

61
И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 76 - 95

Т.А.Всеволожская

ОПТИМАЛЬНОЕ ПОЛУЧЕНИЕ ПОЗИТРОННЫХ
ПУЧКОВ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Новосибирск

1976

Т.А.Всеволожская

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПОЛУЧЕНИЕ ПОЗИТРОННЫХ ПУЧКОВ
ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ**

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассматриваются условия оптимального формирования пучков позитронов высокой энергии для инъекции в накопитель без промежуточного доускорения. Приводится приближенный аналитический расчет коэффициентов конверсии и углового распределения позитронов на выходе конвертера.

При инъекции в накопитель без промежуточного доускорения энергия позитронов, определяемая оптимальным соотношением коэффициента конверсии - числа позитронов в заданном энергетическом интервале на один первичный электрон, фазового объема позитронов и времени радиационного затухания колебаний частиц в дорожке для получения максимальной скорости накопления, составляет около половины энергии первичных электронов. Поперечный фазовый объем позитронов в этой части спектра при бесконечно тонком электронном пучке достаточно мал, так что несмотря на уменьшение коэффициента конверсии по сравнению с его значением при низких энергиях позитронов, средняя плотность распределения частиц по фазовому объему в пределах области захвата накопителя может оказаться большей, чем в максимуме коэффициента конверсии.

Задачей оптимального формирования пучка является, при этом, реальное достижение этой высокой плотности путем получения малого размера электронного пучка на конвертере и сохранение ее в процессе преобразования фазового объема позитронов для впуска в накопитель.

Конверсия электронов в позитроны происходит в мишени из тяжелого вещества за счет процессов тормозного излучения электронами и рождения пар фотонами в поле ядра. Эффективным методом расчета электронно-фотонных ливней является моделирование их на ЭВМ посредством метода Монте-Карло [1,2] с использованием известных сечений электромагнитных взаимодействий с веществом, позволяющее определить энергетические, угловые и пространственные характеристики частиц в больших диапазонах энергии и толщины мишени.

Аналитический метод расчета, имеющий свои преимущества, поскольку позволяет получить аналитические выражения для характеристик распределения частиц, применим при высоких энергиях, когда сечения основных процессов - тормозного излучения и рождения пар - могут быть взяты в асимптотическом виде, остальными же процессами - ионизационными потерями, комптон-эффектом и т.д. - можно пренебречь, за исключением многократного рассеяния, среднеквадратичный угол которого зависит от энергии так же, как и углы испускания тормозного кванта и разлета компонент пары, имеющие порядок $1/\gamma$, и при достаточно большой толщине мишени оп-

ределяет угловой разброс в ливне.

Ниже приводится расчет углового распределения позитронов фиксированной энергии на выходе мишени толщиной $\sim I$ рад.ед.длины, имеющей точность $\sim 10\%$ для позитронов с энергией E^+ , отличающейся от энергии первичных электронов E_0 не более чем в e раз (e - основание натурального логарифма).

С учетом только основных процессов в приближении первого поколения (один каскад лавинного процесса, единственно существенный, как будет показано ниже, в интересующем нас диапазоне значений отношения E^+/E_0) число позитронов с энергией E^+ в интервале dE^+ на выходе мишени толщиной T находится как

$$(1) \quad P_1(T, E^+_{\text{кон}}) dE^+_{\text{кон}} = \int P_{st}(t^-, E_0, E^-) W_e(E^-, E') W_p(E', E^+) \cdot P_{st}(t^+, E^+, E^+_{\text{кон}}) e^{-\tau_0(T-t^+-t^-)} dE^- dE' dE^+ dt^- dt^+$$

где $P_{st}(t^-, E_0, E^-) dE^-$ и $P_{st}(t^+, E^+, E^+_{\text{кон}}) dE^+$ - вероятности потери энергии первичным электроном и позитроном в отношениях E^-/E_0 и $E^+_{\text{кон}}/E^+$ по прохождении ими расстояний t^- и t^+ , соответственно, в веществе мишени, $W_e(E^-, E') dE' dt^-$ - вероятность испускания тормозного кванта с энергией E' в интервале dE' в слое вещества dt^- электроном с энергией E^- , $W_p(E', E^+) dE^+ dt^+$ - вероятность рождения пары с энергией позитрона E^+ в интервале dE^+ фотоном с энергией E' в слое вещества dt^+ . Экспонента $e^{-\tau_0(T-t^+-t^-)}$ учитывает поглощение фотонов на пути от места их испускания до места рождения пары с позитроном, приходящим на выход конвертера с энергией $E^+_{\text{кон}}$. Все расстояния измеряются в радиационных единицах длины.

Вероятности W_e и W_p , отнесенные к одной радиационной единице длины, и функция P_{st} по Бете-Гайтлеру в случае полного экранирования, имеющем место при высоких энергиях, равны [3/

$$W_e(E^-, E') dE' \cong \left[1 + \left(1 - \frac{E'}{E^-}\right)^2 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{E'}{E^-}\right) \right] \frac{dE'}{E^-}$$

$$W_p(E', E^+) dE^+ \cong \left[\left(1 - \frac{E^+}{E'}\right)^2 + \left(\frac{E^+}{E'}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{E^+}{E'}\right) \left(1 - \frac{E^+}{E'}\right) \right] \frac{dE^+}{E'}$$

$$P_{st}(t, E_1, E_2) dE_2 = \frac{dE_2}{E_1} \left(\ln \frac{E_1}{E_2} \right)^{t/\ln 2 - 1} / \Gamma(t/\ln 2),$$

вероятность поглощения фотонов, также на I рад.ед.дл., есть $\tau_0 \cong 0.773$.

Выполнив в (1) интегрирование по всем промежуточным энергиям в соответствующих пределах (по E от E^+ до E^- , по E^- от E^+ до E_0 и по E^+ от $E^+_{\text{кон}}$ до E_0) и по одному из расстояний t^+ или t^- от 0 до $t = t^- + t^+$, получаем

$$(2) \quad P_1(T, E^+_{\text{кон}}) dE^+_{\text{кон}} = \frac{dE^+_{\text{кон}}}{E_0} e^{-\tau_0 T} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_0^T \frac{y_0^{t/\ln 2 + n}}{(t/\ln 2 + n)!} e^{\tau_0 t} dt,$$

где $y_0 = \ln \frac{E_0}{E^+_{\text{кон}}}$, $f_n = \frac{4}{3} \left\{ \frac{7}{9} [1 - (-2)^n] - \frac{5}{12} (-1)^n + n (-1)^n - \delta_{1,n} \right\}$

Ряд в правой части (2) сходится к своему первому члену с точностью, лучшей 10% при $y_0 \gg 1, T \sim 1$.

Число позитронов второго поколения в заданном энергетическом интервале ($E^+_{\text{кон}}, E^+_{\text{кон}} + dE^+_{\text{кон}}$) на выходе мишени толщиной T есть

$$P_2(T, E^+_{\text{кон}}) dE^+_{\text{кон}} = 2 \frac{dE^+_{\text{кон}}}{E_0} e^{-\tau_0 T} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_n f_m y_0^{m+n+1} \int_0^T \frac{y_0^{t/\ln 2} e^{\tau_0 t} t^2 (T-t)}{(t/\ln 2 + n + m + 1)! 2!} dt$$

Относительный вклад второго каскада в число позитронов заданной энергии на выходе мишени толщиной $\sim I$ составляет $\sim 3\%$ уже при $y_0 = 1$ и уменьшается примерно $\sim y_0^2$ с уменьшением y_0 .

Сравнение значений $P_1(T, E^+_{\text{кон}})$ со значениями аналогичной функции в [4/], вычисленной по уточненному по сравнению с формулой Бете-Гайтлера выражению для разброса радиационных потерь P_{st} , показывает, что формула Бете-Гайтлера обеспечивает достаточную точность вплоть до толщины мишени, отвечающих максимальному выходу позитронов с заданным значением отношения $E^+_{\text{кон}}/E_0$ (рис.1).

Распределение расстояний t^+ , пройденных в веществе позитронами с фиксированной энергией на выходе мишени, и расстояний t^- , пройденных первичными электронами до испускания отмеченного фотона на Рис.2, могут быть получены как $P(T, E^+_{\text{кон}}, t^{\pm}) = \int_{t^{\pm}}^T P(T, E^+_{\text{кон}}, t) \frac{dt}{t}$, где $P(T, E^+_{\text{кон}}, t)$ - подынтегральное выражение в правой части (2), описывающее распределение суммарных расстояний $t = t^+ + t^-$. Интегрирование по t для нахождения $P(T, E^+_{\text{кон}}) dE^+_{\text{кон}}$ и $P(T, E^+_{\text{кон}}, t^{\pm})$ в приближенном аналитическом виде может быть выполнено с учетом того, что функция $(t/\ln 2)!$ медленно меняется с изменением t от 0 до I и может быть вынесена из-под интеграла. В результате,

с точностью до первого члена ряда по степеням y_0 , получаем

$$(3) P(T, E_{\text{кон}}^+) dE_{\text{кон}}^+ \approx y_0 e^{-\epsilon_0 T} (\ln 2)^2 \left\{ \frac{e^{aT/\ln 2} - 1}{a} - e^{-a} [\bar{E}_i(a \frac{T+\ln 2}{\ln 2}) - \bar{E}_i a] \right\} \frac{dE_{\text{кон}}^+}{E_0}$$

$$P(T, E_{\text{кон}}^+, t^\pm) dE_{\text{кон}}^+ dt^\pm = e^{-\epsilon_0 T - \epsilon_0 \ln 2} [\bar{E}_i(a \frac{T+\ln 2}{\ln 2}) - \bar{E}_i(a \frac{t^\pm + \ln 2}{\ln 2})] \frac{dt^\pm dE_{\text{кон}}^+}{E_0}$$

где $\bar{E}_i(x)$ - интегральная показательная функция [5], $a = \ln y_0 + \epsilon_0 \ln 2$.

Среднее значение расстояний t^+ и t^- меняется от $\sim 0.33T$ до $\sim 0.28T$ с изменением отношения $E_{\text{кон}}^+/E_0$ от e^{-1} до ~ 0.7 при $T \approx 1$ и от $\sim 0.37T$ до $\sim 0.32T$ - при $T = 0.5$.

Распределение начальных энергий позитронов E^+ при фиксированной конечной $E_{\text{кон}}^+$, характеризующее также распределение энергий первичных электронов в момент испускания отмеченного фотона E^- , показано на рис.3. Средние значения отношений $E^+/E_{\text{кон}}^+$ и E_0/E^- отличаются от 1 не более, чем на 10% уже при $y_0 \approx 1$ ($T \approx 1$).

Угловое распределение позитронов с энергией $E_{\text{кон}}^+$ на выходе мишени толщиной T находится как

$$(4) P(E_{\text{кон}}^+, T, \theta) dE_{\text{кон}}^+ d\Omega = \int_0^T f(\theta) \cdot P(E_{\text{кон}}^+, T, t^+, t^-) dt^+ dt^- dE_{\text{кон}}^+ d\Omega,$$

$$\text{где } P(E_{\text{кон}}^+, T, t^+, t^-) = \frac{1}{E_0} e^{-\epsilon_0 T} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{y_0^{t/\ln 2 + n}}{(t/\ln 2 + n)!} e^{\epsilon_0 t}, t = t^+ + t^-.$$

Функция $f(\theta) d\Omega$, описывающая вероятность отклонения позитрона на угол θ за счет многократного рассеяния его на пути t^+ и рассеяния первичного электрона на пути t^- , берется в виде первого члена разложения Мольер функции углового распределения за счет многократного рассеяния в ряд по степеням параметра B [6], а именно $f(\theta) = \exp(-\theta^2/\theta_1^2 B) / \pi \theta_1^2 B$

Величина угла θ_1 , определяемого из условия того, что на всей толщине рассеивателя t происходит в среднем одно столкновение с отклонением на угол, больший θ_1 , [6], находится как $\theta_1^2 = \text{Const} \int_0^t \frac{dt'}{[E^-(t')]^2}$ где $\text{Const} = \frac{0.157 \pi^2 (z+1)}{A} \chi_0$, χ_0 - радиационная единица длины в г/см², E - энергия частицы в МэВ, т.е. в рассматриваемой задаче

$$(5) \theta_1^2 = \text{Const} \cdot \left\{ \int_0^{t^-} \frac{dt'}{[E^-(t')]^2} + \int_{T-t^+}^T \frac{dt'}{[E^+(t')]^2} \right\}.$$

Параметр Мольер B является логарифмической функцией среднего числа столкновений, испытываемых частицей во всей толщине рассеивателя. При толщинах, соответствующих многократному рассеянию зависимость B от t имеет вид $B \approx B_1 + A \ln t$, т.е. $B = B_1 + A \ln(t^- + t^+)$ в нашем случае. В мишени из вольфрама $B_1 \approx 11.7, A \approx 1.1$.

Учет изменения энергии частиц в процессе рассеяния за счет радиационных потерь является существенным усложнением при аналитическом методе расчета. Однако, при достаточно большом значении отношения $E_{\text{кон}}^+/E_0$ этим изменением можно пренебречь, приписав электрону энергию E_0 , а позитрону $E_{\text{кон}}^+$ на всем их пути в веществе. Точность такого приближения можно оценить следующим образом.

Найдем средний квадрат угла многократного рассеяния частицы, прошедшей в веществе расстояние t и радиационно потерявшей энергию на этом пути в отношении E_2/E_1 в предположении, что при всех $t' < t$ энергия частицы равнялась ее наиболее вероятному значению $E_{\text{вер}}(t')$ для заданных E_1, E_2 и t . Используя формулу Бете-Гайтлера для разброса радиационных потерь P_{st} , значения $E(t') = E_{\text{вер}}(t')$ находим из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial E(t')} \left\{ \left(\ln \frac{E_1}{E(t')} \right)^{t'/\ln 2 - 1} \cdot \left(\ln \frac{E(t')}{E_2} \right)^{t-t'/\ln 2 - 1} \right\} = 0,$$

откуда $E_{\text{вер}}(t') = E_1 \cdot \exp\left(-\gamma \frac{\ln 2 - t'}{2 \ln 2 - t'}\right)$, где $\gamma = \ln \frac{E_1}{E_2}$. Подставляя $E_{\text{вер}}(t')$ в качестве $B(t')$ в выражение для квадрата угла θ_1 , определяющего средний квадрат угла многократного рассеяния, и интегрируя, получаем $\theta_1^2 = \text{Const} \frac{t}{E_1 E_2} \left(\frac{\text{sh} \frac{\gamma t}{2 \ln 2 - t}}{2 \ln 2 - t} / \frac{\gamma t}{2 \ln 2 - t} \right)$. В рассматриваемой задаче отношение $\frac{\text{sh} \frac{\gamma t}{2 \ln 2 - t}}{2 \ln 2 - t} / \frac{\gamma t}{2 \ln 2 - t}$ близко к 1 при всех значениях $t = t^-$, $\gamma = \ln(E_0/E^-)$ и $t = t^+$, $\gamma = \ln(E^+/E_{\text{кон}}^+)$, имеющих достаточную вероятность при $T \approx 1, y_0 \approx 1$ (рис.2, 3), так что значение θ_1^2 для частиц, теряющих энергию наиболее вероятным образом, есть $\theta_{1,\text{вер}}^2 \approx \text{Const} \left(\frac{t^-}{E_0 E^-} + \frac{t^+}{E^+ E_{\text{кон}}^+} \right)$.

Таким образом, ошибка в каждом слагаемом выражения (5) при замене $E^-(t')$ на E_0 и $E^+(t')$ на $E_{\text{кон}}^+$ пропорциональна отклонению от 1 значений отношений E_0/E^- и $E^+/E_{\text{кон}}^+$ и в среднем составляет $\approx 10\%$ при $y_0 \approx 1$, поскольку именно таково, как отмечалось выше, отличие от 1 значений $\langle \frac{E_0}{E^-} \rangle$ и $\langle \frac{E^+}{E_{\text{кон}}^+} \rangle$. Суммарная ошибка в значении θ_1^2 еще меньше за счет разного знака ошибок в каждом из двух

слагаемых (5).

Подставив $\theta_1^2 = \text{Const} \left(\frac{t^-}{E_0^2} + \frac{t^+}{E_{\text{кон}}^2} \right)$ в выражение для $f(\theta)$ и выполнив интегрирование по одному из расстояний t^+ или t^- в (4), вероятность выхода позитрона с энергией $E^+_{\text{кон}}$ под углом θ в телесном угле $d\Omega$ получаем в виде

$$P(E^+_{\text{кон}}, T, \theta) dE^+_{\text{кон}} d\Omega = \frac{E_0 dE^+_{\text{кон}}}{E_0^2 - E_{\text{кон}}^2} \int_0^T \left\{ -Ei(-\alpha^2) + Ei\left(-\frac{\alpha^2 E_0^2}{E_{\text{кон}}^2}\right) \right\} \cdot e^{-\alpha_0(T-t)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{y_0^{(t/\ln 2 + n)}}{(t/\ln 2 + n)!} t dt d\alpha^2 \quad (6)$$

где $\alpha^2 = \frac{\theta^2 E_{\text{кон}}^2}{\text{Const} \cdot t (B_1 + A \ln t)}$ с постоянной Const из (5).

Вероятность выхода под нулевым углом с точностью до первого члена ряда в (6) и с учетом медленности изменения $(t/\ln 2)!$ и B есть

$$(7) P(E^+_{\text{кон}}, T, \theta) dE^+_{\text{кон}} d\Omega \approx \ln \frac{E_0}{E^+_{\text{кон}}} \frac{2E_0 dE^+_{\text{кон}}}{E_0^2 - E_{\text{кон}}^2} \frac{e^{-\alpha_0 T} \ln 2 \cdot E_{\text{кон}}^2 [E_i(a \frac{T+\ln 2}{\ln 2}) - E_i(a)] d\Omega}{\int_0^T 2\alpha_0 (T/\ln 2)! \text{Const} \cdot (B_1 + A \ln T)}$$

Средний квадрат угла выхода позитронов заданной энергии $E^+_{\text{кон}}$ находится как $\langle \theta^2 \rangle = \text{Const} \frac{\langle tB \rangle}{2} \left(\frac{1}{E_0^2} + \frac{1}{E_{\text{кон}}^2} \right)$, $t = t^+ + t^-$. Зависимость среднего значения произведения tB от толщины конвертера T и отношения энергий позитронов и электронов с точностью $\sim 1 + 2\%$ в рассматриваемом диапазоне значений $E^+_{\text{кон}}/E_0 (\geq e^{-1})$ и $T \approx 1$ описывается соотношением $\langle tB \rangle \approx \frac{\text{const} \cdot T}{\sqrt{1 + E_{\text{кон}}^2/E_0^2}}$ с постоянным коэффициентом, примерно пропорциональным B_1 и равным в случае вольфрама ~ 7.6 . В результате, средний квадрат угла выхода позитронов с энергией $E^+_{\text{кон}}$ при энергии первичных электронов E_0 из мишени толщиной T в случае мишени из вольфрама есть

$$\langle \theta^2 \rangle \approx \frac{110T}{E_{\text{кон}}^2} \sqrt{1 + \frac{E_{\text{кон}}^2}{E_0^2}} \quad (8)$$

Дифференциальное угловое распределение позитронов (рис.4) заметно отличается от гауссовского с тем же среднеквадратичным углом. Отличие интегрального распределения от интегрального гауссовского достаточно мало (рис.5).

На рис. 6 и 7 проводится сравнение расчетных значений коэффициентов выхода позитронов в заданный телесный угол $\int \theta_m^2$ -

- $\int_0^{\theta_m^2} P(E^+_{\text{кон}}, T, \theta) d\theta^2$ - с экспериментальными данными /7/ и с данными, полученными при измерениях в процессе настройки позитронного канала ВЭПП-3 /13/. Точность последних - $\sim 20\%$, точность данных /7/ $\sim 15\%$.

При высоких энергиях электронов ($E_0 = 1220 \text{ МэВ}$) наблюдается хорошее согласие расчета и эксперимента.

При энергиях электронов 430 и 290 МэВ отличие экспериментальных данных от расчетных примерно соответствует отличию коэффициентов выхода в полный телесный угол $P(E^+_{\text{кон}}, T) E^+_{\text{кон}}$, полученных в настоящей работе и в /4/ для ультрарелятивистских энергий, от значений, полученных методом Монте-Карло /8/ по программе /2/ с более полным учетом эффектов взаимодействия с веществом и зависимости эффекта экранирования от энергии частиц и фотонов для $E^+_{\text{кон}} \sim 200 \text{ МэВ}$ (рис.8). Нормировка экспериментальных значений коэффициентов выхода позитронов в телесные углы 0.0032 стер., при $E_0 = 290 \text{ МэВ}$, $E^+ = 205 \text{ МэВ}$, и 0.0043 стер., при $E_0 = 430 \text{ МэВ}$, $E^+ = 250 \text{ МэВ}$, равные $3.75 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta E^+ / E^+$ и $1.35 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta E^+ / E^+$ соответственно, по значениям коэффициентов выхода в полный угол при $E^+ \approx 200 \text{ МэВ}$, $T = 3 \text{ мм}$ вольфрама из /8/ приводит к хорошему согласию с нормированным на единицу интегральным угловым распределением, полученным в настоящей работе (рис.5).

Зависимость коэффициента выхода позитронов с энергией $E^+ \sim 1/2 \cdot E_0$ в линейный угол $\theta_m \approx \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ от толщины конвертера T имеет пологий максимум вблизи $T \approx 1$. Такая зависимость получена в /4/ для $\theta_m = \pi/2$ и проверена экспериментально для $\theta_m \sim \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ при настройке позитронного канала ВЭПП-2 /9/.

Условие оптимального формирования фазового объема позитронного пучка требует фокусировки пучка первичных электронов в малый размер на конвертере до тех пор, пока угол сходимости электронов остается меньшим угла выхода позитронов, обусловленного многократным рассеянием в конвертере. Как показано в /10/, минимальное приращение фазового объема в конвертере имеет место в том случае, когда β - функция электронного пучка на конвертере равна отношению среднеквадратичного радиуса эффективного источника позитронов к среднеквадратичному углу при бесконечно тонком электронном пучке, т.е. $\beta_e = \sqrt{\frac{\langle r_e^2 \rangle}{\langle \theta^2 \rangle}}$. При этом, эмитанс позитронного пучка равен сумме эмитанса электронного и приращения эмитанса в

конвертере, равного среднеквадратичному эмитансу позитронного пучка при бесконечно тонком электронном ε_0 .

В качестве среднеквадратичного эмитанса пучка, распределение плотности частиц в котором характеризуется средними значениями квадрата координат $\langle q^2 \rangle$, квадрата углов $\langle q'^2 \rangle$ и произведения $\langle qq' \rangle$, возьмем область, ограниченную в координатах $(q, \alpha q + \beta q')$ ($q, \alpha q + \beta q'$) окружностью радиуса ρ , равного среднеквадратичному расстоянию частицы от центра пучка в указанных координатах, т.е. $\rho^2 = \langle q^2 + (\alpha q + \beta q')^2 \rangle$. Коэффициенты α и β — элементы матрицы Твисса /II/, определяющие форму и ориентацию фазового эллипса пучка. Величина эмитанса ε равна ρ^2/β . Значения α и β определяются соотношениями $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\langle qq' \rangle}{\langle q^2 \rangle}$, $\frac{1+\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\langle q'^2 \rangle}{\langle q^2 \rangle}$, откуда $\varepsilon = 2\sqrt{\langle q^2 \rangle \langle q'^2 \rangle - \langle qq' \rangle^2}$. Величина $\langle \Delta q^2 \rangle = \langle q^2 \rangle - \frac{\langle qq' \rangle^2}{\langle q'^2 \rangle}$ определяет средний квадрат разброса координаты вокруг значения, линейно скоррелированного с углом, т.е. $\langle \Delta q^2 \rangle = \langle (q + \Delta Z \cdot q')^2 \rangle$, где значение $\Delta Z = -\langle qq' \rangle / \langle q'^2 \rangle$ соответствует минимуму $\langle \Delta q^2 \rangle$. Иными словами, $\langle \Delta q^2 \rangle$ — средний квадрат координаты частиц в минимуме β — функции, находящемся на расстоянии ΔZ от рассматриваемой точки.

В случае аксиально симметричного распределения частиц в пучке эмитанс по каждому из поперечных направлений равен $\varepsilon = \sqrt{\langle r^2 \rangle \langle \theta^2 \rangle - \langle r\theta \rangle^2}$.

При гауссовском распределении углов и координат частиц вероятность попадания в определенный выше среднеквадратичный фазовый объем по одному из поперечных направлений равна ~ 0.63 , и плотность частиц на границе области составляет 1/3 от плотности в центре.

Средний квадрат угла выхода позитронов из конвертера (8) является суммой средних квадратов углов рассеяния позитронов и их первичных электронов.

Координата позитронов на выходе конвертера складывается из координаты, приобретаемой ими в процессе рассеяния на угол θ^+ на пути t^+ , $r(t^+)$, координаты электронов при рассеянии на угол θ^- на пути t^- , $r(t^-)$ и координаты, приобретаемой фотонами и позитронами за счет угла электронов θ^- на пути $T-t^-$, $\theta^-(T-t^-)$.

Средние значения квадрата координаты и произведения $r\theta$ на выходе мишени равны

$$\langle r^2 \rangle = \langle \langle r^2(t^+) \rangle + \langle r^2(t^-) \rangle + 2 \langle \theta^- \cdot r(t^-) \rangle (T-t^-) + \langle \theta^{-2} \rangle (T-t^-)^2 \rangle$$

$$\langle r\theta \rangle = \langle \langle r(t^+) \cdot \theta^+ \rangle + \langle r(t^-) \cdot \theta^- \rangle + \langle \theta^{-2} \rangle (T-t^-) \rangle$$

где второе усреднение в правых частях производится по t^+ и t^- , распределение которых $P(t^\pm) dt^\pm$ при $E^+/E_0 = 0.5 + 0.6$, в соответствии с (3), имеет вид

$$P(t^\pm) dt^\pm \propto \ln \left(\frac{T + \ln 2}{t^\pm + \ln 2} \right) \approx \frac{T-t}{T + \ln 2} + \frac{1}{2} \left(\frac{T-t}{T + \ln 2} \right)^2 + \dots$$

Средние значения квадрата координаты r' , приобретаемой в процессе рассеяния на угол θ' на пути t' , и произведения $r'\theta'$ связаны со средним квадратом угла соотношениями $\langle r'^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \theta'^2 \rangle t'^3$ и $\langle r'\theta' \rangle = \frac{1}{2} \langle \theta'^2 \rangle t'^2 / 3$, причем $\langle r'^2 \rangle \propto t'^3$, $\langle r'\theta' \rangle \propto t'^2$, поскольку $\langle \theta'^2 \rangle \propto t'$. Усреднение по t^+ и t^- в выражениях для $\langle r^2 \rangle$ и $\langle r\theta \rangle$ с учетом того, что $\langle \theta^{\pm 2} \rangle \approx \frac{\langle \theta^2 \rangle E^{\pm 2}}{E^{-2} + E^{\pm 2}}$, дает

$$\langle r^2 \rangle \approx \frac{\langle \theta^2 \rangle T^2}{10} \cdot \frac{E^{-2} + 6E^{+2}}{E^{-2} + E^{+2}}, \quad \langle r\theta \rangle \approx \frac{\langle \theta^2 \rangle T}{4} \cdot \frac{E^{-2} + 3E^{+2}}{E^{-2} + E^{+2}}$$

При $E^+/E_0 \approx 1/2$ среднеквадратичный разброс координаты выхода позитронов при бесконечно тонком электронном пучке

$\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle} = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \frac{\langle r\theta \rangle^2}{\langle \theta^2 \rangle}}$, равный среднеквадратичному радиусу эффективного источника позитронов, r_0 , расположенного в минимуме β — функции позитронного пучка на расстоянии $\Delta Z = -\frac{\langle r\theta \rangle}{\langle \theta^2 \rangle} =$

$= -0.35 \cdot T$ от выходной поверхности конвертера, составляет $\sim 0.28 T \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$, среднеквадратичный эмитанс позитронного пучка при бесконечно тонком электронном, ε_0 , равен $\sim 0.28 T \langle \theta^2 \rangle$, где T в см.

При $E^+ = 250$ МэВ, $E_0 = 500$ МэВ и $T = 1$ рад.ед.дл., $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \approx 0.045$ рад, $\Delta Z = -1.1$ мм, $r_0 \approx 0.04$ мм и $\varepsilon_0 \approx 0.20$ мрад.см.

Условие оптимальной фокусировки электронов на конвертер при этом имеет вид $\beta_e \approx 0.1$ см., откуда светосила фокусирующей линзы, равная по порядку величины телесному углу сходимости электронного пучка $\mathcal{E} \varepsilon_e / \beta_e$, получается равной $\sim 10 \mathcal{E} \varepsilon_e$. При

проектном значении эмитанса пучка из синхротрона Б-4 /12/, равном ~ 1 мрад.см., светосила линзы, фокусирующей электроны на конвертер, должна составлять ~ 0.035 .

Условие оптимальной фокусировки не содержит явной зависимости от фокусного расстояния линзы. Эта зависимость обнаруживается при учете aberrаций фокусирующей линзы, т.е. таких искажений формы фазового объема пучка, которые не могут быть скомпенсированы линейной фокусировкой и приводят к эффективному увеличению эмитанса пучка. К числу таких искажений относятся хроматическая и сферическая aberrации и aberrации за счет нелинейности распределения поля в линзе и ее краевых эффектов, приводящих, в частности, к зависимости эффективной длины линзы от поперечной координаты. Каждая из названных aberrаций возрастает с увеличением угла поворота частиц в линзе и потому особенно существенна при светосильной фокусировке.

Приращение эмитанса пучка за счет aberrаций в фокусирующей линзе $\Delta \mathcal{E}_a$ при условии его малости, $\Delta \mathcal{E}_a < \mathcal{E}_e$, находится как $\Delta \mathcal{E}_a \cong \beta \langle \alpha_{ad}^2 \rangle$, где $\langle \alpha_{ad}^2 \rangle$ - средний квадрат угла aberrации, β - β -функция электронного пучка в линзе, связанная со значением ее на конвертере β_e соотношением $\beta = \beta_e + \frac{F^2}{\beta_e}$, где F - фокусное расстояние линзы. При этом из условия малости aberrационного приращения эмитанса пучка по сравнению с его исходным значением получаем $F^2 < \frac{\mathcal{E}_e \beta_e}{\langle \alpha_{ad}^2 \rangle}$.

Таким образом, фокусное расстояние линзы, фокусирующей электроны на конвертер, ограничено увеличением фазового объема пучка за счет ее aberrаций. Фокусировка с $F \cong 100$ см., осуществляемая с помощью квадрупольных линз, требует устранения aberrаций с точностью, лучшей $\sim 10^{-4}$ рад.

Если условие оптимальной фокусировки на конвертер не выполняется, т.е. значение β -функции электронного пучка на конвертере β_e отличается от $\beta_e = \beta_{opt} = \sqrt{\frac{\langle \Delta r^2 \rangle}{\langle \theta^2 \rangle}}$, эмитанс позитронного пучка на выходе конвертера в зависимости от эмитанса электронного и приращения эмитанса в конвертере, равного эмитансу позитронного пучка при $\mathcal{E}_e = 0, \mathcal{E}_0$, находится как

$$\mathcal{E} = \sqrt{(\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_0)^2 + \mathcal{E}_e \mathcal{E}_0 \left(\frac{\beta_e}{\beta_{opt}} + \frac{\beta_{opt}}{\beta_e} - 2 \right)}.$$

Исходное значение β -функции позитронного пучка находится

как $\beta = \mathcal{E} / (\langle \theta^2 \rangle + \frac{\mathcal{E}_e}{\beta_e})$, где сумма в скобках равна среднему квадрату угла выхода позитронов с учетом углов сходимости электронов, средний квадрат которых есть $\frac{\mathcal{E}_e}{\beta_e}$. Исходное значение α -функции, при условии совмещения кросовера электронного пучка с эффективным источником позитронов, равно нулю. При оптимальной фокусировке электронов на конвертер исходное значение β позитронов равно β_e .

В заключение рассмотрим в общих чертах условия оптимальной фокусировки позитронов для инъекции в накопительную дорожку. Для простоты предположим значение α -функции дорожки в месте инъекции близким к 0. Во избежание транспортировки пучка с большим угловым разбросом, каким является позитронный пучок на выходе конвертера, фокусировка позитронов разбивается на две части - собирающую, т.е. преобразующую эмитанс пучка к форме, удобной для транспортировки, и транспортирующую. Собирающие позитронов осуществляется светосильной короткофокусной линзой с фокусным расстоянием, приближенно определяемым, как показано ниже, условием согласования β -функций пучка и дорожки. Преобразование пучка из первой фокальной плоскости собирающей линзы, где помещается эффективный источник позитронов, во вторую описывается соотношением $\beta_1 \beta_2 = F_c^2$, где F_c - фокусное расстояние линзы. Наиболее экономичной фокусировкой на участке транспортировки является такая фокусировка, при которой на всем расстоянии от второй фокальной плоскости собирающей линзы до входа в дорожку укладывается около четверти длины волны свободных колебаний частиц (несколько меньше, если $\alpha_{дор} > 0$ и несколько больше, если $\alpha_{дор} < 0$). Такая фокусировка осуществляется линзой с фокусным расстоянием $F_T \cong \frac{L}{2}$, где L - длина участка транспортировки. Преобразование β -функции при этом описывается как $\beta_2 \cdot \beta_{дор} \cong F_T^2$, т.е. $\beta_2 \cdot \beta_{дор} \cong \frac{L^2}{4}$. Подставляя получаемое отсюда значение β_2 в выражение для фокусного расстояния собирающей линзы, получаем $F_c^2 \cong \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\beta_k}{\beta_{дор}}$, где $\beta_k = \beta_1$ - значение β на конвертере.

Л и т е р а т у р а

1. H. Messel et. al. Nuclear Physics 39 (1962), 1.
2. Ф.М.Израйлев и др. Препринт ИЯФ 63-73, Новосибирск, 1973.
3. С.З.Беленький. Лавинные процессы в космических лучах ОГИЗ Гостехиздат 1948 г.
4. В.С.Синах, ЖЭТФ, 40, 194 (1961).
5. Е.Янке и Ф.Эмде "Таблицы функций" Издательство физико-математической литературы, Москва 1959.
6. Э.Сегре "Экспериментальная ядерная физика" Издательство иностранной литературы, Москва, 1955.
7. И.А.Гришаев и др. УФН, 13, 1926 (1968).
8. В.А.Тавровский "Расчет конверсии электронов в позитроны при энергии 0.2-2 ГэВ" Препринт ИЯФ 76-36, Новосибирск 1976.
9. В.Л.Ауслендер и др. Атомная энергия, 22, Вып.3, 206 (1966).
10. Г.И.Будкер и др. "Электронно-оптический канал комплекса ВЭПП-2" Всесоюзное совещание по ускорителям со встречными пучками, Новосибирск 1963 г.
11. А.Лихтенберг "Динамика частиц в фазовом пространстве" Москва, Атомиздат, 1972 г.
12. Г.И.Будкер и др. "Электрон-позитронная установка на встречных пучках ВЭПП-3 на энергию 3.5ГэВ". Международная конференция по ускорителям, Ереван, 1969 г.
13. Т.А.Всеволожская и др. Инжекция позитронов в накопитель ВЭПП-3. Препринт ИЯФ 76-94, Новосибирск, 1976 г.

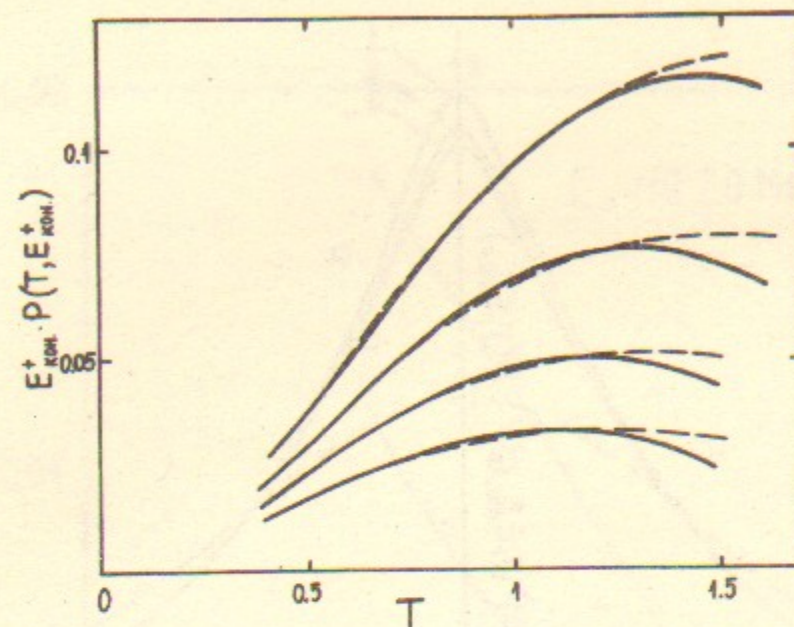


Рис. 1.

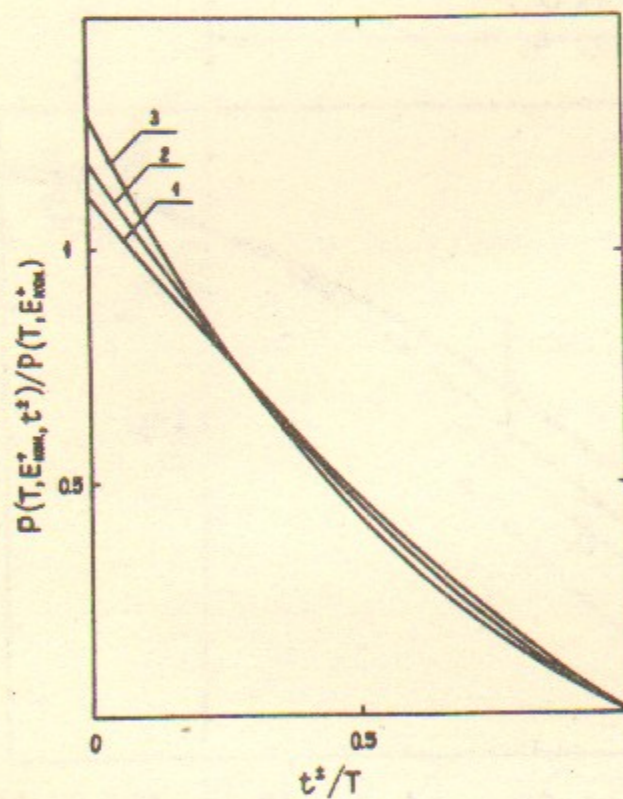


Рис. 2.

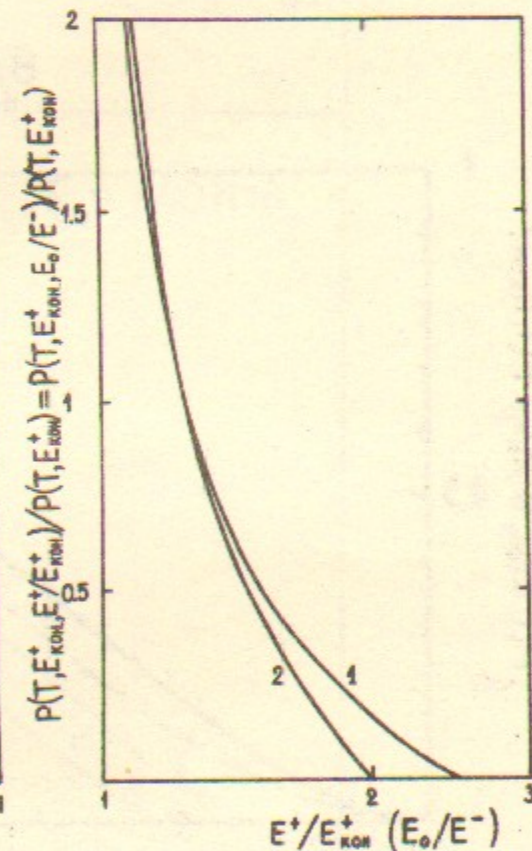
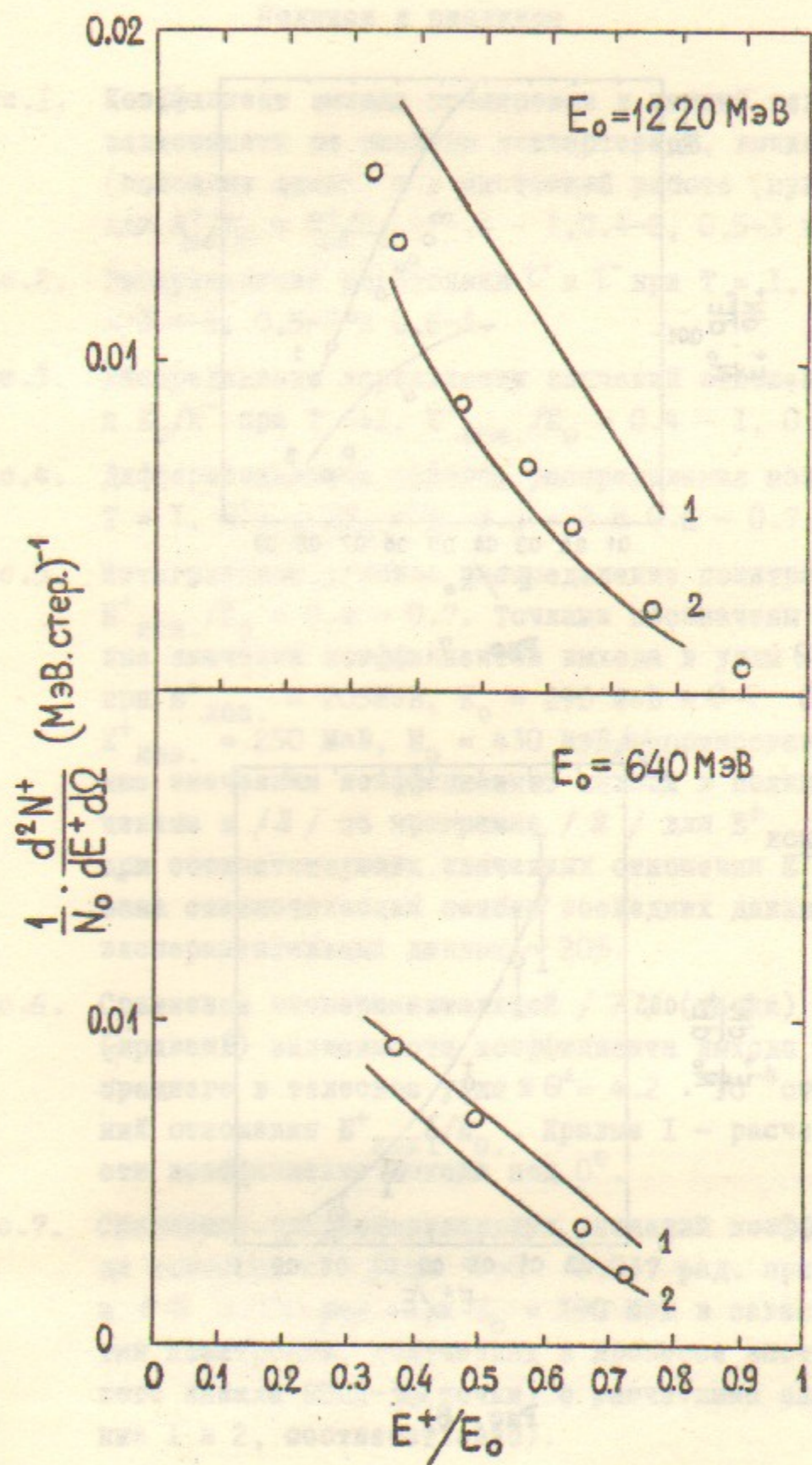
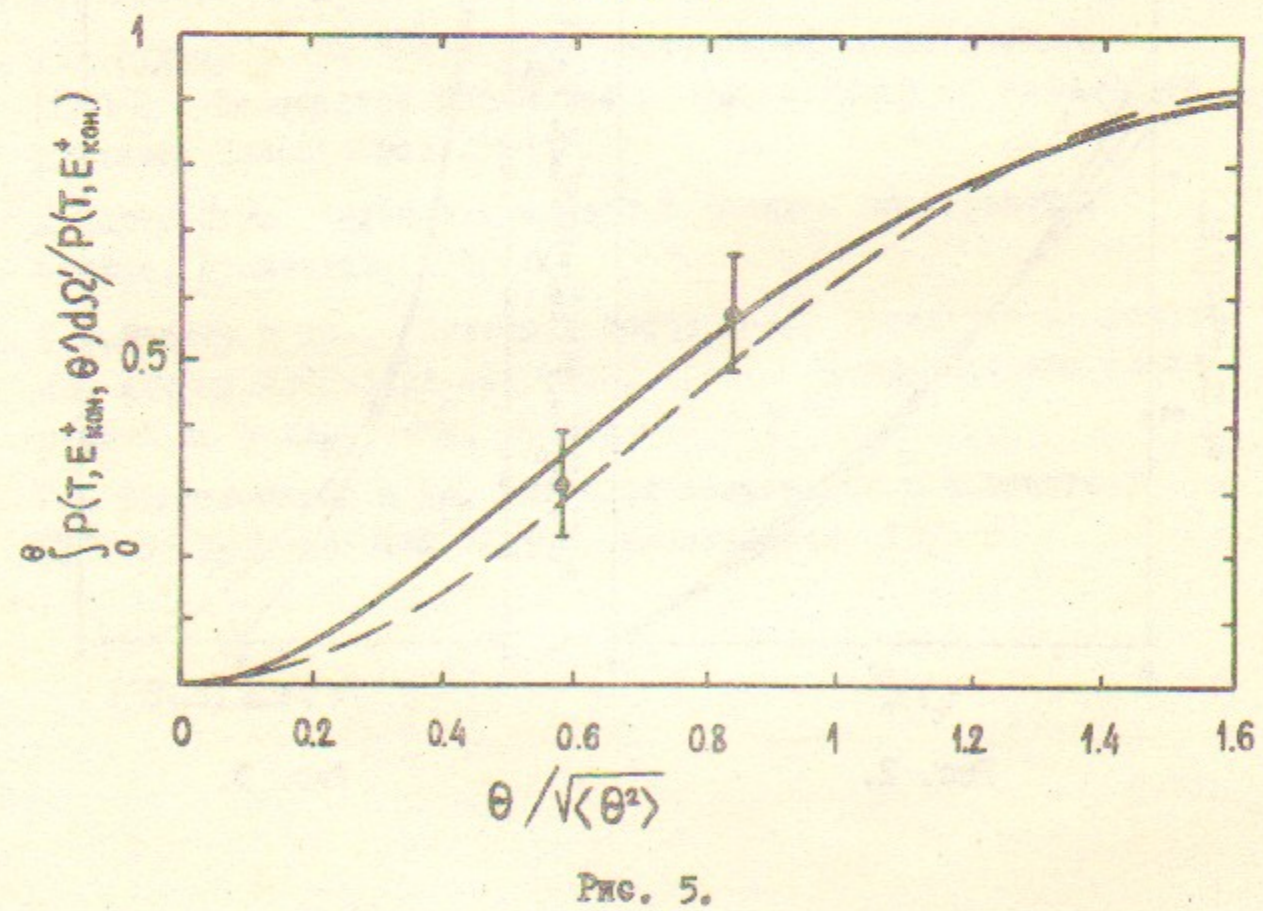
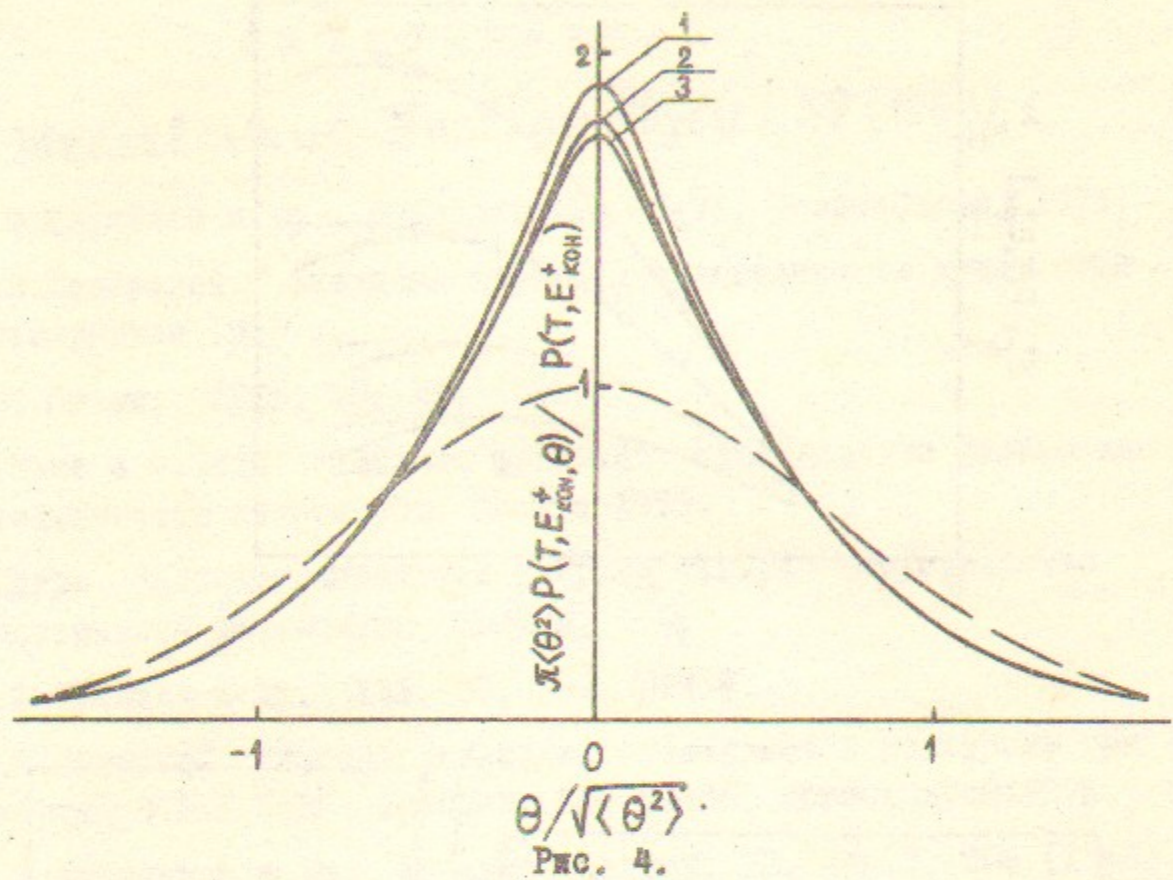


Рис. 3.



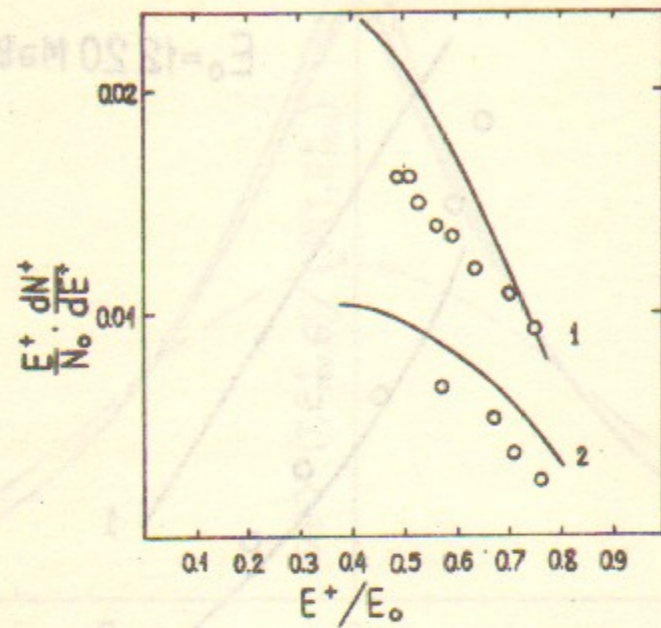


Рис. 7.

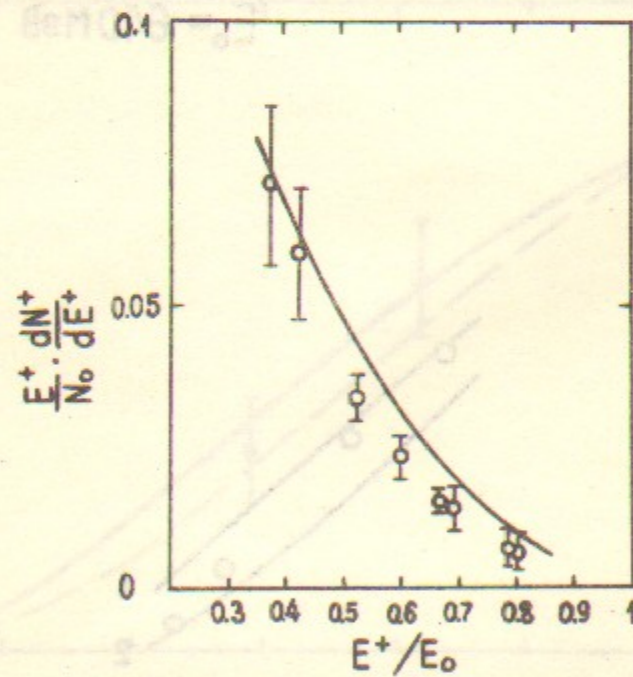


Рис. 8.

Подписи к рисункам

- Рис. 1. Коэффициент выхода позитронов в полный телесный угол в зависимости от толщины конвертера T , вычисленный в /4/ (сплошные линии) и в настоящей работе (пунктирные линии) для $E_{\text{кон}}^+/E_0 = E^+/E_0 = 0.3 - 1, 0.4-2, 0.5-3$ и $0.6-4$.
- Рис. 2. Распределение расстояний t^+ и t^- при $T = 1, E_{\text{кон}}^+/E_0 = 0.4-1, 0.5-2$ и $0.6-3$.
- Рис. 3. Распределение вероятности значений отношений $E^+/E_{\text{кон}}^+$ и E_0/E^- при $T = 1, E_{\text{кон}}^+/E_0 = 0.4 - 1, 0.5 - 2$.
- Рис. 4. Дифференциальное угловое распределение позитронов при $T = 1, E_{\text{кон}}^+/E_0 = 1, 0.5 - 2$ и $0.6 - 0.7 - 3$.
- Рис. 5. Интегральное угловое распределение позитронов при $T = 1, E_{\text{кон}}^+/E_0 = 0.4 - 0.7$. Точками обозначены экспериментальные значения коэффициентов выхода в углы $\theta \leq 0.032$ рад. при $E_{\text{кон}}^+ = 205$ МэВ, $E_0 = 290$ МэВ и $\theta \leq 0.037$ рад. при $E_{\text{кон}}^+ = 250$ МэВ, $E_0 = 430$ МэВ, /нормированные по расчетным значениям коэффициентов выхода в полный угол, полученным в /8/ по программе /2/ для $E_{\text{кон}}^+ \approx 200$ МэВ при соответствующих значениях отношения $E_{\text{кон}}^+/E_0$. Указана статистическая ошибка последних данных, точность экспериментальных данных $\sim 20\%$.
- Рис. 6. Сравнение экспериментальной /7/ (точки) и расчетной (кривая 2) зависимости коэффициента выхода позитронов, среднего в телесном угле $\pi \theta^2 = 4.2 \cdot 10^{-4}$ стер., от значения отношения $E_{\text{кон}}^+/E_0$. Кривые 1 - расчетные зависимости коэффициента выхода под 0° .
- Рис. 7. Сравнение экспериментальных значений коэффициентов выхода позитронов в углы $\theta \leq 0.037$ рад. при $E_0 = 430$ МэВ и $\theta \leq 0.032$ рад. при $E_0 = 290$ МэВ в зависимости от энергии позитронов, полученных в процессе настройки позитронного канала ВЭП-36 (точки) с расчетными значениями (кривые 1 и 2, соответственно).
- Рис. 8. Сравнение зависимости коэффициента выхода в полный угол от отношения E^+/E_0 , полученной в настоящей работе и в /4/ (кривая), с вычисленной в /8/ методом Монте-Карло для $E^+ \approx 200$ МэВ.

Рис. 1. Коэффициент влияния параметров в модели теоретический
 Рис. 2. Распределение параметров в модели теоретический
 Рис. 3. Распределение параметров в модели теоретический
 Рис. 4. Распределение параметров в модели теоретический
 Рис. 5. Распределение параметров в модели теоретический
 Рис. 6. Распределение параметров в модели теоретический

Ответственный за выпуск - С.Г. ПОЦОВ

Подписано к печати 30.IX-1976г. МН 07490

Усл. л., печ. л., 0,9 учетно-изд. л.

Тираж 150 экз. Бесплатно

Заказ № 95

Отпечатано на ротационной машине СО АН СССР

Рис. 7. Распределение параметров в модели теоретический
 Рис. 8. Распределение параметров в модели теоретический