И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 20

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Новосибирск
1976

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

АННОТАЦИЯ

При эйлеровом описании турбулентности пульсации данного масштаба ℓ переносятся без заметного искажения всеми движениями масштабов $\ell' \gg \ell$. Переносные взаимодействия приводят к сильной статистической зависимости пульсаций существенно различных масштабов. Поэтому свойства подобия и универсальности мелкомасштабной структуры турбулентности могут наблюдаться лишь в переменных, в которых переносные взаимодействия отсутствуют.

В настоящей работе показывается, что переносные взаимодействия отсутствуют в представлении, аналогичном представлению взаимодействия квантовой теории поля. Переход к представлению взаимодействия приводит к уравнению, в котором пульсации существенно различного порядка величины не взаимодействуют.

Статистические характеристики поля скорости в представлении взаимодействия определяются в рамках универсальной задачи о сильном взаимодействии, аналогичной задачам теории фазовых переходов 2-го рода. Моменты и функции отклика эйлеровой скорости могут быть получены с помощью их дополнительного осреднения по переносам крупномасштабными пульсациями в турбулентном потоке.

В основе феноменологической теории локальной структуры турбулентности /I/ лежит представление, что в турбулентном потоке обмениваются энергией лишь пульсации близких масштабов. Предположение о случайном характере обмена энергией приводит к выводу об универсальности и подобии статистического режима пульсаций малых масштабов. В эйлеровых уравнениях движения наряду с взаимодействиями, осуществляющими обмен энергии между пульсациями, имеются фиктивные взаимодействия, связанные с переносом пульсаций данного масштаба ℓ пульсациями, масштабов $\ell' \gg \ell$. Как подчеркивалось в работах /2,3/, при эйлеровом описании турбулентности эффект переноса приводит к сильной статистической зависимости пульсаций различных масштабов. Поэтому свойства универсальности и подобия мелкомасштабных пульсаций могут наблюдаться лишь в переменных, в которых отсутствуют эффекты чистого переноса одних пульсаций другими. В связи с этим, в работах /I-3/ были приведены качественные соображения о необходимости описания мелкомасштаб - ных пульсаций в системе отсчета, движущейся в каждой точке со всеми крупномасштабными пульсациями. В настоящей работе показывается, что такое описание мелкомасштабных пульсаций может быть осуществлено с помощью перехода в представление, аналогичное представлению взаимодействия квантовой теории поля /4/. Представление взаимодействия является промежуточным относительно лагранжевого и эйлерового способов описания турбулентности, поскольку перенос пакета как целого описывается в переменных, лагранжевых лишь относительно движений больших масштабов. Другой способ исключения переносных взаимодействий, основанный на введении несоленоидальной скорости использовался в работе /7/. Метод настоящей работы представляется нам физически более оправданным. Рассмотрим предварительно случай скалярного поля $\varphi(\vec{x},t)$,вся эволюция во времени которого связана с переносом поля φ полем скорости $\vec{v}(\vec{x},t)$. Роль поля φ может играть, например,концентрация пассивной примеси в турбулентном потоке. Уравнение для φ имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\varphi = 0 \qquad (I)$$

Интегрируя (I) по времени получаем интегральное уравнение

$$\varphi(\vec{x},t) = \varphi(\vec{x},t_o) - \int_{t_o}^{t} d\tau\, \vec{v}(\vec{x},\tau)\nabla\varphi(\vec{x},\tau)$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде итерационного ряда

$$\varphi(\vec{x},t) = \mathcal{L}\varphi(\vec{x},t_o) = \tag{2}$$

$$= \Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_{t_o}^{t} d\tau_1 \left(\vec{v}(\vec{x},\tau_1)\nabla\right) \int_{t_o}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_o}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \left(\vec{v}(\vec{x},\tau_n)\nabla\right)\Big]\varphi(\vec{x},t_o)$$

Интегрирование по всем $d\tau_m$ можно распространить на весь интервал (t_o, t), если ввести операцию Т-упорядочения /4/.

По определению,

$$T\left[(\vec{v}(\vec{x},\tau)\nabla)(\vec{v}(\vec{x},\tau')\nabla)\right] = \begin{cases} (\vec{v}(\vec{x},\tau)\nabla)(\vec{v}(\vec{x},\tau')\nabla) & \text{если } \tau > \tau' \\ (\vec{v}(\vec{x},\tau')\nabla)(\vec{v}(\vec{x},\tau)\nabla) & \text{если } \tau' > \tau \end{cases}$$

В случае большего числа сомножителей оператор Т-упорядочения располагает некоммутирующие операторы $(\vec{v}\nabla)$ в порядке убывания временных аргументов слева направо. С помощью оператора Т-упорядочения оператор $\mathcal{L}$ в формуле (2) может быть записан в виде /4/

$$\mathcal{L} = \Big\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{t_o}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_o}^{t} d\tau_n\, T\left[(\vec{v}(\vec{x},\tau_1)\nabla)\ldots(\vec{v}(\vec{x},\tau_n)\nabla)\right]\Big\} = \tag{3}$$

$$= T\exp\Big[-\int_{t_o}^{t} d\tau\,(\vec{v}(\vec{x},\tau)\nabla)\Big]$$

Согласно (2), оператор $\mathcal{L}$ связывает значение функции φ в произвольный момент времени t с её значением в фиксированный момент времени t_o. В этом смысле, для уравнения (I) оператор $\mathcal{L}$ осуществляет переход к представлению, аналогичному представлению Гейзенберга в квантовой механике. Если мы произведем преобразование поля φ по формуле

$$\varphi(\vec{x},t) = \mathcal{L}\tilde{\varphi}(\vec{x},t)$$

то поле $\tilde{\varphi}$ не будет зависеть от времени и равно значению поля φ в момент $t=t_o$. В потоке жидкости концентрация примеси постоянна вдоль лагранжевых траекторий частиц. Поэтому оператору $\mathcal{L}$ может быть придан и иной смысл. Для произвольного поля $\psi(\vec{x},t)$ (которое может и не быть скалярным) оператор $\mathcal{L}$ описывает переход к лагранжевым переменным. Поле $\tilde{\psi}$, определенное равенством

$$\psi(\vec{x},t) = \mathcal{L}\tilde{\psi}(\vec{x},t) \tag{4}$$

есть лагранжево поле. Докажем это утверждение иным способом. Разложим поле $\tilde{\psi}$ в ряд Тейлора по $t-t_o$

$$\tilde{\psi}(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_o)^n}{n!}\frac{\partial^n\tilde{\psi}}{\partial t^n}\Big|_{t=t_o} \tag{5}$$

Используя (4), ряд (5) можно переписать в виде:

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_o)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla\right)^n\psi\Big|_{t=t_o} \tag{6}$$

Согласно /5/, выражение (6) дает связь эйлерового поля ψ с лагранжевым $\tilde{\psi}$.

Точка $\vec{x}$ в равенстве (4) является эйлеровой координатой для поля ψ и лагранжевой для поля $\tilde{\psi}$. Обычно связь лагранжевых полей с эйлеровыми определяется равенством /6/

$$\psi(\vec{x},t) = \tilde{\psi}(\vec{a},t)$$

где $\vec{a} = \vec{x} - \int_{t_o}^{t}\tilde{\vec{v}}(\vec{a},\tau)$, $\tilde{\vec{v}}$ – лагранжева скорость.

Следовательно, поле ψ в левой части равенства равно лагранжевому полю $\tilde{\psi}$ в точке, сдвинутой относительно исходной на величину $-\int_{t_o}^{t}\tilde{\vec{v}}\,d\tau$. Отсюда следуют свойства оператора $\mathcal{L}$, которые потребуются ниже. Если $\tilde{\psi}$, $\tilde{\chi}$ – любые лагранжевы поля, то

$$\mathcal{L}(\tilde{\psi}\tilde{\chi}) = \mathcal{L}\tilde{\psi}\,\mathcal{L}\tilde{\chi}$$

$$\mathcal{L}(\psi^n) = (\mathcal{L}\psi)^n \tag{7}$$

Равенства (7) можно доказать и непосредственно из определения оператора $\mathcal{L}$.

Построим оператор $\mathcal{L}^{-1}$, обратный $\mathcal{L}$. Воспользуемся для этой цели уравнением, которому удовлетворяет произвольное лагранжево поле $\tilde{\psi}(\vec{x},t,t_o)$ /7/

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_0}+\vec{v}(\vec{x},t_0)\nabla\right]\tilde{\psi}(\vec{x},t,t_0) \qquad (8)$$

Уравнение (8) – есть следствие факта, что значение лагранжевого поля, измеренного в момент времени t не изменится, если мы начальные значения $\vec{x}, t_0$ сдвинем вдоль лагранжевой траектории. При $t=t_0$ $\tilde{\psi}$ совпадает с эйлеровым полем ψ, поэтому решение уравнения (8) может быть записано в виде, аналогичном (2)

$$\tilde{\psi}(\vec{x},t,t_0)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_t^{t_0}d\tau_1\left(\vec{v}(\vec{x},\tau_1)\nabla\right)\int_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2\ldots\int_{t_0}^{\tau_{n-1}}d\tau_n\left(\vec{v}(\vec{x},\tau_n)\nabla\right)\right]\psi(\vec{x},t)$$

или, меняя местами пределы интегрирования во всех интегралах

$$\tilde{\psi}(\vec{x},t,t_0)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t}d\tau_1\left(\vec{v}\nabla\right)\int_{\tau_1}^{t}d\tau_2\ldots\int_{\tau_{n-1}}^{t}d\tau_n\left(\vec{v}\nabla\right)\right]\psi(\vec{x},t)$$

Введем операцию T^+ – упорядочения. По определению, оператор T^+ располагает операторы $(\vec{v}\nabla)$ в порядке возрастания временных аргументов слева направо. Сумма ряда запишется в виде

$$\tilde{\psi}(\vec{x},t,t_0)=\mathcal{L}^{-1}\psi(\vec{x},t)=T^{+}\exp\left[\int_{t_0}^{t}d\tau\,\vec{v}(\vec{x},\tau)\nabla\right]\psi(\vec{x},t) \qquad (9)$$

Отметим, что знак в показателе экспоненты и порядок расположения операторов в членах разложения в равенствах (2),(9) обратны.

Пусть поле ψ удовлетворяет уравнению, более общему, чем (I)

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\psi=P(\psi,\nabla\psi) \qquad (10)$$

где P – некоторый полином относительно $\psi(\vec{x},t)$ и её пространственных производных. Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет лагранжево поле $\tilde{\psi}(\vec{x},t,t_0)$. Подставляя (4) в (I0), имеем:

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t}=\mathcal{L}^{-1}P(\mathcal{L}\tilde{\psi},\nabla\mathcal{L}\tilde{\psi}) \qquad (11)$$

В силу равенств (7), уравнение (II) приобретает вид:

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t}=P(\tilde{\psi},\mathcal{L}^{-1}\nabla\mathcal{L}\tilde{\psi}) \qquad (12)$$

Отсюда следует, что если коммутатором производной ∇ с оператором $\mathcal{L}$ можно пренебречь, то уравнение для $\tilde{\psi}$ сводится к

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t}=P(\tilde{\psi},\nabla\tilde{\psi}) \qquad (13)$$

т.е. в этом случае (I3) эквивалентно (I0) с $\vec{v}$ =0. Коммутаторы оператора $\mathcal{L}$ с производной имеют порядок величины $(t-t_0)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Поэтому решения (I2) совпадают с решениями уравнения (I3), если выполняется неравенство

$$|t-t_0|\ll|\operatorname{grad}v|^{-1} \qquad (14)$$

где $|\operatorname{grad}v|^{-1}$ равен по порядку величины времени, за которое две близкие точки успевают разойтись на значительное расстояние. Отсюда, однако, еще не следует, что при выполнении (I4) статистический режим поля $\tilde{\psi}$ не зависит от $\vec{v}$, т.к. начальные условия для поля $\tilde{\psi}$ зависят, вообще говоря, от $\vec{v}$. В начальный момент времени лагранжево поле $\tilde{\psi}$ совпадает с эйлеровым полем ψ. Поэтому статистический режим начальных значений $\tilde{\psi}(x,t_0,t_0)$ определяется одновременными моментами эйлерового поля $\psi(\vec{x},t_0)$.

Покажем, что одновременные моменты эйлерового поля ψ не зависят от $\vec{v}$, если пространственные и временные масштабы поля $\vec{v}$ велики по сравнению с характерными масштабами поля ψ. Рассмотрим вначале простой пример, когда поле $\vec{v}$ не зависит от $\vec{x}$; t и является случайным вектором с заданными статистическими свойствами. Преобразование (4) описывает в этом случае переход в другую галилееву систему отсчета, движущуюся вместе с жидкостью со скоростью $\vec{v}$.

$$\psi(\vec{x},t)=\exp\left[-(t-t_0)(\vec{v}\nabla)\right]\tilde{\psi}(\vec{x},t)=\tilde{\psi}(\vec{x}-\vec{v}(t-t_0),t) \qquad (15)$$

Средние лагранжевого поля

$$\tilde{G}_n=\langle\tilde{\psi}(\vec{x}_1,t_1)\ldots\tilde{\psi}(\vec{x}_n,t_n)\rangle \qquad (16)$$

совпадают в этом случае со средними поля ψ^0 в покоящейся жидкости и не зависят от $\vec{v}$. Моменты G_n эйлерового поля ψ определяются с помощью (I5) усреднением по распределению вероятности вектора $\vec{v}$. Пусть поле $\tilde{\psi}$ статистически однородно. Наиболее простая связь между функциями G_n, $\tilde{G}_n$ имеется в представлении Фурье по пространственным аргументам. Преобразование (I5) для компонент Фурье $\psi(\vec{\kappa}, t)$ – есть

$$\psi(\vec{\kappa}, t) = \exp[-i\vec{\kappa}\vec{v}(t-t_0)]\tilde{\psi}(\kappa, t)$$

Отсюда получаем

$$G_n(\vec{\kappa}_1, t_1, \dots, \vec{\kappa}_n, t_n) = Z(\vec{\alpha})\tilde{G}_n(\vec{\kappa}_1, t_1, \dots, \vec{\kappa}_n, t_n) \quad (I7)$$

где

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\kappa}_i(t_i - t_0), \quad Z(\vec{\alpha}) = \langle \exp(-i\vec{v}\vec{\alpha}) \rangle -$$

характеристическая функция случайного вектора $\vec{v}$. Например, для гауссового $\vec{v}$ характеристическая функция Z_0 имеет вид /6/:

$$Z_0(\vec{\alpha}) = \exp\left[-i\langle v_j \rangle \alpha_j - \tfrac{1}{2}\langle v_j v_m \rangle \alpha_j \alpha_m\right]$$

Если, кроме того, распределение вероятности для $\vec{v}$ изотропно, то $\langle \vec{v} \rangle = 0$, $\langle v_j v_m \rangle = \delta_{jm} v_0^2$ и

$$Z_0(\vec{\alpha}) = \exp\left(-\tfrac{1}{2} v_0^2 \alpha^2\right)$$

В силу пространственной однородности $\sum_{i=1}^{n} \vec{\kappa}_i = 0$. Поэтому $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\kappa}_i \tau_i$, где $\tau_i = t_i - t_n$. Отсюда следует, что одновременные моменты всех порядков эйлерового поля ψ совпадают со средними поля $\tilde{\psi}$ и не зависят от $\vec{v}$. Для одновременных средних $\vec{\alpha} = 0$, $Z(0) = 1$, $G_n = \tilde{G}_n$.

Подчеркнем, что при выводе (I7) было использовано лишь предположение о статистической независимости поля $\tilde{\psi}$, которое совпадает с полем ψ^0 в покоящейся жидкости, от поля скорости $\vec{v}$. Поэтому результат (I7) не зависит от конкретного вида уравнения, которое описывает эволюцию поля ψ. Формула (I7) для векторного поля $\vec{u}$, которое удовлетворяет уравнению переноса с $\vec{v} = const$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{u} = 0$$

при $n = 2$, в предположениях о гауссовости и взаимной статистической независимости полей $\vec{v}$, $\vec{u}(\vec{\kappa}, t_0)$ была получена Крейчнаном /3/.

Пусть поле $\vec{v}$ зависит от $\vec{x}, t$. В турбулентном потоке жидкости, как было показано Колмогоровым /I/, можно ожидать, что движения, различные по масштабу, статистически взаимно независимы. Такие же соображения, не претендуя на строгое доказательство, можно привести в нашем случае. Пусть корреляционное время τ_c стационарного случайного поля $\psi^0(\vec{x}, t)$ в покоящейся жидкости мало по сравнению с временем изменения скорости $\vec{v}$, а длина корреляции τ_c поля ψ^0 мала по сравнению с масштабами L поля скорости $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Взаимодействие полей $\vec{v}$, ψ в основном сведется к переносу без заметного искажения волновых пакетов поля ψ полем $\vec{v}$. Эволюция пакетов в системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью определяется, в основном, нелинейным взаимодействием P. В движущейся системе отсчета взаимодействие пакетов поля ψ с полем $\vec{v}$ мало по параметрам τ_c/L и $\tau_c L/v$. Поэтому статистическая зависимость пакетов поля ψ от $\vec{v}$ также будет слабой. Одновременные корреляции поля ψ, которые не зависят от переноса, с точностью до членов, малых по τ_c/L, $\tau_c L/v$ не зависят от $\vec{v}$.

Поскольку уравнение (I3) и начальные условия для $\tilde{\psi}$ в пределе $\tau_c/L \to 0$ не зависят от $\vec{v}$, то неодновременные корреляционные функции для поля $\tilde{\psi}$ при условии (I4) не будут зависеть от $\vec{v}$ и совпадают с корреляционными функциями поля ψ^0 в покоящейся жидкости. Таким образом, в рассмотренном случае преобразование (4) описывает переход к "представлению взаимодействия": оно исключает фиктивную часть взаимодействия, связанную с чистым переносом волновых пакетов поля ψ. Если $\vec{v}$ содержит гармоники тех же масштабов, что и ψ, то при переходе к представлению взаимодействия в показателе Т-экспоненты в формуле (4) следует оставить лишь крупномасштабную компоненту скорости $\vec{v}$. Уравнение для поля $\tilde{\psi}$ будет содержать в этом случае взаимодействие лишь с той компонентой поля $\vec{v}$, которая вызывает искажение пакетов поля ψ. Преобразование этого вида будет использовано ниже при рассмотрении статистического режима пульсаций скорости в инерционном интервале волновых чисел.

Вычислим неодновременные моменты поля ψ, считая, что корреляции поля $\tilde{\psi}$ в покоящейся жидкости заданы. Если все разности времен $t_{ij} = |t_i - t_j|$ и расстояния $x_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$. в (I6) мамы по сравнению с характерными масштабами поля $\vec{v}$, то при вычислении функции G_n зависимостью поля $\vec{v}(\vec{x},t)$ от координаты и времени можно пренебречь и считать поле $\vec{v}$ случайным вектором. Этот случай был рассмотрен выше. Функцию $Z(\vec{\lambda})$ в (I7) следует считать в этом случае одноточечной характеристической функцией поля $\vec{v}$. Одновременные моменты $G_n, \tilde{G}_n$ совпадают. Неодновременные моменты отличаются слабо, если разности времен t_{ij} малы по сравнению с величиной $(\kappa v_0)^{-1}$, где v_0 – среднеквадратичная пульсация вектора $\vec{v}$. Величина $(\kappa v_0)^{-1}$ по порядку величины равна времени, необходимому для сдвига волнового пакета с характерным волновым числом κ на расстояние порядка его размера κ^{-1}. Если корреляции поля $\tilde{\psi}$ затухают за время, много меньшее $(\kappa v_0)^{-1}$, то множитель $Z(\vec{\lambda})$ в (I6) можно отбросить. Переносные взаимодействия, по-видимому всегда несущественны для пульсаций скорости в вязком интервале при асимптотически больших волновых числах. В интервале вязкой диссипации энергии характерным временем затухания корреляций является величина $\tau_\kappa \sim (\nu \kappa^2)^{-1}$. При достаточно больших κ волновые пакеты успевают затухнуть прежде,чем сдвинутся на заметное расстояние. Поэтому при $\kappa \gg v_0/\nu$ перенос не окажет влияния на зависимость корреляционных функций поля скорости от времени. Для тех полей, для которых предположение о достаточно быстром затухании волновых пакетов не выполняется, зависимость эйлеровых корреляций от времени полностью определяется, при достаточно большом v_0, процессом переноса.

Пусть точки $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ в (I6) можно разбить на две группы, так, что расстояние между точками внутри групп x_{ij} малы по сравнению с расстоянием R между группами точек. Величину R будем считать большой по сравнению с корреляционным радиусом поля $\tilde{\psi}$ и сравнимой с характерным масштабом поля $\vec{v}$. В этом случае внутри каждой группы точек можно ввести общую скорость $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Средние поля $\tilde{\psi}$ разобьются на произведение средних полей, принадлежащих каждой из групп точек:

$$\langle\tilde{\psi}(\vec{x}_1,t_1)\dots\tilde{\psi}(\vec{x}_n,t_n)\rangle = \langle\tilde{\psi}(\vec{x}_1,t_1)\dots\tilde{\psi}(\vec{x}_l,t_l)\rangle\langle\tilde{\psi}(\vec{x}_1{}',t_1{}')\dots\tilde{\psi}(\vec{x}_m{}',t_m{}')\rangle \qquad (I8)$$

где $l+m=n$. Применяя к каждому из средних в правой части (I8) преобразование (I5), соответственно, с $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ и переходя к компонентам Фурье, аналогично (I7) получаем:

$$G_n = Z(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2)\,\tilde{G}_n \qquad (I9)$$

где $\vec{\lambda}_1 = \sum_{i=1}^{l} \vec{\kappa}_i t_i$, $\vec{\lambda}_2 = \sum_{i=1}^{m} \vec{\kappa}_i{}' t_i{}'$, $Z(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2)$ – двухточечная характеристическая функция поля $\vec{v}$. Внутри каждой из групп точек сумма волновых векторов равна нулю. Поэтому $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2$ зависят лишь от разностей времен и одновременные моменты $G_n, \tilde{G}_n$ совпадают. Обобщение (I9) на случай большего числа групп точек является очевидным.

Используем полученные результаты для изучения временных корреляций поля скорости в инерционном интервале волновых чисел.Соображения подобия /I,8/ позволяют предположить, что время жизни волновых пакетов в инерционном интервале степенным образом зависит от волнового числа $\tau_\kappa \sim \kappa^{-\varkappa}$. Если предположить, что единственным параметром, определяющим статистический режим пульсаций в инерционном интервале является средняя скорость диссипации энергии ε, то из соображений размерности (см./I/).

$$\tau_\kappa \sim \varepsilon^{-1/3} \kappa^{-2/3}$$

Это время велико по сравнению с величиной $(\kappa v_0)^{-1}$, где под v_0 следует понимать характерную скорость пульсаций из энергосодержащего интервала. Поэтому зависимость от времени корреляционных функций эйлеровой скорости в инерционном интервале полностью определяется переносом случайными движениями крупных масштабов.Это означает, что переносные взаимодействия приводят к сильной статистической зависимости пульсаций эйлеровой скорости существенно различных масштабов (см.также /3/). Покажем, что взаимные переносы вихрей можно исключить с помощью перехода в представление взаимодействия, аналогичное (4) для поля ψ.

Пусть $\vec{v}(\vec{x},t)$ – эйлерово поле скорости. Лагранжево поле $\tilde{\vec{v}}$ связано с $\vec{v}$ выражением, аналогичным (4)

$$\vec{v}(\vec{x},t) = T\exp\left[-\int_{t_0}^{t} d\tau\, \vec{v}(\vec{x},\tau)\nabla\right]\tilde{\vec{v}}(\vec{x},t) \qquad (20)$$

Обратное преобразование дается оператором T^+–экспоненты. Заметим, что переход к лагранжевым переменным исключает перенос материальной частицы движениями всех масштабов. В нашем рассмотрении роль такой частицы будет играть волновой пакет. Для движений масштабов $l' \gg l$, где l – размер пакета, волновой пакет можно считать материальной точкой и перейти относительно этих движений к лагранжевым переменным. При реализации этой программы в координатном пространстве необходимо разложить эйлерово поле скорости по полной системе функций типа волновых пакетов и применить для каждого пакета преобразование (4), где в показателе Т-экспоненты следует оставить лишь крупномасштабную по отношению к размеру пакета компоненту поля скорости. Форма волновых пакетов при исключении чисто переносных взаимодействий несущественна.

Проще, однако, исходить из уравнения Навье-Стокса в представлении Фурье по пространственным аргументам

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)v_i(\vec{k},t)=-ik_j\int d^3q\, v_j(\vec{q},t)v_i(\vec{k}-\vec{q},t)+ik_i p(\vec{k},t) \qquad (21)$$

Уравнение несжимаемости для поля $\vec{v}$

$$\vec{k}\vec{v}(\vec{k},t)=0$$

позволяет выразить компоненту Фурье поля давления через скорость с помощью равенства

$$p(\vec{k},t)=\frac{k_j k_l}{k^2}\int d^3q\, v_j(\vec{q},t)v_l(\vec{k}-\vec{q},t) \qquad (22)$$

Введем скорость $\vec{V}^{(k)}(\vec{\varkappa},t)$, которая содержит лишь гармоники Фурье $\vec{v}(\vec{\varkappa},t)$ с волновыми числами $\varkappa$, много меньшими k. Будем считать, например, что $\vec{V}$ определяется равенством:

$$V^{(k)}(\vec{\varkappa},t)=\exp\left(-\frac{\lambda^2\varkappa^2}{k^2}\right)\vec{v}(\vec{\varkappa},t) \qquad (23)$$

где $\lambda \gg 1$. В координатном представлении V имеет вид:

$$\vec{V}^{(k)}(\vec{x},t)=\left(\frac{k}{2\lambda\sqrt{\pi}}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\exp\left[-\frac{k^2}{4\lambda^2}(\vec{x}-\vec{x}')^2\right]\vec{v}(\vec{x}',t)$$

т.е. $\vec{V}$ – скорость, сглаженная по объему, размера, много большего k^{-1}. Рассмотрим вклад в интегралы (21), (22) от области малых $|\vec{q}|$, $|\vec{k}-\vec{q}|$. Благодаря наличию множителя $k_j k_l$ вклад в интеграл (22) от области малых $|\vec{q}|$, $|\vec{k}-\vec{q}|$ пропорционален

градиенту крупномасштабной компоненты скорости $\vec{V}$ поэтому мал по параметру λ^{-1}. Пропорционален градиенту $\vec{V}$ также вклад в интеграл (21) от области малых $|\vec{k}-\vec{q}|$. Вклад в интеграл (21) от области $|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$ имеет порядок величины скорости $\vec{V}$ и поэтому велик. Как было отмечено Кадомцевым /2/, этот вклад описывает чистый перенос пульсаций масштаба k^{-1} пульсациями больших масштабов.

Переход к представлению взаимодействия для компонент Фурье поля скорости может быть описан с помощью преобразования

$$v_i(\vec{k},t)=T\exp\left[-ik_j\int_{t_0}^{t}H_j(\tau)d\tau\right]\tilde{v}_i(\vec{k},t) \qquad (24)$$

где

$$H_j(\tau)=\int d^3\varkappa\, V_j^{(k)}(\vec{\varkappa},\tau)\exp\left(-\vec{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\vec{k}}\right).$$

Чтобы убедиться в этом, необходимо продублировать выкладки, которые привели к (3) для уравнения переноса (1) в представлении Фурье. Покажем, что уравнение для поля $\tilde{\vec{v}}$, определяемого равенством (24) не содержит переносных взаимодействий. Поскольку пространственный градиент крупномасштабной компоненты $\vec{V}$ мал, то в низшем приближении по λ^{-1} оператор $\exp(-\vec{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\vec{k}})$ в (25) можно заменить на единицу. Преобразование (24) приобретает в этом случае вид

$$v_i(\vec{k},t)=\exp\left[-ik_j\int_{t_0}^{t}d\tau\int d^3\varkappa\, V_j^{(k)}(\vec{\varkappa},\tau)\right]\tilde{v}_i(\vec{k},t) \qquad (26)$$

В этом приближении поле $\tilde{\vec{v}}$ удовлетворяет уравнению несжимаемости

$$k_i\tilde{v}_i(\vec{k},t)=0 \qquad (27)$$

Подставляя (26) в (21), имеем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)\tilde{v}_i(\vec{k},t)=-ik_j\int d^3q\left[1-\exp\left(-\frac{\lambda^2q^2}{k^2}\right)\right]\tilde{v}_j(\vec{q},t)\tilde{v}_i(\vec{k}-\vec{q},t)\times$$
$$\times\exp\left\{i\int_{t_0}^{t}d\tau\int d^3\varkappa\left[\vec{q}\left(\vec{V}^{(q)}(\vec{\varkappa},\tau)-\vec{V}^{(k-q)}(\vec{\varkappa},\tau)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\vec{k}\left(\vec{V}^{(k-q)}(\vec{\varkappa},\tau)-\vec{V}^{(k)}(\vec{\varkappa},\tau)\right)\right]\right\}+ik_i\tilde{p}(\vec{k},t) \qquad (28)$$

Легко показать, что при конечных $|\vec{q}|$, $|\vec{k}-\vec{q}|$ (что обеспечивается быстрой сходимостью интеграла по d^3q в области малых q, $|\vec{k}-\vec{q}|$) показатель экспоненты в (28) мал по параметру λ^{-1}. Поэтому в низшем приближении по λ^{-1} с учетом (27) для $\tilde{v}$ получаем уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)\tilde{v}_i(\vec{k},t)=-ik_j\Delta_{il}\int d^3q\left[1-\exp\left(-\frac{\lambda^2q^2}{k^2}\right)\right]\tilde{v}_j(\vec{q},t)\tilde{v}_l(\vec{k}-\vec{q},t) \qquad (29)$$

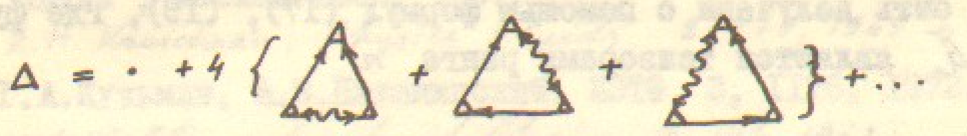
где

$$\Delta_{il}=\delta_{il}-\frac{k_ik_l}{k^2}$$

Учет следующих членов разложения по λ^{-1} приводит к появлению в уравнении для $\tilde{v}$ нелинейностей более высокого порядка. Интеграл в правой части (29) сходится в области $q \ll k$, поэтому переносные взаимодействия в этом уравнении отсутствуют.

Уравнение, аналогичное (29) использовалось Кадомцевым /2/ для построения улучшенного приближения прямых взаимодействий. Это уравнение можно также использовать для построения полной системы диаграммных уравнений для статистических характеристик поля $\tilde{v}$. В работах /8,9/ для этой цели использовалось непосредственно уравнение Навье-Стокса (21) со случайной внешней силой. Предположение о подобии статистических характеристик эйлерового поля $\vec{v}$ не приводило к противоречиям, если затравочная вершина эффективно сокращалась в области, где существенно различны аргументы входящих в нее линий, т.е. если переносные взаимодействия играют незначительную роль. Переносными взаимодействиями можно, например, пренебречь в том случае, если малые вихри рождаются и живут между большими вихрями. Если это предположение не выполняется, то переносные взаимодействия приведут к расходимости интегралов в области малых волновых чисел. В этом случае для исследования свойств подобия необходимо использовать уравнение (29) для полулагранжевой скорости $\tilde{v}$. Затравочная вершина уравнения (29) быстро убывает вне области, где её аргументы одного порядка величины, поэтому трудности, связанные с расходимостью отсутствуют. Задача приобретает вид, сходный с задачами теории фазовых переходов, сформулированными в /10/. Мы опишем лишь общую схему рассуждений, чтобы показать, каким образом свойства подобия проявляются в точных уравнениях теории. Диаграммная техника

для уравнения (29) и её анализ аналогичны рассмотренным в /8/. Добавим в правую часть уравнения (29) случайную силу, спектр которой отличен от нуля лишь в области малых волновых чисел, и перейдем в представление Фурье по времени. Подставляя в среднее поле $\tilde{v}$ в виде функционального разложения по внешней силе и производя частичное суммирование получаемых рядов, мы получим полную систему диаграммных уравнений для спектрального тензора F, тензора Грина G и вершинных функций. Рассмотрим, например, уравнение для вершинной функции Γ /8,9/


(30)

Здесь введены следующие обозначения

$$\Delta \Leftrightarrow \Gamma_{ijl}(\vec{k},\omega,\vec{q},\Omega)$$

$$\leftarrow \Leftrightarrow G_{ij}(\vec{k},\omega)$$

$$\Leftrightarrow F_{ij}(\vec{k},\omega)$$

$$\Leftrightarrow P_{ijl}(\vec{k})=-\frac{i}{2}\left[k_j\Delta_{il}+k_l\Delta_{ij}\right]$$

Предположим, что тензоры F, G, Γ являются однородными функциями своих аргументов, степеней δ, β, $-\gamma$

$$F_{ij}(\vec{k},\omega)=k^{-\delta}F'_{ij}\left(\frac{\omega}{k^\alpha}\right)$$

$$G_{ij}(\vec{k},\omega)=k^{-\beta}G'_{ij}\left(\frac{\omega}{k^\alpha}\right)$$

$$\Gamma_{ijl}(\vec{k},\omega,\vec{q},\omega)=k^{\gamma}\Gamma'_{ijl}\left(\frac{\omega}{k^\alpha},\frac{\Omega}{q^\alpha},\frac{\vec{q}}{k}\right) \qquad (31)$$

Эффективным параметром разложения ряда (17) служит величина $\mu \sim FG^2\Gamma^2k^3\omega$. Подставляя (31) в произвольный член ряда (30) и предполагая, что основной вклад в интегралы дает область, где переменные интегрирования имеют порядок величины аргументов внешних линий, получаем, что все члены ряда имеют ту же степень однородности, что и левая часть, если $\mu \sim const \sim 1$. Это условие дает следующую связь между индексами α, β, δ, γ

$$2\gamma - 2\beta - \delta + \alpha + 3 = 0$$

В теории Колмогорова /I/ $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = 2/3$, $\delta = 13/3$. Случай $\gamma \neq 1$ согласуется с уравнением (30), если, например, полная вершина велика по сравнению с затравочной. Аналогичный анализ может быть проведен и в остальных уравнениях системы.

Таким образом, статистические характеристики полулагранжевой скорости $\tilde{v}$ определяются в рамках универсальной задачи о сильном взаимодействии. Моменты и функции отклика эйлеровой скорости могут быть получены с помощью формул (I7), (I9), где функции G_n, $\tilde{G}_n$ являются тензорами ранга n.

Литература

I. А.Н.Колмогоров. ДАН СССР 30, 299, I94I.
2. Б.Б.Кадомцев. В сб."Вопросы физики плазмы" вып.4. Атомиздат, I964.
3. R.H. Kraichnan Physics Fluids 7, 1723, 1964
4. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Наука, Москва, I973.
5. J.L. Lumley в сб. Mecanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS a Marseile), Paris 1962.
6. А.С.Монин, А.М.Яглом. Статистическая гидромеханика ч.I,2. "Наука", Москва I965, I967.
7. R.H. Kraichnan, Physics Fluids 8, 575, 1965
8. Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский. ЖЭТФ, 3, II76, I972.
9. H.W. Wyld Annals of Physics 14, 143, 1961
IO. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов. "Наука", Москва, I975.

Работа поступила - 25 декабря 1975 г.

Ответственный за выпуск А.Н.СКРИНСКИЙ
Подписано к печати 10.III-1976 г. МН 02682
Усл. 1,0 печ. л., тираж 150 экз. Бесплатно
Заказ № 20.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,рп