1968 г.

Г.Е.Векштейн

РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ В ПРЯМОМ СТЕЛЛАРАТОРЕ

АННОТАЦИЯ

Рассмотрено равновесие плазмы конечного давления в трехзаходном винтовом магнитном поле и её влияние на интегральные характеристики удержания (удельный объём, вращательное преобразование). Показано, что уже при $\beta_0 \ll 1$ они могут существенно отличаться от вакуумных.

Влияние конечного давления плазмы на конфигурацию магнитного поля в тороидальных системах и её устойчивость приводят к тому, что ловушки становятся непригодными для удержания, когда отношение давления плазмы к давлению магнитного поля ($\beta_0 = 8\pi p / B_0^2$) становится больше некоторого предельного значения, которое, вообще говоря, может быть значительно меньше единицы. Степень этого ограничения не определяется универсальным законом, а зависит от соотношения между различными параметрами системы. Если плазма сосредоточена в приосевой области, далекой от сепаратрисы, и крутизна тора достаточно велика, так что $r/R \gg \mu^2(r)$, где r – радиус плазменного шнура, R – большой радиус тора и μ – параметр прокручивания, то уже при $\beta_0 \ll 1$ плазма выталкивается наружу и равновесие становится невозможным /1/. В обратном предельном случае, когда эффекты тороидальности малы, естественно начать рассмотрение с прямого винтового поля. Такая задача рассматривалась в работе /2/, где было показано, что предельная величина β_0 определяется перестановочной неустойчивостью, связанной с тем, что вакуумная конфигурация не обладает "магнитной ямой" /3/. При $\beta_0 > 0{,}1$ стабилизирующее влияние перекрещенности магнитных силовых линий ("shear") уже не может скомпенсировать уменьшение энергии плазмы при расширении, и возникает неустойчивость.

Ниже мы покажем, что этот результат, использующий приближение вакуумного магнитного поля может оказаться неправильным, т.к. даже при $\beta_0 \ll 1$ диамагнетизм плазмы приводит к образованию "магнитной ямы". Поэтому можно надеяться, что такие неустойчивости не будут ограничивать давление плазмы в реальных установках.

Статическое равновесие плазмы описывается следующими уравнениями

$$\nabla p = \frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{B}] \qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \tag{1}$$

Мы ограничимся только решениями, обладающими винтовой симметрией, когда вся зависимость от координат сводится к зависимости от r и $\xi = \varphi - kz$. Тогда из условий $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ и $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ следует:

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \qquad B_\varphi - krB_z = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

$$j_r = \frac{c}{4\pi r}\frac{\partial J}{\partial\xi} \qquad j_\varphi - krj_z = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial J}{\partial r} \tag{2}$$

где J и Ψ – произвольные функции от r и ξ. Используя второе из уравнений (1), получаем соотношение между J и $\vec{B}$

$$J = B_z + krB_\varphi$$

Из (2) следует, что $\nabla\Psi\cdot\vec{B} = 0$, то-есть уравнение $\Psi(r,\xi) = const$ определяет магнитные поверхности. При равновесии давление на каждой магнитной поверхности постоянно, а токи текут вдоль них. Поэтому P и J являются функциями только от Ψ. После этого система уравнений (1) приводится к одному уравнению для Ψ /2/

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} + \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \frac{1+\rho^2}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{(1+\rho^2)}{k^2}\Big[4\pi\frac{dP}{d\Psi} + \frac{J}{1+\rho^2}\frac{dJ}{d\Psi}\Big] - \frac{2J}{k(1+\rho^2)^2} = 0 \qquad \rho = kr \tag{3}$$

Частные его решения, соответствующие выбору $P = a\Psi$ и $J = const$ рассмотрены в работе /4/. Такие решения соответствуют равновесию с продольным током. Но в стеллараторе полный ток через сечение $z = const$ магнитной поверхности должен отсутствовать /2/

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\Psi,\varphi)} j_z(r,\varphi)\, r\, dr = 0$$

Это означает, что линии тока представляют собой замкнутые линии, обвивающие магнитную поверхность. Следовательно, выбор функций $P(\Psi)$ и $J(\Psi)$ не может быть произвольным, а должен подчиняться некоторым дополнительным условиям.

В пределе $\rho \ll 1$ уравнение (3) значительно упрощается и для трехзаходного поля имеет вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\left(\vartheta+\frac{9}{\rho^2}\right)\psi+\frac{1}{K^2}\left[4\pi\frac{dP}{d\psi}+\frac{1}{2}\frac{d\mathcal{J}^2}{d\psi}\right]-\frac{2\mathcal{J}}{K}=0 \tag{4}$$

При $\rho=0$ $\mathcal{J}=const$ (так как $\vec{j}=0$), и мы получаем обычное вакуумное решение /3/:

$$\psi=\frac{B_0}{2K}\left(\rho^2-\gamma\rho^3\cos 3\xi\right)\quad \mathcal{J}=B_0\quad \gamma\gg 1 \tag{5}$$

При наличии плазмы возникает продольный ток, величина которого определяется из уравнений (1):

$$j_z=c\left[\frac{dP}{d\psi}+\frac{1}{4\pi}\frac{\mathcal{J}\mathcal{J}'}{1+\rho^2}+\frac{K\rho}{4\pi(1+\rho^2)}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathcal{J}'\right] \tag{6}$$

Так как $\mathcal{J}\sim B_0$, а $K\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\sim B_0\rho^2$, то при $\rho\ll 1$ третий член в (6) пренебрежимо мал, и $j_z\approx c\left[P'+\frac{1}{8\pi}\frac{d\mathcal{J}^2}{d\psi}\right]$. Продольного тока нет, если $P+\mathcal{J}^2/8\pi=const$. Поскольку вне плазмы $P=0$ и $\mathcal{J}=B_0$, то $P+\mathcal{J}^2/8\pi=B_0^2/8\pi$ (7)

Выберем $\mathcal{J}(\psi)$ в виде: $\mathcal{J}=B_0(1-\beta_0)^{1/2}+\frac{\varepsilon^2}{2}K\psi$.

Тогда из (7)

$$P=\frac{B_0^2}{8\pi}\left[\beta_0-\frac{(1-\beta_0)^{1/2}}{B_0}\varepsilon^2K\psi-\frac{\varepsilon^4K^2}{4B_0^2}\psi^2\right] \tag{8}$$

При заданных $P(\psi)$ и $\mathcal{J}(\psi)$ ищем решение уравнения (4), переходящее в вакуумное (5), когда β_0 и ε стремятся к нулю:

$$\psi=\frac{B_0}{2K}\left\{\frac{4}{\varepsilon^2}(1-\beta_0)^{1/2}\left[I_0(\varepsilon\rho)-1\right]-\frac{48\gamma}{(\varepsilon+3)^3}I_3\left[(\varepsilon+3)\rho\right]\cos 3\xi\right\} \tag{9}$$

Как будет видно из дальнейшего, $\beta_0 \sim 1$ соответствует $\varepsilon \gg 1$
В этом случае

$$\psi = \frac{B_0}{2K}\left\{\frac{4}{\varepsilon^2}(1-\beta_0)^{1/2}\left[I_0(\varepsilon\rho)-1\right] - \frac{48\gamma}{\varepsilon^3} I_3(\varepsilon\rho)\cos 3\xi\right\} \qquad (10)$$

Уравнения (9) и (10) определяют новые магнитные поверхности. Найдем радиус ребра ρ_c новой сепаратрисы $\left(\partial\psi/\partial\rho\big|_{\rho=\rho_c,\ \xi=0} = 0\right)$

$$\frac{4}{\varepsilon}(1-\beta_0)^{1/2} I_0'(\varepsilon\rho_c) = \frac{48\gamma}{\varepsilon^2} I_3'(\varepsilon\rho_c) \qquad (11)$$

Давление плазмы должно монотонно падать от оси и на границе, которой является сепаратриса, $p = 0$ (или, что равносильно, $J = B_0$). Из (8) получаем:

$$B_0(1-\beta_0)^{1/2} + \frac{\varepsilon^2 B_0}{4}\left\{\frac{4}{\varepsilon^2}(1-\beta_0)^{1/2}\left[I_0(\varepsilon\rho_c)-1\right] - \frac{48\gamma}{\varepsilon^3} I_3(\varepsilon\rho_c)\right\} = B_0 \qquad (12)$$

Решая совместно уравнения (12) и (13) находим параметричес - кую зависимость всех величин от $x = \varepsilon\rho_c$

$$(1-\beta_0)^{1/2} = \frac{I_3'(x)}{\Delta(x)} \qquad \varepsilon = \frac{12\gamma\,\Delta(x)}{I_0'(x)} \qquad \rho_c = x/\varepsilon$$

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} I_0(x) & I_3(x) \\ I_0'(x) & I_3'(x) \end{vmatrix} \qquad (13)$$

При $x = 0$ $\beta_0 = \varepsilon = 0,$ $\rho_c = \dfrac{2}{3\gamma}$, что соответ - ствует вакуумному решению. С ростом x β_0 монотонно стремится к единице, ε экспоненциально растет и сепаратриса сжимается к оси системы. Профили давления плазмы для раз - личных значений β_0 приведены на рис.1.

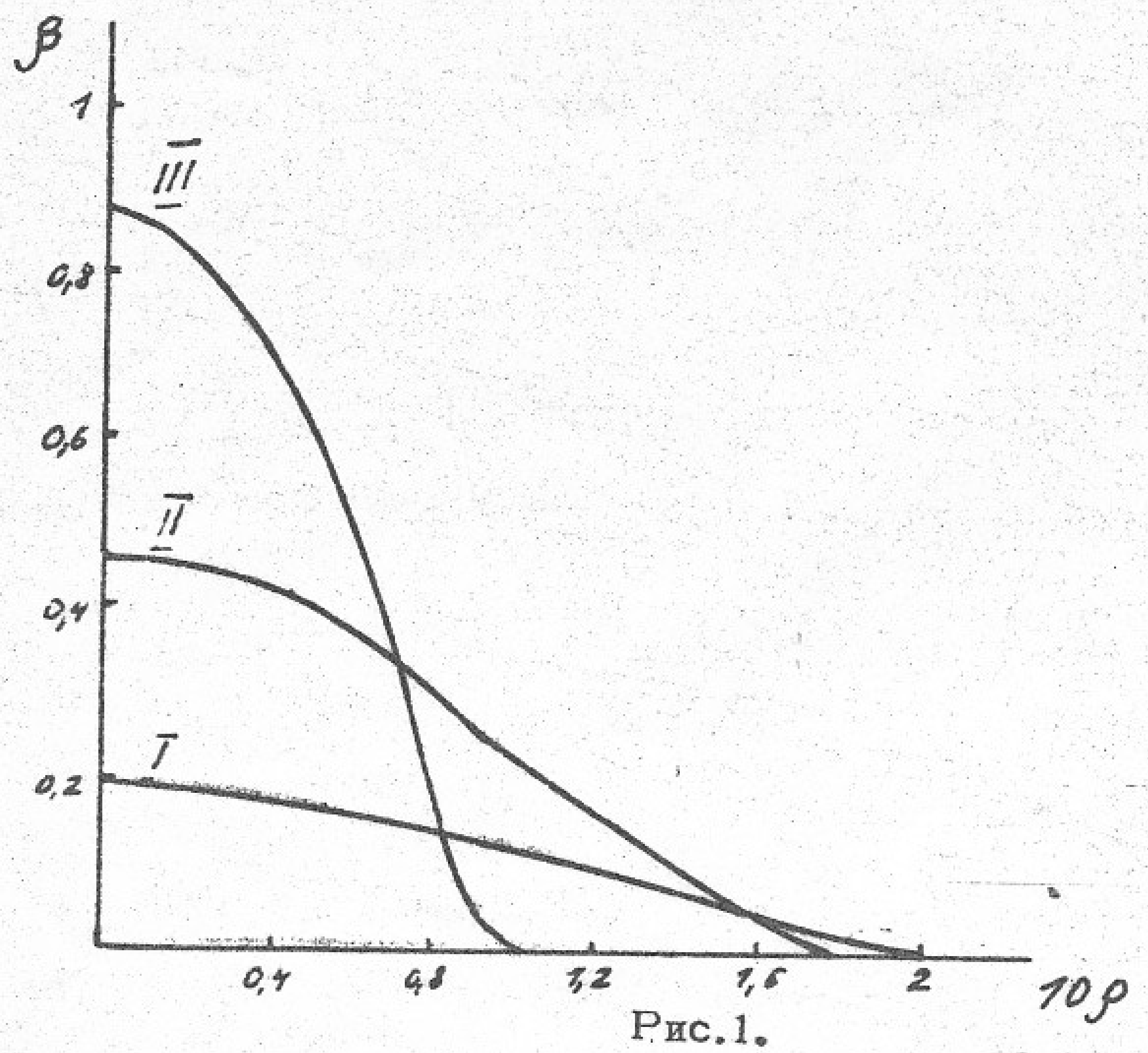

Рис.1.

I. $\gamma = 3$; $\beta_0 \approx 0,2$; $\rho_c \approx 0,2$;

II. $\gamma = 3$; $\beta_0 \approx 0,47$; $\rho_c \approx 0,18$;

III. $\gamma = 3$; $\beta_0 \approx 0,88$; $\rho_c \approx 0,1$.

Важными, с точки зрения устойчивости, характеристиками магнитного удержания плазмы являются удельный объём (U) и средний угол прокручивания (ι) силовых линий магнитного поля на данной магнитной поверхности. Поэтому интересно проследить, как меняются эти величины в зависимости от давления плазмы. Удельный объём магнитной поверхности $U = dV/d\Psi$ является пределом интеграла $\int \frac{dl}{|B|}$ для силовых линий, образующих данную поверхность. Так как магнитная ось и ребро сепаратрисы являются винтовыми силовыми линиями, то поле вдоль них остается постоянным (из-за симметрии), и их удельный объчём $u^{(0)}$ и $u^{(c)}$ вычисляется особенно просто /5/. Из (2) выражаем B_z через J и ψ : $B_z = \frac{J + k\rho\, \partial\psi/\partial\rho}{1+\rho^2}$.

Но на оси u на ребре сепаратрисы $\partial\psi/\partial\rho = 0$, поэтому

$$B_z^{(0)} = J^{(0)} = B_0(1-\beta_0)^{1/2} \qquad B_z^{(c)} = \frac{J^{(c)}}{1+\rho_c^2} \approx \frac{B_0}{1+\rho_c^2} \tag{14}$$

$u = \int \frac{dl}{|B|} = \int \frac{dz}{B_z}$, следовательно $u^{(0)} = \frac{L}{B_0(1-\beta_0)^{1/2}}$

$u^{(c)} = \frac{L(1+\rho_c)^2}{B_0}$, где $L = 2\pi/k$ – период поля вдоль оси z . Найдем $\beta_0^{кр}$, при котором эти величины сравниваются:

$$\beta_0^{кр} \approx 2\rho_c^2 \ll 1$$

При этом поверхности еще мало отличаются от вакуумных, для которых $\rho_c \approx 2/3\gamma$. Отсюда $\beta_0^{кр} \approx 8/9\gamma^2$

При дальнейшем увеличении β_0 образуется "магнитная яма". Если $\beta_0 \gg \beta_0^{кр}$, то для всех поверхностей $u \approx L/J(\psi)$

Средний угол прокручивания $i = 2\pi\chi'(\varphi)$ в случае, когда винтовое поле содержит только одну гармонику, может быть вычислен методом, изложенным в обзоре /5/. При $\varepsilon \gg 1$ для $\chi'(\varphi)$ получаем следующее выражение:

$$\chi'(\varphi) = 1 - \frac{\pi}{2}\frac{B_0}{J(\psi)} \cdot \frac{1}{\int\limits_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{f^2(\rho) - [\psi - F(\rho)]^2}}} \tag{15}$$

где $F(\rho) = \frac{4}{\varepsilon^2}(1-\beta_0)^{1/2}[I_0(\varepsilon\rho) - 1]$, $f(\rho) = \frac{4\gamma}{\varepsilon^3} I_3(\varepsilon\rho)$

а ρ_{min} и ρ_{max} – нули разности под корнем.

Для вакуумного поля весь "shear" сосредоточен в области сепаратрисы, которая сильно разрушается при учёте конечной тороидальности. Вычисления по формуле (15) показывают, что начиная с $\beta_0 \approx$ 0,5 становится заметным более равномерное распределение "shear" между осью и сепаратрисой (см. рис.2).

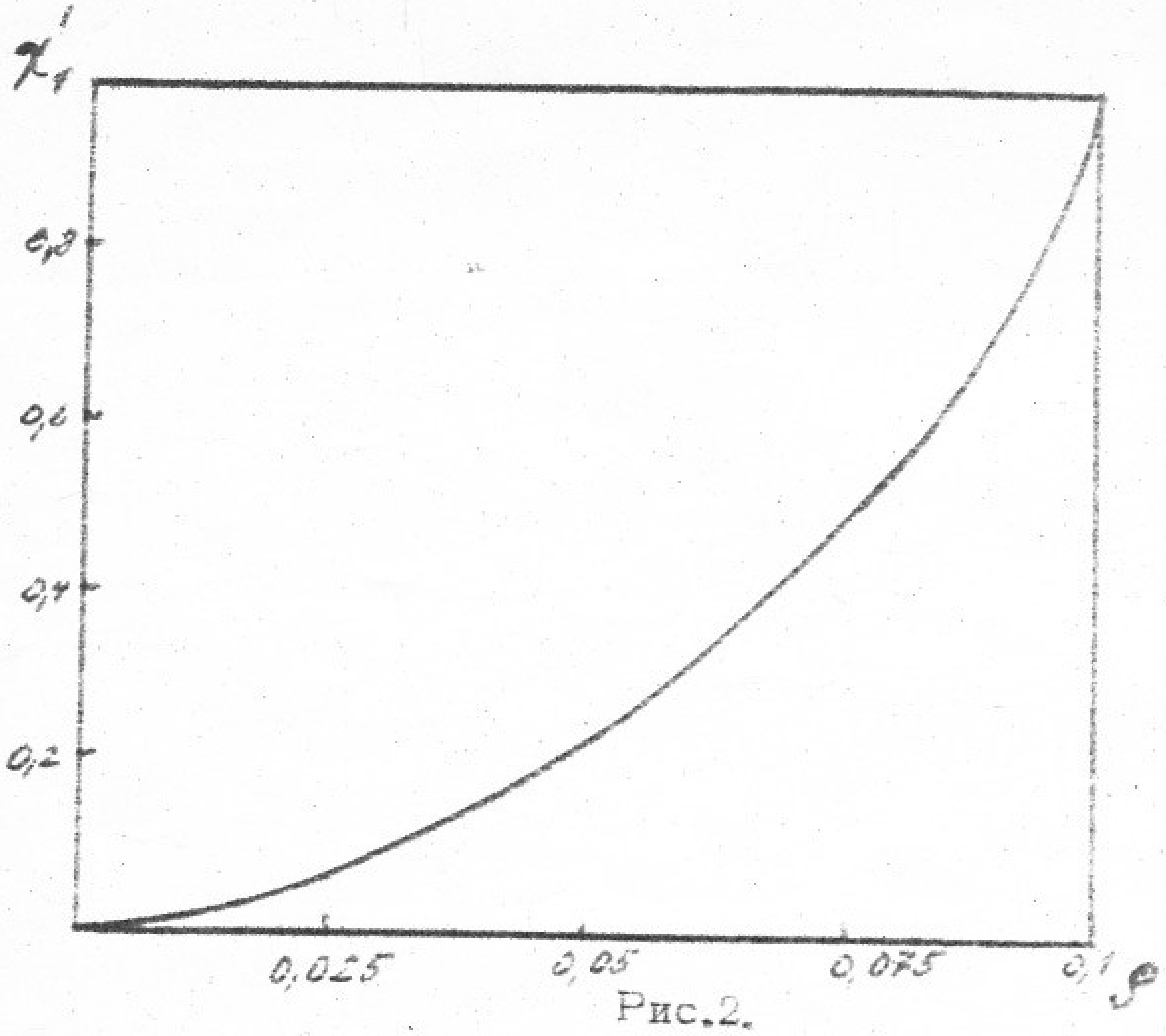

Рис.2.

Параметр прокручивания при $\beta_0 \approx$ 0,88. (γ = 3).

Таким образом, присутствие плазмы увеличивает эффективный "shear", если новые поверхности по каким-либо причинам не разрушаются значительно сильнее вакуумных.

Автор благодарен А.Галееву за многочисленные советы и обсуждение результатов и В.Минаеву за проведение машинных вычислений.

Литература

/ 1 / В.Д.Шафранов. "Атомная энергия" 21 , 47 (1966).

/ 2 / Johnson J.L, Oberman C.R, Kulsrud R.M and Frieman E.A. Phys. Fluids 1, 281(1958)

/ 3 / А.И.Морозов, Л.С.Соловьев. Вопросы теории плазмы. Москва (1963), вып.3, стр.3-92.

/ 4 / Б.Б.Кадомцев. ЖЭТФ 37 , 1352 (1959).

/ 5 / А.С.Соловьев, В.Д.Шафранов. Вопросы теории плазмы. Москва (1967), вып.5, стр.3-208.