lambda^2,\ (\kappa)=(P_3-k)^2-m^2,\ (1)=(P_--k)^2-m^2,\ (2)=(P_++k)^2-m^2,$$

λ – "масса" фотона. Выражения для интегралов приведены в приложении I. Вклад в R_1 от диаграмм рис.2б, 2в с помощью выражения для вершинной функции (см. приложение II) будет

$$\begin{gathered}-\hat{e}_2\hat{P}_3\kappa^{-1}\left[-2C\kappa^{-1}(\hat{P}_-\hat{q}_1-\hat{q}_1\hat{P}_-)\hat{e}_1+\hat{e}_1\left(-2\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}-1\right)-4\kappa^{-1}\hat{q}_1(e_1P_-)\right]\\+\left[-2C\kappa^{-1}\hat{e}_2(\hat{q}_2\hat{P}_+-\hat{P}_+\hat{q}_2)+\hat{e}_2\left(-2\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}-1\right)-4\kappa^{-1}\hat{q}_2(e_2P_+)\right],\end{gathered}$$

$$C=\kappa(\kappa-1)^{-1}\ln\kappa\,,\qquad \Lambda\ -$$

– параметр обрезания.

Диаграмма рис.2г дает (пользуемся выражением для собственно-энергетической функции электрона в приложении III)

$$\hat{e}_2(\hat{P}_3-m)^{-1}\left[A(\hat{P}_3-m)+B\right](\hat{P}_3-m)^{-1}\hat{e}_1,\quad A=2\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+C(\kappa-1)^{-1}\times$$
$$\times(-2\kappa+4)+5-2\kappa(\kappa-1)^{-1};\ B=-6\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}-3-2\kappa(\kappa-1)^{-1}+C(6\kappa-4)(\kappa-1)^{-1}.$$

Учитывая контрчлены от перенормировки массы электрона и его волновой функции [8], получим для суммарного вклада в R_1, от диаграмм рис.2б, 2в, 2г:

$$\begin{gathered}2C\kappa^{-2}\left[\hat{e}_2(\hat{q}_2\hat{P}_+-\hat{P}_+\hat{q}_2)\hat{P}_3\hat{e}_1+\hat{e}_2\hat{P}_3(\hat{P}_-\hat{q}_1-\hat{q}_1\hat{P}_-)\hat{e}_1\right]+4\kappa^{-2}\left[(e_2P_+)\times\right.\\\left.\times\hat{q}_2\hat{P}_3\hat{e}_1+(e_1P_-)\hat{e}_2\hat{P}_3\hat{q}_1\right]+\kappa^{-1}\left(2C-10-4\ln\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\hat{e}_2\hat{P}_3\hat{e}_1.\end{gathered} \tag{7}$$

Отсылая за деталями более подробных вычислений к приложениям I, IУ, мы приведем окончательное выражение для величины $\mathcal{P}(\kappa,\tau)$ в приближении (I):

$$\begin{gathered}4\mathcal{P}(\kappa,\tau)=\frac{\tau}{\kappa}\left[4(\varrho-1)\ln\frac{\lambda^2}{m^2}-8C\varrho+2\pi^2+2C-10\right]+(\pi^2-\varrho^2)\left(-2-\right.\\\left.-\frac{\tau}{\kappa}-\frac{2\kappa}{\tau}\right)+\left(\frac{\pi^2}{3}+4C\varrho-\varrho^2\right)\left(-2+\frac{\tau}{\kappa}-\frac{2\kappa}{\tau}\right)+4\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{C^2}{2}\right)\left(2+\frac{\tau}{\kappa}+\frac{2\kappa}{\tau}\right)+\\+4C\left(1+\frac{\tau}{\kappa}\right)-4\varrho+4\frac{\tau}{\kappa},\end{gathered} \tag{8}$$

где $\varrho=\ln S/m^2$, $C=\ln\kappa$.

Полученная нами величина $\mathcal{P}(\kappa,\tau)$ согласуется с результатами [I]. Учет излучения мягких ($\omega<\Delta\varepsilon\ll\varepsilon$) в системе центра инерции e^+e^- пары фотонов приводит (см. приложение У) к следующему выражению

$$\left(d\sigma/dO_1\right)^{soft}=\left(d\sigma_0/dO_1\right)\left(-\frac{\alpha}{\pi}\right)\left\{2(1-\varrho)\ln\frac{m\Delta\varepsilon}{\lambda\varepsilon}-\frac{1}{2}\varrho^2+\frac{\pi^2}{6}\right\} \tag{9}$$

$d\sigma_0/dO_1=(\alpha^2/2S)U$ борновское сечение аннигиляции e^+e^- в два фотона. Суммируя (4) (с учетом (8)) и (9), получим для сечения $e^+e^-\to\gamma\gamma$ с учетом излучения виртуальных и мягких реальных фотонов:

$$d\sigma/dO_1 = (\alpha^2/2s)\Big\{ u\Big[1-\frac{\alpha}{\pi}\Big(2(1-g)\ln\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}-\frac{\pi^2}{3}+\frac{3}{2}(1-g)\Big)\Big]+\frac{\alpha}{\pi}\Big[\Big(1+$$
$$+\frac{3\tau}{2\kappa}\Big)(\ln\kappa-g)+\Big(1+\frac{3\kappa}{2\tau}\Big)(\ln\tau-g)+\Big(1+\frac{\kappa}{\tau}+\frac{\tau}{2\kappa}\Big)(\ln\kappa-g)^2+$$
$$+\Big(1+\frac{\tau}{\kappa}+\frac{\kappa}{2\tau}\Big)(\ln\tau-g)^2\Big]\Big\} \qquad (I0)$$

Здесь $\Delta\varepsilon$ - максимальная энергия мягкого (недетектируемого) фотона в с.ц.и.

$\kappa=(s/m^2)\sin^2\theta/2$, $\tau=(s/m^2)\cos^2\theta/2$, θ - угол в с.ц.и. между импульсом фотона $\vec{q}_1$, и направлением импульса начального электрона $\vec{p}_-$, $s = 4\varepsilon^2$, ε - энергия одного из пучков в с.ц.и. Результат (I0) согласуется также с приведенным в работе Берендса, Гастманса [3].

2. В этом разделе мы получим аналитические выражения для различных распределений в процессе аннигиляции e^+e^- пары в три фотона в приближении (I). Наш метод вычислений близок к использованному Гешкенбейном и Терентьевым [4]. Подробно он изложен в работе одного из нас [9] при вычислении распределений в процессе $e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma$. Сечение процесса $e^+e^-\to 3\gamma$, просуммированное по спиновым состояниям фотонов и усредненное по спинам e^+e^- пары, имеет вид [4]:

$$d\sigma=\frac{(4\pi\alpha)^3}{s}\cdot\frac{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_++p_--q_1-q_2-q_3)}{3!\,(2\pi)^9\,(2s)}\,\frac{d^3q_1\,d^3q_2\,d^3q_3}{2\omega_1\,2\omega_2\,2\omega_3}\;s\,\overline{|M|^2}. \qquad (II)$$

Входящий в (II) квадрат модуля матричного элемента процесса $e^+e^-\to 3\gamma$ $|M|^2$ может быть получен из аналогичной величины для процесса двойного комптоновского рассеяния $e^-\gamma\to e^-\gamma\gamma$, найденной Мандлем и Скирмом [2]:

$$\overline{|M|^2}=\frac{m^2}{4}\sum_{spin}|M|^2=-2(ab-c)\big[(a+b)(x+z)-ab+c-8\big]+2x(a^2+b^2)+$$
$$+8c-4xA^{-1}B^{-1}\big[(A+B)(1+x)-(aA+bB)(2+zx^{-1}(1-x))+x^2(1-z)+2z\big]+2g\big[ab+c(1-x)\big], \qquad (I2)$$

где

$a=\sum \kappa_i^{-1}$, $b=\sum(\kappa_i')^{-1}$, $c=\sum(\kappa_i\kappa_i')^{-1}$, $x=\sum\kappa_i$, $z=\sum\kappa_i\kappa_i'$,

$A=\kappa_1\kappa_2\kappa_3$, $B=\kappa_1'\kappa_2'\kappa_3'$, $g=\sum(\kappa_i'\kappa_i^{-1}+\kappa_i(\kappa_i')^{-1})$

$\kappa_i=p_-q_i/m^2$, $\kappa_i'=p_+q_i/m^2$, i = I,2,3.

оставляя в (I2) лишь члены, дающие вклад в сечение в пределе $(m/\varepsilon)^2 \ll$ I, перепишем его в виде

$$(s/m^2)\,\overline{|M|^2}=\frac{s^2(\kappa_1^2+\kappa_1'^2)}{m^4\kappa_2\kappa_3\kappa_2'\kappa_3'}-\frac{2s}{m^2\kappa_1^2}\Big(\frac{\kappa_3'}{\kappa_2'}+\frac{\kappa_2'}{\kappa_3'}\Big)-$$
$$-\frac{2s}{m^2\kappa_1'^2}\Big(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}+\frac{\kappa_2}{\kappa_3}\Big)+(1\to2,2\to3,3\to1)+(1\to3,3\to2,2\to1). \qquad (I3)$$

Преобразуем фазовый объем конечных частиц к виду

$$\frac{d^3q_1\,d^3q_2\,d^3q_3}{s\;2\omega_1\cdot2\omega_2\cdot2\omega_3}\,\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9}\,\delta^{(4)}(p_++p_--q_1-q_2-q_3)=(4\pi)^{-4}\,\nu_1d\nu_1\,\nu_2d\nu_2\,dz_1dz_2\,d\varphi\,\times$$
$$\times\delta\big[4(1-\nu_1-\nu_2)+2\nu_1\nu_2(1-\rho)\big],\quad \rho=z_1z_2-\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\cos\varphi, \qquad (I4)$$

где φ - угол между плоскостями $\vec{q}_1\vec{p}_-$ и $\vec{q}_2\vec{p}_-$, $z_{1,2}$ - косинусы углов вылета фотонов q_1, q_2 к направлению импульса начального электрона $\vec{p}_-$, $\nu_i=\omega_i/\varepsilon$ - доли энергий конечных фотонов. Выполняя интегрирование по φ в (I4) с помощью δ - функции, (I4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(4\pi)^{-4}d\nu_1d\nu_2\,dz_1dz_2\big[1-a^2-z_1^2-z_2^2+2az_1z_2\big]^{-1/2},\quad a=\frac{2(1-\nu_1-\nu_2)+\nu_1\nu_2}{\nu_1\nu_2}. \qquad (I4a)$$

Пользуясь (I4a), а также следующими из определения углов и законов сохранения энергии импульса соотношениями

$$\kappa_i(s/m^2)^{-1}=\frac{1}{4}\nu_i(1-z_i\beta),\ \kappa_i'(s/m^2)^{-1}=\frac{1}{4}\nu_i(1+z_i\beta),\ 1-\beta^2=4m^2/s,$$
$$\nu_1+\nu_2+\nu_3=2,\quad \nu_1z_1+\nu_2z_2+\nu_3z_3=0 \qquad (I5)$$

получаем из (II) следующее распределение по энергиям конечных частиц:

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu_1d\nu_2}=\frac{2\alpha^3}{3s}\big[F_{123}+F_{312}+F_{231}\big],\quad F_{123}=\Phi_{123}+\varphi_{123}, \qquad (I6)$$

где

$$\Phi_{123}=\int_{-1}^{1}dz_2\int_{z_-}^{z_+}\frac{dz_1}{[(z_+-z_1)(z_1-z_-)]^{1/2}}\,\frac{\nu_3^2+(\nu_1z_1+\nu_2z_2)^2}{\nu_1^2\nu_2^2(1-z_1^2\beta^2)(1-z_2^2\beta^2)},$$

$$\varphi_{123}=\frac{-2m^2}{s}\int_{-1}^{1}\frac{dz_2}{(1-\beta z_2)^2}\int_{z_-}^{z_+}\frac{dz_1}{[(z_+-z_1)(z_1-z_-)]^{1/2}}\Big[\frac{\nu_1(1+z_1)}{\nu_3(1+\beta z_3)}+\frac{\nu_3(1+z_3)}{\nu_1(1+\beta z_1)}\Big],$$

$z_\pm=z_2a\pm[(1-z_2^2)(1-a^2)]^{1/2}$.

В работе [4] учтено лишь первое слагаемое в (I3). Остальные слагаемые отвечают случаю, когда один из фотонов распространяется вдоль оси пучков. Интегрирование по z_1, z_2 в (I6) дает (см. приложение УI)

$$F_{123} = -(\nu_1^{-2}+\nu_2^{-2})\ln\frac{s}{m^2} + \frac{[\nu_3^2+(\nu_1-\nu_2)^2]}{2\nu_1^2\nu_2^2}\cdot\frac{\nu_1\nu_2}{(1-\nu_1)(1-\nu_2)}\ln\frac{s(1-\nu_1)(1-\nu_2)}{m^2\nu_1\nu_2} +$$

$$+\frac{[\nu_3^2+(\nu_1+\nu_2)^2]}{2\nu_1^2\nu_2^2}\,\frac{\nu_1\nu_2}{1-\nu_3}\ln\frac{s(1-\nu_3)}{m^2\nu_1\nu_2} - \nu_3^{-2}(1-\nu_1)^{-1}(1-\nu_2)^{-1}[(1-\nu_1)^2+(1-\nu_2)^2], \quad (17)$$

Последнее слагаемое в (I7) отвечает членам в (I3) $\sim(m^2/s)$. Отметим, что распределение по энергиям конечных частиц (I6,I7) (Далиц - плот) можно переписать в терминах углов между фотонами в плоскости, образованной импульсами конечных фотонов в с.ц.и., если воспользоваться соотношениями

$$\nu_i = \cos\frac{\theta_{jk}}{2}\left[\sin\frac{\theta_{ik}}{2}\sin\frac{\theta_{ij}}{2}\right]^{-1} \qquad (I8)$$

где θ_{ik} - углы в с.ц.и. между i-м и k-м фотоном,

$0 < \theta_{ik} < \pi$, $\theta_{12}+\theta_{13}+\theta_{23} = 2\pi$

Заметим, что углы эти связаны с частотами следующим образом

$$\cos\theta_{ik} = 1 - \frac{2(1-\nu_j)}{\nu_i\nu_k},$$

Перейти от переменных ν_i к переменным θ_{ik} можно, пользуясь соотношением

$$d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3\,\delta(\Sigma\nu-1) = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\theta_{12}}{2}\cos\frac{\theta_{13}}{2}\cos\frac{\theta_{23}}{2}}{\left[\sin\frac{\theta_{12}}{2}\sin\frac{\theta_{13}}{2}\sin\frac{\theta_{23}}{2}\right]^2}\,d\theta_{12}\,d\theta_{13}\,d\theta_{23}\,\delta(2\pi-\Sigma\theta_{ik}). \qquad (I8a)$$

Результаты численного интегрирования (I7) для энергии $2\varepsilon = 3$ Гэв приведены на диаграмме рис.3 в терминах наибольшей и наименьшей эффективной массы фотонов[7].

Заметим попутно, что кривые, соответствующие фиксированной инвариантной массе двух фотонов на этой диаграмме даются уравнением

$$m_{12}^2 = (q_1+q_2)^2 = s\,\mathrm{ctg}\frac{\theta_{23}}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\theta_{13}}{2}\;. \qquad (I8б)$$

Выражение (I7) позволяет получить полное сечение аннигиляции e^+e^- пары в три фотона в кинематике, когда энергии фотонов превышают некоторую величину $m \ll \Delta\varepsilon \ll \varepsilon$:

$$\sigma^{(3)} = \frac{2\alpha^3}{s}\left\{2(\rho-1)^2\ln\frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} - (\rho-1)^2 + 3 + \zeta(3)\right\}, \quad \rho = \ln\frac{s}{m^2}. \qquad (I9)$$

Детали интегрирования приведены в приложении (УII).
Прибавляя к этому результат интегрирования (I0) по углам вылета фотонов (см. приложение УIII)

$$\sigma^{(2)} = \frac{2\pi\alpha^2}{s}(\rho-1) + \frac{2\alpha^3}{s}\left\{2(\rho-1)^2\ln\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{3}\rho^3 + \frac{3}{2}(\rho-1)^2 - \frac{3}{2}\rho^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{3}(\rho-1) + 4\zeta(3) - 1\right\} \qquad (20)$$

получим для полного сечения аннигиляции e^+e^- в фотоны с точностью до членов $\sim\alpha^3$

$$\sigma = \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)} = \frac{2\pi\alpha^2}{s}(\rho-1) + \frac{2\alpha^3}{s}\left\{\frac{1}{3}\rho^3 - \rho^2 + \rho\left(\frac{\pi^2}{3}-1\right) + 5\zeta(3) - \frac{\pi^2}{3} + \frac{7}{2}\right\} \quad (21)$$

Инклюзивное сечение по энергии и углу вылета одного из фотонов имеет вид

$$\nu^2\sin^2\theta\,\frac{d^2\sigma}{d\nu\,d\cos\theta} = \frac{2\alpha^3}{3s}\left\{k_1\rho + k_2\ln\left(\frac{\nu^2\sin^2\theta}{4(1-\nu)}\right) + k_3\ln\left(\frac{(1-\nu\sin^2\frac{\theta}{2})^2}{1-\nu}\right) + k_4 + \theta\to\pi-\theta\right\}$$

где

$$k_1 = \frac{\nu^2(1+\cos^2\theta)}{2(1-\nu+\frac{\nu^2}{4}\sin^2\theta)} + \frac{1+(1-\nu)^2-\frac{\nu^2}{2}\sin^2\theta}{1-\nu} - \frac{1-\nu+\frac{\nu^2}{2}\sin^2\theta}{(1-\nu\sin^2\theta/2)^2} + \frac{\nu^4\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)}{8(1-\nu)(1-\nu+\frac{\nu^2}{4}\sin^2\theta)},$$

$$k_2 = \frac{\nu^2(1+\cos^2\theta)}{2(1-\nu+\frac{\nu^2}{4}\sin^2\theta)}, \quad k_3 = \frac{-(1-\nu+\frac{\nu^2}{2}\sin^2\theta)}{(1-\nu\sin^2\theta/2)^2}, \quad k_4 = -\frac{(1-\nu-\frac{\nu^2}{4}\sin^2\theta)}{(1-\nu\sin^2\theta/2)^2} - \qquad (22)$$

$$-\nu^2\sin^2\theta\left[(1-\nu\sin^2\theta/2)(\nu\sin^2\theta/2)^{-1} + (\nu\sin^2\theta/2)(1-\nu\sin^2\theta/2)^{-1}\right](2(1-\nu))^{-1}.$$

Приведем выражение для сечения аннигиляции e^+e^- в два фотона, учитывающее углы расколлинеарности между фотонами, не превышающие некоторого $\Delta\theta \ll 1$
(см. приложение IX)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega}(1+\delta), \quad \frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s}\cdot\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\delta = \frac{2\alpha}{\pi}\Big\{(\varrho-1)\Big(\ln\frac{\Delta\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{4}\Big) + \frac{\pi^2}{[illegible]} - \big(\ln [illegible]\big)^2 + [illegible] - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\sin^2\theta}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big\} + \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{\sin^2\theta}{2(1+\cos^2\theta)}\Big\{\Big(-1+\frac{1}{\sin^2\theta/2}\Big)[illegible] \times \ln\cos\theta/2 + \Big(-2+\frac{4}{\sin^2\theta/2}+\frac{2}{\cos^2\theta/2}\Big)\big(\ln [illegible]\big)^2 + \Big([illegible] + \frac{[illegible]}{[illegible]\theta/2} + \frac{[illegible]}{[illegible]}\Big)[illegible]\Big\} \qquad (23)$$

На рис.4 мы приводим зависимость поправки δ от $\Delta\theta$ [illegible] $2\varepsilon = 3$ Гэв и угла $\theta = 90^0$.

Инклюзивное по углу вылета фотона сечение $e^+e^- \to$ [illegible], учитывающее поправки за счет излучения виртуальных и реальных фотонов с точностью до членов $\sim\alpha^3$, для случая $\eta \ll 1$, где $\eta\varepsilon$ есть порог регистрации фотонов имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{\pi\alpha^2}{s}\Big(\frac{1+z^2}{1-z^2}\Big) + \frac{\alpha^3}{s}\Big\{-\Big(\frac{1+z^2}{1-z^2}\Big)\Big[-\frac{\pi^2}{3}+\frac{3}{2}(1-\varrho)\Big] + \Big(1+\frac{3(1+z)}{2(1-z)}\Big)\ln\frac{1-z}{2} + \Big(1+\frac{1-z}{1+z}+\frac{1+z}{2(1-z)}\Big)\Big(\ln\frac{1-z}{2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{1+z^2}{1-z^2}\Big)(1-\varrho)\ln\frac{1-z}{2} + \frac{2(1-\varrho)}{1-z^2}\ln\eta - 2 - \frac{2(2+z^2)}{1-z^2}\varrho - \frac{2}{1-z^2}\ln\frac{1-z}{2} + \frac{2(2-z)(1+z^2)}{z(1-z)^2}\ln\frac{1-z}{2}\ln\frac{1+z}{2} + \frac{2-z^3}{z(1-z^2)}\Big(\ln\frac{1+z}{2}\Big)^2 + \frac{2(4-z+z^2)}{z(1-z)(1-z^2)}\varrho\ln\frac{1+z}{2} - \frac{\pi^2}{3(1-z^2)} - \frac{2z^2}{1-z^2}\int\limits_0^{\frac{1-z}{2}}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big\} + (z\to -z). \qquad (24)$$

Точное выражение для любого η приведено в приложении X.

Авторы благодарны В.Н. Байеру, Г.У.Мартину, А.П.Онучину и В.С. Фадину за интерес к работе и обсуждения.

Литература

1. I. Harris and L.M. Brown Phys. Rev. 105 (1957), 1656; L.M. Brown and R.P. Feynman Phys. Rev. 85 (1952), 231.
2. F. Mandl and T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. A215 (1952), 497.
3. F.A. Berends, R. Gastmans Nucl. Phys. B61 (1973), 414.
4. Б.В.Гешкенбейн, М.В.Терентьев ЯФ 8 №3 стр.550 (I968) (Sov. J. Nucl. Phys. 8 (1969) 321)
5. Y.S. Tsai Phys. Rev. 137B (1965), 730;
6. Andreassi et al.
7. J. Heintze препринт DESY 75/34; B.H. Wiik препринт DESY 75/37.
8. Релятивистская квантовая теория II, §II6 формула 7а.
9. Э.А.Кураев, Г.В.Меледин, препринт ИЯФ № 91-76.
IO. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий Квантовая электродинамика 1969, §54.
II. Е.Лившиц, Л.Питаевский Релятивистская квантовая теория II §II6.
I2. Г.Б.Двайт Таблицы интегралов.
I3. С.Я.Гузенко, препринт ХФТИ 74-3I.

П р и л о ж е н и е I

Приведем таблицу интегралов, встречающихся при вычислении амплитуд, соответствующих диаграммам рис.2. Вычисления проводятся в пренебрежении членами $\sim m^2/s$. Обозначения[I]:

$$(1)=(P_--k)^2-1\,,\ (2)=(P_++k)^2-1\,,\ (k)=(P_3-k)^2-1\,,\ (0)=k^2-\lambda^2. \qquad (\text{I.1})$$

Здесь λ - "масса" фотона. Закон сохранения, инварианты, вектора:

$$P_++P_-=q_1+q_2\,,\ \kappa=2P_-q_1\,,\ \tau=2P_+q_1\,,\ P_+^2=P_-^2=1\,,\ q_1^2=q_2^2=0, \qquad (\text{I.2})$$

$$Q=\tfrac{1}{2}(P_++P_-),\ P_0=\tfrac{1}{2}(P_--P_+)\,,\ q_0=\tfrac{1}{2}(q_2-q_1)\,,\ P_3=P_--q_1\,,\ P_4=P_--q_2\,.$$

Обозначения для интегралов $d_4k\equiv(2i/\pi^2)d^4k$

$$A=\int d_4k/(1)(2)\,,\ B^1=\int d_4k/(1)(k)\,,\ C^1=\int d_4k/(1)(0)\,,\ D=\int d_4k/(0)(k),$$

$$F=\int d_4k/(1)(2)(k),\ G^1=\int d_4k/(1)(k)(0),\ H=\int d_4k/(1)(2)(0),\ J=\int d_4k/(1)(2)(0)(k). \qquad (\text{I.3})$$

Величины B^2 , C^2 , G^2 получаются из B^1 , C^1 , G^1 заменой (I) $\to$ (2); Интегралы, получающиеся из приведенных добавлением в числителях k_ρ , $k_\rho k_\sigma$, $k_\rho k_\sigma k_\tau$ обозначим буквами в левых частях I.3 с приписыванием индексов ρ , $\rho\sigma$, $\rho\sigma\tau$. Например

$$G^2_{\rho\sigma}=\int d_4k\, k_\rho k_\sigma/(2)(k)(0)=\frac{2i}{\pi^2}\int d^4k\, k_\rho k_\sigma/(2)(k)(0).$$

Стандартное вычисление [I] приводит к результату, справедливому в пределе $m^2/s\to 0$ (I):

$$A=-2(\ln\lambda^2-\rho+1)\,,\ A_\rho=-2P_{0\rho}(\ln\lambda^2-\rho+\tfrac{1}{2})\,,C^1=C^2=-2(\ln\lambda^2+1)$$

$$C^1_\rho=-P_{-\rho}(\ln\lambda^2-\tfrac{1}{2}),\ D=-2(\ln\lambda^2-c+1)\,,B^1=B^2=-2(\ln\lambda^2-1),B^1_\rho=$$

$$=-(P_-+P_3)_\rho(\ln\lambda^2-\tfrac{3}{2}),\ D_\rho=-P_{3\rho}(\ln\lambda^2-c+\tfrac{1}{2}),\ F=\tfrac{1}{3}(\pi^2-\rho^2),\ F_\rho=FP_{0\rho}+$$

$$+q_{0\rho}(F+\tfrac{1}{3}(4\rho-8)),\ H=\tfrac{1}{s}(-\rho^2+\tfrac{4}{3}\pi^2+2\rho\ln\lambda^2),\ H_\rho=-\tfrac{4}{3}\rho P_{0\rho},\ G^1=G^2=$$

$$=\frac{2}{\kappa}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{c^2}{2}\right),\ G^1_\rho=-q_{1\rho}\frac{(2c-4)}{\kappa}+P_{-\rho}\left(G-\frac{2c}{\kappa}\right),\ J=\frac{2}{\kappa s}\left(\rho\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}-\frac{\pi^2}{2}\right),$$

$$J_\rho=\frac{P_{0\rho}}{2\kappa\tau}\left[-3F+(3-2\kappa)Z+2\kappa G\right]+\frac{q_{0\rho}}{2\kappa\tau}\left[-F(3-2\kappa)+3Z-2\kappa G\right],\ Z=H+\kappa J,$$

$$J_{\rho\sigma}=\tfrac{1}{3}(G^1_\rho-G^2_\rho)Q_\sigma+\tfrac{1}{\tau}(G_1^\rho+G_2^\rho-F_\rho-Z_\rho)P_{0\sigma}+\tfrac{1}{2\kappa\tau}\big[-(3-2\kappa)F_\rho-$$

$$-\kappa(G_1^\rho+G_2^\rho)+3Z_\rho\big]P_{3\sigma}+\Sigma S_{\rho\sigma}\,,\ \Sigma=\frac{1}{4\tau}\left[3(F+Z)-2\kappa G\right],$$

$$S_{\rho\sigma}=\delta_{\rho\sigma}+\frac{3}{\kappa\tau}(P_{0\rho}P_{0\sigma}+q_{0\rho}q_{0\sigma})+\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\tau}\right)(P_{0\rho}q_{0\sigma}+P_{0\sigma}q_{0\rho}),$$

$$F_{\rho\sigma}=FP_{3\rho}P_{3\sigma}+\tfrac{1}{3}(4\rho-8)(P_{0\rho}q_{0\sigma}+P_{0\sigma}q_{0\rho})-\tfrac{1}{3}(2\rho-6)Q_\rho Q_\sigma+\tfrac{1}{3}(6\rho-14)q_{0\rho}q_{0\sigma}-$$

$$-\tfrac{1}{2}(\ln\lambda^2-\rho+\tfrac{3}{2})\delta_{\rho\sigma},\ H_{\rho\sigma}=-\tfrac{2}{3}\rho P_{0\rho}P_{0\sigma}-\tfrac{1}{3}(2\rho-4)Q_\rho Q_\sigma-\tfrac{1}{2}(\ln\lambda^2-\rho+\tfrac{3}{2})\delta_{\rho\sigma},$$

$$G^1_{\rho\sigma}=\tfrac{1}{\kappa}(\kappa G-3c+1)P_{-\rho}P_{-\sigma}+\tfrac{1}{\kappa}(5-2c)(P_{-\rho}q_{1\sigma}+P_{-\sigma}q_{1\rho})+\tfrac{1}{\kappa}(c-2)q_{1\rho}q_{1\sigma}+$$

$$+\tfrac{1}{2}(-\ln\lambda^2+c-\tfrac{3}{2})\delta_{\rho\sigma},$$

$$J_{\rho\sigma\tau}=\tfrac{1}{3}(G^1_{\sigma\tau}-G^2_{\sigma\tau})Q_\rho+\tfrac{1}{\tau}P_{0\rho}(G^1_{\sigma\tau}+G^2_{\sigma\tau}-F_{\sigma\tau}-Z_{\sigma\tau})+\tfrac{1}{2\kappa\tau}P_{3\rho}\times$$

$$\times(3Z_{\sigma\tau}+(\kappa-\tau)F_{\sigma\tau}-\kappa G^1_{\sigma\tau}-\kappa G^2_{\sigma\tau})+\Sigma_\sigma S_{\rho\tau}+\Sigma_\tau S_{\rho\sigma}\equiv$$

$$\equiv\alpha_{\sigma\tau}Q_\rho+\beta_{\sigma\tau}P_{0\rho}+\gamma_{\sigma\tau}P_{3\rho}+\Sigma_\sigma S_{\rho\tau}+\Sigma_\tau S_{\rho\sigma}\,.$$

$$\Sigma_\sigma=F_\sigma-\alpha_{\rho\sigma}Q_\rho-\beta_{\rho\sigma}P_{0\rho}-\gamma_{\rho\sigma}P_{3\rho}\,. \qquad (\text{I.4})$$

Здесь $\rho=\ln s,\ c=\ln\kappa,\ m^2=1$

Отметим свойства тензора $S_{\rho\sigma}$:

$$S_{\rho\sigma}=S_{\sigma\rho}\,,\ S_{\sigma\sigma}=1\,,\ S_{\rho\sigma}P_{3\rho}=S_{\rho\sigma}P_{0\rho}=S_{\rho\sigma}q_{0\rho}=0.$$

В работе Браун, Фейнмана [I] в слагаемом $\sim P_{3\rho}Z_{\sigma\tau}$ в $J_{\rho\sigma\tau}$ напечатан неверный знак.

Приложение II

Для вершинной функции, входящей в фейнмановские графики рис.2б, в, пользуясь интегралами приложения I, получим выражение

$$\frac{8i}{4\pi^2}\int\frac{d^4k\,\gamma_\mu(p_3-k+m)e(p_--k+m)\gamma_\mu}{(0)(k)(1)}=\gamma_\mu(p_3+m)e(p_-+m)\gamma_\mu G-$$

$$-G'_\sigma\left[\gamma_\mu\gamma_\sigma e(p_-+m)\gamma_\mu+\gamma_\mu(p_3+m)e\gamma_\sigma\gamma_\mu\right]+G'_{\sigma\rho}\gamma_\mu\gamma_\sigma e\gamma_\rho\gamma_\mu=$$

$$=-\frac{2c}{k}(\hat p_-\hat q-\hat q\hat p_-)\hat e-\hat e(2\ln\Lambda^2+1)-\frac{4}{k}\hat q(e p_-)$$

(II.I)

Заметим, что выражение, приведенное в приложении II в работе [1] неверно.

Приложение III

Вычисление с помощью интегралов приложения I вклада диаграммы рис.2 дает

$$\frac{8i}{4\pi^2}\int\frac{d^4k\,\gamma_\mu(p_3-k+m)\gamma_\mu}{(0)(k)}=(4m-2\hat p_3)(-2\ln\Lambda^2/m^2+2c-2)+2\hat p_3(-\ln\Lambda^2/m^2+$$

$$+\frac{1}{2}+c)=A(\hat p_3-m)+B \qquad \text{(III.I)}$$

Регуляризуя III.I, (вычитая это выражение при $\hat p_3=m$), а также учитывая перенормировку волновых функций внешних электрона и позитрона (что сводится к добавлению $-k^{-1}\hat e_2\hat p_3\hat e_1\times$ $\times(2\ln\Lambda^2/m^2+9+4\ln\lambda^2/m^2)$, [4]), получим для суммы вкладов трех диаграмм рис.2б,в,г:

$$2ck^{-2}\left[\hat e_2(\hat q_2\hat p_+-\hat p_+\hat q_2)\hat p_3\hat e_1+\hat e_2\hat p_3(\hat p_-\hat q_1-\hat q_1\hat p_-)\right]+4k^{-2}\left[\hat q_2\hat p_3\hat e_1(e_2p_+)+\right.$$

$$\left.+\hat e_2\hat p_3\hat q_1(e_1p_-)\right]+k^{-1}(2c-4\ln\lambda^2/m^2-10)\,\hat e_2\hat p_3\hat e_1. \qquad \text{(III.2)}$$

Приложение IУ

Нам необходимо вычислить интерференцию борновской амплитуды с амплитудами рис.2: $P(k,\tau)=\frac{1}{32}\,Sp(-\hat p_+)R'\hat p_-(\bar R+\bar S)$, где $\bar R_0+\bar S_0=-\frac{1}{k}\hat e_1\hat p_3\hat e_2-\frac{1}{\tau}\hat e_2\hat p_4\hat e_1$,

а в интегралах, соответствующих $R^{(I)}$ подразумеваем включенным множитель $2i/\pi^2$. При этом оказываются полезными следующие тензорные структуры (по спинам фотонов суммируем):

$$-p_+e_2p_3e_1(\bar R-\bar S)=2\tau\ ;\ p_+p_-\gamma_\sigma e_2p_3e_1p_-(\bar R+\bar S)=2(sp_3^\sigma+kp_-^\sigma+kp_+^\sigma)-4sp_-^\sigma;$$

$$-p_+e_2\gamma_\sigma e_1p_-(\bar R+\bar S)=2(p_--p_+)^\sigma-\frac{2s}{k}p_3^\sigma-\frac{4s}{k}p_4^\sigma;\ -p_+e_2p_3e_1\gamma_\sigma p_+p_-(\bar R+\bar S)=$$

$$=2(sp_3-kp_+-kp_-)^\sigma+4sp_+^\sigma;\ -p_+p_-\gamma_\rho e_2\gamma_\sigma e_1p_-(\bar R+\bar S)=-2s\delta_{\rho\sigma}+4p_-^\sigma p_+^\rho-4p_+^\sigma p_-^\rho+$$

$$+4p_-^\rho(p_++p_-)^\sigma-\frac{4s}{k}p_-^\rho p_3^\sigma-\frac{8s}{\tau}p_-^\rho p_4^\sigma;\ p_+\gamma_\sigma e_1p_3e_2\gamma_\rho p_-(\bar R+\bar S)=-2k\delta_{\rho\sigma}+$$

$$+4(p_+^\rho p_3^\sigma-p_3^\rho p_+^\sigma)+4p_3^\rho(p_+-p_-)^\sigma+\frac{4s}{k}p_3^\rho p_3^\sigma+2s\delta_{\rho\sigma}-4(p_+^\rho p_-^\sigma+p_-^\rho p_+^\sigma)+$$

$$+8p_-^\rho p_+^\sigma;\ p_+e_2\gamma_\sigma e_1\gamma_\rho p_+p_-(\bar R+\bar S)=-\frac{4s}{k}(p_+^\sigma p_3^\rho-p_3^\sigma p_+^\rho)-2s\delta_{\rho\sigma}+\frac{4s}{k}p_+^\sigma p_3^\rho+$$

$$+4p_+^\sigma(p_-+p_+)^\rho+\frac{8s}{\tau}p_4^\sigma p_+^\rho;\ -p_+\gamma_\tau e_1\gamma_\sigma e_2\gamma_\rho p_-(\bar R+\bar S)=\frac{16}{\tau}p_-^\rho p_4^\sigma p_+^\tau+$$

$$+\frac{8}{k}p_3^\rho(p_+^\sigma p_-^\tau+p_+^\tau p_-^\sigma)-\frac{4s}{k}\delta_{\sigma\tau}p_3^\rho-\frac{4}{k}\cdot\frac{1}{4}Sp\,p_+\gamma_\tau\gamma_\rho p_3p_-\gamma_\sigma.$$

(IУ.)

Здесь в левых частях равенств подразумевается $\frac{1}{4}Sp$. Вклад членов, содержащих γ_σ будет ($q_0^2=p_0^2=-s/4$, $q_0p_0=(\tau-k)/4$):

$$(s/k\tau)\left[p_0(-s/k-2s/\tau)+q_0(2+2s/\tau-s/k)\right]\left[p_0(-sF-(\tau-k)z+2kG)+\right.$$

$$\left.+q_0(-(\tau-k)F+sz-2kG)\right] \qquad \text{(IУ.2)}$$

Вклад членов, содержащих $\gamma_{\rho\sigma}=a_1q_0^\rho q_0^\sigma+a_2p_0^\rho p_0^\sigma+a_3q_0^\rho q_0^\sigma+a_4(p_0^\rho q_0^\sigma+$ $+p_0^\sigma q_0^\rho)+\varepsilon\delta_{\rho\sigma}$

$$-2(s+k)F+s^2a_1-3s^2a_2+(k^2+2k\tau-\tau^2)a_3+(-2k^2+4k\tau+4\tau^2)a_4 \qquad \text{(IУ.3)}$$

Вклад членов, содержащих $J_{\rho\sigma\tau} = Q^{\rho}[n_1 (P_0, Q)^{\sigma\tau} + n_2 (q_0 Q)^{\sigma\tau}] +$

$$+ P_0^{\rho}[m_1 P_0 P_0 + m_2 QQ + m_3 q_0 q_0 + m_4 (P_0, q_0) + m_5 S]^{\sigma\tau} + P_3^{\rho}[g_1 P_0 P_0 +$$

$$+ g_2 QQ + g_3 q_0 q_0 + g_4 (P_0, q_0) + g_5 S]^{\sigma\tau} + \varepsilon_\sigma S_{\rho\tau} + \varepsilon_\tau S_{\rho\sigma}$$

будет

$$-\frac{3}{4} s^2 n_1 + \frac{1}{4} s^2 n_2 + \frac{3}{4} s^2 m_1 + \frac{1}{4}(\kappa^2 - 4\kappa\tau + \tau^2) m_3 + \frac{1}{2} s(\kappa - 2\tau) m_4 + s m_5 + \frac{3}{2} s\kappa g_1 -$$

$$- \frac{1}{2}\kappa(\kappa + 3\tau) g_3 + \kappa(\kappa - 2\tau) g_4 + 2 s g_5 + s h_1 + (\tau - \kappa) h_2 \qquad (\text{IУ.4})$$

Здесь $(a,b)^{\rho\sigma} = a^{\rho} b^{\sigma} + a^{\sigma} b^{\rho}$, $F^{\rho} = h_1 P_0^{\rho} + h_2 q_0^{\rho}$.

В результате имеем

$$4 \mathcal{J}(\kappa, \tau) = (\tau/\kappa)[4(\rho - 1)\ln\lambda^2 - 8c\rho + 2\pi^2 + 2c - 10] + (\pi^2 - \rho^2)(-2 - \tau/\kappa - 2\kappa/\tau) +$$

$$\left(\frac{\pi^2}{3} + 4c\rho - \rho^2\right)(-2 + \tau/\kappa - 2\kappa/\tau) + 4\left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{c^2}{2}\right)(2 + \tau/\kappa + 2\kappa/\tau) + c\left(4 + \frac{4\tau}{\kappa}\right) - \qquad (\text{IУ.5})$$

$$-4\rho + 4\tau/\kappa, \quad c = \ln\kappa, \; d = \ln\tau, \; \rho = \ln s, \; m = 1$$

Приложение У

Излучение мягкого в с.ц.и. фотона (частоты ω, не превышающей $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$) рассчитывается стандартным образом [I, 3]. В результате

$$\frac{d\sigma^{soft}}{d\Omega_1} = \frac{\alpha^2}{2s} U \frac{\alpha}{\pi}\left[2(\rho - 1)\ln\left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}\right) + \rho - \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\pi^2}{3}\right] \qquad (\text{У.I})$$

Приложение УI

Интегрирование по z_3 проводится с помощью замены

$$t^2 = \frac{z_+ - z_3}{z_3 - z_-}, \; dz_3 = \frac{-2t(z_+ - z_-)dt}{(1+t^2)^2}, \; z_+ - z_3 = \frac{t^2(z_+ - z_-)}{1+t^2}, \; z_3 - z_- = \frac{z_+ - z_-}{1+t^2}$$

а также $\int_0^\infty dx[a + bx^2]^{-1} = \pi/2(ab)^{1/2}$. При этом получим $\int \equiv \int_{z_-}^{z_+}$

$$\int dz\, \mathcal{D}^{-1/2} = \pi, \quad \int dz\, \mathcal{D}^{-1/2}(1 \pm \beta z)^{-1} = \pi/(1 \pm \beta z_+)^{1/2}(1 \pm \beta z_-)^{1/2}$$

$$\int dz \cdot z\, \mathcal{D}^{-1/2} = \pi a, \quad \int dz (1 \pm \beta z)^{-2}\mathcal{D}^{-1/2} = \frac{1}{2}\pi(1 - a^2)[(1 \pm \beta z_+)(1 \pm \beta z_-)]^{-3/2} \qquad (\text{УI.I})$$

Здесь $\mathcal{D} = (z - z_-)(z_+ - z)$, $z_\pm = z_2 a \pm \sqrt{(1-a^2)(1-z_2^2)}$. Полезно соотношение

$$(1 \pm \beta z_+)(1 \pm \beta z_-) = (a \pm \beta z_2)^2 + (1 - \beta^2)(1 - a^2), \quad a = 1 - \frac{2(1-\nu_3)}{\nu_1 \nu_2}. \qquad (\text{УI.2})$$

При интегрировании по z_2 пользуемся ([I2], 380.00I, 0II, III)

$$\int dx\, X^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2\sqrt{aX} + 2ax + b|, \quad \int dx\, x^{-1} X^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left|\frac{2\sqrt{cX} + 2c + bx}{x}\right|,$$

$$\int x\,dx / X^{1/2} = \frac{X^{1/2}}{a} - \frac{b}{2a}\int dx\, X^{-1/2}, \quad X = ax^2 + bx + c, \quad a, c > 0 \qquad (\text{УI.3})$$

Приложение УII

Полное сечение $e^+e^- \to 3\gamma$ получается интегрированием $d^2\sigma/d\nu_1 d\nu_2$ по области (Далиц - плот) $\Delta \le \nu_i \le 1$, $\Sigma \nu_i = 2$. Вблизи границ $x_i = 1 - \nu_i \ll 1$ выражение для $d^2\sigma/d\nu_1 d\nu_2$ должно быть изменено:

$$\frac{-1}{(1-x_3)^2}\frac{x_1}{x_2} \to \frac{-1}{(1-x_3)^2} \cdot \frac{s x_3}{1 + s x_2 \frac{x_3}{1-x_3}}, \quad x_2 \ll 1;$$

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{x_1 x_2}\ln\frac{s x_1 x_2}{m^2(1-x_1)(1-x_2)} \to \frac{s}{2\sqrt{t^2+t}}\ln\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right), \; t = \frac{x_1 x_2 s}{4(1-x_1)(1-x_2)} \sim 1;$$

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{1-x_1-x_2}\ln\frac{s(1-x_1-x_2)}{m^2(1-x_1)(1-x_2)} \to \frac{s}{2\sqrt{\chi^2+\chi}}\ln\left(\sqrt{\chi+1} + \sqrt{\chi}\right), \; \chi = \frac{s x_3}{4x_1(1-x_1)} \sim 1.$$

Область интегрирования

$$\int d^2\nu = \int_0^{\Delta} dx_1 \int_{\Delta - x_1}^{1-\Delta} dx_2 + \int_{\Delta}^{1-\Delta} dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2$$

Приложение УIII

Вклад в полное сечение аннигиляции $e^+e^- \to 2\gamma$ в фотоны от борновской амплитуды и радиационной поправки к ней, учитывающей излучение виртуальных и мягких в с.ц.и. реальных фотонов будет

$$\sigma^{(2)}=\frac{\pi\alpha^2}{2s}\int_{-1}^{1}dz\left(\frac{1+z}{1-\beta z}+\frac{1-z}{1+\beta z}\right)\left[1-\frac{\alpha}{\pi}\left(2(\rho-1)\ln\frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon}-\frac{\pi^2}{3}\right)\right]+$$

$$+\frac{\alpha^3}{2s}\int_{-1}^{1}dz\left\{\left(1+\frac{1-z}{1+\beta z}+\frac{1+z}{2(1-\beta z)}\right)\ln^2\left(\frac{1-\beta z}{2}\right)-\left(1+\frac{3(1+z)}{2(1-\beta z)}\right)\ln\left(\frac{1-\beta z}{2}\right)+(z\to -z)\right\}=$$

$$=\frac{2\pi\alpha^2}{s}(\rho-1)-\frac{2\alpha^3}{s}(\rho-1)\left[2(\rho-1)\ln\frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon}-\frac{\pi^2}{3}\right]+\frac{2\alpha^3}{s}\left[-\frac{3}{2}+2\zeta(3)+\frac{1}{6}\rho^2+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}\rho^2+\frac{\pi^2}{6}\rho+\frac{\pi^2}{4}\right],\quad \rho=\ln s/m^2,\quad \zeta(3)=\sum_1^\infty n^{-3}=1{,}202.$$

Приложение IX

Будем считать для определенности, что угол расколлинеарности θ между фотонами I и 2 ($\theta=\widehat{\vec{q}_1,-\vec{q}_2}$) не превышает некоторой величины $\Delta\theta$, $\Delta\theta\ll 1$. Энергия и угол вылета третьего фотона должны при этом меняться в области, обеспечивающей $\theta\le\Delta\theta$. Найдем область изменения энергий фотонов. Заметим прежде, что величины $a_{ik}=1-\frac{2(1-\nu_j)}{\nu_i\nu_k}$, $i\ne j\ne k\ne i$ имеют смысл косинусов углов между импульсами фотонов i и k в с.ц.и.. Решая уравнение

$$a=1-\frac{2(1-\nu_3)}{\nu_1(2-\nu_3-\nu_1)}=-1+\frac{1}{2}\theta^2,\quad \theta\le\Delta\theta$$

относительно ν_1 получим следующую область изменения энергий фотонов

$$\int d\nu_3 d\nu_1=\int_{\Delta}^{\Delta\theta}d\nu_3\int_{1-\nu_3}^{1}d\nu_1+\int_{\Delta\theta}^{1}d\nu_3\int_{1-\frac{\nu_3}{2}+\frac{\nu_3}{2}\sqrt{}}^{1}d\nu_1+\int_{\Delta\theta}^{1}d\nu_3\int_{1-\nu_3}^{1-\frac{\nu_3}{2}-\frac{\nu_3}{2}\sqrt{}}$$

$$\sqrt{}=\sqrt{1-\frac{\Delta\theta^2}{\nu_3^2}(1-\nu_3)}\qquad\qquad (IX.I)$$

Здесь I-я область $\Delta<\nu_3<\Delta\theta$ отвечает изотропному излучению "мягкого" фотона 3. Вторая отвечает излучению фотона 3 произвольной энергии вдоль импульса фотона I, а третья - излучению вдоль фотона 2.

В пределе $\Delta\theta\to 0$ пределы интегрирования в (IX.I) сближаются. Неисчезающий в этом пределе вклад происходит от интегралов вида

$$\int_a^b\frac{dx}{\left[(\nu_0-x)^2+\frac{m^2}{s}\nu_3^2(1-z^2)\right]^{1/2}}=\begin{cases}\ln\frac{s}{m^2}+\ln\frac{4(b-\nu_0)(\nu_0-a)}{\nu_3^2(1-z^2)}, & a<\nu_0<b\\ 0 & (b,a)\not\ni\nu_0\end{cases}\qquad (IX.2)$$

Здесь $\nu_0=\frac{2(1-\nu_3)}{2-\nu_3(1+z)}$, $z\equiv z_1\approx -z_2$ есть косинус угла вылета фотона I к оси пучка.

Анализируя условия попадания ν_0 в интервал ν_1 - интегрирования для второго слагаемого в (IX.I) получим, что его вклад отличен от нуля для $z<0$ и $\nu_3<\Delta\theta/\sqrt{1-z^2}$. Для третьего слагаемого в IX получим соответственно условие $z>0$ и $\nu_3<\Delta\theta/\sqrt{1-z^2}$.

Приложение X

Вклад в инклюзивное по углу вылета фотона сечение аннигиляции с учетом поправок от излучения виртуальных и мягких в с.ц.и. фотонов имеет вид (см. 10)

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^{soft} = \frac{\pi\alpha^2}{s}\frac{1+z^2}{1-z^2}\left\{1-\frac{\alpha}{\pi}\left[2(1-\rho)\ln\Delta-\frac{\pi^2}{3}+\frac{3}{2}(1-\rho)\right]\right\}+\frac{\alpha^3}{s}\left[\left(1+\frac{3(1+z)}{2(1-z)}\right)\ln\frac{1-z}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{1-z}{1+z}+\frac{1+z}{2(1-z)}\right)\ln^2\frac{1-z}{2}\right]+z\to -z,\quad z=\cos\theta,\ \Delta=\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon},\ \rho=\ln\frac{s}{m^2}. \qquad \text{X.I}$$

Вклад жесткой части спектра фотонов запишем в виде

$$\frac{d\sigma^{hard}}{dz} = \frac{2\alpha^3}{s}\int d^2\nu\left\{\frac{1}{1-z^2}\left[-\frac{1}{\nu_2^2}+\frac{(\nu_1+\nu_2 z)^2+\nu_3^2}{\nu_1^2\nu_2^2 X^{1/2}}\right]-\frac{2m^2}{s\nu_1^2}\left[\frac{\nu_2(1+z)}{\nu_3-\nu_1-\nu_2 z}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\nu_3-\nu_1-\nu_2 z}{\nu_2(1+z)}\right]\frac{1-z^2}{X^{3/2}}+\frac{\nu_2^2(1+z^2)}{\nu_1^2\left[\nu_3^2-(\nu_1+\nu_2 z)^2\right]}\frac{1}{X^{1/2}}\right\}+z\to -z \qquad \text{X.2}$$

Интегрирование по частотам фотонов по области

$$\int d^2\nu = \int\limits_{\eta}^{1-\Delta} d\nu_2\int\limits_{1-\nu_2}^{1} d\nu_1+\int\limits_{1-\Delta}^{1} d\nu_2\int\limits_{\Delta}^{2-\nu_2-\Delta} d\nu_1$$

где $\eta\varepsilon$ есть минимальная энергия детектируемого фотона (порог регистрации) приводит к результату

$$d\sigma^{hard}/dz = (2\alpha^3/s)\left\{\frac{1+z^2}{1-z^2}(1-\rho)\ln\frac{\Delta a}{1-\eta}+\frac{1-\rho}{1-z^2}\ln\eta+(1-\eta)\left[-1-\rho\frac{1+z^2}{1-z^2}+\frac{\ln(1-\eta)-\rho}{(1-z^2)(1-\eta a)}\right.\right.$$

$$+\frac{\ln a}{1-z^2}\left(\frac{1}{1-\eta a}-\frac{2}{1-\eta b}\right)+\frac{z(2b-a)\ln(1-\eta a)-(1+z^2)\ln a}{za(1-z^2)}\ln\frac{1-\eta a}{b}-\frac{(1+z)}{z(1-z^2)}\left[(\rho+\right.$$

$$\left.\left.+\ln\frac{b}{1-\eta}\right)\ln\frac{1-\eta a}{b}+F\left(-\frac{a}{b}(1-\eta)\right)\right]+\left[\frac{2b\eta}{(1-z^2)(1-\eta a)}-\frac{1+z^2}{az(1-z^2)}\rho\right]\ln\frac{1-\eta a}{b}+\frac{F(1)-F(\eta)}{1-z^2}$$

$$\left.-\frac{1+z}{az(1-z^2)}\left(F(a)-F(a\eta)\right)+\frac{1+z^2}{1-z^2}\left(\ln a\ln b-\frac{1}{2}\ln^2 b-F(a)\right)\right\}+z\to -z$$

$$a=\frac{1-z}{2},\quad b=\frac{1+z}{2},\quad F(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{t}\ln|1-t| \qquad \text{X.3}$$

Видим, что при сложении X.3 и X.I параметр Δ выпадает. При $\eta \ll 1$ выражение для $d\sigma/dz$ приведено в тексте (24).

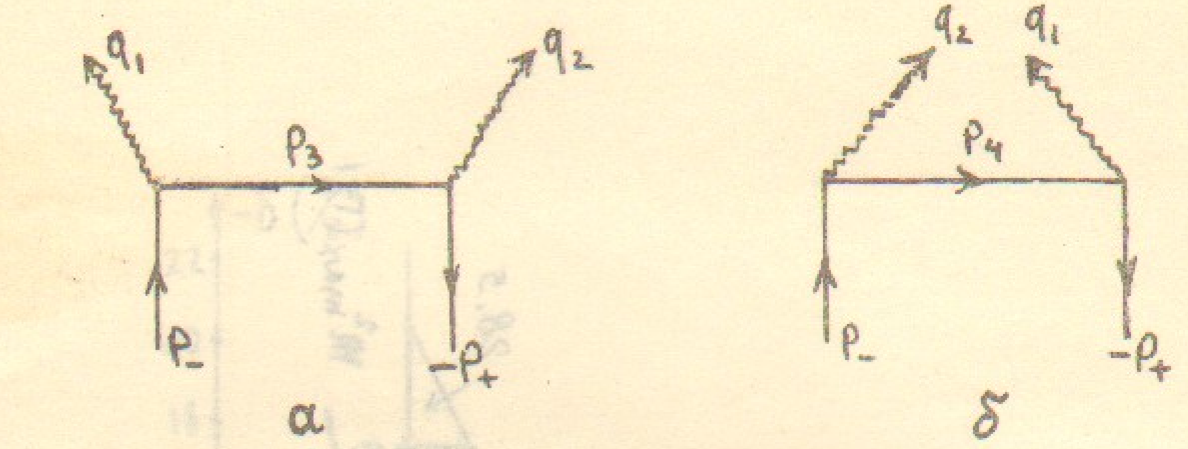

рис 1

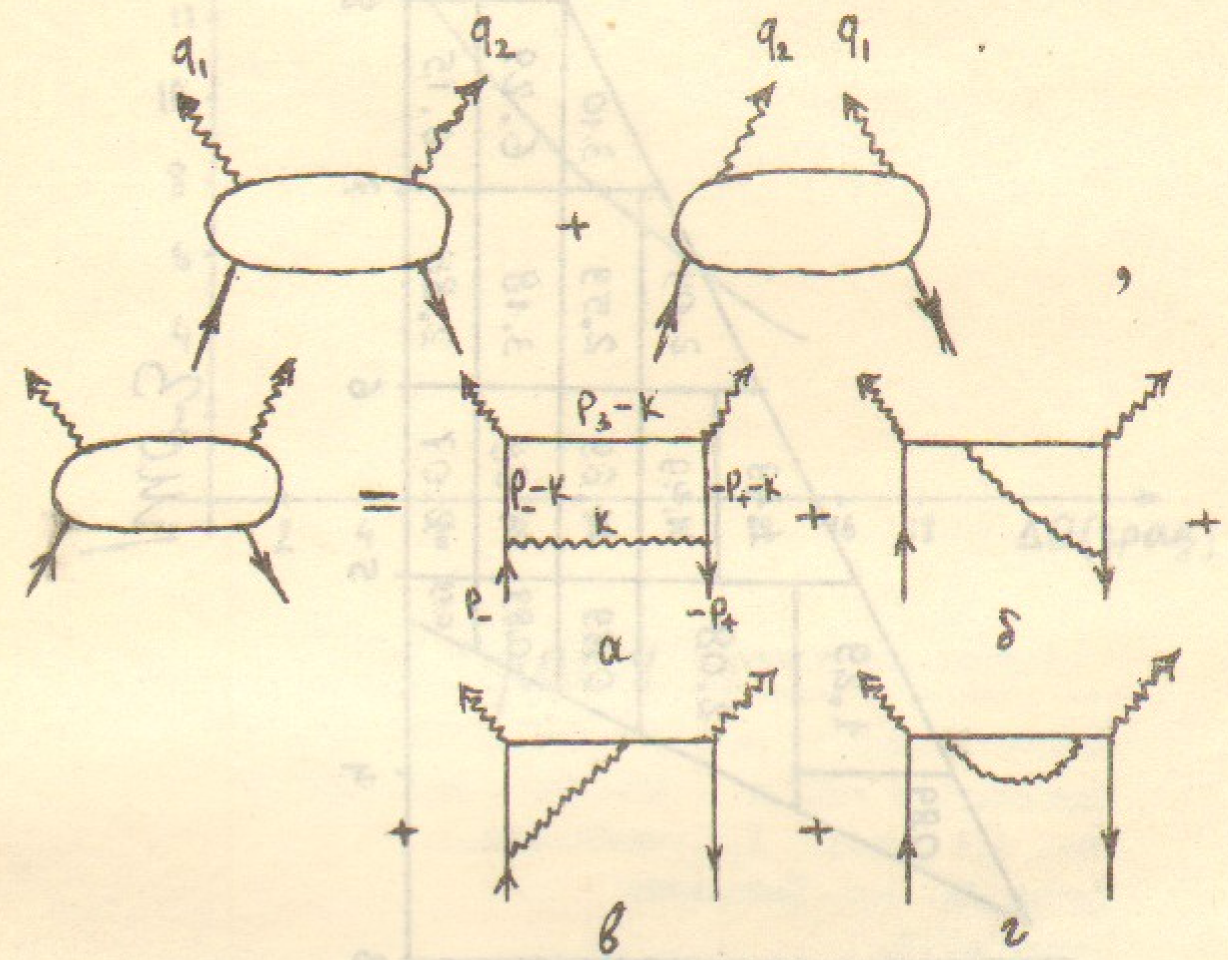

рис. 2

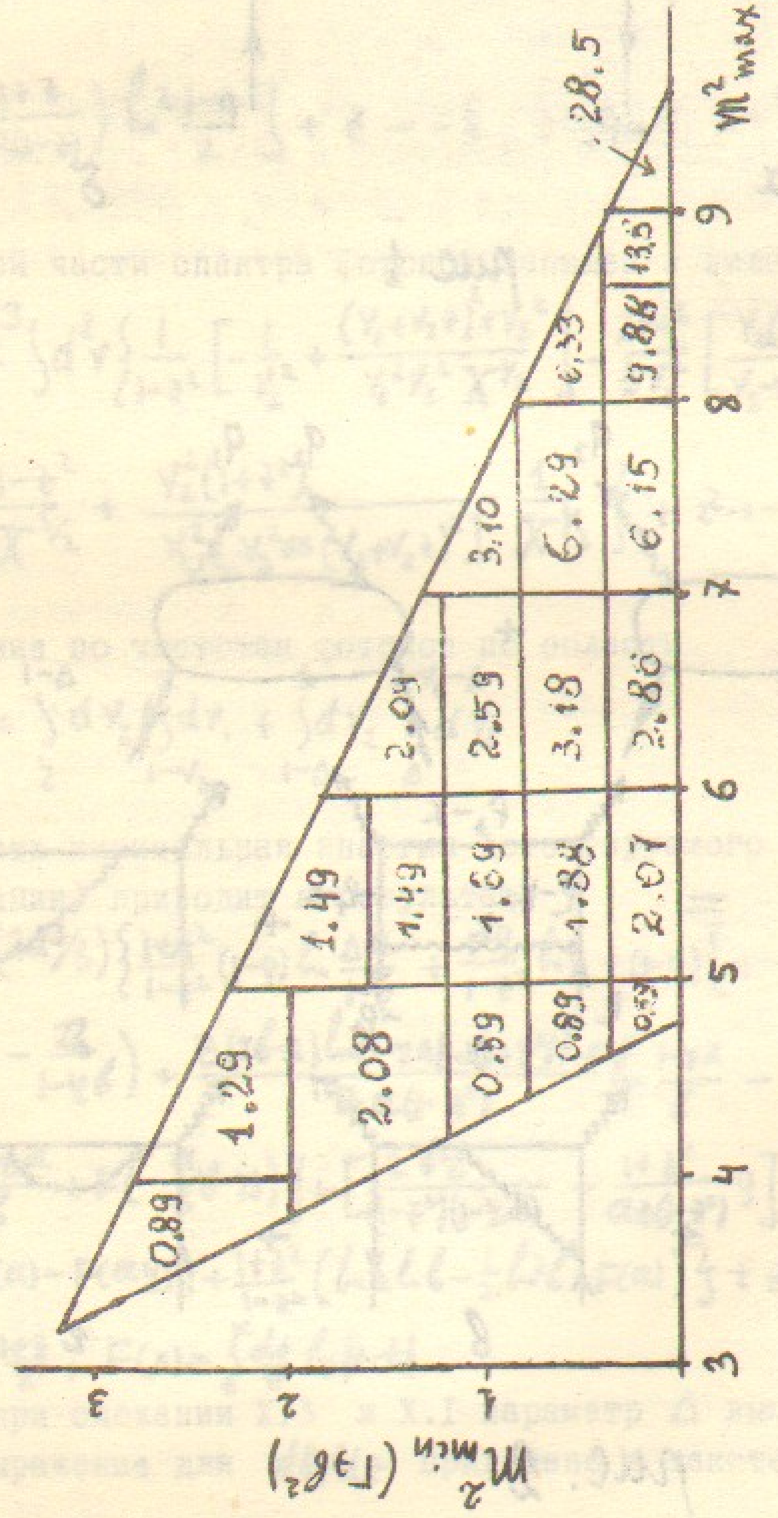

рис 3

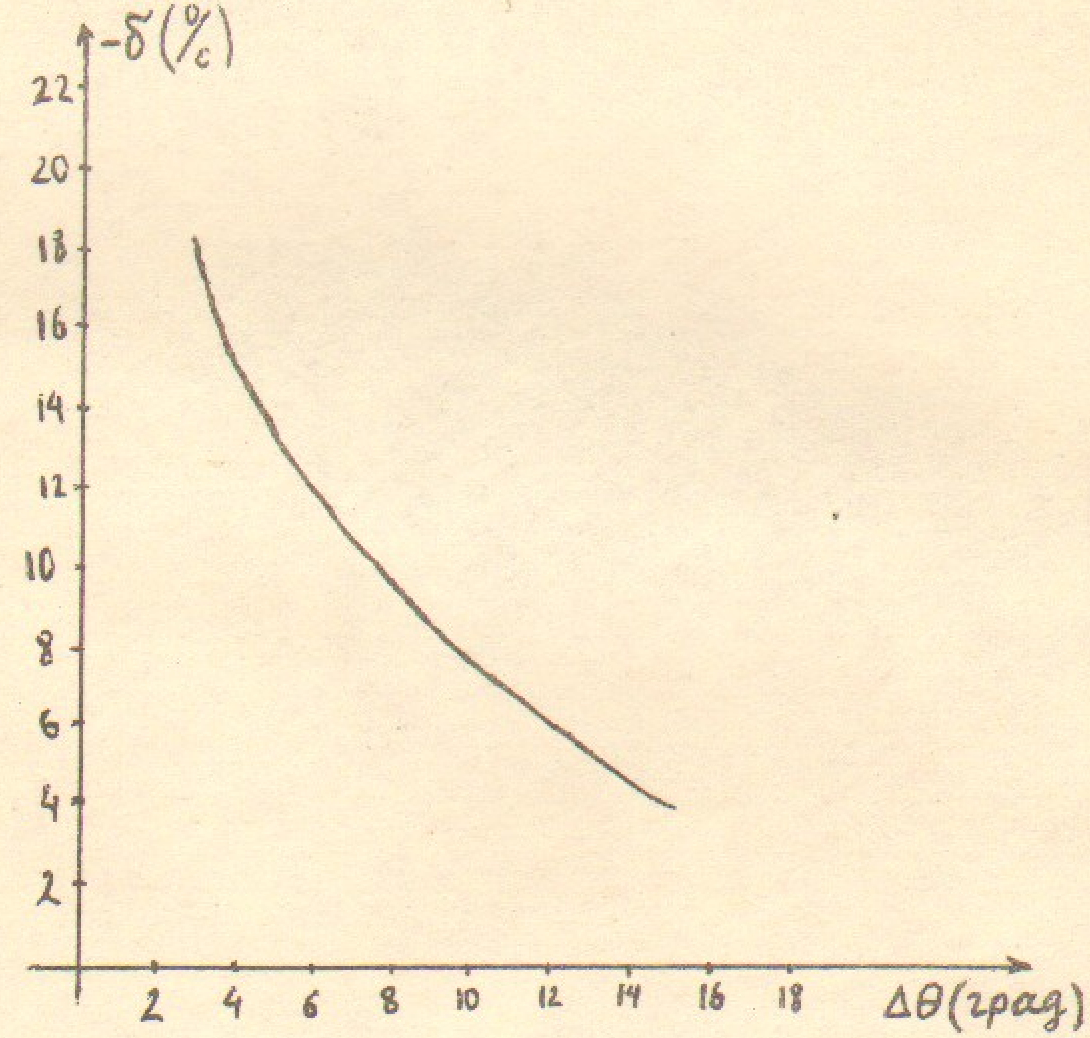

рис 4

Работа поступила - 7 июля 1976 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати I.XП-1976г. МН 03052
Усл. I,4 печ.л., I,2 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № II5.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР