20

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 256

Г.М.Заславский, В.С.Сынах

О СВОЙСТВАХ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ОДНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Новосибирск
1968

Г.М.Заславский, В.С.Сынах

О СВОЙСТВАХ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ОДНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

А Н Н О Т А Ц И Я

Проводится численное исследование преобразования

$$Tx = K \sin \pi x\ , \quad (\mathrm{mod}\ 1)$$

возникающего как преобразование фаз в некоторых задачах теории нелинейных колебаний. Показано, что при $K \gg 1$ преобразование является перемешивающим, за исключением малых областей значений K. Установлен размер этих областей и показано, что для таких значений K траектория x стягивается к точкам, определяемым условиями резонанса.

Исследование поведения нелинейного осциллятора под влиянием возмущения показывает, что при определенных условиях движение осциллятора является перемешивающимся / 1 /. Это позволяет ввести приближенное статистическое описание вместо точного динамического, что существенно упрощает задачу.

В реальных физических условиях, при которых удается качественно выяснить условия перемешивания, исходные динамические уравнения могут быть сведены к уравнениям в конечных разностях следующего типа

$$I_{n+1} = I_n + \Delta(I_n, x_n)$$

$$x_{n+1} = \{x_n + K(I_n)\sin \pi x_n\} \qquad (1)$$

где (I,x) - переменные действие-фаза, и скобки $\{\dots\}$ означают дробную часть аргумента. Смысл системы (1) заключается в следующем. На оси времени выделяются области существенного изменения действия I. Если размер таких областей много меньше расстояния между ними, то можно построить преобразование типа (1), в котором n обозначает номер области. Близкие к (1) преобразования, сохраняющие меру, исследовались численно в работах / 3,4 /.

Если изменение действия Δ достаточно мало, то возникает возможность исследования приближенного преобразования

$$x_{n+1} = \{K \sin \pi x_n\} \equiv T x_n \qquad (2)$$

в котором параметр K уже не зависит от n.

Недавно Я.Г.Синай и его сотрудники С.Б.Каток и М.Дунская показали для преобразования (2) следующее. Если рассматривать свойства T как функции K, то существует неограниченная область, состоящая из бесконечного числа открытых интервалов, такая, что при K, попавших в эту область, имеются устойчивые периодические точки $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ к которым притягиваются траектории x_n. Эти области лежат вблизи $K = N + \frac{1}{2}$ $(N = 1, 2, \dots)$, и в этом случае перемешивание отсутствует. При $K \gg 1$ существуют также об -

ласти значений K, при которых преобразование T приводит к перемешиванию. В / 2 / были приведены качественные соображения в пользу того, что начиная с достаточно больших K преобразование T обладает свойством перемешивания за исключением некоторых малых областей $\sim K^{-1}$. Ниже будут приведены данные численного анализа уравнения (2).

Основной особенностью преобразования (2) является существование конечных областей, в которых $\delta x_{n+1} / \delta x_n < 1$. Очевидно, что эти области сосредоточены вблизи $x = 1/2$. При любом начальном x можно ожидать, что за достаточно большое число шагов x окажется достаточно близким к 1/2 и возникает вопрос об определении области значений K, для которых будет происходить "захват" точки в некоторую область по x.

Рассмотрим значения K, близкие к полуцелым, т.е. $K = k + \frac{1}{2} + \delta$, где k – целое и $\delta \ll 1$, при дополнительном предположении $K \gg 1$. Пусть вначале $\delta = 0$. Тогда, полагая $x_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, нетрудно из (2) получить, что при

$$\varepsilon < \varepsilon_0 \sim \frac{2}{K\pi^2} \tag{3}$$

значения $x_n \to \frac{1}{2} - 0$ при $n \to \infty$.

При $\delta \neq 0$, но достаточно малом, существуют две точки стягивания ξ_1 и ξ_2. Эти точки соответствуют второму резонансу:

$$\xi_1 = \{ K \sin \pi \xi_2 \}; \quad \xi_2 = \{ K \sin \pi \xi_1 \} \tag{4}$$

Вообще, k-ый резонанс означает $x_{n+k} = x_n$ для резонансных точек. Приближенное решение (4) дает

$$\xi_1 = \frac{1}{2} + \delta, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} + \delta - \frac{K\pi^2}{2}\delta^2$$

т.е. ширина области захвата – порядка (3). С увеличением δ до величины $\sim 2/K\pi^2$ система (4) решений не имеет, точками стягивания являются тогда резонансы более высокого порядка. С ростом δ число резонансов возрастает и происходит образование "блоков", т.е. все x_n при $n \gg 1$ находятся в некоторой области, но не стягиваются в одну точку. Образование блоков связано, с одной стороны, с большим числом резонансов и, с другой стороны, с "размытием" области вблизи резонансных точек.

Приведенные соображения иллюстрируются на рис. 1,2. По оси абсцисс отложены номера ячеек (всего их было 500), на которые разбит интервал изменения x: (0,1). По оси ординат отложено количество раз, которое x принимало значение, лежащее в заданном интервале. Общее число шагов равнялось $N = 10^5$. Числа, приведенные на графиках, означают различные значения K. Так, при K =8.500 все значения, x попадают в один интервал с координатой $x_0 = \{K\} = 1/2$. При K =8.521 появляются две точки стягивания, соответствующие значениям:

$$x_0 = \{K\}, \quad x_1 = \{ K \sin (\pi \{K\}) \}$$

и т.д. Рис.2 иллюстрирует переход к блоку при $K = 8.537$.

Очевидно, что при значениях K, которые на некотором шагу "выбрасывают" точку x из области захвата (3), можно ожидать перемешивающегося движения. Граничное значение δ_0, соответствующее такому K равно:

$$\delta > \delta_0 = \frac{4}{K\pi^2} \tag{5}$$

Численный эксперимент действительно, показал, что при выполнении (5) происходит резкий переход от картины, изображенной на рис. (2), к распределению типа изображенного на рис. 3, соответствующему перемешивающемуся движению. Граница перехода (5) является очень резкой, а при достаточно больших N распределение является стационарным. Точкам А и В на рис. 3 соответствуют:

$$x_A = \{K\}, \quad x_B = \{ K \sin (\pi \{K\}) \}$$

Образовавшиеся максимумы на распределении являются следами от резонансных значений x, т.е. координатами траектории точки с $x_0 = 1/2$.

Результаты численного анализа можно свести к следующему.

1. Для $K = k + \frac{1}{2} + \delta$ таких, что $|\delta| > \frac{4}{K\pi^2}$ и $K \gg 1$ преобразование (2) является перемешивающимся и приводит к стационарному распределению

$$\rho(x) = \lim_{N \to \infty} \rho_N(x)$$

2. Распределение $\rho(x)$ представляет собой очень сложную функцию, максимумы которой соответствуют координатам возможных резонансов

$$x = \{K\}, \ \{K \sin(\pi \{K\})\}; \ldots$$

3. При больших K распределение $\rho(x)$ можно с хорошей точностью аппроксимировать при усреднении константой. Это обстоятельство связано с малостью области локализации максимума.

Авторы выражают благодарность Я.Г.Синаю за полезные обсуждения и интерес.

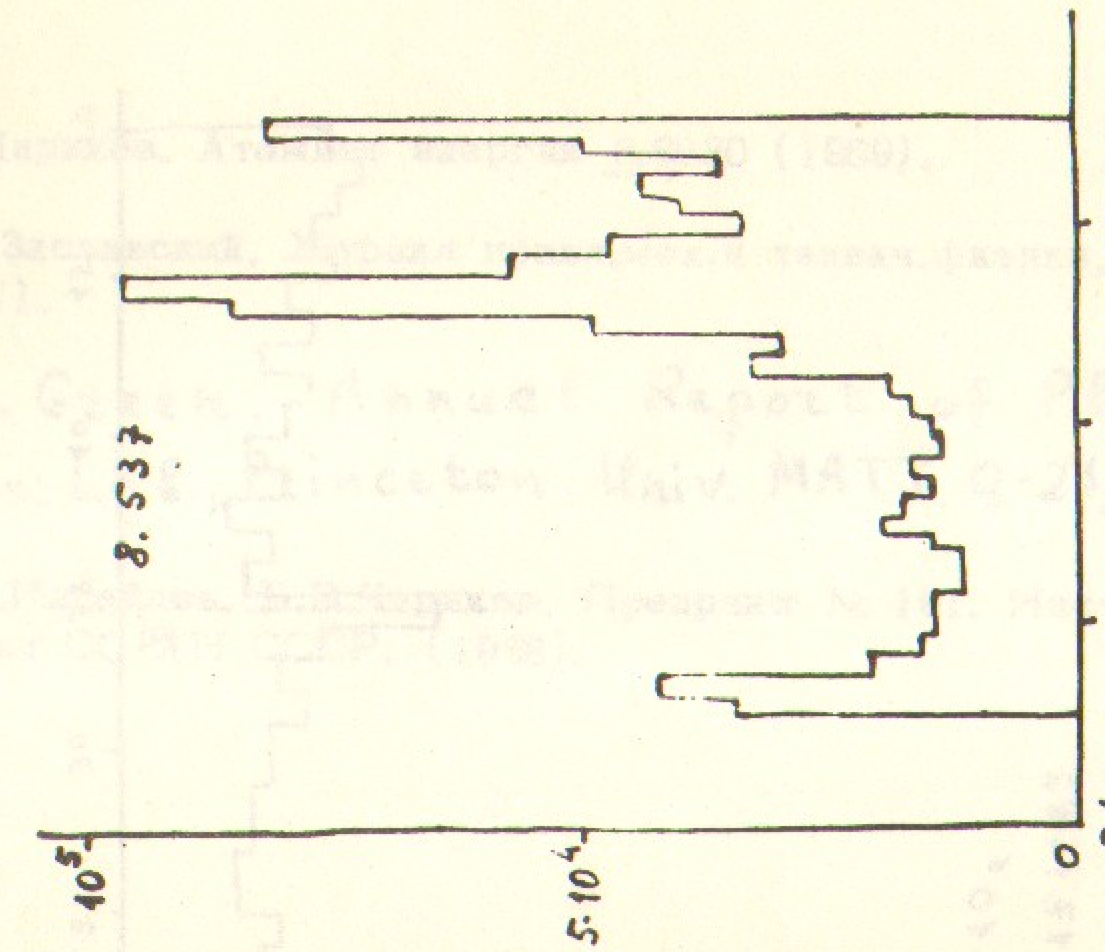

Рис. 2

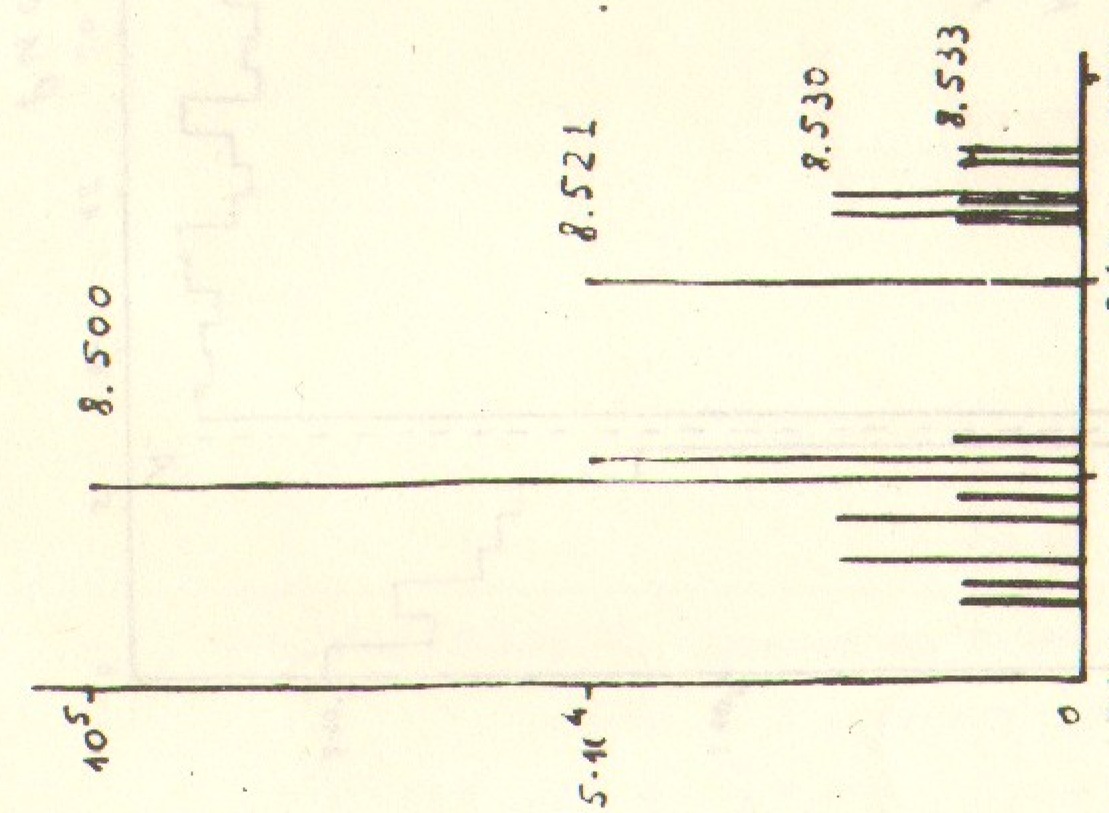

Рис. 1

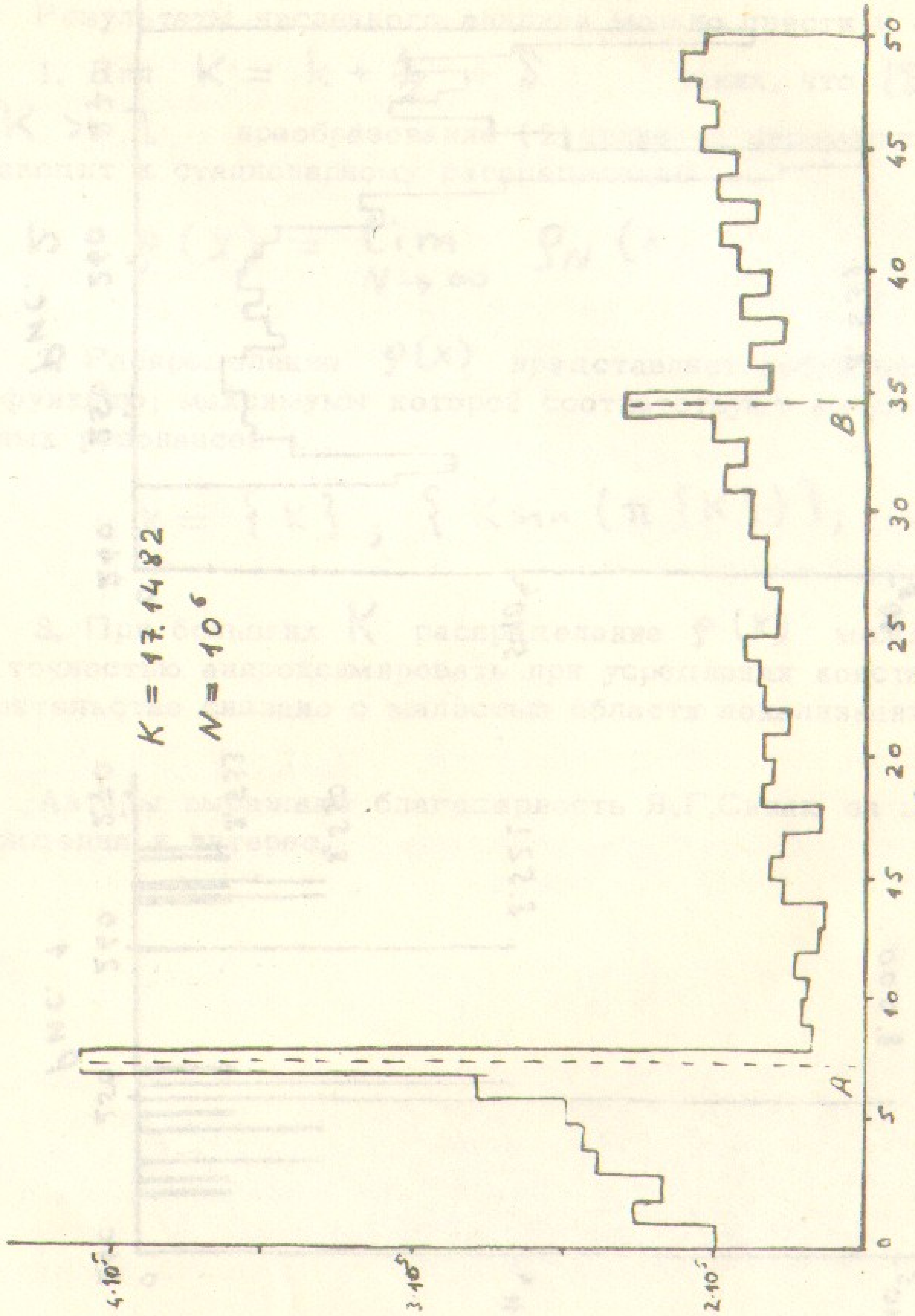

Рис. 3

Литература

1. Б.В.Чириков. Атомная энергия 6,6630 (1959).

2. Г.М.Заславский. Журнал прикл.мех.и технич.физики,№ 2, (1967).

3. J.M. Green. Annual Report of Plasma Phys. Lab., Princeton Univ. MATT Q-24, 308 (1966)

4. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Препринт № 191. Инст.ядерной физики СО АН СССР. (1968).

Ответственный за выпуск Г.М.ЗАСЛАВСКИЙ

Подписано к печати 6.XI.1968 г.

Усл. 0,2 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.

Заказ 256

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. вн