И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 63

В.Н.Байер, В.М.Катков

ПОПРАВКИ К ПРИБЛИЖЕНИЮ ЭЙКОНАЛА И ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Новосибирск
1975

В.Н.Байер, В.М.Катков

ПОПРАВКИ К ПРИБЛИЖЕНИЮ ЭЙКОНАЛА И ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

А Н Н О Т А Ц И Я

В рамках операторной техники, которая оказывается адекватной для рассмотрения задач квазиклассического приближения, найдена поправка к приближению эйконала. Полученный результат применен к рассмотрению процесса тормозного излучения. Показана факторизация с нужной точностью излучения и рассеяния в области передач импульса, дающих основной вклад в сечение. Вычислено сечение тормозного излучения частиц высокой энергии на ядрах с учетом кулоновских поправок включая члены $\sim m/\varepsilon$.

Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 630090

CORRECTION TO EIKONAL APPROXIMATION AND BREMSSTRAHLUNG AT HIGH ENERGY

V.N.BAIER, V.M.KATKOV

a b s t r a c t

The corrections to eikonal expansions in relativistic potential scattering have been found in frame of an operator approach, which appears adequte for consideration of problems in quasiclassical approximation. Using the operator representation of the Green function (see Eq.(2)) after disentanglement of the operator expression (3) one obtaines scattering amplitude in form (5), commutator decomposition of which gives its modified eikonal expansion (see Eqs.(7),(8); χ_1 is the correction of order m/ε , ε is a particle energy). The result obtained has been applied to the calculation of bremsstrahlung cross-section. First, a factorization of scattering and radiation with necessary accuracy has been shown in the momentum transfer region, which gives the main contribution to the cross-section. (see Eq.(14)). Then the bremsstrahlung cross-section of high energy elecrons has been calculated taking into account Coulomb correction including term $\sim m/\varepsilon$ (see Eq.(22)).

I. В приближении эйконала (ПЭ), широко используемом в области высоких энергий, учитываются только старшие члены разложения амплитуды по обратным степеням энергии. Заметный интерес представляет также следующий член разложения, дающий поправку к ПЭ, который изучался в работах /I,2/ (см. также лекции /3/), и недавно снова обсуждался в работе /4/. Как отмечено в /3/, в ПЭ весьма удобно использовать операторный подход, поскольку это приближение в определенном смысле является классическим, причем фаза рассеяния в ПЭ дается разностью классических интегралов действия на прямолинейной траектории. В данной работе с использованием операторной техники найдена поправка к фазе рассеяния ПЭ, которая соответствует учету непрямолинейности траектории, при рассеянии релятивистских частиц на внешнем потенциале. Затем полученный результат применяется для вычисления сечения тормозного излучения при рассеянии электрона большой энергии на ядре с учетом кулоновских поправок.

В формальной теории рассеяния амплитуда рассеяния определяется соотношением (см. /5/, стр.I85):

$$T = \varphi G G_0^{-1} = G_0^{-1} G \varphi \quad , \quad \varphi = G_0^{-1} - G^{-1} , \qquad (I)$$

где G_0 - функция Грина свободной частицы, G - функция Грина с учетом взаимодействия. Как будет видно из дальнейшего, искомая поправка не зависит от спина. Поэтому мы ограничимся рассмотрением уравнения Клейна-Гордона: $\left[(\varepsilon - V(\vec{r}))^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2\right]\varphi = 0$. Проведем экспоненциальную параметризацию функции Грина частицы, удовлетворяющей этому уравнению:

$$G = -\frac{i}{2\varepsilon}\int_0^\infty ds\, e^{is\frac{k^2}{2\varepsilon}}\, e^{-is\left(\frac{p^2}{2\varepsilon} + \varphi(\vec{r})\right)} , \qquad (2)$$

где $k^2 = \varepsilon^2 - m^2$, $\varphi(\vec{r}) = V(\vec{r}) - \frac{V^2(\vec{r})}{2\varepsilon}$. В показателе экспоненты в (2) стоят некоммутирующие операторы $\vec{p}$ и $\varphi(\vec{r})$. Поэтому для проведения вычислений распутаем это выражение. Используя способ, изложенный в Приложении В монографии /6/, находим, что

$$\exp\left[-is\left(\frac{p^2}{2\varepsilon} + \varphi(\vec{r})\right)\right] = T_{(-)} \exp\left[-i\int_0^s \varphi(\vec{r}(s))ds\right] \exp\left(-is\frac{p^2}{2\varepsilon}\right) , \qquad (3)$$

где

$$\varphi(\vec{z}(s)) \equiv \exp\left(-is\frac{p^2}{2\varepsilon}\right)\varphi(\vec{z})\exp\left(is\frac{p^2}{2\varepsilon}\right) = \varphi\left(\vec{z}-\frac{\vec{p}}{\varepsilon}s\right)$$

параметр s играет роль "времени", символ $T_{(-)}$ означает антихронологическое произведение по "времени" s.

Взяв матричный элемент $T_{ba} = \langle b|T|a\rangle$ от соотношения (I) и воспользовавшись равенством (см. /3/):

$$\lim_{k^2\to p_a^2}\left[-i\int_0^\infty ds\, e^{f(s)}(k^2-p_a^2)\exp[is(k^2-p_a^2)]\right] = e^{f(\infty)}, \quad (4)$$

находим с учетом (3) следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$T_{ba} = \langle b|\varphi(\vec{z})T_{(-)}\exp\left[-i\int_0^\infty \varphi(\vec{z}(s))ds\right]|a\rangle =$$
$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{i}\langle b|\frac{d}{d\delta}T_{(-)}\exp\left[-i\int_\delta^\infty \varphi(\vec{z}(s))ds\right]|a\rangle \quad (5)$$

Полученная формула (5) является точной. В дальнейшем мы разложим амплитуду по степени m/ε и отбросим члены $O(m^2/\varepsilon^2)$. С этой точностью при разложении входящего в (5) $T_{(-)}$-произведения можно ограничиться только первым коммутатором (ср. /6/ формула (6.8))

$$T_{(-)}\exp\left[-i\int_0^\infty\varphi(\vec{z}(s))ds\right] = \exp\Big[-i\int_0^\infty\varphi(\vec{z}(s))ds +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty ds_1\int_0^\infty ds_2\,\vartheta(s_1-s_2)\left[\varphi(\vec{z}(s_1)),\varphi(\vec{z}(s_2))\right]\Big].$$

Учитывая определение $\varphi(\vec{z}(s))$ (см.формулу (3)), получаем (например, разлагая $\varphi(\vec{z}(s))$ в ряд Тейлора)

$$\left[\varphi(\vec{z}(s_1)),\varphi(\vec{z}(s_2))\right] = \frac{i}{\varepsilon}(s_1-s_2)\vec{\nabla}\varphi(\vec{z}(s_1))\cdot\vec{\nabla}\varphi(\vec{z}(s_2)), \quad (6)$$

где отброшены члены, содержащие более высокие степени постоянной Планка. После проведения этих операций можно не учитывать некоммутативность операторов внутри амплитуды (5), т.е. $\langle b|\vec{p}|a\rangle = \frac{1}{2}(\vec{p}_a+\vec{p}_b)$.

Выберем в качестве оси z направление вектора $\vec{p}_a+\vec{p}_b$ (см. /5/), учтем, что с принятой точностью можно считать $z(s) = z-\frac{p}{\varepsilon}s \simeq z-s$ и проведем замену переменных $z-s \to z$, в результате получим после несложных преобразований, окончательное выражение для амплитуды рассеяния в модифицированном ПЭ:

$$T_{ba} = \frac{p}{2\pi i}\int d^2\rho\, e^{i\vec{q}\vec{\rho}}\left(e^{i\chi(\vec{\rho})}-1\right), \quad (7)$$

где $p = p_a = p_b$, $\chi(\vec{\rho}) = \chi_0(\vec{\rho})+\chi_1(\vec{\rho})$, $v = \frac{p}{\varepsilon}$,

$$\chi_0(\vec{\rho}) = -\frac{1}{v}\int_{-\infty}^{\infty}V(\vec{\rho},z)dz, \quad \chi_1(\vec{\rho}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial V^2}{\partial\rho^2}dz \quad (8)$$

В этом выражении $\chi_0(\rho)$ – есть фаза в ПЭ, $\chi_1(\rho)$ – представляет поправку к фазе. Нетрудно убедиться, что фаза $\chi(\rho)$ определяется классическим действием на реальной траектории в приближении малых углов. Естественно, что эта фаза не зависит от спина, поэтому найденный результат совпадает с полученным в статье /4/ для спинорных частиц с помощью иного подхода.

2. Как известно (см. /6/), для вычисления сечения тормозного излучения заряженной частицы на внешнем поле в случае, когда вклад в излучение дает вся траектория частицы, необходимо знать сечение рассеяния на этом поле и вероятность излучения при заданной передаче импульса. Последняя найдена в /6/ с точностью до членов $\sim 1/\gamma^2$ $(\gamma = \varepsilon/m)$, тогда как сечение рассеяния там было взято в ПЭ. Отметим, что в /6/ допущена неточность в оценке отброшенных членов, поскольку сечение тормозного излучения вычислено там с точностью до членов $\sim 1/\gamma$ (а не $\sim 1/\gamma^2$), на это обратили внимание авторы работы /4/. Для вычисления же сечения с точностью до членов $\sim 1/\gamma^2$ необходимо показать, что в области передач $q_\perp \sim m$ имеет место факторизация с указанной точностью и использовать найденное выше сечение рассеяния в модифицированном ПЭ.

Среднее от матричного элемента излучения найденное в /6/ (формула (16.8) сводится к произведению средних значений амплитуд излучения и рассеяния. Если же мы хотим учесть члены $\sim 1/\gamma$, то это обстоятельство уже не будет иметь места и вместо указанной формулы необходимо рассмотреть матричный элемент:

$$M(\vec q)=\frac{1}{i}\frac{d}{d\delta}\langle b|M(\vec\rho)\,T_{(-)}\exp\left[-i\int_{\delta}^{\infty}\varphi(\vec r(s))\,ds\right]|a\rangle, \qquad (9)$$

где входящие величины R и $\vec q$ зависят от оператора импульса $\vec p$, причем

$$\vec q_{\vec\rho}=\frac{\partial}{\partial\vec\rho}\int_{0}^{\infty}\varphi(\vec r(s))\,ds. \qquad (I0)$$

Проводя разложение как в /6/ (формула (I6.I6), имеем с учетом (I0):

$$\langle b|\,\vec q_{\vec\rho}\,T_{(-)}\exp\left[-i\int_{\delta}^{\infty}\varphi(\vec r(s))\,ds\right]|a\rangle = i\langle b|\frac{\partial}{\partial\vec\rho}T_{(-)}\exp\left[-i\int_{\delta}^{\infty}\varphi(\vec r(s))\,ds\right]|a\rangle. \qquad (II)$$

Отсюда вытекает, что после взятия среднего можно непосредственно пользоваться формулой (I6.8) из /6/, только фаза $\chi(\rho,z)$ должна быть взята с учетом найденных выше поправок, а входящая в $M(\vec\rho)$ величина $\vec q_{\vec\rho}$ есть

$$\vec q_{\vec\rho}(z)=-\frac{\partial\chi(\vec\rho,z)}{\partial\vec\rho}. \qquad (I2)$$

Тогда выражение для $A(q_\perp)$ (см. /6/ формула (I6.2I)) примет следующий вид:

$$A(q_\perp)=\frac{1}{q_\perp}\int_{0}^{\infty}\rho\,d\rho\,J_1(q_\perp\rho)\,e^{i\chi(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\chi(\rho,z)}{\partial z}e^{iq_\parallel z}dz \qquad (I3)$$

В области передач $q_\perp\sim m$ вклад в интеграл дают $\rho\sim\frac{1}{m}$ и, следовательно, $z\sim\frac{1}{m}$, так что в этой области $q_\parallel z\sim q_\parallel/m\lesssim\frac{1}{\gamma}$. Поскольку с нашей точностью $\partial\chi(\rho,z)/\partial z$ – четная функция z, то с точностью до членов $\sim 1/\gamma^2$ можно заменить $e^{iq_\parallel z}$ на единицу, так что

$$A(q_\perp)=\frac{i}{q_\perp}\int_{0}^{\infty}\rho\,d\rho\,J_1(q_\perp\rho)\frac{d}{d\rho}e^{i\chi(\rho)}= -i\int_{0}^{\infty}\rho\,d\rho\,J_0(q_\perp\rho)\,e^{i\chi(\rho)} \qquad (I4)$$

Последнее выражение с точностью до множителя ρ есть амплитуда рассеяния частицы во внешнем поле в принятом приближении. Таким образом, в области передач $q_\perp\sim m$ сечение излучения есть произведение сечения рассеяния на вероятность излучения с точностью до членов $\sim 1/\gamma^2$.

3. Рассмотрим теперь представляющий основной практический интерес случай излучения при рассеянии электронов (позитронов) большой энергии в кулоновском поле, для которого (ср. /6/):

$$V(r)=\frac{\xi}{r}, \qquad \xi=Z\alpha\frac{e}{|e|}$$

$$\chi_0(\rho)=-\int_{-a}^{a}V(\sqrt{\rho^2+t^2})\,dt=2\xi\ln\frac{\rho}{2a},\quad \chi_1(\rho)=-\frac{\rho^2}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\frac{\partial V^2}{\partial\rho^2}=\frac{\pi\xi^2}{2\rho\varepsilon} \qquad (I5)$$

где a – параметр регуляризации кулоновского потенциала. Поскольку в области передач q, дающих основной вклад в излучение, прицельный параметр $\rho\gtrsim\frac{1}{m}$, то можно провести разложение по степеням фазы $\chi_1(\rho)$, причем с принятой точностью достаточно учесть только первую степень $\chi_1(\rho)$. Воспользовавшись формулой

$$\int_{0}^{\infty}x^{\mu}J_\nu(qx)\,dx=2^{\mu}q^{-\mu-1}\,\Gamma\left(\frac12+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac12+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)$$

получаем следующее выражение для амплитуды рассеяния в кулоновском поле с учетом поправок $\backsim q/\varepsilon$:

$$f(q_\perp)=-\frac{2\xi\rho}{q_\perp^2}\exp\left\{-2i\left[\xi\ln(aq_\perp)-\arg\Gamma(1+i\xi)\right]\right\}\left(1-\frac{\pi\xi q_\perp\Omega}{4\varepsilon}\right), \qquad (I6)$$

где

$$\Omega=\frac{\Gamma\left(\frac12+i\xi\right)\Gamma(1-i\xi)}{\Gamma\left(\frac12-i\xi\right)\Gamma(1+i\xi)} \qquad (I7)$$

Используя (I6), имеем для сечения кулоновского рассеяния с точностью до членов $\backsim q_\perp/\varepsilon$:

$$d\sigma(q_\perp)=4\xi^2\frac{d^2q_\perp}{q_\perp^4}\left(1-\frac{\pi}{2}\frac{\xi q_\perp}{\varepsilon}\mathrm{Re}\,\Omega\right) \qquad (I8)$$

Функция $Re\,\Omega$ имеет следующие асимптотические значения

$$Re\,\Omega = 1 \quad (|\xi| \ll 1)\,, \qquad Re\,\Omega = \frac{1}{4|\xi|} \quad (|\xi| \gg 1)$$

Для получения поправок к сечению тормозного излучения примем во внимание, что при $q \sim q_{min}$, где факторизация не имеет места, сами поправки $q/\varepsilon \lesssim 1/\gamma^2$, в области же, где эти поправки необходимо учитывать ($q \sim m$), можно пользоваться факторизованным выражением для сечения излучения. Отсюда следует, что при вычислении поправок $\sim 1/\gamma$ во всей области изменения q можно пользоваться факторизованным сечением тормозного излучения. Тогда, очевидно, задача сводится к вычислению интеграла $\langle q \rangle = \int q \, d\sigma_\gamma(q)$, где $d\sigma_\gamma(q)$ - главный член в разложении сечения излучения по степеням $1/\gamma$, который для кулоновского взаимодействия совпадает с борновским сечением. Взяв дифференциальное по передаче импульса сечение излучения в борновском приближении (см.[6] формула (24.5))

$$d\sigma_\gamma^B = 8\pi Z^2 \alpha^2 \frac{dq}{q^3}\, dU(q,\omega) \tag{19}$$

где

$$dU(q,\omega) = \frac{2\alpha}{\pi}\frac{d\omega}{\omega}\left\{\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\left[\frac{2(q^2+2m^2)L}{q\sqrt{q^2+4m^2}} - 1\right] + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\frac{qL}{\sqrt{q^2+4m^2}}\right\}, \quad L = \ln\left(\frac{q}{2m} + \sqrt{\frac{q^2}{4m^2}+1}\right) \tag{20}$$

получаем после несложных вычислений следующее выражение для

$$\langle q \rangle = \frac{Z^2\alpha^3\pi^2}{m}\frac{d\omega}{\omega}\left[3\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right) + 2\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\right] \tag{21}$$

Используя формулы (18), (21), а также (17.30) из [6], имеем следующее выражение для сечения тормозного излучения в кулоновском поле с учетом поправок $\sim 1/\gamma$:

$$d\sigma_\gamma = \frac{4Z^2\alpha^3}{m^2}\frac{d\omega}{\omega}\left[\frac{4}{3}\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)+\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\right]\left\{\ln\frac{2\varepsilon(\varepsilon-\omega)}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\xi) - \frac{3\pi^3\xi\, Re\,\Omega(\xi)}{8\gamma}\left[\frac{3\varepsilon(\varepsilon-\omega)+2\omega^2}{4\varepsilon(\varepsilon-\omega)+3\omega^2}\right]\right\} \tag{22}$$

где Ω дается формулой (17),

$$f(\xi) = \xi^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\xi^2)}\,.$$

Поступила 4 июля 1975 г.

Л и т е р а т у р а

I. D.Saxon,L.Schiff.Nuovo Cimento v.6,614(1957)

2. T.Wu.Phys.Rev.v.108,466(1957)

3. H.Abarbanel.Cargése lectures in physics v.5.G.@ B.1972

4. А.И.Ахиезер, В.Ф.Болдышев, Н.Ф.Шульга. Теоретическая и математическая физика, т.23, №I,II (1975)

5. М.Гольдбергер, К.Ватсон. Теория столкновений. Мир. М. I967.

6. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат. М., I973.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ

Подписано к печати II.8.75г. МН 07418

Усл. печ. 0,7 л., тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № 63

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР, бт