

В. 75

29

**И Н С Т И Т У Т
Я Д Е Р Н О Й Ф И З И К И С О А Н С С С Р**

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 64

П.В.Воробьев, Б.Л.Факторович, В.И.Юрченко

**ВЛИЯНИЕ ЩЕЛИ В ПРОВОДНИКЕ НА
ГЕОМЕТРИЮ ПОЛЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ
ПРИ УЧЕТЕ СКИН-ЭФФЕКТА**

Новосибирск

1974

А н н о т а ц и я

При учете скин-эффекта дана оценка вносимой щелью неоднородности поля в свободном пространстве. Оценка получена с точностью до членов $(\delta/l)^2$, где δ - величина скин-слоя, l - расстояние до щели. Вдали от щели возмущение поля соответствует полю диполя, помещенного на расстоянии δ от поверхности проводника.

Получены оценки для случая периодической системы щелей, которые можно использовать для расчета возмущения поля в импульсных магнитах. Точность оценки проконтролирована численными расчетами и измерениями на моделях. Показана возможность компенсации влияния щелей между полюсами магнитопровода и токоведущими шинами в импульсных магнитах с помощью искусственного уменьшения периода следования щелей.

Указан способ существенного упрощения алгоритма решения и сокращения затрат машинного времени в оценочных численных расчетах двумерных полей в магнитах при учете скин-эффекта.

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. №

П.В.Воробьев, Б.Л.Факторович, В.И.Курченко

ВЛИЯНИЕ ЩЕЛИ В ПРОВОДНИКЕ НА ГЕОМЕТРИЮ
ПОЛЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ УЧЕТЕ
СКИН-ЭФФЕКТА

Проводник с вырезанной щелью занимает полупространство $x > 0$ (рис.1а). В момент $t = 0$ в пустоте возникает однородное на бесконечности ($x = -\infty$) магнитное поле. Найдем возмущение поля, обусловленное наличием щели.

Рассмотрение этой задачи необходимо для определения возникающей из-за щели между полюсом магнитопровода и токоведущими шинами неоднородности поля в импульсных магнитах [1-4] (рис.1б) и интересно для выяснения особенностей скин-эффекта в двумерном случае. Ниже дана оценка возмущения, вносимого одиночной щелью и периодической системой щелей, и приведены результаты численных расчетов и измерений поля на моделях.

I. Одиночная щель

В геометрии рис.1а отсчитаем векторный потенциал от $x = \infty$:
$$A = - \int_x^{\infty} B_z(x,z) dx.$$
 При этом A определяется решением задачи
$$\gamma(1-q) \frac{\partial A}{\partial t} = \Delta A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial A}{\partial x} = B_0(t)$$
где $q = 1$ в пустоте и $q = 0$ в проводнике, $\gamma = \sigma \mu_0$, σ - проводимость металла. Представим $A = A_0 + A_1$, где A_0 - решение невозмущенной задачи с однородным в пустоте полем

$$\gamma \frac{\partial A_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}; \quad \left. \frac{\partial A_0}{\partial x} \right|_{x=0} = B_0(t); \quad (x > 0) \quad (1)$$

Для A_I , учитывая, что при $x < 0$ $\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} = 0$, получим:

$$\gamma(1-\gamma) \frac{\partial A_1}{\partial t} = \Delta A_1 + \gamma \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial A_1}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

A_I описывает возмущение поля, обусловленное наличием щели и определяется заданными в щели токами плотностью $\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}$ и общей величиной

$$I_{щ} = - \frac{2kh B_0(t)}{\mu_0}$$

а также токами, наведенными в проводнике вихревым электрическим полем $-\frac{\partial A_1}{\partial t}$.

При бесконечно тонком скин-слое ток в щели сосредоточен на отрезке оси z $-h \leq z \leq h$, наведенные токи распределены на границе проводника. Известно, что в этом случае вдали от щели ее влияние описывается полем токового диполя с моментом $-\frac{2h}{\pi} I_{щ}$, расположенного в точке $x=0, z=0$ [5]

$$A_1 = - \frac{\mu_0 I_{щ} h}{\pi^2} \frac{x}{x^2 + z^2} \quad (3)$$

В случае конечной величины скин-слоя, которую мы определим из (I) посредством

$$\delta(t) = \frac{\Phi(t)}{B_0(t)} = - \frac{A_0(0,t)}{B_0(t)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma B_0(t)} \int_0^t \frac{B_0(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

$\Phi(t)$ - поток индукции в проводнике, можно ожидать изменения величины эквивалентного дипольного момента токов (в щели и наведенных), а также изменения положения диполя на оси x . Для количественной оценки этих эффектов предположим вначале, что $\delta \gg h$. Тогда в (2) коэффициент при $\frac{\partial A_1}{\partial t}$ можно везде при $x > 0$ считать равным γ . Кроме того распределение тока в щели по координате z

заменяем δ -образным ($\gamma \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} \rightarrow 2h\delta(z) \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}$, $\delta(z)$ означает здесь δ -функцию).

Если рассмотреть частный случай $B_0(t) \sim e^{t/\tau}$ при $t \rightarrow \infty$, то скин-слой стремится к конечному пределу

$$\delta = \sqrt{\frac{\tau}{\gamma}} \quad (4)$$

и зависимость любой величины от координат можно считать установившейся

$$f(x, z, t) \approx f_x(x, z) \cdot e^{t/\tau} \quad (5)$$

В частности при $x > 0$ $A_0(x, t) \approx B_0(t) \cdot \delta \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}$, $\gamma \frac{\partial A_1}{\partial t} \approx \frac{A_1}{\delta^2}$

В этих упрощениях решение (2) находится в виде интеграла Фурье. При $x < 0$.

$$A_1 \approx \frac{\mu_0 I_{щ}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{e^{\omega \eta} d\omega}{(1+\sqrt{1+\omega^2})(\omega+\sqrt{1+\omega^2})};$$

$$\eta = (x + iz)/\delta.$$

Рассмотрим поле вдали от щели, когда $|\eta| \gg 1$. Последовательное интегрирование по частям приводит к асимптотическому выражению для A_I в виде ряда по степеням $\frac{1}{\eta}$. Учитывая два члена разложения, имеем

$$A_1 \approx - \frac{\mu_0 I_{щ}}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} \right\} \approx - \frac{\mu_0 I_{щ}}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{\eta-1} =$$

$$= - \frac{\mu_0 I_{щ} \delta}{2\pi} \frac{x-\delta}{(x-\delta)^2 + z^2} \quad (6)$$

При учете членов первого порядка малости по δ/l (l - расстояние до щели) $A_1 \approx - \frac{\mu_0 I_{щ} \delta}{2\pi} \frac{x}{x^2 + z^2}$, что соответствует диполю с моментом $-I_{щ} \delta$, расположенному в начале координат. Укажем, что

метод в [5], предназначенный для оценки в первом порядке, приводит к завышенной величине дипольного момента $-\frac{4}{\pi} I_{uz} \delta$. Выражение (6) справедливо с точностью до членов $\sim (\delta/l)^2$ и описывает поле диполя, расположенного в точке $x = \delta$. Из (6) видно, что при $\delta \gg h$ возмущение $\sim h$, в то время как при $\delta = 0$ оно $\sim h^2$ (формула (3)). Чтобы сохранить эффекты $\sim h^2$, существенные при $\delta \leq h$, достаточно увеличить в (6) дипольный момент на $-I_{uz} \frac{2h}{\pi}$ (его величину при $\delta = 0$). В итоге

$$A_1 \approx - \frac{\mu_0 I_{uz} (\frac{2h}{\pi} + \delta)}{2\pi} \cdot \frac{x - \delta}{(x - \delta)^2 + z^2}$$

В заключении отметим, что, используя (4), (5), мы считаем, что характеристики возмущения определяются в основном величиной δ и слабо зависят от закона нарастания поля. Последнее справедливо при $\delta/c \ll 1$, где c — какой-либо характерный размер системы, причем в данном случае следует считать $c = l$, а не $c = h$, т.к. размер щели определяет лишь величину возмущения ($\sim h^2$ при $\delta = 0$ и $\sim h$ при $\delta \gg h$). Вдали от щели геометрия поля от h не зависит. С другой стороны зависимость геометрии от величины δ прослеживается по крайней мере во втором порядке малости по $(\delta/l)^2$.

2. Периодическая система щелей

Рассмотрим теперь случай, показанный на рис. 1б, где образующие виток проводники с бесконечной вдоль оси x толщиной расположены между полюсами магнитопровода 3,4 с $\mu = \infty$. Векторный потенциал определяется решением задачи:

$$\gamma(1-\gamma) \frac{\partial A}{\partial t} = \Delta A + \gamma(1-\gamma) E^r \quad (7)$$

$$A|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Компонент градиентного электрического поля E^r просто выражается через величину приложенного напряжения $u(t)$ [6].

Как и в п. I представим решение в виде $A = A_0 + A_I$, где A_0 — решение невозмущенной задачи, дающее в зазоре однородное поле $B_0(t)$ и $\gamma(1-\gamma) \frac{\partial A_I}{\partial t} = \Delta A_I + \gamma \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}$.

Оценим A_I при $\delta = 0$. Геометрия рис. 1б эквивалентна системе из двух проводников, имеющих бесконечную вдоль оси x высоту, с периодической системой щелей в каждом из них. Заметим, что действие отдельной щели (рис. 1а) при $\delta = 0$ эквивалентно действию расположенной возле отражающей стенки нити с током, как это показано на рис. 1а', которая вместе с отраженным током возбуждает поле, в дипольном приближении совпадающее с (3). Поэтому при $h/a, h/b \ll 1$ для оценки можно перейти к геометрии рис. 1б', где токовые нити расположены периодически между двумя отражающими стенками, на которых $A_I = 0$, и

$$a_1 = a, \quad \frac{D}{2} = \frac{h}{\pi} \quad (8)$$

Найдем решение этой задачи в виде ряда Фурье по координате z . Переходя затем к дипольному приближению ($D \rightarrow 0, I_{uz} D = \text{const}$) получим ($I_{uz} = -2h B_0(t)/\mu_0$)

$$A_1 = \frac{\mu_0 I_{uz} D}{4b} \left(\frac{x}{a_1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sh}(k_n x)}{\text{sh}(k_n a_1)} \cos(k_n z) \right) \quad (9)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{b}$$

Ряд в (9) сходится медленно (при $x = a$, он вовсе расходится). Получим более удобную формулу. Применяя последовательно в геометрии рис. 1б' метод отражения, приходим к периодической системе из вертикальных цепочек диполей на линиях $x = \pm (2m+1) a_1$, $m = 0, 1, 2, \dots$ Запишем

$$A_1(x, z) \approx A_A(x - a_1, z) + A_A(x + a_1, z) + \beta(x, z) \quad (I0)$$

где

$$A_A(x, z) = -\frac{\mu_0 I_{uy} D}{4b} \cdot \frac{\text{sh}\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\pi x}{b}\right) + \cos\left(\frac{\pi z}{b}\right)} \quad (II)$$

векторный потенциал отдельной цепочки диполей, расположенных на оси z в точках $z = \pm (2m + 1) \cdot b$. Формула (II) следует из формулы для поля решетчатого экрана [5] при переходе к дипольному приближению. Представим (II) в виде ряда Фурье. Из (9), (I0)

Получим:

$$\beta(x, z) = \frac{\mu_0 I_{uy} D}{4b} \left(\frac{x}{a_1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-2k_n a_1} \cdot \frac{\text{sh}(k_n x)}{\text{sh}(k_n a_1)} \cdot \cos(k_n z) \right) \quad (I2)$$

Из сравнения (9), (I2) видно, что ряд в (I2) представляет собой малую добавку к решению. В случае $a \geq b$ для оценки характеристик поля достаточно учесть поле ближайших к зазору вертикальных цепочек диполей (первые два члена в (I0)).

Для оценки возмущения в случае конечной величины скин-слоя используем вначале те же упрощения, что и для отдельной щели.

Получаем

$$A_1(x, z) \approx \frac{\mu_0 I_{uy} D}{4b} \left(\frac{x}{a + \delta} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sh}(k_n x) \cdot \cos(k_n z)}{\text{ch}^2\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) \text{sh}(k_n a + \alpha_n)} \right) \quad (I3)$$

$$\alpha_n = \text{arcsch}(k_n \delta)$$

где $D = \delta$. Для того, чтобы это выражение при $\delta \rightarrow 0$ переходило в (9) достаточно взять

$$D = \delta + \frac{2h}{\pi} \quad (I4)$$

Отметим, что при малой величине скин-слоя можно использовать более простые формулы дипольного приближения (I0) - (I2). Сравнение нулевой и нескольких первых гармоник в (9), (I3), для которых $k_n \delta \ll 1$, показывает, что для этого нужно взять

$$a_1 = a + \delta \quad (I5)$$

Резюмируем результаты этого пункта. При $\delta = 0$ возмущение поля описывается формулами (I0) - (I2), параметры a_1 и D определяются по формуле (8). Формулы (I0) - (I2), (I4), (I5) дадут оценку возмущения в дипольном приближении, справедливую при $\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{b} \ll 1$ вдали от щели. Приближенное решение (I3), (I4) можно использовать при $\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{b} \sim 1$ (см. п.3).

3. Измерения поля на моделях и численный анализ. Обсуждение.

Точность оценки контролировалась численными расчетами и измерениями поля на моделях для геометрии рис. Iб. Расчет (7) осуществлялся методом сеток для δ -образного напряжения [7] ^{ж)}. Затем для различных T полученное решение использовалось для расчета зависимости $u = u(t)$, обеспечивающей в центре апертуры $B_z(t) \sim \sin \frac{2\pi t}{T}$, и последующего расчета (с помощью $A(x, z, t) = \int_0^t A_0(x, z, t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau$, где A_0 - решение для δ -образного напряжения) характеристик поля в момент $t = \frac{T}{4}$. Рассматривались относительные неоднородность и градиент поля

$$\varepsilon(x, z) = \frac{B_z(x, z) - B_z(0, 0)}{B_z(0, 0)}; \quad \eta(x, z) = \frac{1}{B_z(0, 0)} \cdot \frac{dB_z(x, z)}{dx}$$

ж) О методе сеток для численного анализа двумерных квазистационарных полей см. также [8].

В оценках полагалось $B_z(x, z, t) = B_0(t) + \frac{\partial}{\partial x} A_z(x, z, t)$.
 На рис. 2 приведены результаты численных и оценочных расчетов для квадратной апертуры. Характер кривых зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ просто объясняется при анализе дипольного приближения. Вначале возрастание неоднородности связано с увеличением дипольного момента поля щели $-I_{щ} D$ (формула (14)), зависимость параметра a_2 от δ (15) не проявляется. По мере удаления диполей от зазора этот фактор становится существенным и уменьшает величину неоднородности. При $\delta \ll a, b$ дипольное приближение согласуется с численным расчетом и до $\delta \sim a, b$ дает правильное качественное описание процесса. Формулы (13), (14) дают удовлетворительную оценку до $\delta \sim a, b$. Как видно, оценочные формулы можно использовать для расчета неоднородности и определения полезной апертуры в магнитах такого типа.

На рис. 3 показаны результаты численных расчетов (сплошные кривые) и измерений для $a = 140$ мм, $b = 43,5$ мм, $h = 2$ мм. Измерения проводились в разное время и разными методами на моделях и магните синхротрона Б-4 [4], в которых с помощью кривизны поверхности токоведущих шин и наклона полюсов обеспечивалась постоянная составляющая $\eta = 0,4\%$ см⁻¹, необходимая для фокусировки пучка. Постоянная составляющая вычиталась так, что показанные на рисунке измеренные значения представляют добавку, связанную с влиянием щели. ж)

ж) Отметим, что вычитая постоянную составляющую η , мы избавляемся от систематической ошибки измерений и частично от влияния искажений, связанных с конечной величиной магнитной проницаемости железа, а также с неточностью изготовления и сборки.

Щели между внутренней "потенциальной" шиной ($x = 140$ мм) и полюсами имели размер 2 мм. В расчетах находящаяся под нулевым потенциалом внешняя шина ($x = 0$), где щели отсутствовали, считалась сверхпроводящей. Абсолютная ошибка измерения η оценивается в $\pm 0,01\%$ см⁻¹. Согласие с расчетом удовлетворительное. Оценки η по формулам п. 2 для данных рис. 3 совпадают с численными значениями в пределах точности последних ($\sim 5\%$).

Возмущение поля, как видно из рис. 3, быстро спадает при удалении от периодической системы щелей. Из (11) следует, что на расстояниях $l \geq b$ от проводника неоднородность уменьшается по экспоненциальному закону $\varepsilon \sim \frac{1}{b^2} \exp(-\frac{\pi l}{b})$. Поэтому, если искусственно уменьшить в n раз период расположения щелей, используя проводник с достаточно глубокими вырезами, то $\varepsilon \sim (\frac{n}{b})^2 \exp(-\frac{n\pi l}{b})$. Такой способ эффективно подавляет вредное влияние щели между полюсом и проводниками, т.к. при достаточно большом n значительные вариации поля вблизи шины быстро затухают по мере удаления от нее (рис. 4).

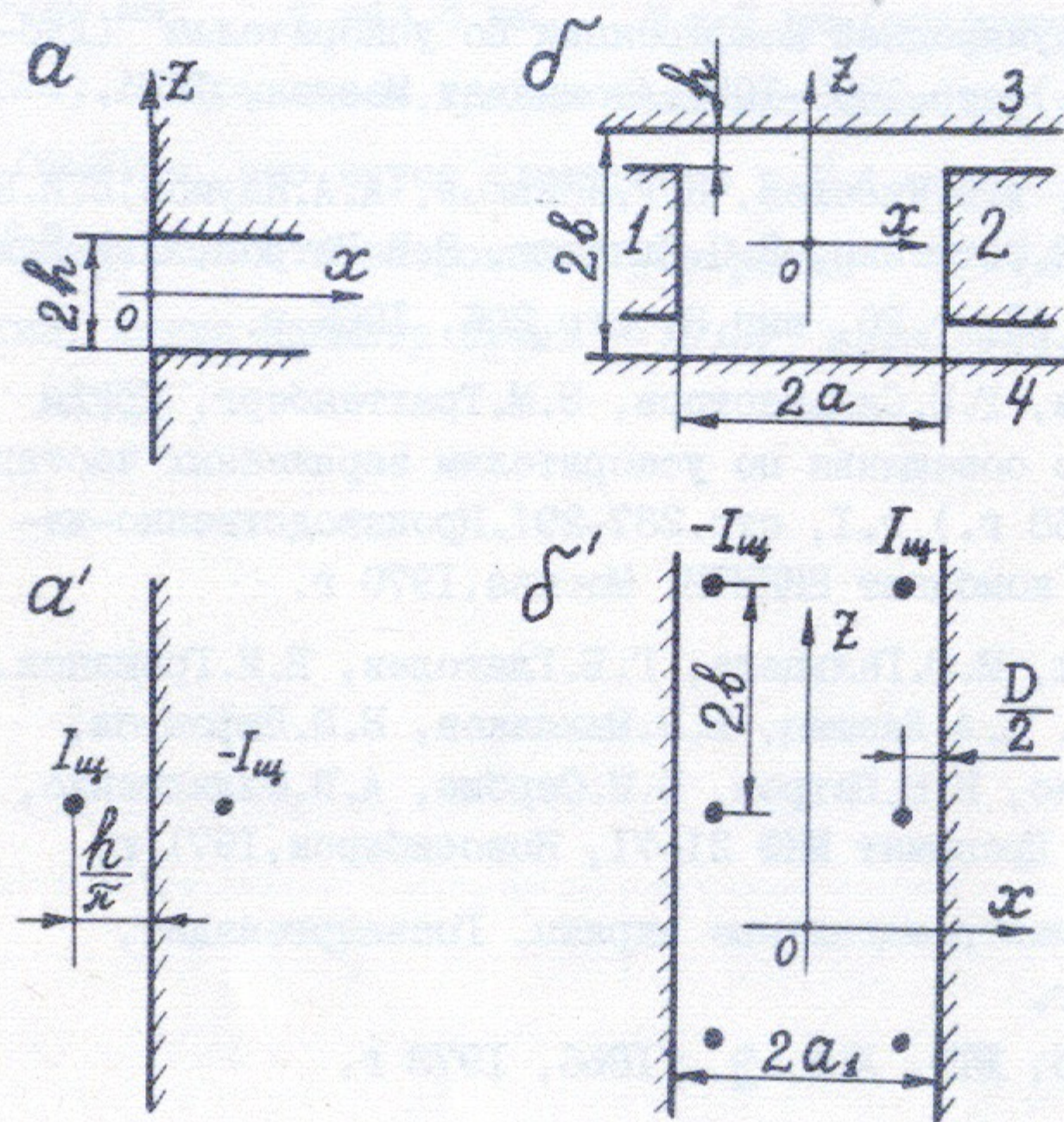
Сравнение кривых 1, 2 на рис. 2 показывает возможность использования (4), (5) в численных расчетах. При расчете поля в импульсных магнитах, в отличие от магнитостатического случая, необходимо интегрировать по времени уравнение для векторного потенциала, что сложнее алгоритмически и связано с большими затратами машинного времени. Если требуется лишь оценочный расчет, что достаточно для выбора геометрических параметров импульсных магнитов / I-4, 9-10/, использование (4), (5) существенно упрощает алгоритм решения ($\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow \frac{A}{\delta^2}$ и нет $\frac{\partial}{\partial t}$). Кроме того уменьшается расход машинного времени, т.к. для заданного значения δ не нужно инте -

гировать уравнение на несколько шагов по t , достаточно провести лишь однократный расчет.

На рис. 5 (а-д) показаны результаты численного расчета характеристик поля с использованием (4), (5) при $\alpha = 140$ мм, $b = 43,5$ мм, $h = 2$ мм (апертура синхротрона Б-4). Цифры возле кривых означают величину скин-слоя в мм. Отметим, что впуск электронов в Б-4 осуществляется при $\delta \approx 2,7$ мм, в конце бетатронного ускорения $\delta = 1,8$ мм, выпуск частиц, когда диаметр пучка ≈ 10 мм, осуществляется при $\delta = 5$ мм.

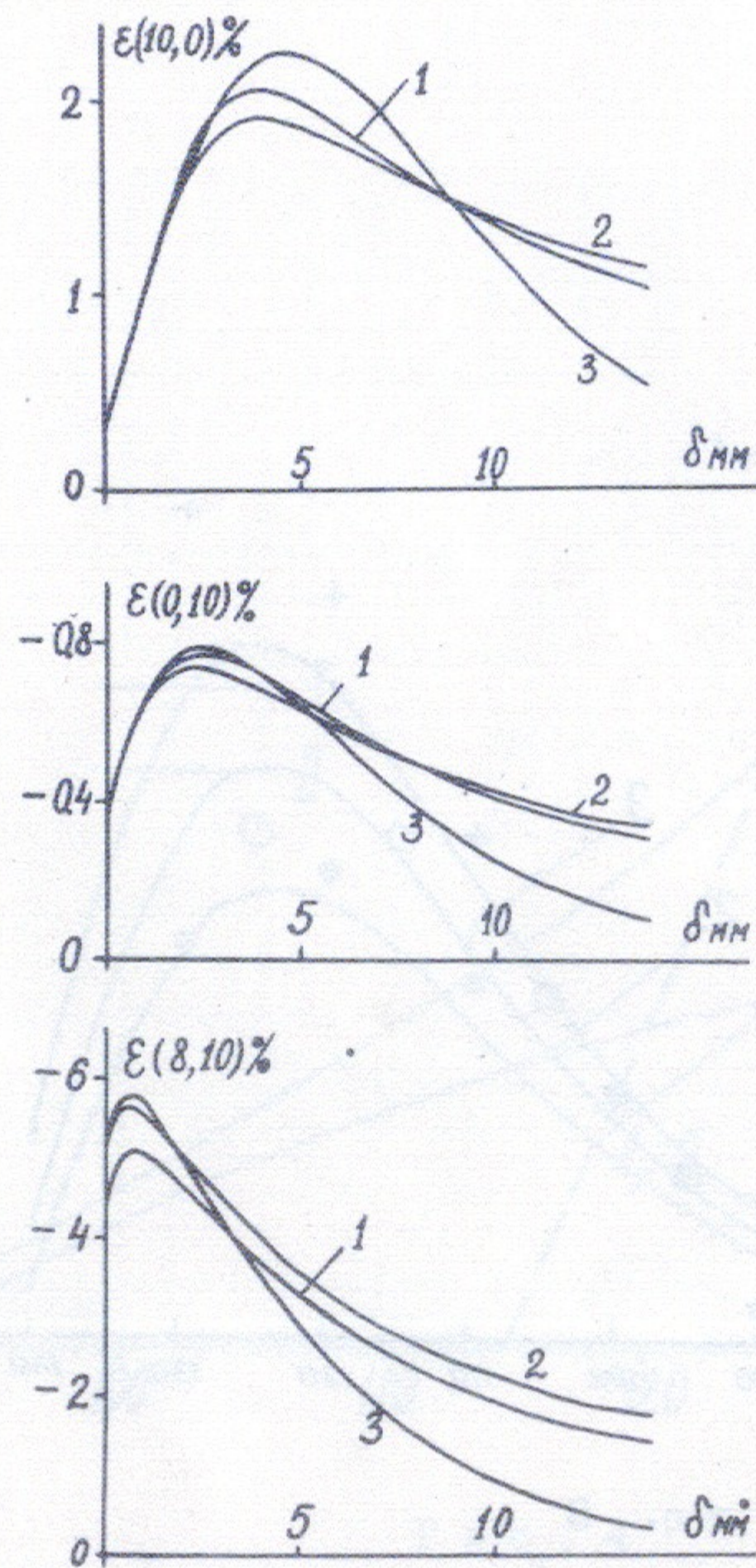
Л и т е р а т у р а

1. Г.И.Будкер, Н.Г.Коньков, Ю.А.Мостовой, А.А.Наумов, О.А.Нежевенко, Г.Н.Острейко, В.С.Панасюк, В.В.Петров, И.М.Самойлов, А.А.Соколов, И.Я.Тимошин, Л.И.Юдин "Труды международной конференции по ускорителям" (Дубна, 1963 г.) стр.1069-1072. Атомиздат, Москва, 1964.
2. Г.И.Будкер, А.В.Киселев, Н.Г.Коньков, А.А.Наумов, В.И.Нифонтов, Г.Н.Острейко, В.С.Панасюк, В.В.Петров, Л.И.Юдин, Г.И.Яснов. АЭ, т.20, вып.3, стр.206, 1966 г.
3. Л.Л.Данилов, Г.И.Сильвестров, Э.М.Трахтенберг, Труды Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. (Москва, 1968 г.) т.1, стр.287-291. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, Москва, 1970 г.
4. И.И.Авербух, М.Ю.Гельцель, Г.Б.Глаголев, Б.И.Гришанов, В.И.Купчик, А.А.Лившиц, Ю.В.Маклаков, В.И.Нифонтов, Г.Н.Острейко, В.В.Петров, В.И.Сербин, А.В.Филипченко, Г.И.Яснов. Препринт ИЯФ 21-71, Новосибирск, 1971 г.
5. Г.Каден. Электромагнитные экраны. Госэнергоиздат, М-Л, 1957 г.
6. В.И.Юрченко, ЖТФ, XLIII, 9, 1866, 1973 г.
7. В.И.Юрченко, ЖТФ, XLIV, 8, 1639, 1974 г.
8. Н.И.Дойников, ЖТФ, XLIII, 5, 897, 1973 г.
9. Т.А.Всеволожская, Л.Л.Данилов, Г.И.Сильвестров, Н.Ф.Соколова ПТЭ, № 6, стр.32, 1968 г.
10. Т.А.Всеволожская, В.Н.Пакин, Г.И.Сильвестров АЭ, т.22, вып.3, стр.210, 1967 г.



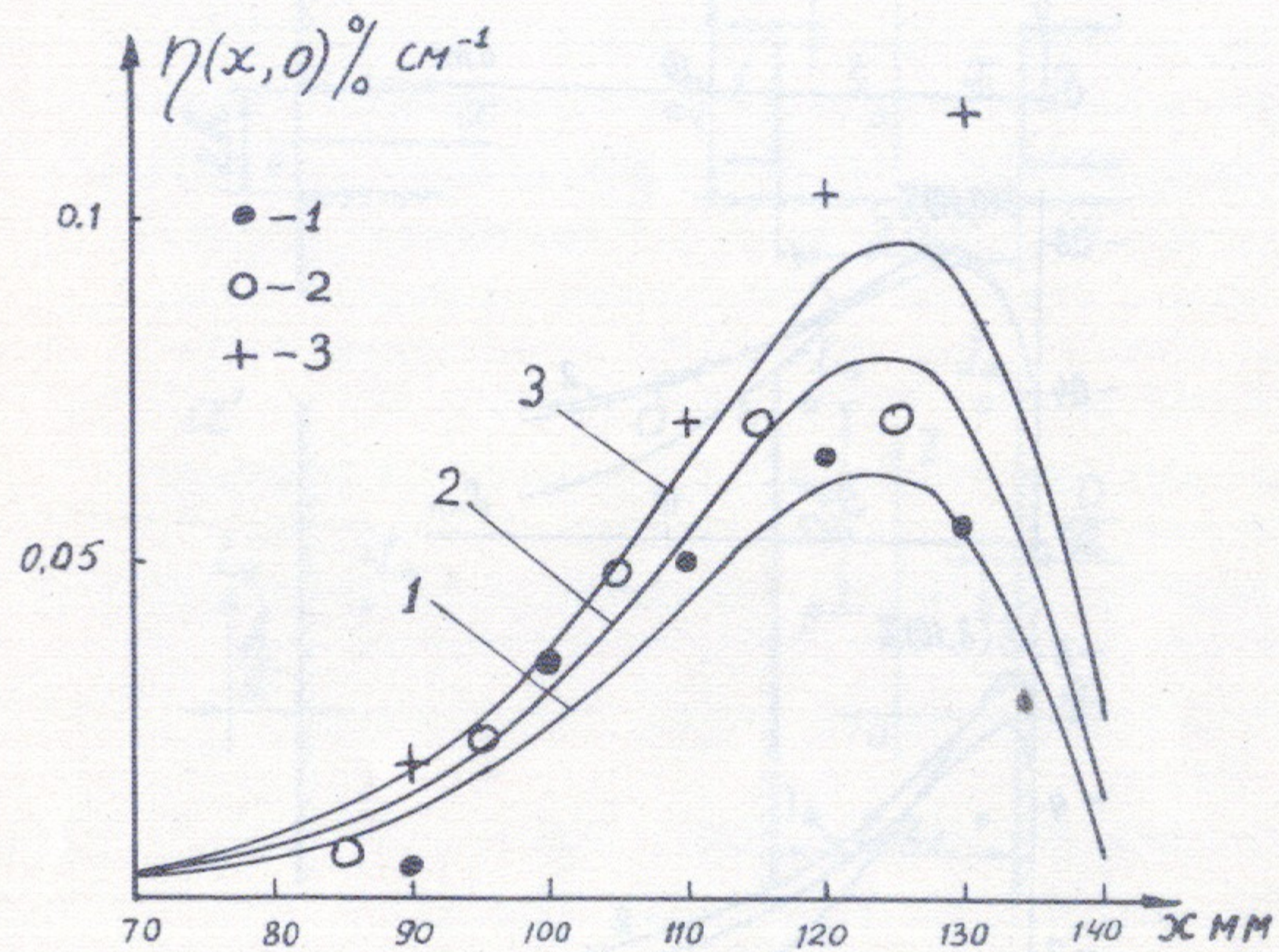
Р и с. 1.

б) 1,2 - проводники; 3,4 - полюсы магнитопровода



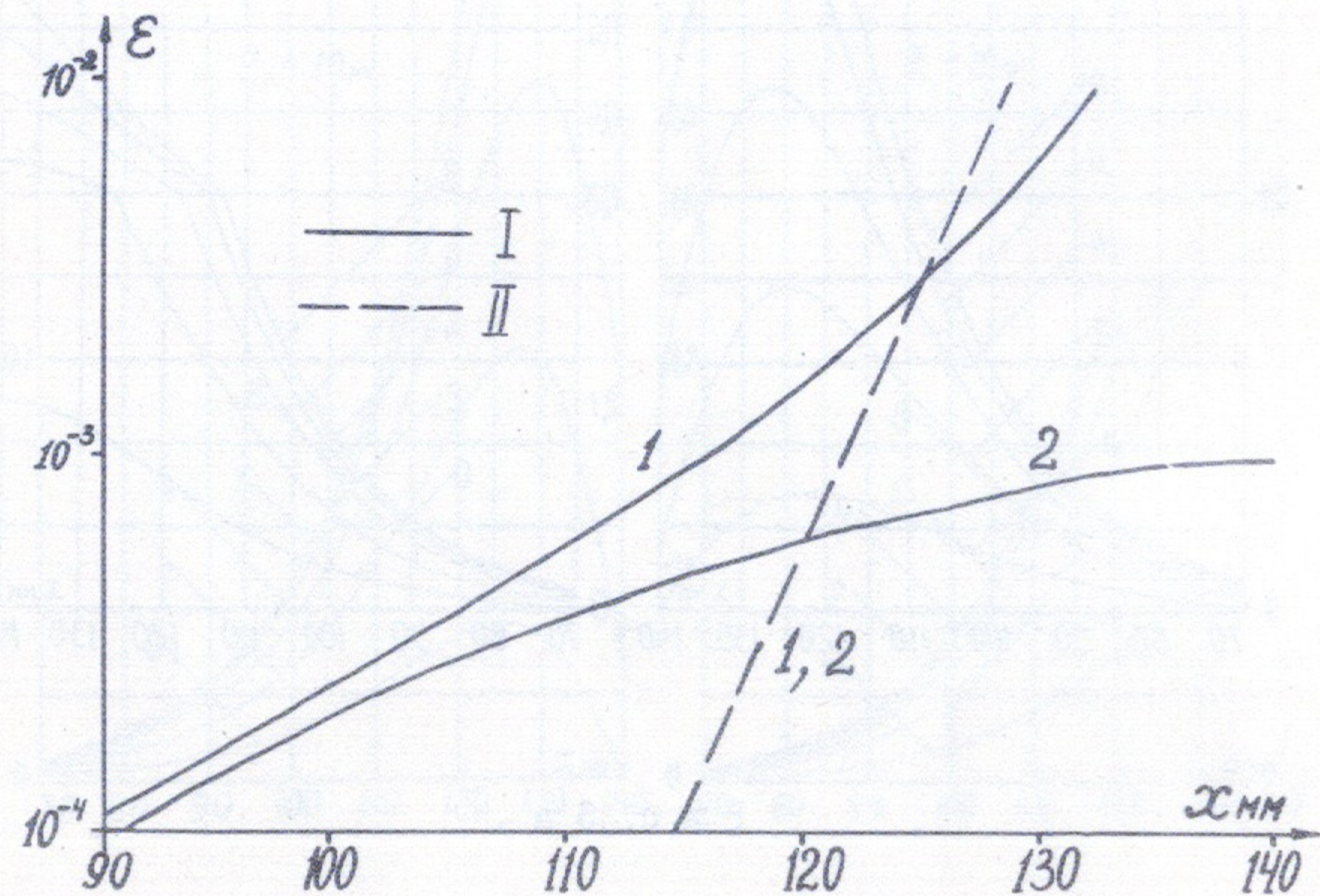
Р и с. 2

$a = 10$ мм, $b = 10$ мм, $h = 1$ мм
 1 - численный расчет ($B_z(t) \sim \sin \omega t$)
 2 - формулы (I3) - (I4)
 3 - дипольное приближение
 (формулы (I0)-(I2), (I4), (I5))



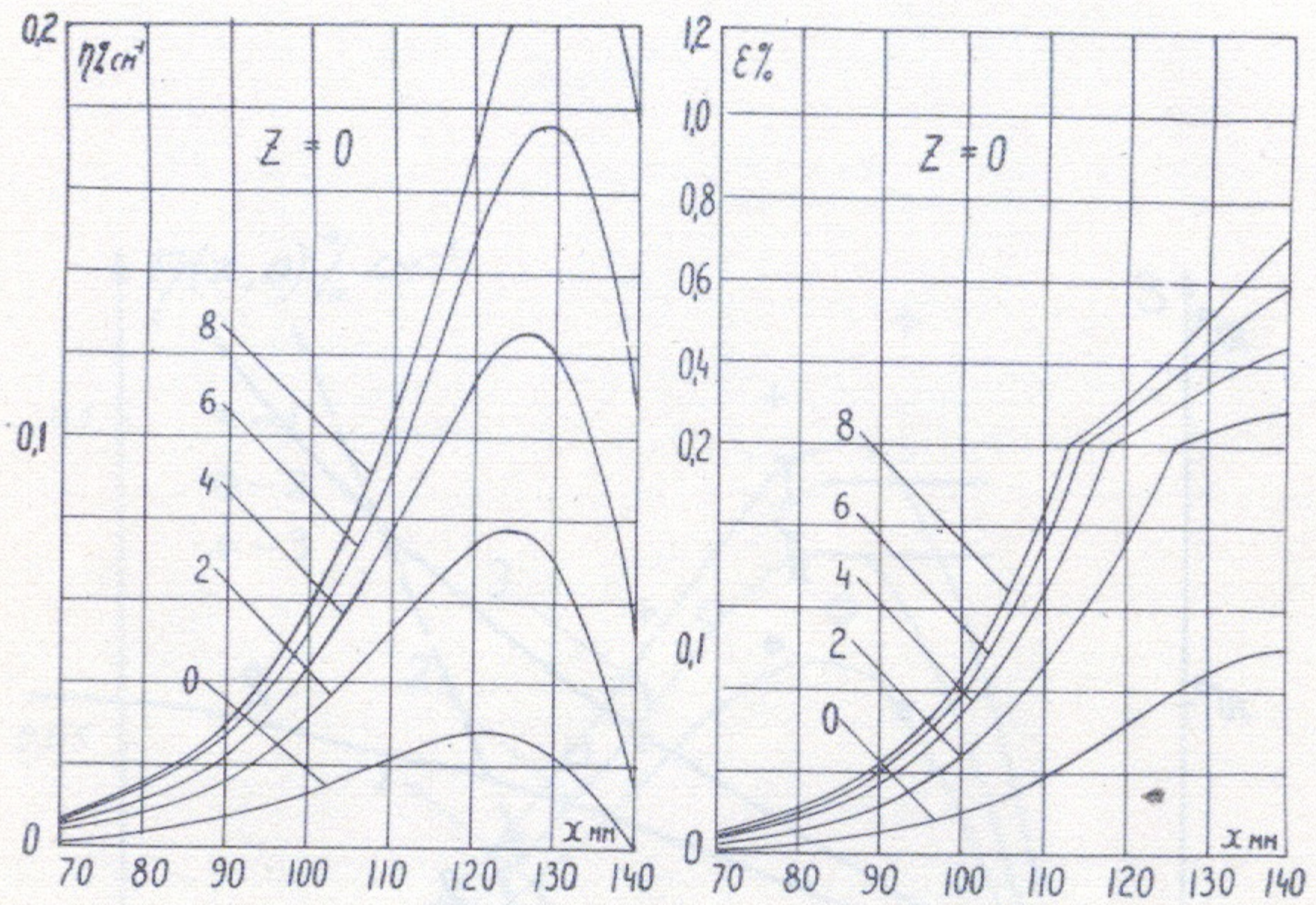
Р и с . 3 .

I - $\delta = 1,4 \text{ мм}$; 2 - $\delta = 2,1 \text{ мм}$; 3 - $\delta = 2,8 \text{ мм}$.

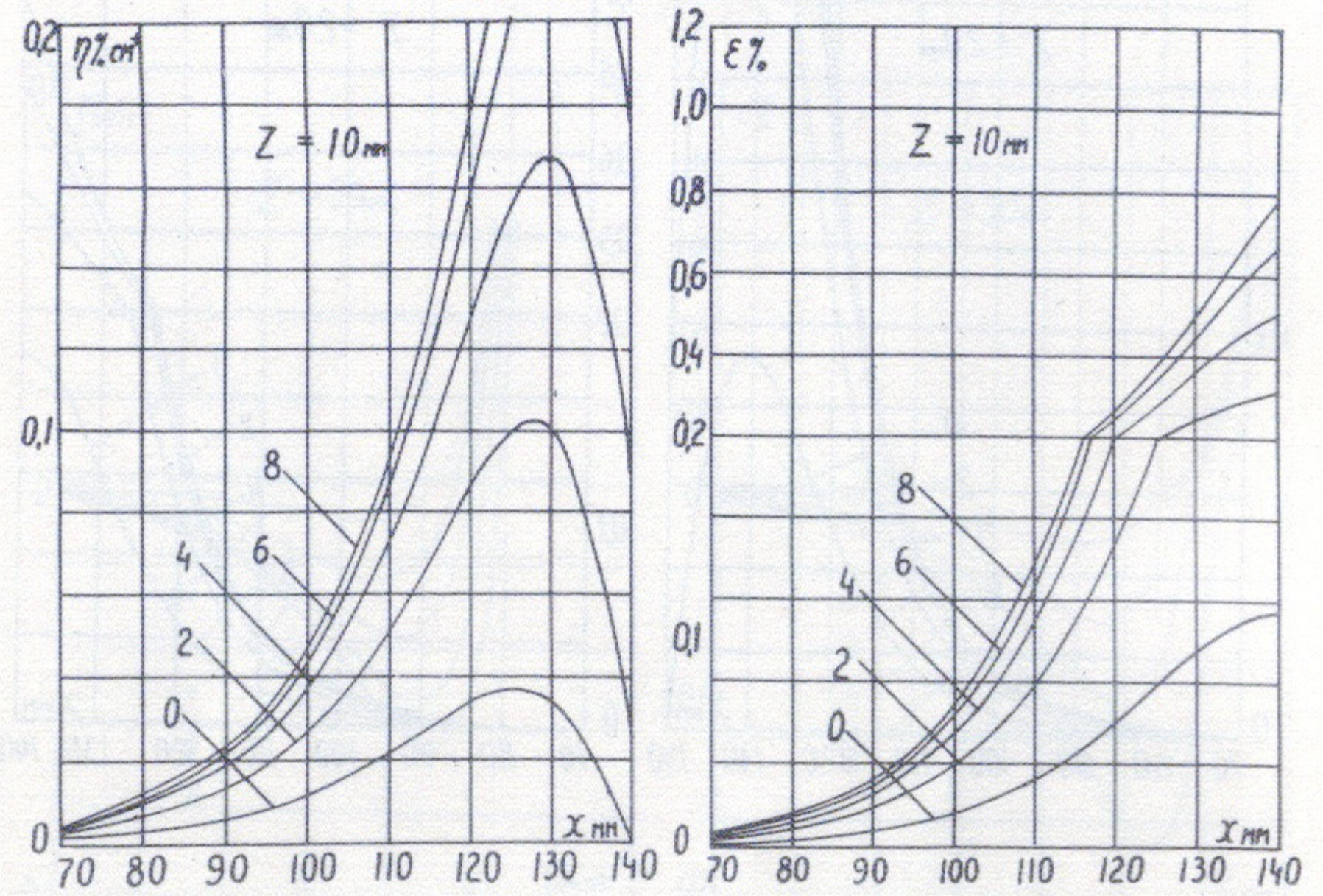


Р и с . 4

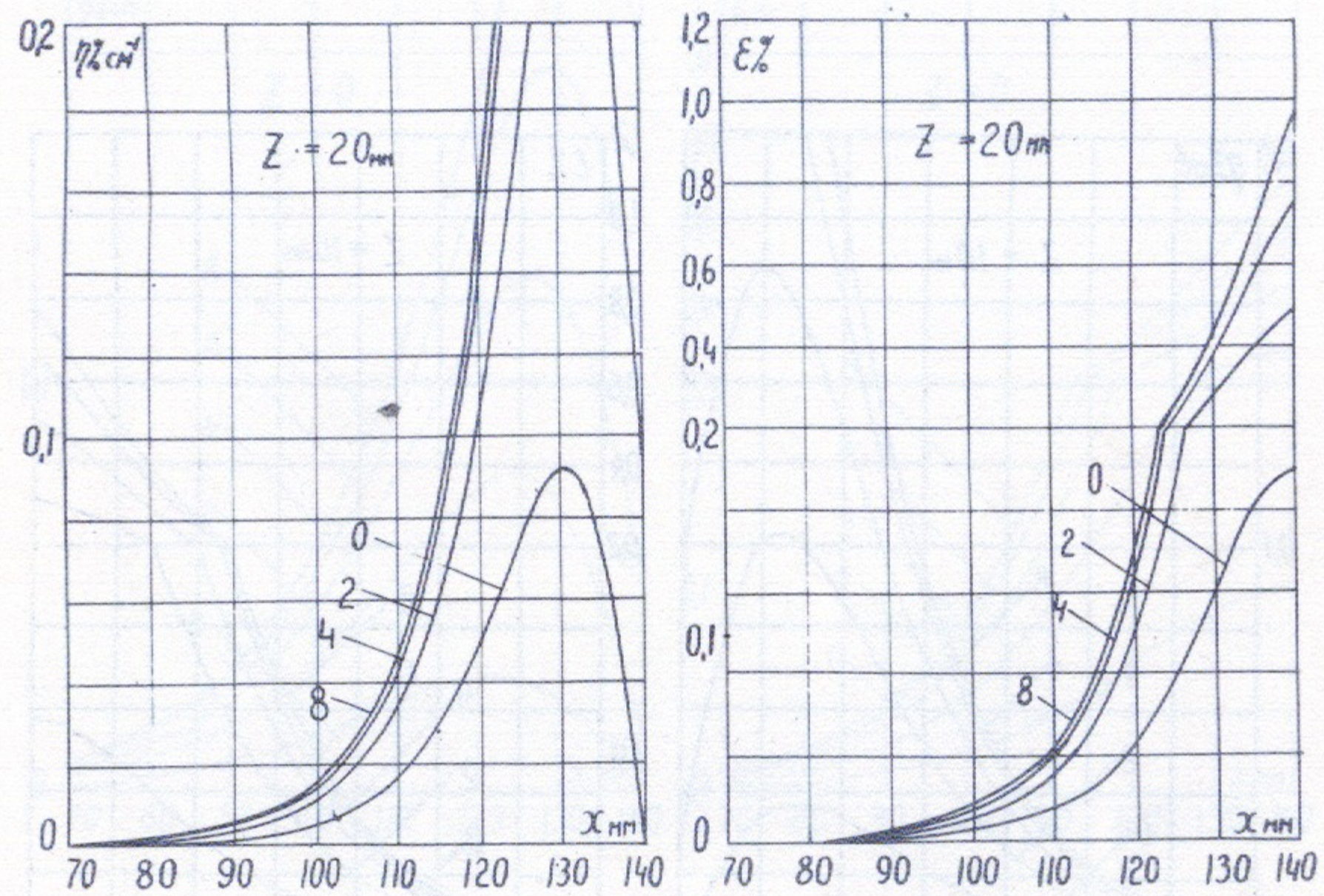
$\delta = 0$, численный расчет.
 I - $a = 140 \text{ мм}$; $b = 43,5 \text{ мм}$; $h = 2 \text{ мм}$;
 II - $a = 140 \text{ мм}$; $b = 10 \text{ мм}$; $h = 5 \text{ мм}$;
 1 - $-\epsilon(x, b)$, 2 - $\epsilon(x, 0)$



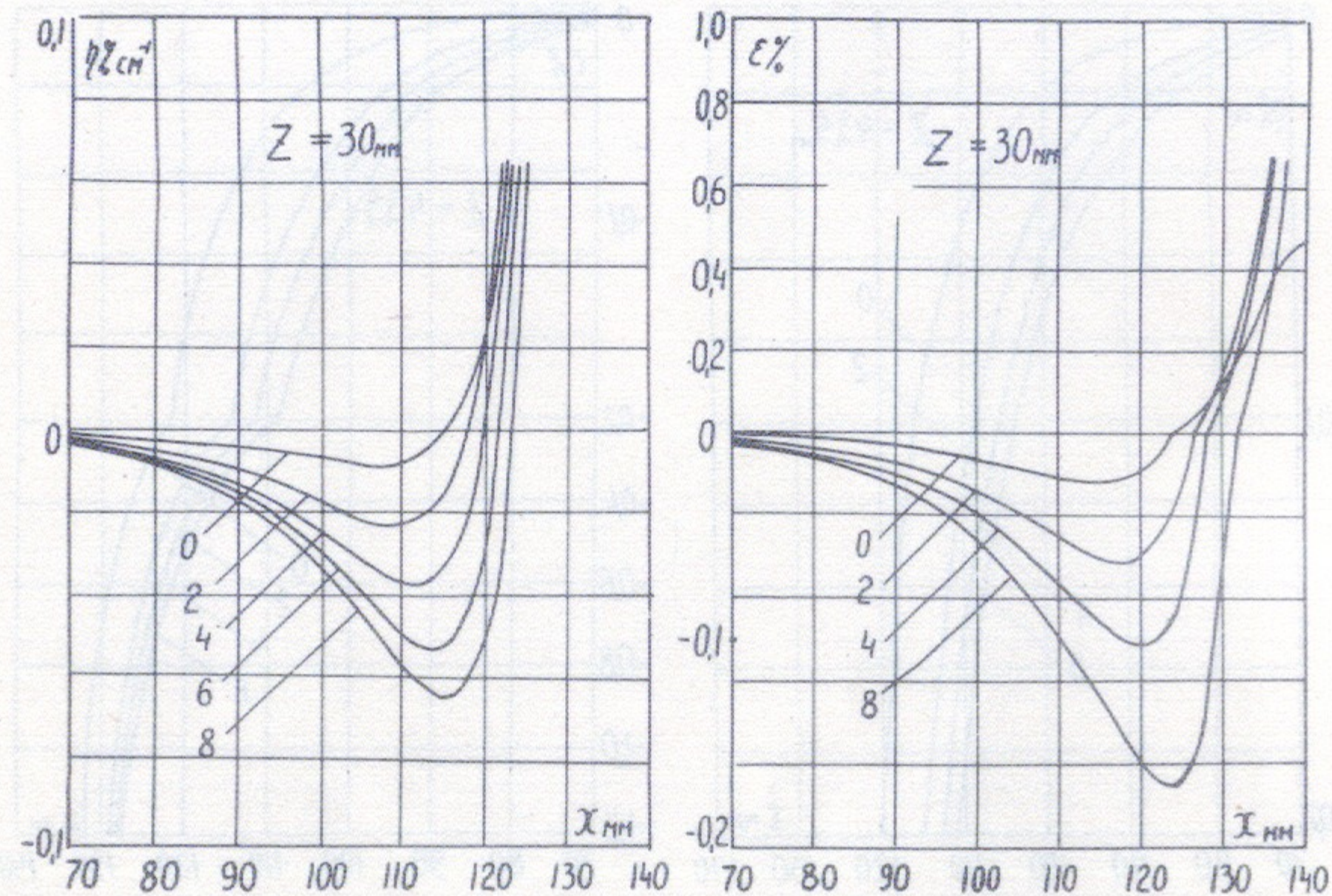
Р и с . 5 а .



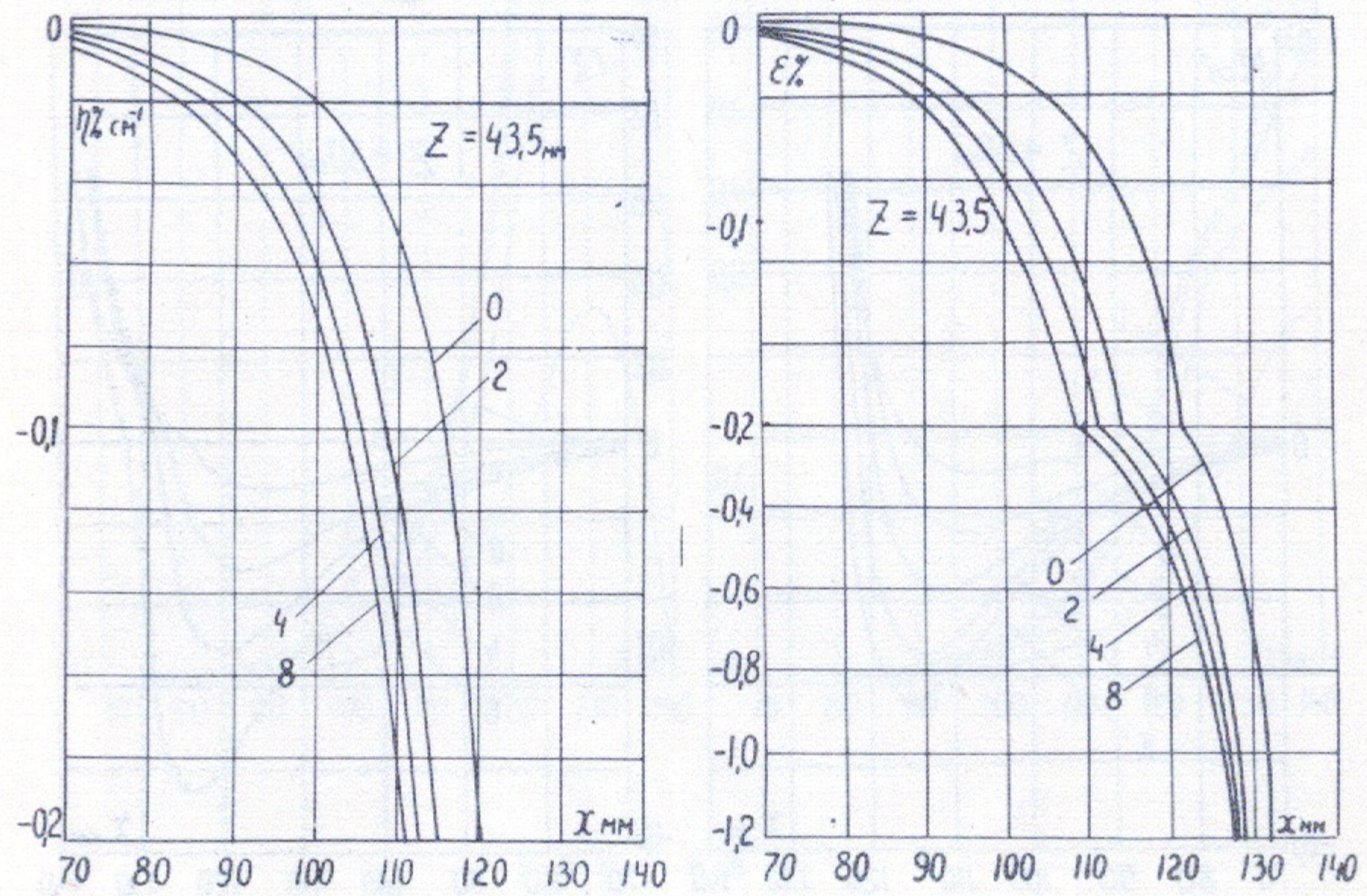
Р и с . 5 б .



Р и с . 5 в .



Р и с . 5 г .



Р и с . 5 д .

Ответственный за выпуск Г.А.Спиридонов
 Подписано к печати 2.УШ-1974г. МН 08395
 Усл.0,8 печ.л., тираж 150 экз. Бесплатно.
 Заказ № 64