

препринт

М.М.Карлинер, В.Е.Шапиро, И.А.Шехтман

**Неустойчивость стенок резонаторов под  
действием пондеромоторных сил  
электромагнитного поля**



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

М.М.Карлинер, В.Е.Шапиро, И.А.Шехтман

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТЕНОК РЕЗОНАТОРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

г.Новосибирск  
1965



Рассмотрены механические автоколебания стенок резонаторов, а также скачки напряжения при перестройке резонатора, возникающие благодаря пондеромоторным силам электромагнитного поля, действующим внутри резонатора. Получены условия устойчивости. Приведен пример расчёта порога неустойчивости.

## I. ВВЕДЕНИЕ

При испытаниях ускоряющего резонатора установки для экспериментов на встречных электрон-позитронных пучках ВЭПП-2 Института ядерной физики (Новосибирск) наблюдались самопроизвольная глубокая амплитудная модуляция на частоте около 40гц и скачки напряжения при перестройке. Изучение этих явлений позволило дать им следующее объяснение. Наличие больших плотностей электромагнитной энергии в резонаторе приводит к тому, что на его внутренние поверхности действуют заметные силы, вызывающие их деформацию. Деформация стенок изменяет резонансную частоту резонатора, а, следовательно, увеличивает или уменьшает напряжение на резонаторе, от которого в свою очередь зависят пондеромоторные силы.

Таким образом, пондеромоторные силы, действующие на поверхности резонатора, могут иметь характер упругих или антиупругих сил. Если коэффициент жесткости антиупругой пондеромоторной силы превышает коэффициент жесткости стенок резонатора, то стенки резонатора становятся неустойчивыми. Это проявляется в том, что при изменении настройки резонатора или частоты питающего генератора происходят скачки напряжения в резонаторе. Неустойчивость такого типа является статической.

Упругие пондеромоторные силы также могут привести к неустойчивости, но колебательного типа. Это становится ясным, если учесть запаздывание пондеромоторных сил. Дело в том, что после деформации стенок напряжение в резонаторе устанавливается не мгновенно, а в течение времени, определяемого добротностью резонатора. Поэтому упругие пондеромоторные силы являются запаздывающими. Как известно, действие запаздывающих упругих сил в механической колебательной системе (которая в данном случае образована стенками резонатора) может вызвать автоколебания /I/ - вибрацию стенок. Хотя вибрации по амплитуде невелики, но они модулируют напряжение благодаря периодическому изменению резонансной частоты резонатора. Глубина амплитудной модуляции может быть значительной - вплоть до 80 + 90%, что в большинстве случаев весьма нежелательно.

Упругий или антиупругий характер пондеромоторных сил зависит от



того, в каком соотношении находятся резонансная частота резонатора и частота генератора, т.е. от настройки. На одном из склонов резонансной кривой резонатора пондеромоторные силы являются упругими, а на другом — антиупругими.

Поэтому в одном и том же резонаторе могут иметь место неустойчивости обоих типов.

На рис. I схематически изображена полученная экспериментально зависимость напряжения на резонаторе от частоты питающего генератора при постоянной мощности возбуждения.

На этом рисунке показаны скачки напряжения и область автоколебаний. Точка резонанса является всегда устойчивой, но при большом напряжении на резонаторе область устойчивости оказывается узкой, и при малых уходах частоты резонатор теряет устойчивость.

Механические колебания подобного типа наблюдались также ранее другими авторами [7, 8<sup>X</sup>]. Следует отметить, что указанные неустойчивости в принципе должны появиться в любом резонаторе при условии, что возможно создать в нем достаточно большую плотность электромагнитной энергии.

В настоящей работе получены условия устойчивости стенок резонатора.

## 2. УРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРЕ

Будем рассматривать резонатор как механическую систему, обладающую набором резонансных частот. Каждой резонансной частоте  $\Omega_\nu$  соответствует определенный вид (мода) колебаний, описываемый функцией

$$\xi_\nu = q_\nu f_\nu(\bar{z}), \quad (1)$$

где  $\xi_\nu$  — отклонение точки поверхности резонатора от положения равновесия,  $\bar{z}$  — радиус-вектор этой точки,  $q_\nu = q_\nu(t)$  — временной множитель,

<sup>X</sup> А.А. Наумов и В.С. Панасюк наблюдали механические автоколебания в резонаторе циклотрона в 1949 г.

определяющий амплитуду и фазу колебания. Величины  $q_\nu$  могут быть приняты в качестве нормальных координат, описывающих состояние резонатора как механической колебательной системы. Любая деформация резонатора может быть представлена в виде суммы нормальных видов колебаний

$$\xi = \sum_\nu q_\nu f_\nu(\bar{z}), \quad (2)$$

так как функции  $f_\nu(\bar{z})$  образуют полную ортогональную систему функций.

Для нормальных координат  $q_\nu$  при малых потерях на трение уравнения движения могут быть записаны в форме Лагранжа [2]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\nu} = Q_\nu, \quad (3)$$

где  $L$  — лагранжиан, равный разности кинетической и потенциальной энергий системы

$$L = T - \Pi$$

$\Phi$  — диссипативная функция системы,  $Q_\nu$  — обобщенные силы, действующие на систему.

Благодаря тому, что система описывается нормальными координатами,  $T$ ,  $\Pi$  и  $\Phi$  выражаются суммами следующего вида

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \dot{q}_\nu^2, \quad (4)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_\nu c_\nu q_\nu^2, \quad (5)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_\nu h_\nu \dot{q}_\nu^2, \quad (6)$$

где  $m_\nu$  — коэффициенты инерции,  $c_\nu$  — коэффициенты жесткости,  $h_\nu$  — коэффициенты трения.

Обобщенные силы определяются соотношением

$$Q_\nu = \int_S F_\xi(\bar{z}) f_\nu(\bar{z}) dS, \quad (7)$$

где  $F_\xi(\bar{z})$  — проекция поверхностной плотности внешних сил на направ-



ление смещения точки  $\bar{z}$  поверхности резонатора. Интеграл берется по всей поверхности резонатора. Работа обобщенных сил согласно такому определению равна

$$\Delta W = Q_\nu \cdot q_\nu, \text{ если величина } q_\nu$$

достаточно мала.

Будем предполагать, что резонатор на радиочастоте работает вблизи одной из резонансных частот, причём другие резонансы достаточно удалены от рабочей частоты.

В большинстве случаев (хотя и не всегда) в резонаторе имеется место, где сконцентрировано электрическое поле. Величину поля в резонаторе можно характеризовать напряжением между электродами в месте, где имеется наибольшая напряженность электрического поля. В принципе для дальнейшего это не обязательно, но т.к. в реальных резонаторах чаще всего поле характеризуется напряжением (а не запасом энергии, например,), мы примем именно эту характеристику.

Силы  $Q_\nu$  пропорциональны среднему квадрату напряжения на резонаторе

$$Q_\nu = \frac{1}{2} \alpha_\nu U_m^2, \quad (8)$$

где  $U_m^2$  - квадрат амплитуды напряжения на резонаторе,  $\alpha_\nu$  - силовой коэффициент.

Деформация стенок резонатора вызывает изменение собственной частоты  $f_0$  электромагнитных колебаний в резонаторе. Расстройка  $\lambda = -\frac{2\Delta f_0}{f_0}$  (где  $\Delta f_0$  - изменение резонансной частоты) определяется величиной координат механической системы

$$\lambda = \sum_\nu b_\nu q_\nu, \quad (9)$$

где  $b_\nu$  - коэффициент расстройки.

Подставляя в (3) соотношения (4,5,6), получаем дифференциальные уравнения для нормальных координат

$$m_\nu \ddot{q}_\nu + h_\nu \dot{q}_\nu + c_\nu q_\nu = Q_\nu. \quad (10)$$

Разделив на  $m_\nu$ , запишем эти уравнения в виде

$$\ddot{q}_\nu + 2\delta_\nu \dot{q}_\nu + \Omega_\nu^2 q_\nu = \frac{Q_\nu}{m_\nu}, \quad (11)$$

где 
$$\delta_\nu = \frac{h_\nu}{2m_\nu}, \quad \Omega_\nu = \sqrt{\frac{c_\nu}{m_\nu}}. \quad (12)$$

Для дальнейшего расчёта необходимо найти зависимость сил  $Q_\nu$  от координат  $q_\nu$ . Вблизи собственной частоты резонатор может быть представлен с помощью эквивалентной схемы в виде параллельного резонансного контура, возбуждаемого генератором тока /3/.

Напряжение на контуре определяется уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}, \quad (13)$$

где 
$$\tau = 2RC = \frac{2Q}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$L, C, R$  - параллельно соединенные индуктивность, ёмкость и сопротивление, составляющие резонансный контур,  $Q$  - добротность,  $\omega_0$  - угловая резонансная частота резонатора. В рассматриваемом случае  $R$  - шунтовое сопротивление резонатора.

В последующем сделаны следующие предположения

- а) добротность резонатора (электрическая)  $Q \gg 1$ ;
- б) возбуждается один вид механических колебаний с резонансной частотой  $\Omega_\nu$ ;
- в) период механических колебаний велик по сравнению с временем затухания высокой частоты в контуре, т.е.  $\Omega_\nu \tau \ll 1$ .

Так как  $Q \gg 1$ , для расчёта высокочастотных колебаний можно воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд /4/. Для этого положим

$$u = U e^{j\omega t}, \quad i = I e^{j\omega t},$$

где  $U$  и  $I$  - медленно изменяющиеся комплексные амплитуды напряжения и тока. При подстановке в (13) пренебрегаем вторыми производными этих амплитуд, а также величинами порядка  $\frac{1}{(\omega\tau)^2} \approx \frac{1}{4Q^2} \ll 1$ . Кроме того,  $\frac{dI}{dt} = 0$ , т.к. ток возбуждения не меняется. Тогда получим укороченное уравнение для амплитуды напряжения



$$\tau \frac{dU}{dt} + (1 + jQx)U = I \cdot R, \quad (14)$$

где  $x = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$  — относительная расстройка. Величина расстройки определяется деформацией стенок резонатора. Поэтому из уравнения (14) необходимо выразить амплитуду напряжения  $U$  через расстройку  $x$ . Уравнение (14) является линейным уравнением первого порядка. Удобнее всего решать это уравнение методом малого параметра. Для этого вначале перейдем к безразмерному времени  $t' = \Omega \cdot t$ . Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\Omega \tau \frac{dU}{dt'} + (1 + jQx)U = I \cdot R. \quad (15)$$

Малым параметром в этом уравнении является величина

$$\mu = \Omega \tau \ll 1. \quad (16)$$

Решение уравнения (15) можно представить в виде ряда по степеням  $\mu$ :

$$U = U_0 + \mu U_1 + \mu^2 U_2 + \dots, \quad (17)$$

причем для наших целей можно ограничиться членом с первой степенью  $\mu$ .

Подставляя в (15) и приравнявая члены с одинаковой степенью  $\mu$  в правой части, получим

$$(1 + jQx)U_0 = I \cdot R, \quad (18)$$

$$\frac{dU_1}{dt'} + (1 + jQx)U_1 = 0. \quad (19)$$

Из (18) и (19) находим

$$U_0 = \frac{I \cdot R}{1 + jQx},$$

$$U_1 = -\frac{\frac{dU_0}{dt'}}{1 + jQx}.$$

Подставляя в (17), получаем для  $U$  следующее выражение

$$U = \frac{I \cdot R}{1 + jQx} \left\{ 1 + j\mu \frac{Q \frac{dx}{dt'}}{(1 + jQx)^2} \right\}, \quad (20)$$

а переходя к времени  $t = \frac{t'}{\Omega}$  и заменяя  $\mu = \Omega \tau$ , имеем соотношение

$$U = \frac{I \cdot R}{1 + jQx} \left\{ 1 + j\tau \frac{Q \dot{x}}{(1 + jQx)^2} \right\}, \quad (21)$$

которое описывает изменение комплексной амплитуды при изменении расстройки  $x$ .

Для расчёта обобщенной силы вычислим квадрат модуля комплексной амплитуды  $|U|^2$ . Т.к.  $\mu \ll 1$ , второе слагаемое в фигурных скобках (21) много меньше единицы. Поэтому

$$U_m^2 = |U|^2 = \frac{(I \cdot R)^2}{1 + Q^2 x^2} \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{j\tau Q \dot{x}}{(1 + jQx)^2} \right\} = \frac{(I \cdot R)^2}{1 + Q^2 x^2} \left\{ 1 + \frac{4\tau Q^2 x \dot{x}}{(1 + Q^2 x^2)^2} \right\}. \quad (22)$$

Расстройка  $x$  складывается из двух составляющих: начальной расстройки  $x_0$  и расстройки вследствие механических колебаний  $\lambda$  (при постоянной частоте генератора)

$$x = x_0 + \lambda. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (8) и затем в (11), находим уравнение электро-механических колебаний резонатора:

$$\ddot{q}_v + 2\delta_v \dot{q}_v + \Omega_v^2 q_v = \frac{\alpha_v}{2m_v} \frac{(I \cdot R)^2}{1 + Q^2(x_0 + \lambda)^2} \left\{ 1 + \frac{4\tau Q^2(x_0 + \lambda) \dot{\lambda}}{[1 + Q^2(x_0 + \lambda)^2]^2} \right\} \quad (24)$$

Удобно перейти от  $q_v$  к  $\lambda$ , сделав замену согласно (9) с учётом возбуждения лишь одной моды механических колебаний

$$\lambda = b_v q_v.$$

Производя замену, получим уравнение для  $\lambda$ :

$$\ddot{\lambda} + 2\delta_v \dot{\lambda} + \Omega_v^2 \lambda = \frac{\alpha_v b_v}{2m_v} \frac{(I \cdot R)^2}{1 + Q^2(x_0 + \lambda)^2} \left\{ 1 + \frac{4\tau Q^2(x_0 + \lambda) \dot{\lambda}}{[1 + Q^2(x_0 + \lambda)^2]^2} \right\} \quad (25)$$

Коэффициент

$$\frac{\alpha_v b_v}{m_v} = A_v$$

характеризует связь механической резонансной системы с электрическим резонансным контуром, поэтому мы назовем его электромеханическим коэффициентом связи.

Следует отметить, что силовой коэффициент  $\alpha_v$  и коэффициент рас-



стройки  $\nu$ , связаны между собой простым соотношением. Как известно /5/, отношение запаса энергии в резонаторе без потерь к частоте свободных колебаний в этом резонаторе есть инвариант при адиабатической деформации стенок резонатора. Отсюда следует соотношение

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta W}{W},$$

где  $\frac{\Delta W}{W}$  — относительное изменение запаса энергии в резонаторе при деформации стенок,  $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}$  — относительное изменение частоты при тех же условиях. Расстройка резонатора равна, следовательно,

$$\lambda = -\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_0} = -\frac{2\Delta W}{W}.$$

С другой стороны, изменение энергии в резонаторе равно работе обобщенной силы с обратным знаком

$$\Delta W = -Q_\nu q_\nu,$$

если деформация происходит в направлении действия силы. Подставляя в эту формулу  $Q_\nu$  из (8), получим

$$\Delta W = -\frac{1}{2} a_\nu U_m^2 q_\nu.$$

Подставляя  $\Delta W$  в выражение для расстройки и учитывая, что

$$\frac{U_m^2}{W} = \frac{2\omega_0 R}{Q}, \text{ найдем, что}$$

$$\nu_\nu = a_\nu \frac{2\omega_0 R}{Q}. \quad (26)$$

Подставляя в  $A_\nu$ , получим

$$A_\nu = \frac{a_\nu \nu_\nu}{m_\nu} = \frac{2a_\nu^2 \omega_0 R}{m_\nu Q} = \frac{\nu_\nu^2 Q}{2m_\nu \omega_0 R}. \quad (27)$$

Согласно (27)  $A_\nu$  является неотрицательной величиной.

### 3. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Уравнение (25) описывает свободные колебания стенок резонатора около точки равновесия. Требуется решить вопрос об устойчивости такого движения. Для исследования устойчивости согласно Ляпунову /6/ уравнение (25) следует линеаризовать в предположении малости колебаний.

Для линеаризации положим, что

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_\sim, \quad (28)$$

где  $\lambda_0$  — начальная расстройка под действием пондеромоторных сил в положении равновесия,  $\lambda_\sim$  — малое отклонение от положения равновесия. Подставляя (28) в (25) и пренебрегая членами порядка  $\lambda_\sim^2$  и  $\lambda_\sim \ddot{\lambda}_\sim$ , получим линеаризованное уравнение:

$$\ddot{\lambda}_\sim + 2\delta_\nu \dot{\lambda}_\sim + \Omega_\nu^2 \lambda_\sim = \frac{A_\nu (IR)^2}{1+Q^2(x_0+\lambda_0)^2} \left\{ -\frac{Q^2(x_0+\lambda_0)}{1+Q^2(x_0+\lambda_0)^2} \lambda_\sim + \frac{2\tau Q(x_0+\lambda_0)}{[1+Q^2(x_0+\lambda_0)^2]^2} \dot{\lambda}_\sim \right\} \quad (29)$$

Условия устойчивости в соответствии с критерием Рауса-Гурвица имеют вид

$$\Omega_\nu^2 + A_\nu \frac{U_m^2 Q^2(x_0+\lambda_0)}{[1+Q^2(x_0+\lambda_0)^2]^2} > 0, \quad (30)$$

$$2\delta_\nu - A_\nu U_m^2 \frac{2\tau Q^2(x_0+\lambda_0)}{[1+Q^2(x_0+\lambda_0)^2]^3} > 0, \quad (31)$$

где  $U_m = IR$  — амплитуда напряжения на резонаторе при настройке в резонанс.

Рассмотрим два различных случая.

Случай I.  $x_0 + \lambda_0 > 0$ , т.е. частота питающего генератора выше собственной частоты резонатора. Т.к.  $A_\nu \geq 0$ , первое условие устойчивости (30) выполняется при любом напряжении на резонаторе. Неравенство (31) даёт условие колебательной устойчивости. Т.к. оно зависит от начальной расстройки  $x_0 + \lambda_0$ , то имеет смысл подставить такое значение этой расстройки, при котором второй член левой части неравенства имеет максимум. Максимум имеет место, как легко видеть, если

$$Q(x_0 + \lambda_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставляя это значение в (31), находим условие устойчивости стенок резонатора по отношению к вибрациям:

$$\delta_\nu > 0,27 A_\nu U_m^2 \tau Q. \quad (32)$$



Если задано напряжение на резонаторе  $U_m$ , то учитывая, что

$$U_{m0} = U_m \sqrt{1 + Q^2(x_0 + \lambda_0)^2}$$

и подставляя  $Q(x_0 + \lambda_0) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ , получим условие устойчивости в виде

$$\delta_\nu > 0,3 A_\nu U_m^2 \tau Q. \quad (38)$$

Используя выражение  $A_\nu$  через  $a_\nu^2$  или  $b_\nu^2$  (27), это условие можно записать также в следующих видах

$$\frac{\Omega_\nu m_\nu}{Q_{\text{мех}}^\nu a_\nu^2} > 2,16 R \cdot Q \cdot U_{m0}^2, \quad (34)$$

$$\frac{\Omega_\nu m_\nu}{Q_{\text{мех}}^\nu b_\nu^2} > 0,135 \frac{z^2 Q}{R} U_{m0}^2, \quad (35)$$

где  $Q_{\text{мех}}^\nu = \frac{\Omega_\nu}{2\delta_\nu}$  — механическая добротность системы для  $\nu$ -го вида колебаний.

Случай 2.  $x_0 + \lambda_0 < 0$  В этом случае условие колебательной устойчивости выполняется при любом  $U_{m0}$ . Неравенство (30) даёт условие статической устойчивости стенок, т.е. устойчивости по отношению к скачкам. Однако, выполнение (30) не является достаточным условием устойчивости. При статической деформации необходимо учитывать вклад других мод колебаний, т.к. движение не носит резонансного характера и ни одна мода не является усиленной за счёт резонанса. Ниже мы получим более общее условие статической устойчивости из условия равновесия системы.

Для определения статической деформации можно воспользоваться уравнениями (II), отбросив в них члены, содержащие производные по времени:

$$\Omega_\nu q_\nu = \frac{Q_\nu}{m_\nu}, \quad (36)$$

откуда

$$q_\nu = \frac{Q_\nu}{m_\nu \Omega_\nu^2}. \quad (37)$$

Найдём расстройку, возникающую вследствие деформации стенок

$$\lambda = \sum_\nu b_\nu q_\nu = \sum_\nu \frac{b_\nu}{m_\nu \Omega_\nu^2} Q_\nu. \quad (38)$$

Подставляя сюда  $Q_\nu$  из (8), получаем

$$\lambda = \frac{1}{2} U_m^2 \sum_\nu \frac{a_\nu b_\nu}{m_\nu} \cdot \frac{1}{\Omega_\nu^2} = \frac{1}{2} U_m^2 \sum_\nu \frac{A_\nu}{\Omega_\nu^2}. \quad (39)$$

Т.к.  $U_m^2$  в свою очередь зависит от  $\lambda$ , то фактическую величину расстройки  $\lambda$  можно найти, решая уравнение, которое получается, если вместо  $U_m^2$  подставить его выражение через напряжение при резонансе

$$\lambda = \frac{U_{m0}^2}{1 + Q^2(x_0 + \lambda)^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_\nu \frac{A_\nu}{\Omega_\nu^2}. \quad (40)$$

Обозначим

$$\sum_\nu \frac{A_\nu}{\Omega_\nu^2} = A_0,$$

причём  $A_0$  имеет смысл статического коэффициента электромеханической связи. Коэффициент  $A_0$  может быть также записан в виде

$$A_0 = \sum_\nu \frac{a_\nu b_\nu}{c_\nu},$$

если вместо  $A_\nu$  и  $\Omega_\nu^2$  подставить их выражения. Уравнение (40) приобретает вид

$$\lambda = \frac{A_0}{2} \frac{U_{m0}^2}{1 + Q^2(x_0 + \lambda)^2}. \quad (41)$$

Свойства этого уравнения удобно выяснить, решая его графически.

На рис.2 приведён чертёж, иллюстрирующий графическое решение уравнения (41). Решения определяются точками пересечения прямой  $z = \lambda$  и кривой  $z = \frac{A_0}{2} \frac{U_{m0}^2}{1 + Q^2(x + \lambda)^2}$ . Кривые 1 и 2 изображают последнюю функцию при различных значениях  $U_{m0}^2$ . Кривая 1 имеет три точки пересечения с прямой  $z = \lambda$ . Нетрудно видеть, что точка В является неустойчивой, а точки А и С — устойчивыми. При перестройке резонатора или изменении частоты генератора кривая 1 смещается, что эквивалентно перемещению прямой  $z = \lambda$  в обратную сторону. В точках С' и А'' происходят скачкообразные изменения  $\lambda$ , а следовательно и напряжения на резо-



наторе.

Кривая 2 пересекается с прямой  $z = \lambda$  в одной точке при любом их расположении, что соответствует устойчивости.

Из описанного способа графического решения следует, что резонатор обладает статической устойчивостью, если наклон кривой

$z = \frac{A_0}{2} \frac{U_{m0}^2}{1 + Q^2(x_0 + \lambda)^2}$  в точке наибольшей крутизны меньше наклона прямой  $z = \lambda$ . Производная правой части (41) по  $\lambda$  равна

$$z' = -A_0 \cdot U_{m0}^2 Q \cdot \frac{Q(x_0 + \lambda)}{[1 + Q^2(x_0 + \lambda)^2]^2} \quad (42)$$

Максимум эта величина имеет при

$$Q(x_0 + \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Подставляя эту величину в (42), получим условие статической устойчивости в виде

$$0,32 A_0 U_{m0}^2 Q < 1. \quad (43)$$

Это условие можно записать также через напряжение на расстроенном резонаторе

$$0,43 A_0 U_m^2 Q < 1. \quad (44)$$

Отметим, что условие (43) совпадает с (30), если в сумме  $A_0 = \sum \frac{A_\nu}{\Omega_\nu^2}$  оставить один член с индексом  $\nu$ . Во многих практических случаях такое упрощение даёт небольшую ошибку.

Если определить из (32) квадрат порогового напряжения для возбуждения колебаний и из (43) квадрат порогового напряжения для появления статической неустойчивости, то отношение этих величин равно

$$\frac{U_{m0 \text{ стат}}^2}{U_{m0 \text{ кол}}^2} = 0,85 \frac{A_\nu}{A_0} \frac{\tau}{\delta_\nu} \quad (45)$$

Если подставить  $\delta_\nu = \frac{\Omega_\nu}{2Q_{\text{мех}}}$  и согласно вышеуказанному положить  $A_0 \approx \frac{A_\nu}{\Omega_\nu^2}$ , то получим

$$\frac{U_{m0 \text{ стат}}^2}{U_{m0 \text{ кол}}^2} = 1,7 \Omega_\nu \tau Q_{\text{мех}}^\nu \quad (46)$$

#### 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА

Для иллюстрации практического значения полученных условий оценим устойчивость резонатора, чертеж которого схематически изображен на рис.3. Резонатор представляет собой тело вращения с осью, указанной на чертеже. Между дисками, образующими ёмкость резонатора, действуют электрические силы.

Резонатор имеет следующие электрические параметры:

$$Q = 4500, f_0 = 25 \text{ Мгц}, R = 90 \text{ ком}, C_0 = 320 \text{ пф},$$

где  $C_0$  - ёмкость между дисками.

В таком резонаторе наблюдались статическая и колебательная неустойчивость дисков, между которыми действуют силы электрического поля. Механические параметры дисков следующие: резонансная частота - 39гц, масса - 50 кг, механическая добротность - около 200. Диски колеблются одинаково при условии, что их резонансные частоты точно равны. Практически частоты несколько отличаются, но это различие невелико. Наличие двух колеблющихся дисков учитывается множителем порядка 2 в правой части неравенства (34) или (35).

Для грубой оценки можно считать вначале, что диски колеблются, перемещаясь параллельно своему начальному положению. Координатой тогда будет отклонение диска от его положения равновесия.

Вычислим величины  $a_\nu$  и  $b_\nu$ . Сила, действующая на диск, равна

$$Q_\nu = \frac{1}{2} \frac{C_0 U_m^2}{d_0},$$

где  $U_m$  - амплитуда напряжения. Из этого соотношения следует, что

$$a_\nu = \frac{C_0}{2d_0}.$$

При изменении расстояния между дисками расстройка будет

$$\lambda = -\frac{2\Delta f_0}{f_0} = \frac{\Delta C_0}{C_0} = \frac{q_\nu}{d_0},$$

откуда

$$b_\nu = \frac{1}{d_0}.$$

Коэффициент электромеханической связи

$$A_\nu = \frac{C_0}{2d_0^2 m},$$



где  $m$  — масса диска. Подставляя в (32), найдём условие колебательной устойчивости

$$\delta_v = \frac{\Omega_v}{2Q_{\text{мех}}} > 0,54 \frac{C_0}{2d_0^2 m} U_{\text{мо}}^2 \tau Q.$$

Из этого соотношения можно найти величину порогового напряжения

$$U_{\text{мо кол}} = \sqrt{\frac{\Omega_v d_0^2 m}{0,54 Q_{\text{мех}} \tau Q C_0} \frac{\text{сек}^{-1} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{сек} \cdot \varphi}} \quad (47)$$

Аналогичное соотношение для колебаний ёмкостного датчика, включенного в резонансный контур, было получено в /8/.

Учитывая, что  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$  и подставляя приведенные выше величины, получим

$$U_{\text{мо кол}} = 18 \text{ кв.}$$

Пользуясь (43), найдём условие статической устойчивости

$$0,32 \frac{C_0}{d_0^2 m \Omega_v^2} U_{\text{мо}}^2 Q < 1$$

Отсюда пороговое напряжение для статической неустойчивости будет равно

$$U_{\text{мо стат}} = \sqrt{\frac{d_0^2 m \Omega_v^2}{0,32 Q C_0} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{сек}^{-2}}{\varphi}} \quad (48)$$

Подставляя величины, получим

$$U_{\text{мо стат}} = 38 \text{ кв}$$

Для более точного расчёта пороговых напряжений следует учесть действительную форму изгиба дисков. В качестве координаты колебания диска удобно выбрать перемещение точки на некотором среднем радиусе, так чтобы по-прежнему

$$\frac{q_v}{d_0} = \frac{\Delta C_0}{C_0}$$

Тогда коэффициенты  $\alpha_v$  и  $\beta_v$  сохраняют свое прежнее значение. Однако, приведенная масса  $m_v$  при таком выборе координаты оказывается больше истинной массы диска.

Теория упругости позволяет вычислить приведенную массу.

При соотношении радиусов  $\frac{b}{a} = 0,23$  расчёт даёт

$$m_v \cong 1,72 m.$$

Это означает, что при неизменной величине  $\Omega_v$  (найденной экспериментально) пороговые напряжения возрастают в  $\sqrt{1,72} = 1,3$  раза, т.е.

$$U_{\text{мо кол}} = 23 \text{ кв}$$

$$U_{\text{мо стат}} = 50 \text{ кв.}$$

Отметим еще, что в резонаторе данной конструкции пороговое напряжение колебательной неустойчивости пропорционально толщине дисков, а пороговое напряжение статической неустойчивости пропорционально толщине дисков в степени 3/2. Поэтому борьба с колебательной неустойчивостью путем увеличения толщины дисков оказывается неэффективной.

Более эффективным является применение специальных цепей обратной связи, влияющих на частоту или амплитуду напряжения на резонаторе.

Формула (47) для порогового напряжения была получена также энергетическим методом сотрудником Института ядерной физики (Новосибирск) А.А.Лившицем.



## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Практически важными факторами, определяющими конструкцию радиочастотных резонаторов с высокой плотностью энергии оказываются не только пробой и перегрев, но и потеря механической устойчивости.

В ускорительной технике, например, создание вакуума в резонаторах и интенсивное охлаждение их позволяют достичь таких значений напряженности электрического и магнитного полей, что потеря устойчивости может наступить раньше остальных ограничений.

Проведенный анализ позволяет выяснить требования к специальным цепям обратной связи и оценить эффективность других мер подавления неустойчивости. Рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей статьи.

Авторы выражают благодарность В.М.Петрову и Н.В.Канашову за помощь в проведении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. К.Ф.Теодорчик. "Автоколебательные системы", ГИТТЛ, М.Л., 1952.
2. Н.Н.Бухгольд. "Основной курс теоретической механики", ч.П, ОНТИ, М.Л., 1937.
3. "Теория линий передачи сверхвысоких частот", ч.1, ред. А.И.Шпунтов, Сов.Радио, 1951.
4. С.И.Евтянов. "Переходные процессы в приёмно-усилительных схемах", Связьиздат, М., 1948.
5. С.Д.Гвоздовер. "Теория электронных приборов сверхвысоких частот", ГИТТЛ, М., 1956.
6. А.М.Ляпунов "Общая задача об устойчивости движения", ГИТТЛ, М.Л., 1950.
7. А.А.Наумов. Диссертация, 1954.
8. В.Б.Брагинский, И.И.Минакова. Вестник МГУ, Физика, астрономия, № 1, 1964, стр. 83.



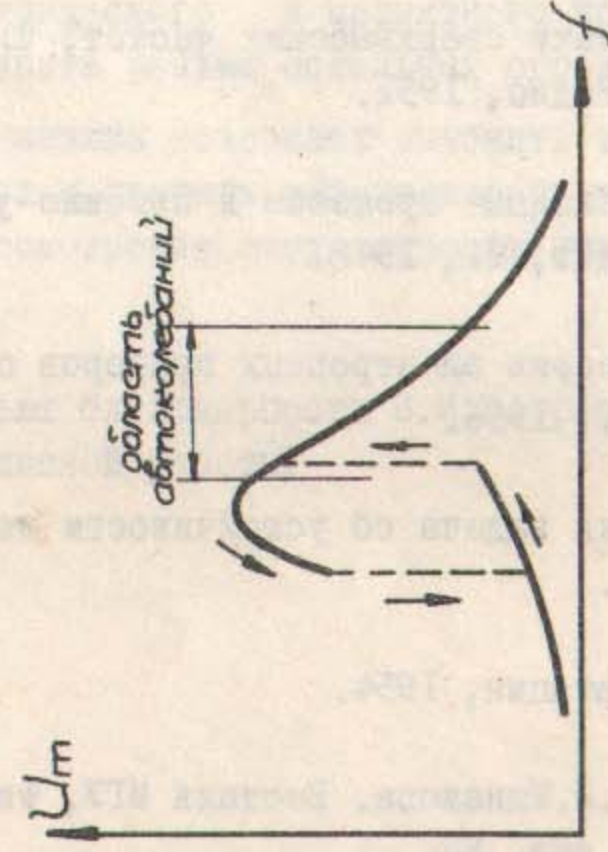


Рис. 1. Зависимость амплитуды напряжения на резонаторе от частоты питающего генератора.

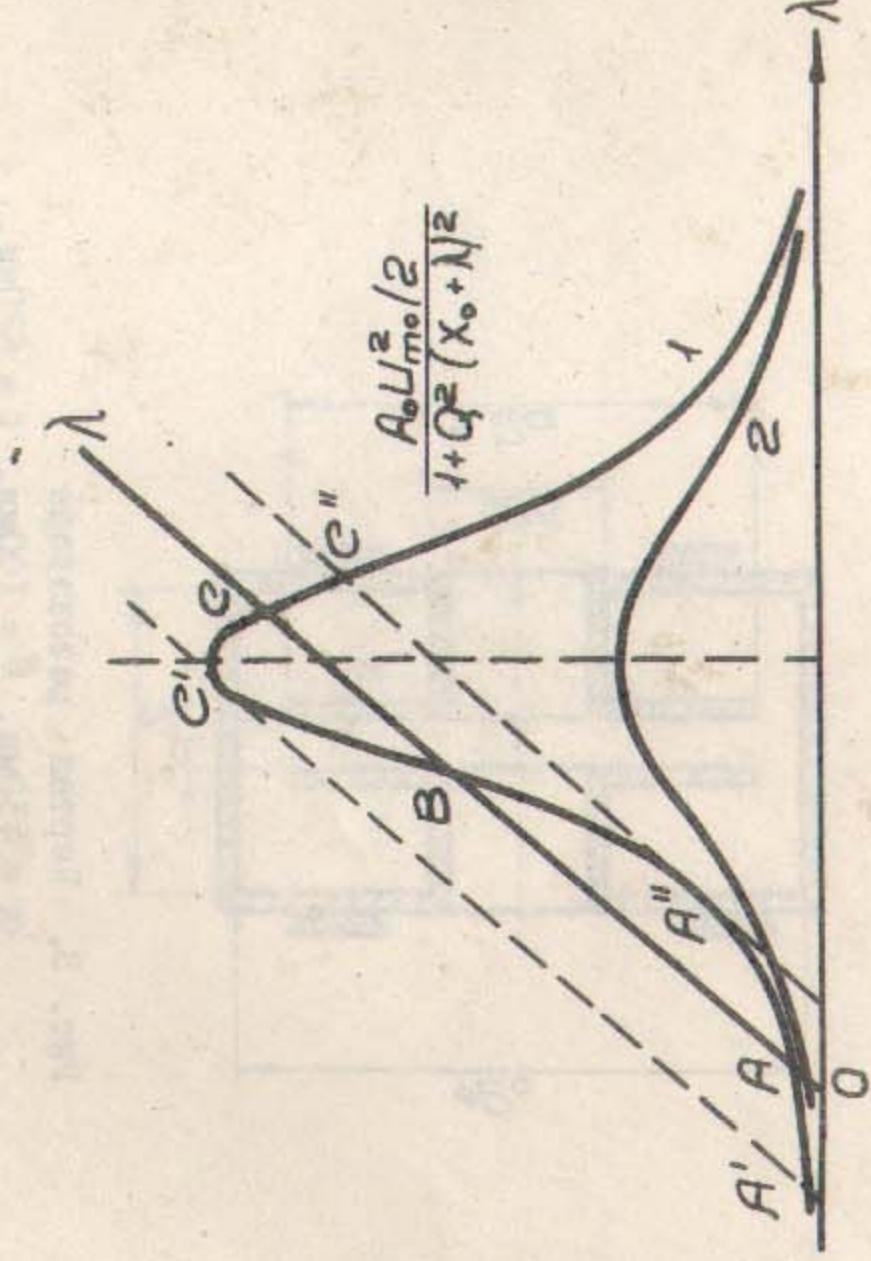


Рис. 2. Графическое решение уравнения (41)



150° 5' Дифракционная решетка (с. 11)

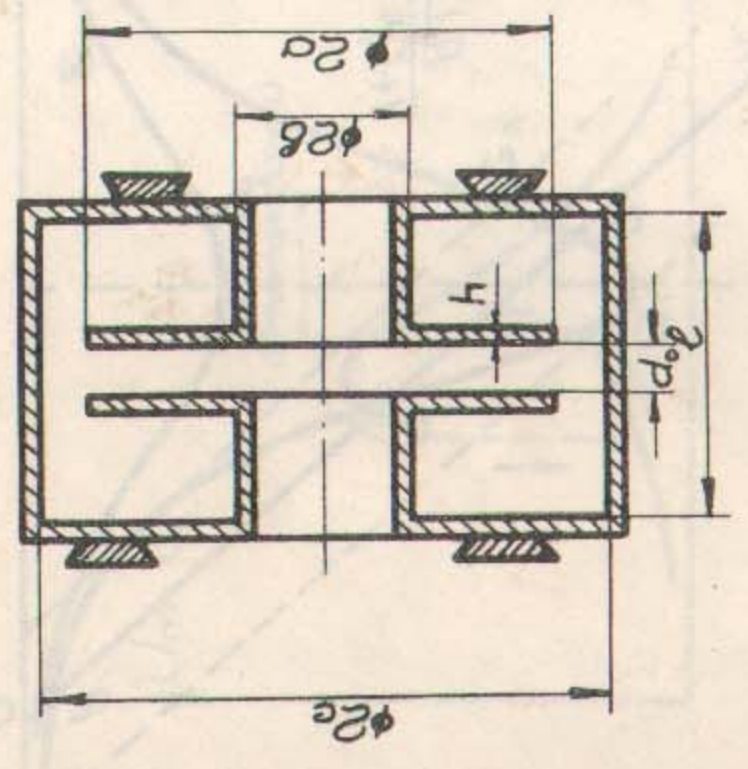
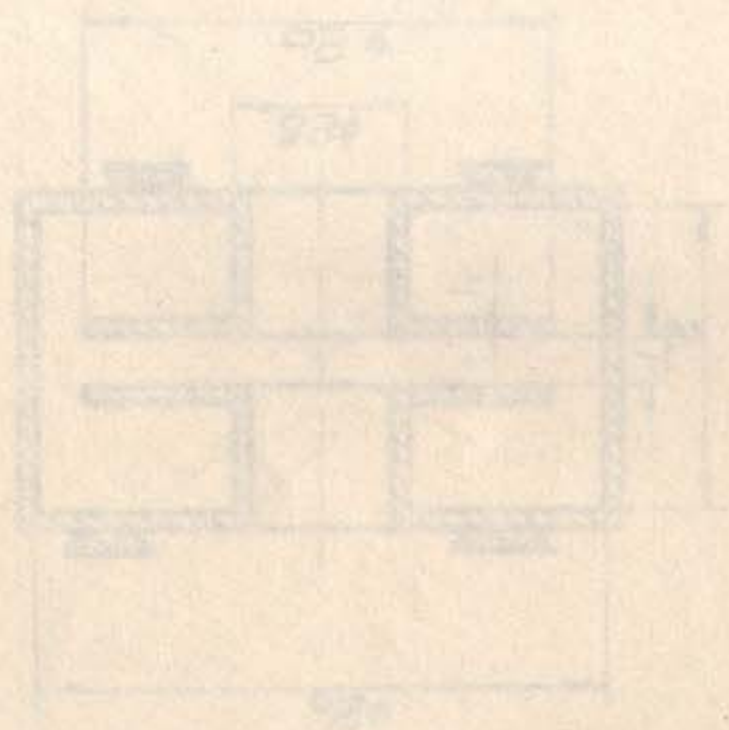


Рис. 3. Чертеж резонатора

$a = 430\text{мм}$ ,  $b = 100\text{мм}$ ,  $c = 620\text{мм}$ ,  
 $c_0 = 15\text{мм}$ ,  $l = 300\text{мм}$ ,  $h = 10\text{мм}$





Институт ядерной физики  
Сибирского отделения Академии наук СССР  
Новосибирск

---

Ответственный за выпуск М.М.Карлинер, тираж экз.

---

Отпечатано на роталпринте в Институте ядерной физики Сибирского отделения Академии наук СССР .