

Д.36

4

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 185

Г.Е.Деревянкин

**Влияние ускоряющего промежутка
на движение частиц в ускорителях
с неизменным равновесным радиусом**

Новосибирск
1968

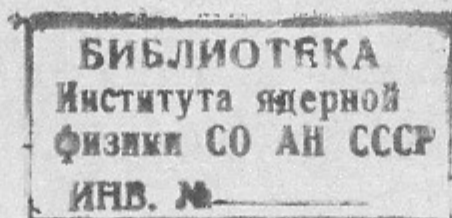
Г.Е.Деревянкин

ВЛИЯНИЕ УСКОРЯЮЩЕГО ПРОМЕЖУТКА НА ДВИЖЕНИЕ
ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ С НЕИЗМЕННЫМ РАВНОВЕСНЫМ
РАДИУСОМ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются радиальные колебания частиц, возникаю-
щие из-за дискретного характера набора энергии в ускорителе
с неизменным равновесным радиусом. Область ускоряющего элек-
трического поля предполагается малой, по сравнению с длиной
орбит частиц.

Показано, что при определенных условиях эти колебания мо-
гут существенно уменьшить величину рабочей области ускорителя.



1. В в е д е н и е

В ускорителе с неизменным радиусом равновесной орбиты магнитное поле на орбите должно расти синхронно с набором энергии частицей. Практически, упомянутый синхронизм выполняется только в среднем. Действительно, т.к. магнитное поле на орбите в процессе ускорения растет непрерывно, а набор энергии частицей происходит в одном или нескольких ускоряющих промежутках, занимающих малую часть от полной длины орбиты; то упомянутый выше синхронизм периодически, со временем обращения частицы по орбите, нарушается. Это приводит к дополнительным радиальным колебаниям частицы, приводящим к искажению идеальной равновесной орбиты. Механизм возникновения этих колебаний можно объяснить следующим образом. Для простоты предположим, что ускоряющий промежуток представляет собой узкую щель, тогда при прохождении этого промежутка частица приобретает некоторое приращение продольного импульса ΔP , но магнитное поле на орбите за это время не успевает заметно измениться, в силу этого мгновенный равновесный радиус частицы R изменится на величину

$$\Delta R = \frac{R}{1-n} \frac{\Delta P}{P}; \quad (1)$$

Здесь P - импульс частицы, n - показатель спада магнитного поля.

В то же время координата частицы не может измениться точно на эту величину. Вследствие этого частица начнет совершать колебания вокруг орбиты радиуса $R + \Delta R$ с некоторым

новым начальным отклонением. Полное же отклонение частицы от идеальной равновесной орбиты радиуса R_0 будет некоторой функцией ΔR и времени t

$$R - R_0 = X(t) = \Delta R + f(\Delta R; t)$$

даже, если частица до ускоряющего промежутка двигалась точно по равновесной орбите радиуса R_0 .

Следует заметить, что эти колебания не являются частным случаем хорошо изученных радиально-фазовых колебаний, имеющих место в ускорителях с "автофазировкой". Действительно, из приведенного качественного рассуждения видно, что частоты рассматриваемых колебаний будут порядка частоты обращения частицы или даже выше, т.е. существенно выше частот радиально-фазовых колебаний. Это обстоятельство дает возможность / 2 / рассматривать эти два вида колебаний независимо.

Г.И.Димов /1/ рассматривал индуцированные радиальные колебания, но им рассмотрен случай не реализующийся на практике, когда ускоряющее электрическое поле распределено по орбите почти равномерно, и в линейном приближении по $l/R_0 \ll 1$. Здесь l - длина прямолинейного промежутка. Вполне понятно, что он получил лишь малую добавку к радиальным бетатронным колебаниям.

2. Перейдем теперь к количественному анализу индуцированных радиальных колебаний. Мы будем рассматривать слабофокусирующую магнитную систему, состоящую из N секторов, имеющих азимутальный размер $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{N}$ радиан каждый, и N прямолинейных промежутков длиной l . Вообще без принципиальных усложнений можно рассмотреть и жесткофокусирующую

щую магнитную систему. Однако, такие ускорители отличаются разнообразной структурой элемента периодичности магнитной системы, поэтому подобные расчеты для жесткофокусирующих ускорителей, по-видимому, следует проводить для каждого частного случая. Тем не менее, настоящий анализ позволит получить некоторые результаты, которые можно использовать и для жесткофокусирующих машин.

Предположим, что ускоряющие элементы (резонатор, бетатронный зазор) расположены в прямолинейных промежутках равномерно по длине идеальной равновесной орбиты, которая в данном случае представляет собой дуги окружности радиуса R_0 по ϑ_0 радиан, сопряженных отрезками прямых линий длиной l . Далее мы будем считать, что ускоряющий элемент достаточно малой длины, так что частица за время, которое она движется в ускоряющей щели мало меняет своё отклонение и угол к идеальной орбите. Заметим, что это несущественное предположение.

Отклонение частицы в K -м секторе (K - порядковый номер проходимого сектора) можно представить в виде /2/

$$R - R_0 = X_K(\vartheta) = A_K \sin \chi \vartheta + B_K \cos \chi \vartheta + \Delta R_K(\vartheta); \quad (2)$$

Здесь ϑ - угол, отсчитываемый от начала каждого сектора,

$$\chi = \sqrt{1-n}$$

В (2) первые два члена описывают колебания около мгновенной орбиты, а последний - соответствует отклонению мгновенной орбиты от идеальной равновесной орбиты радиуса R_0 . При

выходе из K -го сектора частица будет иметь отклонение и угол соответственно

$$\left. \begin{aligned} X_k(\vartheta_0) &= A_k \cdot S + B_k \cdot C + \Delta R_k(\vartheta_0); \\ X'_k(\vartheta_0) &= \chi(A_k \cdot C - B_k \cdot S) + \Delta R'_k(\vartheta_0); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по ϑ

$$\left. \begin{aligned} S &\equiv \sin \chi \vartheta_0; \\ C &\equiv \cos \chi \vartheta_0; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Мы будем считать, что в прямолинейном промежутке нет полей, кроме ускоряющего, и, следовательно, частица будет двигаться по прямой до входа в следующий $K+1$ сектор. Тогда условие непрерывности решения (3)

$$\left. \begin{aligned} X_k(\vartheta_0 + \frac{\ell}{R_0}) &= X_{k+1}(0); \\ X'_k(\vartheta_0 + \frac{\ell}{R_0}) &= X'_{k+1}(0); \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

приведет к уравнениям вида

$$\left. \begin{aligned} (S + 2PC)A_k + (C - 2PS)B_k + \Delta R'_k(\vartheta_0) \cdot \frac{\ell}{R_0} &= \\ &= B_{k+1} + \Delta R_{k+1}(0) - \Delta R_k(\vartheta_0); \\ \chi(C \cdot A_k - S \cdot B_k) + \Delta R'_k(\vartheta_0) &= \chi A_{k+1} + \Delta R'_{k+1}(0); \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь $\rho = \frac{c\lambda}{2R_0}$

Допустим, что в ускорителе имеется q ускоряющих элементов, так что $N = q \cdot m_0$, где m_0 - число секторов между двумя соседними ускоряющими элементами. Мы будем считать, что за время одного оборота частицы магнитное поле на орбите изменяется так мало, что изменение мгновенного радиуса мало по сравнению с R_0 (но соизмеримо с амплитудой колебаний), что практически выполняется. Тогда с достаточной точностью можно считать, что $\Delta R_k(\vartheta)$ изменяется линейно. Далее для определенности будем считать, что частица входит в ускоряющий промежуток в тот момент, когда её импульс и величина магнитного поля точно соответствуют радиусу R_0 . В этом случае $\Delta R_k(\vartheta)$ можно представить в виде

$$\Delta R_i(\vartheta) = \left[1 - \frac{i(\vartheta_0 + \frac{c}{R_0}) + \vartheta - \vartheta_0}{m_0(\vartheta_0 + \frac{c}{R_0})} \right] \Delta R_i \quad (7)$$

Здесь ΔR_i - согласно (1); $i = 1, 2, \dots, m_0$.

Подставив (7) в (6) получим

$$\left. \begin{aligned} (S+2PC)A_k + (C-2PS)B_k &= B_{k+1} + \mathcal{D}_k i \\ C \cdot A_k - S \cdot B_k &= A_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\mathcal{D}_k = \begin{cases} \Delta R & \text{при } k = 1 + \tau m_0 \\ 0 & \text{при } k \neq 1 + \tau m_0 \end{cases}$
 $\tau = 0, 1, 2, \dots$

Уравнения (8) есть система двух разностных уравнений первого порядка. Решение этой системы будем искать в виде

$$H_k = A_k^{\circ} + \tilde{A}_k; \quad B_k = B_k^{\circ} + \tilde{B}_k;$$

где A_k° и B_k° - общее решение соответствующей однородной системы ($\delta_k \equiv 0$), а \tilde{A}_k и \tilde{B}_k - частное решение неоднородной системы (8), тогда для отклонения $X_k(\vartheta)$ имеем

$$X_k(\vartheta) = [A_k^{\circ} \cdot \sin \chi \vartheta + B_k^{\circ} \cdot \cos \chi \vartheta] + \tilde{A}_k \cdot \sin \chi \vartheta + \tilde{B}_k \cdot (\cos \chi \vartheta + \Delta R_k(\vartheta));$$

(9)

Квадратную скобку в (9), естественно, интерпретировать как свободные колебания вокруг новой искаженной равновесной орбиты

$\tilde{X}_k(\vartheta)$, которая, следовательно, имеет вид

$$\tilde{X}_k(\vartheta) = \tilde{A}_k \cdot \sin \chi \vartheta + \tilde{B}_k \cdot \cos \chi \vartheta + \Delta R_k(\vartheta);$$

(10)

Свободные колебания достаточно полно рассмотрены в литературе, например /2/, и мы их потому рассматривать не будем. Так как (10) есть уравнение искаженной равновесной орбиты, то она должна быть замкнутой, что соответствует требованию периодичности

$$\tilde{A}_{k+m_0} = \tilde{A}_k; \quad \tilde{B}_{k+m_0} = \tilde{B}_k;$$

Исключая B_k и B_{k+1} из (8) получим

$$A_{k+2} - 2(c-ps)A_{k+1} + A_k = S \cdot \delta_k;$$

(11)

Периодическое решение уравнения (12) можно искать в виде

$$\tilde{A}_k = a_1 \delta_{k+1} + a_2 \delta_{k+2} + \dots + a_{m_0} \delta_{k+m_0}; \quad (12)$$

подставив это выражение в (12), учитывая периодичность δ_k , приравняв коэффициенты при одинаковых индексах k , получим m_0 - уравнений для определения коэффициентов a_i .

В частности для $m_0 = 4$

$$\tilde{A}_k = S \frac{g \delta_k + \delta_{k+1} + g \delta_{k+2} + (2g^2 - 1) \delta_{k+3}}{4g(1-g^2)}; \quad (13)$$

для $m_0 = 2$

$$\tilde{A}_k = S \frac{\delta_k + g \delta_{k+1}}{2(1-g^2)}; \quad (14)$$

для $m_0 = 1$

$$\tilde{A} = S \cdot \frac{\Delta R}{2(1-g)}; \quad (15)$$

где $g = c - pS$;

Коэффициенты B_k могут быть определены из второго уравнения (8)

$$B_k = \frac{c \cdot H_k - H_{k+1}}{S}; \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что согласно (7, 12, 16) выражение (10) дей-

ствительно является периодической функцией, т.е. (10) действительно представляет искаженную равновесную орбиту, вокруг которой частица будет совершать свободные колебания. Поскольку новая орбита не совпадает с идеальной, то не вся рабочая апертура будет использована. Для определения неиспользуемой рабочей области необходимо вычислить величину

$$\Delta \tilde{X} = \max(\tilde{X}_k) - \min(\tilde{X}_k); \quad (17)$$

3. Мы провели анализ индуцированных радиальных колебаний в ускорителе с прямолинейными промежутками. Для того, чтобы получить колебания для круглой машины, очевидно, достаточно в формулах (2-12, 16) положить $m_0 = 1$; $v_0 = \frac{2\pi}{g}$;

$c = 0$ и $k, i = 1$, это подтверждается и прямыми вычислениями. В результате получим

$$\tilde{A} = \frac{s \cdot \Delta R}{2(1-c)}; \quad \tilde{B} = -\frac{\Delta R}{2}; \quad (18)$$

$$\Delta \tilde{X} = 2 \Delta R \left[\frac{1}{\sqrt{2(1-c)}} \sqrt{1 - \frac{2(1-c)}{g^2 v_0^2}} - \frac{d}{v_0} \right]; \quad (19)$$

$$d = \arccos \frac{\sqrt{2(1-c)}}{g v_0};$$

На рис. 1 приведены искаженные орбиты в относительных единицах для круглой машины с $R = 0,6$ и $g = 1; 2; 4$. Как видно из этих рисунков, искаженная орбита, в среднем, сдвинута

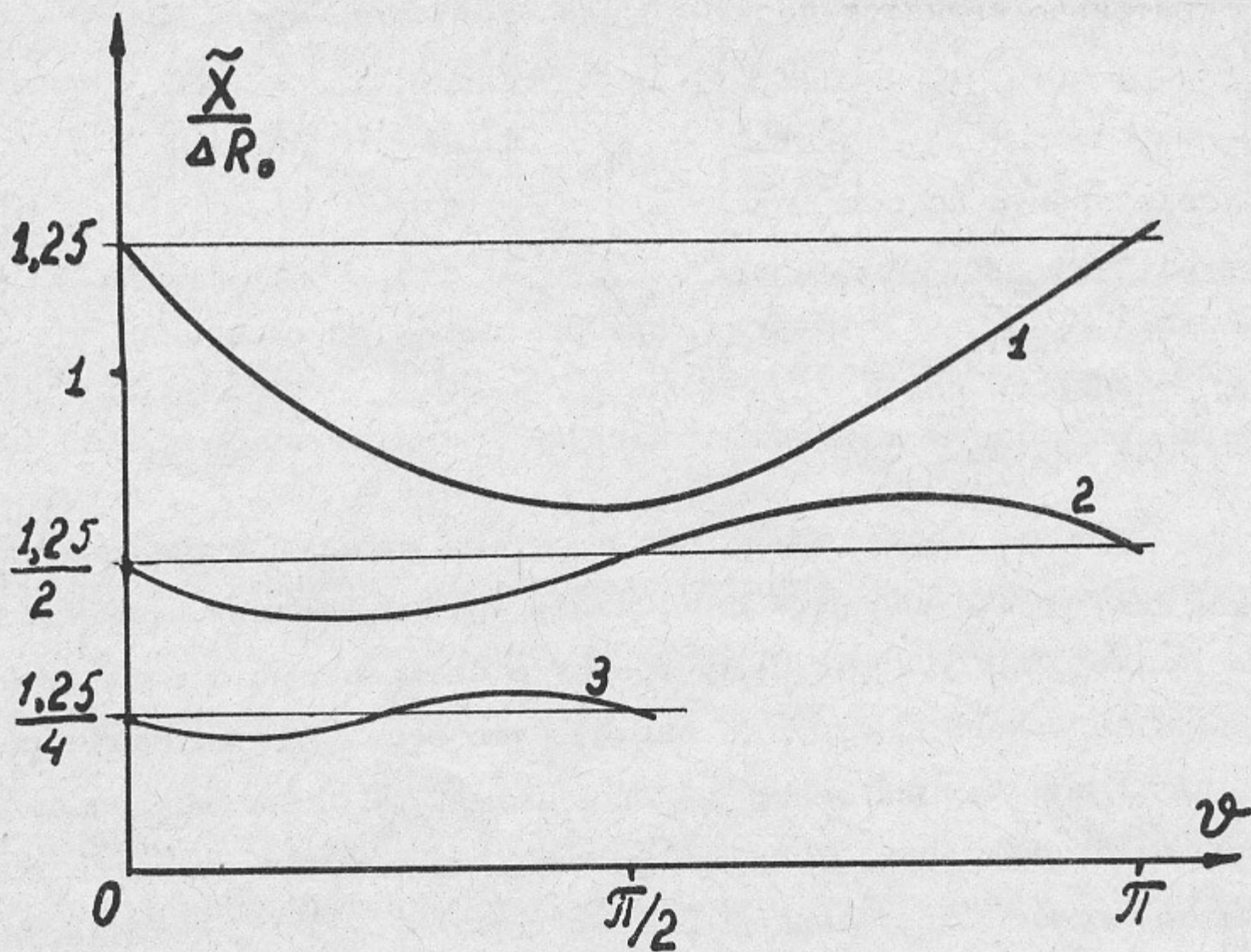


Рис.1. Искажение равновесной орбиты для кругового ускорителя, $\eta = 0,6$.

- 1) один ускоряющий зазор ($q = 1$)
- 2) два ускоряющих зазора ($q = 2$)
- 3) четыре ускоряющих зазора ($q = 4$)

относительно идеальной орбиты на величину $\frac{\Delta R_0}{q}$.

$$\Delta R_0 = R_0 \frac{\Delta p}{p} = R_0 \frac{\Delta E_0 \delta}{(1 + \frac{E_0}{E}) 2T}; \quad (20)$$

Здесь $\Delta E_0 \delta$ - энергия, приобретаемая за один оборот, E_0 - энергия покоя, E - полная энергия, T - кинетическая энергия частицы.

Того же порядка и сдвиг в случае машины с промежутками. Этот сдвиг является следствием предположения, что частица подходит к ускоряющему зазору в синхронизме с величиной магнитного поля. Нетрудно видеть, что если частица будет покидать ускоряющий зазор в синхронизме, то сдвиг искаженной орбиты сменит знак. Если же учесть, что сгусток ускоряемых частиц имеет азимутальный размер порядка ϑ_0 , то становится ясным, что искаженные орбиты частиц всего сгустка будут более или менее равномерно заполнять всю область $R_0 \pm \Delta R_0/q$. Отсюда видно, что потеря рабочей области для всех частиц сгустка, в совокупности, будет порядка величины $2 \frac{\Delta R_0}{q} + \Delta \tilde{\chi}$; Этот результат является, по-видимому, общим для различных типов магнитных систем ускорителей.

В приводимой ниже таблице сведены результаты вычисления потери рабочей области для нескольких случаев. В таблице приведены значения для отношения $\frac{\Delta \tilde{\chi}}{\Delta R_0}$.

Круглая машина	$q=1$	$q=2$	$q=4$	$q=1$	$q=2$	$q=4$	$n = 0,55$ $N = 4$ $\frac{L}{R_0} = 0,8$
$n = 0,4$	1,5	0,2	0,04	1,9	0,4	0,1	

Как видно из этой таблицы и рис.1, искажения равновесной орбиты быстро уменьшаются с ростом числа ускоряющих элементов q .

Что же касается жесткофокусирующих магнитных систем, то можно сказать следующее. Искажение равновесной орбиты пропорционально $\frac{\Delta R_0}{1-n}$, в то же время в жесткофокусирующих системах $n \gg 1$, то ясно, что в этом случае искажения орбиты будут малы. Рассмотренные колебания, как видно из (20), будут существенны только в начале ускорения, а с ростом энергии частицы быстро уменьшаются.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.А.Соколову за внимание и интерес к работе, Р.Г.Бикматову за обсуждение и полезные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Г.И.Димов. Известия ТПИ т.87 (351) 1957 г.
2. М.С.Рабинович. Труды ФИАН т.Х (23) 1958 г.

Ответственный за выпуск Бикматов Р.Г.

Подписано к печати 21 -П-1968г.

Усл. 0,7 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ № 185

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР.