4

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 231

М.Пальчик

К ТЕОРИИ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ

Новосибирск
1968

М.Пальчик

К ТЕОРИИ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ

АННОТАЦИЯ

В работе показано, что каждое безмассовое Ферми- или Бозе поле спиральности s обладает семейством $2|s|$ потенциалов различной спинорной валентности. Исследована степень неоднозначности потенциалов и условий калибровки.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что электромагнитное поле имеет два типа потенциалов. Кроме обычного векторного потенциала A_k можно ввести тензорный "потенциал Герца" Z_{kl}. Напряженности поля F_{kl} выражаются через эти потенциалы формулами

$$F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k \qquad (1.1)$$

$$F_{kl} = \partial_k \partial_m Z_{lm} - \partial_l \partial_m Z_{km} \qquad (1.2)$$

Мы используем метрику $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$

Оба потенциала определены с точностью до преобразований, оставляющих инвариантными напряженности поля F_{kl}:

$$A_k \longrightarrow A_k + \Lambda_k \qquad (1.3)$$

$$Z_{kl} \longrightarrow Z_{kl} + \Lambda_{kl} \qquad (1.4)$$

где Λ_k и Λ_{kl} удовлетворяют условиям

$$\partial_k \Lambda_l - \partial_l \Lambda_k = 0 \qquad (1.5)$$

$$\partial_k \partial_m Z_{lm} - \partial_l \partial_m Z_{km} = 0 \qquad (1.6)$$

Если наложить на потенциал A_k условие калибровки $\partial_m A_m = 0$, то между потенциалами A_k и Z_{kl} может быть установлена связь

$$A_k = \partial_m Z_{km} \qquad (1.7)$$

и формула (1.2) следует из (1.1) и (1.7). Что касается потенциала Z_{kl}, то для него не существует инвариантной калибровки, однако соответствующим выбором Λ_{kl} он может быть редуцирован к обычному трехмерному вектору Герца. Действительно, перейдем в (1.7) к трёхмерным обозначениям

$$\varphi \equiv A_0 = \operatorname{div} \vec{Z}^{(E)}, \quad \vec{A} = -\partial_0 \vec{Z}^{(E)} + \operatorname{rot} \vec{Z}^{(H)}$$

где $\vec{Z}^{(E)}$ и $\vec{Z}^{(H)}$ – электрический и магнитный векторы Герца, определенные как

$$Z^{(E)}_\alpha = Z_{\alpha o}, \quad Z^{(H)}_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} Z_{\beta\gamma}$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$$

$e_{\alpha\beta\gamma}$ – полностью антисимметричный тензор, $e_{123} = 1$. Выбирая Λ_{kl} так, чтобы выполнялись условия $\partial_m \Lambda_{km} = 0$, $\Lambda_{\alpha\beta} = -Z_{\alpha\beta}$ получим

$$\varphi = \operatorname{div} \vec{Z}, \quad \vec{A} = -\partial_0 \vec{Z}$$

где $\vec{Z} = \vec{Z}^{(E)} + \vec{\Lambda}^{(E)}$

Как известно, потенциал Герца Z_{kl} всегда удовлетворяет волновому уравнению, тогда как потенциал A_k лишь в том случае, если выполнено условие $\partial_m A_m = 0$

Обобщая сказанное об электромагнитном поле, мы покажем (§ 2), что любое поле спиральности S имеет $2|S|$ различных типов потенциалов. Среди них имеются потенциалы, обладающие той же тензорной структурой, как и соответствующие им поля. В отличие от всех остальных потенциалов, они не имеют инвариантной калибровки и всегда удовлетворяют волновому уравнению. Каждое безмассовое поле имеет только один такой "потенциал Герца" и полностью определяется этим потенциалом.

В § 3 детально рассмотрены нейтринное электромагнитное и слабое гравитационное поля. Нейтринное поле имеет единственный потенциал, впервые исследованный в работе Такуока /1/. Слабое гравитационное поле имеет четыре типа потенциалов: $A_{kl,m}$, φ_{kl}, $\Pi_{kl,m}$ и Z_{klmn}. Потенциал $A_{kl,m}$ совпадает с антисимметричной частью символов Кристоффеля $A_{kl,m} = \frac{1}{2}(\Gamma_{k,lm} - \Gamma_{l,km})$. Потенциал φ_{kl} есть обычный метрический тензор. Потенциал $\Pi_{kl,m}$ обладает той же тензорной структурой, что и $A_{kl,m}$ и, наконец, потенциал Герца Z_{klmn} имеет симметрию тензора Вейля.1)

Для того, чтобы единообразно рассматривать Бозе- и Ферми-поля, мы будем всюду, за исключением § 3, пользоваться спинтензорной формулировкой уравнений поля (см. приложение 1).

§ 2. Поля и потенциалы

Мы будем описывать свободные безмассовые поля спиральности $S=-\lambda$ и $S=\lambda$ симметричными спинтензорами $F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}}$ и $F_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$, преобразующимися по представлениям $(\lambda, 0)$ и $(0, \lambda)$ группы Лоренца соответственно /2/. Ясно, что безмассовые поля удовлетворяют волновому уравнению

$$\Box F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}} = 0; \qquad \Box F_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} = 0 \tag{2.1}$$

Кроме того, (см., например, /2/) они должны удовлетворять уравнениям первого порядка

$$\partial_{A_1 \dot{B}} F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}} = 0 \tag{2.2}$$

$$\partial_{A\dot{B}_1} F_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} = 0 \tag{2.3}$$

Условие нейтральности полей гласит /2/:

$$F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}} = (F_{\dot{A}_1 \cdots \dot{A}_{2\lambda}})^* \equiv \overset{*}{F}_{A_1 \cdots A_{2\lambda}} \tag{2.4}$$

Учитывая, что все результаты для $F_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$ могут быть получены комплексным сопряжением соответствующих выражений для $F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}}$, мы ограничимся рассмотрением поля $F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}}$. Этому полю можно сопоставить класс величин $\Phi^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j}\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}}$, преобразующихся по представлениям (j, j') группы Лоренца,

1) Тензор Римана в пустом пространстве.

где j и j' связаны условием

$$j + j' = \lambda \tag{2.5}$$

и j может пробегать 2λ значений: $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \lambda - \frac{1}{2}$. Эти величины $\Phi^{(j,j')}$ мы выберем так, чтобы поле $F_{A_1 \dots A_{2\lambda}}$ получалось из них $2j'$ - кратным дифференцированием

$$F_{A_1 \dots A_{2\lambda}} = \frac{(2j)!(2j')!}{(2\lambda)!} \mathcal{S}im \{ \partial_{A_{2j+1}\dot{B}_1} \cdots \partial_{A_{2\lambda}\dot{B}_{2j'}} \Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}} \} \tag{2.6}$$

Здесь и дальше символ $\mathcal{S}im$ означает симметризацию по индексам без точек и по индексам с точками. Аналогичная формула имеет место для поля $F_{\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2\lambda}}$:

$$F_{\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2\lambda}} = \frac{(2j)!(2j')!}{(2\lambda)!} \mathcal{S}im \{ \partial_{A_1\dot{B}_{2j+1}} \cdots \partial_{A_{2j'}\dot{B}_{2\lambda}} \Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j'}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j}} \} \tag{2.7}$$

Величины $\Phi^{(j,j')}$ можно рассматривать, как потенциалы поля $F_{A_1 \dots A_{2\lambda}}$. Нетрудно проверить, что мы имеем 2λ типов потенциалов, определяемых формулой (2.6) или (2.7). Из условия нейтральности поля (2.4) и формул (2.6) и (2.7) следует, что

$$\Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}} = \left(\Phi^{(j',j)}_{\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'} A_1 \dots A_{2j}} \right)^* \equiv \overset{*}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}} \tag{2.8}$$

Рассмотрим один из потенциалов $\Phi^{(j,j')}$, отличный от потенциала Герца (т.е. $j \neq 0$). Формула (2.6) определяет его с точностью до градиентных преобразований

$$\Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}} \longrightarrow \Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}} + \mathcal{S}im \{ \partial_{A_1\dot{B}_1} \Lambda_{A_2 \dots A_{2j}\dot{B}_2 \dots \dot{B}_{2j'}} \} \tag{2.9}$$

где $\Lambda_{A_2 \dots A_{2j}\dot{B}_2 \dots \dot{B}_{2j'}}$ - произвольный спинтензор симметричный по индексам А и по индексам $\dot{B}$. Действительно, подставляя (2.6) в (2.9) находим, что каждый член содержит свёртку типа $\partial_{A\dot{C}} \partial_{B\dot{C}}$, антисимметричную по индексам А и В и, следовательно, не даёт вклада в поле $F_{A_1 \dots A_{2\lambda}}$. Смешанный спинтензор $\Lambda_{A_2 \dots A_{2j}\dot{B}_2 \dots \dot{B}_{2j'}}$ имеет $4jj'$ независимых компонент, что позволяет наложить $4jj'$ ковариантных условий калибровки на потенциал $\Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}}$

$$\partial_{A_1\dot{B}_1} \Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}} = 0 \tag{2.10}$$

После наложения этих условий число компонент потенциала $\Phi^{(j,j')}$, оставшихся независимыми, есть $(2j+1)(2j'+1) - 4jj' = 2\lambda + 1$, т.е. равно числу независимых компонент поля. Отсюда ясен смысл калибровочных условий.

Остаётся ещё свобода относительно специальных градиентных преобразований, не нарушающих калибровку (2.10). Эти преобразования имеют вид

$$\Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}} \longrightarrow \Phi^{(j,j')}_{A_1 \dots A_{2j}\dot{B}_1 \dots \dot{B}_{2j'}} + \mathcal{S}im \{ \partial_{A_1\dot{B}_1} \overset{(0)}{\Lambda}_{A_2 \dots A_{2j}\dot{B}_2 \dots \dot{B}_{2j'}} \}$$

Спинтензор $\Lambda^{(0)}_{A_2 \cdots A_{2j} \dot{B}_2 \cdots \dot{B}_{2j'}}$, симметричный по индексам A и по индексам $\dot{B}$, должен удовлетворять некоторым дополнительным дифференциальным условиям, необходимым для сохранения калибровки (2.10). Как можно показать, число независимых компонент $\Lambda^{(0)}$ в силу этих условий равно $2\lambda - 1$. Это позволяет выбрать $\Lambda^{(0)}$ так, чтобы в каждой фиксированной системе отсчёта из $2\lambda+1$ независимых компонент потенциала $\Phi^{(j,j')}$ остались отличными от нуля только две, что соответствует существованию двух поляризационных степеней свободы безмассового поля.

В дальнейшем мы будем подразумевать, что все потенциалы $\Phi^{(j,j')}$ удовлетворяют калибровочным условиям (2.10). С учётом этих условий мы можем переписать формулы (2.6) и (2.7) в виде

$$F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}} = \partial_{A_{2j+1} \dot{B}_1} \cdots \partial_{A_{2\lambda} \dot{B}_{2j'}} \Phi^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}} \tag{2.11}$$

$$F_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} = \partial_{A_1 \dot{B}_{2j'+1}} \cdots \partial_{A_{2j} \dot{B}_{2\lambda}} \Phi^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}} \tag{2.12}$$

Обратимся теперь к потенциалу Герца $Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$. Полагая в (2.11) $j = 0$, получим

$$F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}} = \partial_{A_1 \dot{B}_1} \cdots \partial_{A_{2\lambda} \dot{B}_{2\lambda}} Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} \tag{2.13}$$

Из уравнений поля (2.2) следует (см. приложение II), что потенциал Герца удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} = 0 \tag{2.14}$$

Очевидно, что справедливо и обратное, следовательно уравнение (2.14) эквивалентно уравнениям поля (2.2).

Формула (2.13) определяет потенциал $Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$ с точностью до преобразования

$$Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} \longrightarrow Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} + \Lambda_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$$

где $\Lambda_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$ – симметричный спинтензор, удовлетворяющий условиям

$$\partial_{A_1 \dot{B}_1} \cdots \partial_{A_{2\lambda} \dot{B}_{2\lambda}} Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} = 0$$

Однако, число независимых компонент потенциала $Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$ равно числу независимых компонент поля, и инвариантной калибровки для него не существует.

Для дальнейших целей удобно ввести потенциалы $\overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}}$ и $\overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}}$, определяемые формулами:

$$\overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}} = \partial_{A_1 \dot{B}_{2j'+1}} \cdots \partial_{A_{2j} \dot{B}_{2\lambda}} Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} \tag{2.15}$$

$$\overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}} = \partial_{A_{2j+1} \dot{B}_1} \cdots \partial_{A_{2\lambda} \dot{B}_{2j'}} Z_{A_1 \cdots A_{2\lambda}} \tag{2.16}$$

где $Z_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$ и $Z_{A_1 \cdots A_{2\lambda}}$ – потенциалы Герца полей $F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}}$ и $F_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}}$. Поля выражаются через эти потенциалы формулами.

$$F_{A_1 \cdots A_{2\lambda}} = \partial_{A_{2j+1} \dot{B}_1} \cdots \partial_{A_{2\lambda} \dot{B}_{2j'}} \overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}} \tag{2.17}$$

$$F_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2\lambda}} = \partial_{A_1 \dot{B}_{2j'+1}} \cdots \partial_{A_{2j} \dot{B}_{2\lambda}} \overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}} \tag{2.18}$$

Условие нейтральности (2.4) даёт

$$\overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} = \left(\overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}_{B_1\cdots B_{2j'}\dot{A}_1\cdots\dot{A}_{2j}}\right)^* = \overset{*}{\overset{+}{\Phi}}{}^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} \quad (2.19)$$

Из (2.14) - (2.16) вытекает, что потенциалы $\overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\partial_{A_1\dot{B}}\ \overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} = 0, \qquad \Box\,\overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} = 0 \quad (2.20)$$

$$\partial_{A\dot{B}_1}\ \overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} = 0, \qquad \Box\,\overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} = 0 \quad (2.21)$$

Ясно, что эти уравнения эквивалентны уравнениям поля (2.2) и (2.3). Из них следует, что потенциал $\overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}$ определяет только поле $F_{A_1\cdots A_{2\lambda}}$, а $\overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}$ - только поле $F_{\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2\lambda}}$ (в то время, как потенциал $\Phi^{(j,j')}$ определяет оба поля). Более того, если в (2.15) положить $j=\lambda$, то $\overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}$ совпадает с полем $F_{A_1\cdots A_{2\lambda}}$, а уравнения (2.20) перейдут в уравнения поля (2.2). Аналогичное замечание справедливо для потенциала $\overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}$, если положить $j'=\lambda$.

Отметим, наконец, что рассмотренные выше потенциалы $\Phi^{(j,j')}$, удовлетворяющие калибровке (2.10) представляются в виде суммы $\overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}$ и $\overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}$:

$$\Phi^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} = \overset{-}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} + \overset{+}{\Phi}{}^{(j,j')}_{A_1\cdots A_{2j}\dot{B}_1\cdots\dot{B}_{2j'}} \quad (2.22)$$

§ 3. Частные случаи полей

Применим полученные выше общие формулы к трём частным случаям:

1. Нейтринное поле.

Уравнения нейтринного поля имеют вид:

$$\partial_{A\dot{B}}\ F_A = 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_{A\dot{B}}\ F_{\dot{B}} = 0 \quad (3.2)$$

и сводятся к уравнениям Вейля для лево- и право-поляризованных нейтрино

$$(\sigma_0\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\partial})\,\varphi = 0$$
$$(\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\partial})\,\chi = 0$$

если положить

$$\varphi = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} F_{\dot{2}} \\ -F_{\dot{1}} \end{pmatrix}$$

Для поля F_A можно ввести один потенциал - потенциал Герца $Z_{\dot{B}}$.

$$F_A = \partial_{A\dot{B}} Z_{\dot{B}}\ ; \qquad F_{\dot{B}} = \partial_{A\dot{B}} Z_A \quad (3.3)$$

который в силу (3.1) удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box\, Z_{\dot{B}} = 0 \quad (3.4)$$

и допускает преобразование, не меняющее поля

$$Z_{\dot{B}} \longrightarrow Z_{\dot{B}} + \Lambda_{\dot{B}}$$

где спинор $\Lambda_{\dot{B}}$ подчинён условию $\partial_{A\dot{B}}\Lambda_{\dot{B}} = 0$

Представляя (3.3) в обычной форме

$$\varphi = (\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\partial})\, Z^{(\varphi)}$$
$$\chi = (\sigma_0\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\partial})\, Z^{(\chi)}$$

где

$$Z^{(\varphi)} = \begin{pmatrix} Z_{\dot{2}} \\ -Z_{\dot{1}} \end{pmatrix}, \qquad Z^{(\chi)} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

убеждаемся, что потенциалы Герца Z_A и $Z_{\dot{B}}$ совпадают с потенциалами, введёнными ранее в работе /1/ [2].

2. Электромагнитное поле.

Электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором F_{kl}, который можно представить в виде суммы

$$F_{kl} = \overset{-}{F}_{kl} + \overset{+}{F}_{kl} \tag{3.5}$$

где

$$\overset{-}{F}_{kl} = \frac{1}{4} F_{AB} \langle A|\sigma_k|\dot{C}\rangle\langle B|\sigma_l|\dot{C}\rangle, \quad \overset{+}{F}_{kl} = \frac{1}{4} F_{\dot{C}\dot{D}} \langle A|\sigma_k|\dot{C}\rangle\langle A|\sigma_l|\dot{D}\rangle \tag{3.6}$$

Матрицы $\langle A|\sigma_k|\dot{C}\rangle$ определены в приложении 1.
Условие нейтральности (2.4) имеет вид [3]:

$$\overset{-}{F}_{kl} = \left(\overset{+}{F}_{kl}\right)^* \tag{3.7}$$

Можно проверить, что

$$\overset{\mp}{F}_{kl} = \mp \frac{i}{2} e_{klmn} \overset{\mp}{F}_{mn} \tag{3.8}$$

поэтому уравнения поля (2.2) и (2.3), записанные в форме:

$$\partial_l \overset{-}{F}_{kl} = 0 \qquad \partial_{A\dot{B}} F_{AC} = 0 \tag{3.9}$$

$$\partial_l \overset{+}{F}_{kl} = 0 \qquad \partial_{A\dot{B}} F_{\dot{B}\dot{C}} = 0 \tag{3.10}$$

эквиваленты обычным уравнениям Максвелла в пустом пространстве.

Потенциалам $\overset{\mp}{\varphi}_{A\dot{B}}$ соответствуют в тензорном представлении два 4-вектора $\overset{-}{A}_k$ и $\overset{+}{A}_k$:

$$\overset{\mp}{A}_k = \frac{1}{2} \varphi_{A\dot{B}} \langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle \tag{3.11}$$

---

2) Для этого в /1/ необходимо перейти к представлению матриц γ_k, в котором $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$

3) Слева пишутся формулы в тензорном виде, а справа - в спинтензорном.

Калибровочные условия есть:

$$\partial_k \overset{\mp}{A}_k = 0, \qquad \partial_{A\dot{B}} \overset{\mp}{\varphi}_{A\dot{B}} = 0 \tag{3.12}$$

Для полей $\overset{\mp}{F}_{kl}$ имеем

$$\overset{-}{F}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\partial_k \overset{-}{A}_l - \partial_l \overset{-}{A}_k - i e_{klmn} \partial_m \overset{-}{A}_n\right); \quad F_{AB} = \partial_{A\dot{C}} \overset{-}{\varphi}_{B\dot{C}} \tag{3.13}$$

$$\overset{+}{F}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\partial_k \overset{+}{A}_l - \partial_l \overset{+}{A}_k + i e_{klmn} \partial_m \overset{+}{A}_n\right); \quad F_{\dot{C}\dot{D}} = \partial_{B\dot{D}} \overset{+}{\varphi}_{B\dot{C}} \tag{3.14}$$

Учитывая уравнения для потенциалов

$$\partial_k \overset{-}{A}_l - \partial_l \overset{-}{A}_k + i e_{klmn} \partial_m \overset{-}{A}_n = 0, \qquad \partial_{B\dot{C}} \overset{-}{\varphi}_{B\dot{D}} = 0 \tag{3.15}$$

$$\partial_k \overset{+}{A}_l - \partial_l \overset{+}{A}_k - i e_{klmn} \partial_m \overset{+}{A}_n = 0, \qquad \partial_{A\dot{B}} \overset{+}{\varphi}_{C\dot{B}} = 0 \tag{3.16}$$

получим

$$\overset{\mp}{F}_{kl} = \partial_k \overset{\mp}{A}_l - \partial_l \overset{\mp}{A}_k \tag{3.17}$$

Потенциалам Герца Z_{AB} и $Z_{\dot{C}\dot{D}}$ соответствуют антисимметричные тензоры $\overset{-}{Z}_{kl}$ и $\overset{+}{Z}_{kl}$:

$$\overset{-}{Z}_{kl} = - Z_{AB} \langle A|\sigma_k|\dot{C}\rangle\langle B|\sigma_l|\dot{C}\rangle \tag{3.18}$$

$$\overset{+}{Z}_{kl} = - Z_{\dot{C}\dot{D}} \langle A|\sigma_k|\dot{C}\rangle\langle A|\sigma_l|\dot{D}\rangle$$

обладающие, как и поля $\overset{\mp}{F}_{kl}$ свойством:

$$\overset{\mp}{Z}_{kl} = \pm \frac{i}{2} e_{klmn} \overset{\mp}{Z}_{mn}$$

Для потенциалов $\overset{\mp}{A}_k$ имеем:

$$\bar{A}_k = \frac{1}{2}\left(\partial_l \bar{Z}_{kl} + \frac{i}{2} e_{klrs} \partial_l \bar{Z}_{rs}\right) = \partial_l \bar{Z}_{kl} \tag{3.19}$$

$$\bar{\varphi}_{A\dot{B}} = \partial_{A\dot{C}} Z_{\dot{B}\dot{C}}$$

$$\overset{+}{A}_k = \frac{1}{2}\left(\partial_l \overset{+}{Z}_{kl} - \frac{i}{2} e_{klrs} \partial_l \overset{+}{Z}_{rs}\right) = \partial_l \overset{+}{Z}_{kl}$$

$$\overset{+}{\varphi}_{A\dot{B}} = \partial_{C\dot{B}} Z_{AC} \tag{3.20}$$

Складывая выражения, соответствующие полям $\bar{F}_{kl}$ и $\overset{+}{F}_{kl}$, получим обычные формулы электродинамики:

$$F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k ; \quad A_k = \partial_m Z_{km} \tag{3.21}$$

где

$$A_k = \bar{A}_k + \overset{+}{A}_k , \qquad Z_{kl} = \bar{Z}_{kl} + \overset{+}{Z}_{kl}$$

Ясно, что A_k и Z_{kl} – действительны в силу условий нейтральности

$$\bar{A}_k = (\overset{+}{A}_k)^* ; \qquad \bar{Z}_{kl} = (\overset{+}{Z}_{kl})^* \tag{3.22}$$

Используя (3.8) можно выразить $\overset{\mp}{F}_{kl}$ и $\overset{\mp}{Z}_{kl}$ через F_{kl} и Z_{kl}:

$$\overset{\mp}{F}_{kl} = \frac{1}{2}\left(F_{kl} \mp \frac{i}{2} e_{klmn} F_{mn}\right) \tag{3.23}$$

$$\overset{\mp}{Z}_{kl} = \frac{1}{2}\left(Z_{kl} \pm \frac{i}{2} e_{klmn} Z_{mn}\right) \tag{3.24}$$

3. Гравитационное поле.

Гравитационное поле описывается двумя тензорами четвертого ранга $\bar{F}_{klmn}$ и $\overset{+}{F}_{klmn}$:

$$\bar{F}_{klmn} = \frac{1}{16} F_{ABCD} \langle A|\sigma_k|\dot{E}\rangle \langle B|\sigma_l|\dot{E}\rangle \langle C|\sigma_m|\dot{F}\rangle \langle D|\sigma_n|\dot{F}\rangle$$

(3.25)

$$\overset{+}{F}_{klmn} = \frac{1}{16} F_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}} \langle A|\sigma_k|\dot{E}\rangle \langle A|\sigma_l|\dot{F}\rangle \langle B|\sigma_m|\dot{G}\rangle \langle B|\sigma_n|\dot{H}\rangle$$

со следующими свойствами симметрии

$$\overset{\mp}{F}_{klmn} = \overset{\mp}{F}_{mnkl} , \quad \overset{\mp}{F}_{klmn} = -\overset{\mp}{F}_{lkmn} \tag{3.26}$$

$$F_{klml} = 0$$

$$\overset{\mp}{F}_{klmn} = \mp \frac{i}{2} e_{mnpq} \overset{\mp}{F}_{klpq} ; \quad e_{klmn} F_{plmn} = 0 \tag{3.27}$$

Нейтральность поля даёт

$$\bar{F}_{klmn} = (\overset{+}{F}_{klmn})^* ; \qquad F_{ABCD} = (F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}})^* \tag{3.28}$$

Уравнения поля (3.2) и (3.3) имеют вид

$$\partial_n \bar{F}_{klmn} = 0 ; \qquad \partial_{A\dot{E}} F_{ABCD} = 0 \tag{3.29}$$

$$\partial_n \overset{+}{F}_{klmn} = 0 ; \qquad \partial_{A\dot{E}} F_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}} = 0 \tag{3.30}$$

Складывая и вычитая (3.29) и (3.30), получим, с учётом (3.27), обычные уравнения слабого гравитационного поля /3, 4/:

$$\partial_n F_{klmn} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_r F_{klmn} + \partial_l F_{rkmn} + \partial_k F_{lrmn} = 0 \tag{3.31}$$

где $F_{klmn} = (\bar{F}_{klmn} + \overset{+}{F}_{klmn})$ – действительный десятикомпонентный тензор Вейля.

В соответствии с изложенным в § 2 поле F_{ABCD} имеет четыре типа потенциалов:

$A_{AB\dot{C}\dot{D}}$, $\varphi_{A\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$, $\Pi_{A\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$ и $Z_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$,

подчиненных следующим калибровочным условиям

$$\partial_{A\dot{D}} A_{ABC\dot{D}} = 0; \quad \partial_{A\dot{C}} \varphi_{AB\dot{C}\dot{D}}; \quad \partial_{A\dot{B}} \Pi_{A\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = 0 \qquad (3.32)$$

Поля F_{ABCD} и $F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$ выражаются через потенциалы формулами

$$F_{ABCD} = \partial_{D\dot{E}} A_{ABC\dot{E}}; \qquad F_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}} = \partial_{D\dot{H}} A_{D\dot{E}\dot{F}\dot{G}} \qquad (3.33)$$

$$F_{ABCD} = \partial_{C\dot{G}} \partial_{D\dot{H}} \varphi_{AB\dot{G}\dot{H}}; \qquad F_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}} = \partial_{C\dot{G}} \partial_{D\dot{H}} \varphi_{CD\dot{E}\dot{F}} \qquad (3.34)$$

$$F_{ABCD} = \partial_{B\dot{E}} \partial_{C\dot{F}} \partial_{D\dot{H}} \Pi_{A\dot{E}\dot{F}\dot{H}}; \qquad F_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}} = \partial_{B\dot{F}} \partial_{C\dot{G}} \partial_{D\dot{H}} \Pi_{BCD\dot{E}} \qquad (3.35)$$

$$F_{ABCD} = \partial_{A\dot{E}} \partial_{B\dot{F}} \partial_{C\dot{G}} \partial_{D\dot{H}} Z_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}}; \qquad F_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}} = \partial_{A\dot{E}} \partial_{B\dot{F}} \partial_{C\dot{G}} \partial_{D\dot{H}} Z_{ABCD} \qquad (3.36)$$

где $$A_{A\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = (A_{BCD\dot{A}})^*, \quad \Pi_{ABC\dot{D}} = (\Pi_{D\dot{A}\dot{B}\dot{C}})^*, \quad Z_{ABCD} = (Z_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}})^* \qquad (3.37)$$

Особого рассмотрения требует потенциал $\varphi_{AB\dot{C}\dot{D}}$. В виду (2.8) *он* "эрмитов"

$$\varphi_{AB\dot{C}\dot{D}} = (\varphi_{CD\dot{A}\dot{B}})^* = \overset{*}{\varphi}_{AB\dot{C}\dot{D}} \qquad (3.38)$$

и, следовательно, в тензорном представлении ему соответствует действительный бесследный тензор φ_{kl} , являющийся метрическим тензором слабого гравитационного поля. Обычно на тензор g_{kl} не накладывают условия бесследности, однако нетрудно показать, что в случае слабого гравитационного поля в пустоте след g_{mm} не даёт вклада в тензор Римана. Действительно, обычный десятикомпонентный тензор g_{kl}, преобразующийся по представлению (1,1) ⊕ (0,0) группы Лоренца, в спинтензорной форме имеет вид[4)]

$$g_{AB\dot{C}\dot{D}} = \varphi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \epsilon_{AB} \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} \varphi$$

где $\varphi_{AB\dot{C}\dot{D}}$ соответствует бесследной части g_{kl} , а φ - скаляр, соответствующий следу g_{kk} . Ясно, что второй член не может дать вклада в поле F_{ABCD} (тензор Вейля), так как он антисимметричен по индексам А и В. Таким образом, мы можем использовать в качестве потенциала поля F_{ABCD} вместо десятикомпонентного метрического тензора g_{kl} его девятикомпонентную неприводимую часть φ_{kl}.

Вводя потенциалы $\overset{\mp}{A}$, $\overset{\mp}{\varphi}$ и $\overset{\mp}{\Pi}$ по формулам (2.15) и (2.16) и переходя к тензорной записи, получим четыре типа тензоров: $\overset{\mp}{A}_{kl,m}$, $\overset{\mp}{\varphi}_{kl}$, $\overset{\mp}{\Pi}_{kl,m}$ и $\overset{\mp}{Z}_{klmn}$ со следующими свойствами симметрии:

$$\overset{\mp}{A}_{kl,m} = -\overset{\mp}{A}_{lk,m}, \qquad A_{kl,l} = 0 \qquad (3.39)$$

$$\overset{\mp}{A}_{kl,m} = \mp \frac{i}{2} e_{klpq} \overset{\mp}{A}_{pq,m}, \qquad e_{klmn} A_{lm,n} = 0 \qquad (3.40)$$

$$\overset{\mp}{\varphi}_{kl} = \overset{\mp}{\varphi}_{lk}, \qquad \overset{\mp}{\varphi}_{mm} = 0 \qquad (3.41)$$

$$\overset{\mp}{\Pi}_{kl,m} = -\overset{\mp}{\Pi}_{lk,m}, \qquad \overset{\mp}{\Pi}_{kl,l} = 0 \qquad (3.42)$$

$$\overset{\mp}{\Pi}_{kl,m} = \pm \frac{i}{2} e_{klpq} \Pi_{pq,m}, \qquad e_{klmn} \overset{\mp}{\Pi}_{lmn} = 0. \qquad (3.43)$$

$$\overset{\mp}{Z}_{klmn} = \overset{\mp}{Z}_{mnkl}, \quad \overset{\mp}{Z}_{klmn} = -\overset{\mp}{Z}_{lkmn}, \quad \overset{\mp}{Z}_{klml} = 0. \qquad (3.44)$$

$$\overset{\mp}{Z}_{klmn} = \pm \frac{i}{2} \overset{\mp}{e}_{mnpq} \overset{\mp}{Z}_{klpq}; \qquad e_{klmn} \overset{\mp}{Z}_{plmn} = 0 \qquad (3.45)$$

4) Спинтензоры ϵ_{AB} и $\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}$ определены в приложении 1.

Условия калибровки имеют вид

$$\partial_m \overset{\mp}{A}_{kl,m}=0; \quad \partial_l \overset{\mp}{\varphi}_{kl}=0; \quad \partial_l \overset{\mp}{\Pi}_{km,l}=0 \tag{3.46.a}$$

Учитывая уравнения (см. (2.20) и (2.21):

$$\partial_l \overset{\mp}{A}_{kl,m}=0 \tag{3.46}$$

$$\partial_k \overset{\mp}{\varphi}_{lm}-\partial_l \overset{\mp}{\varphi}_{km} \pm i e_{klrs}\,\partial_r \overset{\mp}{\varphi}_{sm}=0 \tag{3.47}$$

$$\partial_n \overset{\mp}{\Pi}_{kl,m}-\partial_m \overset{\mp}{\Pi}_{kl,n} \pm i e_{nmrs}\,\partial_r \overset{\mp}{\Pi}_{kl,s}=0 \tag{3.48}$$

и переходя к потенциалам $A=\bar{A}+\overset{+}{A}$, $\varphi=\bar{\varphi}+\overset{+}{\varphi}$, $\Pi=\bar{\Pi}+\overset{+}{\Pi}$, $Z=\bar{Z}+\overset{+}{Z}$ действительным в силу условий нейтральности

$$\bar{A}_{kl,m}=(\overset{+}{A}_{kl,m})^*, \quad \bar{\varphi}_{kl}=(\overset{+}{\varphi}_{kl})^* \tag{3.49}$$

$$\bar{\Pi}_{kl,m}=(\overset{+}{\Pi}_{kl,m})^*, \quad \bar{Z}_{klmn}=(\overset{+}{Z}_{klmn})^*$$

для поля F_{klmn} получим:

$$F_{klmn}=\partial_m A_{kl,n}-\partial_n A_{kl,m} \tag{3.50}$$

$$F_{klmn}=\tfrac{1}{2}\left(\partial_m\partial_l\varphi_{kn}+\partial_k\partial_n\varphi_{lm}-\partial_l\partial_n\varphi_{km}-\partial_k\partial_m\varphi_{ln}\right) \tag{3.51}$$

$$F_{klmn}=\left(\partial_m\partial_l\partial_r\Pi_{kr,n}+\partial_k\partial_n\partial_r\Pi_{lr,m}-\partial_l\partial_n\partial_r\Pi_{kr,m}-\partial_k\partial_m\partial_r\Pi_{lr,n}\right) \tag{3.52}$$

$$F_{klmn}=\left(\partial_m\partial_l\partial_r\partial_s Z_{krns}+\partial_k\partial_n\partial_r\partial_s Z_{lrms}-\partial_l\partial_n\partial_r\partial_s Z_{krms}-\partial_k\partial_m\partial_r\partial_s Z_{lrns}\right) \tag{3.53}$$

Легко убедиться, что подстановка любой из этих формул во второе из уравнений поля (3.31) обращает его в тождество.

Поскольку потенциалы подчинены калибровочным условиям типа (3.46а)

между ними существует связь

$$A_{kl,m}=\tfrac{1}{2}\left(\partial_l\varphi_{km}-\partial_k\varphi_{lm}\right) \tag{3.54}$$

$$\varphi_{kl}=2\,\partial_r\Pi_{kr,l} \tag{3.55}$$

$$\Pi_{kr,l}=\partial_m Z_{krlm} \tag{3.56}$$

из которой следует, что все потенциалы удовлетворяют волновому уравнению. Кроме того, из первой формулы видно, что потенциал $A_{kl,m}$ является антисимметричной частью символов Крис - тоффеля $\Gamma_{kl,m}$

$$A_{kl,m}=\tfrac{1}{2}\left(\Gamma_{kl\,m}-\Gamma_{lk\,m}\right)$$

Укажем, в заключение, явный вид потенциалов $\overset{\mp}{A}_{kl,m}$, $\overset{\mp}{\Pi}_{kl,m}$ и $\overset{\mp}{Z}_{klmn}$, вытекающий из (3.40), (3.43) и (3.45):

$$\overset{\mp}{A}_{kl,m}=\tfrac{1}{2}\left(A_{kl,m}\mp\tfrac{i}{2}e_{klpq}A_{pq,m}\right)$$

$$\overset{\mp}{\Pi}_{kl,m}=\tfrac{1}{2}\left(\Pi_{kl,m}\pm\tfrac{i}{2}e_{klpq}\Pi_{pq,m}\right)$$

$$\overset{\mp}{Z}_{klmn}=\tfrac{1}{2}\left(Z_{klmn}\pm\tfrac{i}{2}e_{mnpq}Z_{klpq}\right)$$

Автор глубоко признателен Ю.Б.Румеру за предложенную тему и общее руководство работой.

Институт ядерной физики СО АН СССР.

Приложение 1. Спинорный анализ

Пусть ξ_A - двухкомпонентная комплексная величина, и ϵ_{AB} - двумерный единичный антисимметричный тензор $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}, \epsilon_{12} = 1$. Пусть при преобразованиях Лоренца величина ξ_A преобразуется по закону

$$\xi'_A = \sum_B d_{AB}\, \xi_B \tag{1.1}$$

где d_{AB} - двухрядная унимодулярная матрица

$$\det |d_{AB}| = 1 \tag{1.2}$$

Нетрудно проверить, что преобразования (1.1) оставляют инвариантным „скалярное произведение"

$$\xi_A \eta_A \equiv \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = \sum_{A,B} \xi_A\, \epsilon_{AB}\, \eta_B \tag{1.3}$$

Совокупность матриц d_{AB}, удовлетворяющих условию (1.2) и зависящих, следовательно, от шести параметров, образуют бинарную группу, а величина ξ_A с законом преобразования (1.1) называется спинором.

Кроме спиноров ξ_A можно рассматривать комплексно сопряжённые спиноры $(\xi_A)^*$, преобразующиеся по комплексно сопряженному представлению $(d_{AB})^*$. Комплексно сопряженные величины принято обозначать индексами с точками:

$$(\xi_A)^* \equiv \overset{*}{\xi}_{\dot A}\,, \qquad (d_{AB})^* = \overset{*}{d}_{\dot A \dot B}$$

Важно отметить, что представления, реализуемые спинорами ξ_A и $\overset{*}{\xi}_{\dot A}$ не эквивалентны.

Можно показать, что все неприводимые конечномерные представления бинарной группы реализуются смешанными спинтензорами $\Phi_{A_1 \dots A_{2j}\, \dot B_1 \dots \dot B_{2j'}}$, симметричными по всем индексам A и по всем индексам $\dot B$. Обычно они обозначаются символами (j, j').

Введём четыре двухрядные матрицы $\langle A|\sigma_k|\dot B\rangle$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Можно проверить, что матрицы σ_k обладают следующими свойствами:

$$\langle A|\sigma_k|\dot B\rangle\langle A|\sigma_l|\dot B\rangle = 2g_{kl}\,; \quad \langle A|\sigma_k|\dot B\rangle\langle C|\sigma_l|\dot B\rangle = -\langle C|\sigma_l|\dot B\rangle\langle A|\sigma_k|\dot B\rangle \tag{1.5}$$

$$\langle A|\sigma_l|\dot B\rangle\langle C|\sigma_l|\dot D\rangle = 2\,\epsilon_{AC}\,\epsilon_{\dot B\dot D} \tag{1.6}$$

$$g_{ll}\,\sigma_k \sigma_l - g_{kk}\,\sigma_l \sigma_k = 2g_{kl} \tag{1.7}$$

$$\langle A|\sigma_k|\dot B\rangle = \left(\langle B|\sigma_k|\dot A\rangle\right)^*; \quad \epsilon\,\sigma_k\,\epsilon = -g_{kk}\overset{*}{\sigma}_k \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} e_{lkmn}\langle A|\sigma_l|\dot B\rangle\langle C|\sigma_k|\dot D\rangle\langle E|\sigma_m|\dot F\rangle\langle G|\sigma_n|\dot H\rangle = \\ = \tfrac{4}{3} i\,\{\epsilon_{AE}\epsilon_{CG}\epsilon_{\dot F\dot H}\epsilon_{\dot B\dot D} + \epsilon_{AG}\epsilon_{CE}\epsilon_{\dot F\dot H}\epsilon_{\dot B\dot D} + \\ + \epsilon_{AG}\epsilon_{CE}\epsilon_{\dot B\dot F}\epsilon_{\dot D\dot H} - \epsilon_{AC}\epsilon_{EG}\epsilon_{\dot B\dot F}\epsilon_{\dot D\dot H} - \\ - \epsilon_{AE}\epsilon_{CG}\epsilon_{\dot D\dot F}\epsilon_{\dot B\dot H} - \epsilon_{AC}\epsilon_{E\dot G}\epsilon_{B\dot H}\epsilon_{\dot D\dot F}\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Из (1.5) - (1.9) следуют формулы для шпуров матриц σ_k :

$$g_{kk}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_k\sigma_l = 2g_{kl} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} g_{ll}\,g_{nn}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_k\sigma_l\sigma_m\sigma_n = \\ = 2\,\{g_{kl}g_{mn} + g_{kn}g_{lm} - g_{km}g_{ln} + i\,e_{klmn}\} \end{aligned} \tag{1.11}$$

В формулах (1.5) по повторяющимся индексам A и $\dot{B}$ подразумевается "спинорное" суммирование по правилу (1.3), а в формулах (1.7) и (1.8) – обычное матричное умножение.

Рассмотрим смешанный спинтензор $\Phi_{A\dot{B}}$. Ему можно сопоставить 4–вектор

$$X_k = \frac{1}{2}\Phi_{A\dot{B}} \langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle \qquad (1.12)$$

При этом X_k – действителен, если и только если $\Phi_{A\dot{B}}$ –эрмитов: $\Phi_{A\dot{B}} = \overset{*}{\Phi}_{A\dot{B}} \equiv (\Phi_{B\dot{A}})^*$. Обратно, каждому действительному 4–вектору X_k можно сопоставить эрмитов спинтензор:

$$\Phi_{A\dot{B}} = X_k \langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle \qquad (1.13)$$

В частности, производной ∂_k соответствует спинтензор

$$\partial_{A\dot{B}} = \partial_k \langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle \qquad (1.14)$$

со следующими свойствами:

$$\partial_{A\dot{B}} = (\partial_{B\dot{A}})^* \qquad (1.15)$$

$$\partial_{A\dot{B}}\partial_{A\dot{C}} = \epsilon_{\dot{B}\dot{C}}\Box \ ; \quad \partial_{A\dot{C}}\partial_{B\dot{C}} = \epsilon_{AB}\Box \qquad (1.16)$$

$$\partial_{A\dot{B}}\partial_{A\dot{B}} = 2\Box \qquad (1.17)$$

где $\Box = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$

Из (1.5) находим: $X_k Y_k = \frac{1}{2}\Phi_{A\dot{B}}\Phi_{A\dot{B}}$

Таким образом группу Лоренца можно рассматривать, как представление бинарной группы (1/2, 1/2). Сформулируем общее правило соответствия между спинтензорными и тензорными величинами. Пусть мы имеем неприводимый спинтензор

$\Phi_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j}}$, преобразующийся по представлению (j, j') группы Лоренца

и пусть $(j + j')$ – целое. Тогда этому спинтензору можно сопоставить тензор ранга $2j$:

$$G_{k_1 \cdots k_{2j}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \Phi_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}} \epsilon_{\dot{B}_{2j'+1}\dot{B}_{2j'+2}} \cdots \epsilon_{\dot{B}_{2j-1}\dot{B}_{2j}} \times$$

$$\times \langle A_1|\sigma_{k_1}|\dot{B}_1\rangle \cdots \langle A_{2j}|\sigma_{k_{2j}}|\dot{B}_{2j}\rangle, \text{ если } j > j' \qquad (1.18)$$

$$G_{k_1 \cdots k_{2j}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \Phi_{A_1 \cdots A_{2j} \dot{B}_1 \cdots \dot{B}_{2j'}} \epsilon_{A_{2j+1} A_{2j+2}} \cdots \epsilon_{A_{2j'-1} A_{2j'}} \times$$

$$\times \langle A_1|\sigma_{k_1}|\dot{B}_1\rangle \ldots \langle A_{2j'}|\sigma_{k_{2j}}|\dot{B}_{2j'}\rangle, \text{ если } j < j' \qquad (1.19)$$

Формулы (1.5) – (1.8), (1.10), (1.11), (1.18) и (1.19) позволяют любое выражение, записанное в спинорной форме представить в тензорной. Так, например, умножая формулу $\bar{\varphi}_{A\dot{B}} = \partial_{A\dot{C}} Z_{\dot{B}\dot{C}}$ на $\langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle$, получим:

$$\bar{\varphi}_k = \frac{1}{2}\bar{\varphi}_{A\dot{B}} \langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle = \frac{1}{2}\partial_{A\dot{C}} Z_{\dot{B}\dot{C}} \langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\partial_r \bar{Z}_{mn} \langle A|\sigma_r|\dot{C}\rangle\langle E|\sigma_m|\dot{B}\rangle\langle E|\sigma_n|\dot{C}\rangle\langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_r \bar{Z}_{mn} \langle A|\sigma_r|\dot{C}\rangle\langle E|\sigma_n|\dot{C}\rangle\langle E|\sigma_m|\dot{B}\rangle\langle A|\sigma_k|\dot{B}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\partial_r \bar{Z}_{mn} \cancel{g_{nn} g_{kk}} \, Sp\, \sigma_r \epsilon \overset{*}{\sigma}_n \epsilon \sigma_m \epsilon \overset{*}{\sigma}_k \epsilon =$$

$$= \frac{1}{2}\partial_r \bar{Z}_{mn} g_{nn} g_{kk} \, Sp\, \sigma_r \sigma_n \sigma_m \sigma_k =$$

$$= (2\partial_m \bar{Z}_{km} + i e_{krmn} \partial_r \bar{Z}_{mn})$$

т.е. приходим к формуле (3.19).

Приложение II. Потенциал Герца

Подставляя (2.13) в (2.2) и учитывая (1.16), получим:

$$\Box\, \partial_{A_2\dot B_2} \cdots \partial_{A_{2\lambda}\dot B_{2\lambda}} Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(x) = 0 \tag{II.1}$$

Покажем, что (II.1) эквивалентно волновому уравнению. Это удобно сделать, перейдя в импульсное представление:

$$Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(x) = \int \tilde Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k)\, e^{ikx} d^4k \tag{II.2}$$

Уравнение (II.1) в импульсном представлении имеет вид:

$$k^2 k_{A_2\dot B_2} k_{A_3\dot B_3} \cdots k_{A_{2\lambda}\dot B_{2\lambda}} \tilde Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = 0 \tag{II.3}$$

Его решение есть

$$\tilde Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}} = \delta(k^2) Z^{(1)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) + \tilde Z^{(2)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) \tag{II.4}$$

где спинтензор $\tilde Z^{(2)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k)$ подчинён условиям

$$k_{A_2\dot B_2} \cdots k_{A_{2\lambda}\dot B_{2\lambda}} \tilde Z^{(2)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}} = 0 \tag{II.5}$$

Умножая (II.3) на $k_{A_2\dot B}$ и учитывая, что

$$k_{A_2\dot B_2} k_{A_2\dot B} = \epsilon_{\dot B_2\dot B}\, k^2 \tag{II.6}$$

получим

$$k^2 k_{A_3\dot B_3} \cdots k_{A_{2\lambda}\dot B_{2\lambda}} \tilde Z^{(2)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = 0$$

откуда

$$\tilde Z^{(2)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = \delta(k^2) Z^{(2)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) + \tilde Z^{(3)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}} \tag{II.7}$$

где $\tilde Z^{(3)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}$ удовлетворяет условиям

$$k_{A_3\dot B_3} k_{A_4\dot B_4} \cdots k_{A_{2\lambda}\dot B_{2\lambda}} \tilde Z^{(3)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = 0$$

Продолжая этот процесс, мы придём к спинтензору который представляется в виде

$$\tilde Z^{(2\lambda-1)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = \delta(k^2) Z^{(2\lambda-1)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) + \tilde Z^{(2\lambda)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) \tag{II.8}$$

причём $\tilde Z^{(2\lambda)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k)$ удовлетворяет условию

$$k_{A\dot B_{2\lambda}} \tilde Z^{(2\lambda)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}} = 0$$

или в виду (II.5) условию

$$k^2 \tilde Z^{(2\lambda)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = 0$$

откуда

$$\tilde Z^{(2\lambda)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = \delta(k^2) Z^{(2\lambda)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}$$

Собирая теперь выражения (2.3), (2.6) и т.д. в одно, получим

$$\tilde Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = \delta(k^2) Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) \tag{II.9}$$

где $Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) = Z^{(1)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) + Z^{(2)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k) + \ldots + Z^{(2\lambda)}_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(k)$

Подставляя (II.9) в (II.2) убеждаемся, что

$$\Box\, Z_{\dot B_1\cdots\dot B_{2\lambda}}(x) = 0 \tag{II.10}$$

Литература

/1/. Tokuoka . Progress of theoretical physics, vol 37, N.3 (1967), 603.

/2/. S. Weinberg, Phys. Rev., 134, B882, (1964).

/3/. G. Rumer, Zeitschrift für Physik, 171, 123-128, (1963).

/4/. De Witt, Лекции летней школы теоретической физики. Университет. Гренобль. Dynamical Theory Group and Fields.

Ответственный за выпуск М.Пальчик
Подписано к печати 23.УП-1968 г.
Усл. 1,3 печ.л., тираж 200 экз.
Заказ № 231, бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. нв.