

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г. И. БУДКЕРА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Терехов Иван Сергеевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ В ФИЗИКЕ
ТВЕРДОГО ТЕЛА И ПРОЦЕССОВ ПЕРЕДАЧИ
ИНФОРМАЦИИ ВНЕ РАМОК ТЕОРИИ
ВОЗМУЩЕНИЙ**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор
Мильштейн Александр Ильич

Новосибирск — 2019

Оглавление

| | Стр. |
|---|------------|
| Введение | 4 |
| Глава 1. Плотность индуцированного заряда в графене | 17 |
| 1.1 Экранировка кулоновской примеси в графене | 17 |
| 1.2 Экранировка локализованного потенциала в графене и исследование критических потенциалов | 26 |
| Глава 2. Индуцированный ток и эффект Бома-Ааронова в графене | 38 |
| 2.1 Плотность индуцированного тока в поле бесконечно-тонкого соленоида | 39 |
| 2.2 Индуцированный ток в поле соленоида конечного радиуса | 43 |
| Глава 3. Взаимодействие двух электронов в графене | 51 |
| 3.1 Простая модель | 52 |
| 3.1.1 Стационарная задача | 54 |
| 3.1.2 Нестационарная задача | 63 |
| 3.2 Влияние поверхности Ферми на взаимодействие двух электронов в графене | 71 |
| 3.2.1 Временная эволюция волнового пакета | 75 |
| 3.2.2 Локализованные состояния в стационарной задаче | 81 |
| Глава 4. Эффект разделения спина и заряда в антиферромагнетиках вблизи квантовой критической точки | 85 |
| 4.1 Самосогласованное борновское приближение | 89 |
| 4.2 Ренорм-групповой подход в $3 + 1$ мерном пространстве | 98 |
| Глава 5. Нелинейные каналы связи | 108 |
| 5.1 Метод вычисления функции плотности условной вероятности для канала связи с дисперсией | 109 |

| | | |
|-------|--|------------|
| 5.2 | Нелинейный оптоволоконный канал связи с нулевой дисперсией | 114 |
| 5.2.1 | Функция плотности условной вероятности для одноканальной модели | 118 |
| 5.2.2 | Функция распределения выходящего сигнала $P_{out}[Y]$ | 122 |
| 5.2.3 | Оптимальная функция распределения начального сигнала | 125 |
| 5.2.4 | Взаимная информация | 128 |
| 5.2.5 | Вычисление поправок по параметру $1/\text{SNR}$ | 132 |
| 5.3 | Учет зависимости начального сигнала от времени | 141 |
| 5.3.1 | Модель сигнала и детектора | 141 |
| 5.3.2 | Статистика коэффициентов \tilde{C}_k | 144 |
| 5.3.3 | Сравнение аналитических и численных результатов | 149 |
| 5.3.4 | Энтропии и взаимная информация | 158 |
| | Заключение | 161 |
| | Приложение А. Методы вычисления функции $P[Y X]$ | 166 |
| | А.1 Функция плотности условной вероятности | 166 |
| | А.2 Теория возмущений по параметру γ | 168 |
| | Приложение Б. Бездисперсионный канал связи. | 171 |
| | Б.1 Решение Ψ_{cl} и действие $S[\Psi_{cl}]$ | 171 |
| | Б.2 Вычисление континуального интеграла | 177 |
| | Б.3 Вычисление $P_{out}[Y]$ | 182 |
| | Приложение В. Поправки к корреляторам | 185 |
| | Список литературы | 187 |

Введение

Методы, развитые в квантовой теории поля [1–4], позволяют исследовать различные явления как в физике элементарных частиц, физике твердого тела [5], гидродинамике [6], так и в теории информации, экономике и даже в поведении финансовых рынков [7]. Довольно часто при изучении явлений можно использовать метод теории возмущений по константе взаимодействия. Данный метод применим в случае, когда в системе можно построить некоторую безразмерную константу, описывающую взаимодействие, и величина этой константы меньше единицы. Например, метод теории возмущений хорошо работает в рамках квантовой электродинамики, в которой постоянная тонкой структуры (константа взаимодействия) равна примерно $1/137$. Однако даже в квантовой электродинамике существует множество задач, для решения которых необходимо выйти за рамки теории возмущений, то есть решать задачу точно по константе взаимодействия. К таким задачам относятся многие задачи атомной физики. Задачи, для решения которых необходимо выходить за рамки теории возмущений, возникают в физике довольно часто. В нашей работе мы рассматриваем некоторые актуальные задачи, которые возникли в последнее время в физике твердого тела и теории информации.

Диссертация состоит из пяти частей: первые четыре части посвящены исследованию эффектов в физике твердого тела, пятая – исследованию нелинейных эффектов в линиях связи с шумом. В первой и второй частях диссертации мы исследуем поведение электронного газа в графене в присутствии внешних полей. Причем исследования проводятся точно по внешнему полю. Поведение электронов в двумерных углеродных структурах изучалось и ранее в связи с исследованиями графита и фуллеренов. Повышенный интерес к свойствам электронного газа в графене резко возрос в последнее время после успешного создания графена и исследования его электронных свойств. В первой части диссертации мы исследуем эффекты экранирования поля примеси электронным газом в графене. Эта задача важна как для понимания высокой проводимости графена, так и для понимания электронных свойств графена в целом. Кроме того, графен представляет некоторую модель двумерной теории поля, в которой безмассовые электроны находятся в $2 + 1$ мерном пространстве-вре-

мени, а электромагнитное поле распространяется в $3 + 1$ мерном пространстве-времени. Поэтому экспериментальное и теоретическое изучение электронных свойств графена интересно не только для понимания проводимости графена, но и для понимания теорий поля с двумя пространственными измерениями. Для исследования экранирования внешнего поля примеси электронами графена мы используем метод функции Грина электрона во внешнем поле, который часто применяется для исследования эффектов поляризации вакуума в рамках квантовой электродинамики. Использование метода функции Грина позволило нам впервые вычислить индуцированный заряд в графене точно по полю примеси. Вторая часть посвящена исследованию взаимодействия электронного газа в графене с внешним магнитным полем соленоида малого радиуса. Данные исследования имеют прямое отношение к изучению эффекта Бома-Ааронова. Этот эффект отсутствует в классической механике, но возникает в рамках квантовой механики. Рассмотрение электронного газа графена в поле соленоида малого радиуса позволяет понять модификацию эффекта Бома-Ааронова в случае безмассовых заряженных частиц, локализованных на двумерной поверхности. Для решения этой задачи мы также используем метод функции Грина. Мы рассмотрели два случая: в первом – электроны не могут проникать в область ненулевого магнитного поля, во втором – могут. Нам впервые удалось показать, что в обоих случаях лидирующая асимптотика индуцированного тока зависит только от полного магнитного потока через соленоид и не зависит от распределения магнитного поля внутри соленоида. В третьей части мы изучаем взаимодействие двух электронов в графене, имеющих энергию выше чем энергия Ферми. Мы исследуем зависимость этого взаимодействия от положения энергии Ферми. Данные исследования необходимы для понимания того, как устроено взаимодействие между электронами в графене и какое влияние оказывают электроны ниже поверхности Ферми на взаимодействие между двумя электронами, энергия которых больше энергии Ферми. Для решения подобных задач в квантовой теории поля используют уравнение Дайсона. Мы получили уравнение Дайсона, которое для нашей задачи редуцировалось к уравнению Бете-Солпитера. С учетом отсутствия запаздывания нам впервые удалось найти плотность и ток для полученного уравнения, поэтому его можно трактовать как уравнение на волновую функцию двух электронов. Кроме того, нам впервые удалось найти как влияет положение энергии Ферми на процесс рассеяния

электронов в графене и выяснить причины необычного поведения электронов в процессе электрон-электронного рассеяния в графене. В четвертой части мы переходим к исследованию эффектов, связанных с существованием квантовой критической точки в антиферромагнитном материале. А именно, мы исследуем экранирование спина примеси в материале, имеющем магнитную квантовую критическую точку, и наблюдаем эффект разделения спина и заряда. В этом случае плотность заряда остается локализованной на месте примеси, а плотность намагниченности распределяется по всему образцу и зануляется в точке расположения примеси. Данный эффект в физике твердого тела часто называется эффектом разделения спина и заряда, а намагниченность называют спином. Нам впервые удалось показать, что эффект разделения спина и заряда возникает в трех измерениях. Данная задача интересна, поскольку распределение спина (намагниченности) по образцу может приводить к изменению положения квантовой критической точки. Поэтому положение квантовой критической точки может зависеть от концентрации примесей в образце. В пятой части мы переходим к исследованию пропускной способности нелинейных каналов связи. Эта задача является актуальной, поскольку большинство линий связи основаны на оптоволокне, в котором существуют нелинейные эффекты, связанные с керровской нелинейностью, а количество передаваемой информации по оптоволоконным линиям связи растет на 40% в год. Поэтому необходимо понять предел скорости передачи информации через такие линии связи. Основной характеристикой, которая описывает канал связи, является функция плотности условной вероятности $P[Y|X]$ получить на выходе из канала сигнал Y , если на вход в канал связи подается сигнал X . В рассматриваемых нами случаях данная функция выражается через континуальный интеграл. В нашей работе мы вычисляем точно по константе керровской нелинейности функцию плотности условной вероятности, энтропию выходящего сигнала, условную энтропию, взаимную информацию для нелинейных каналов связи с шумом. Исследования этих величин методами квантовой теории поля позволили нам впервые получить ответы для пропускной способности некоторых каналов связи.

Ниже мы переходим к описанию современного состояния исследований, посвященных электронным свойствам графена, экранировки спина примеси вблизи квантовой критической точки и влиянию нелинейных эффектов на емкость оптоволоконных каналов связи.

Поляризация электронного газа в графене. Мы начнем с исследования электронного газа в графене. Графен – двумерный материал, который состоит из атомов углерода, уложенных в шестиугольную решетку. Изучение графена началось с работы [8], в которой исследовался электронный газ в графите. Графен выступал в качестве строительного блока для построения графита, поскольку графит представляет из себя слои графена, уложенные в стопку так, что атом решетки слоя графена расположен в центре ячейки соседнего слоя. В работе [8] было показано, что в зоне Бриллюэна имеется шесть точек, в которых зависимость энергии электрона от его импульса имеет вид: $\epsilon = v_F |\mathbf{p}|$, где $v_F \approx 10^6$ м/с, что примерно в 300 раз меньше скорости света. Эти точки называются дираковскими точками. Из шести дираковских точек две независимые. Раскладывая гамильтониан электрона вблизи двух независимых дираковских точек, мы получаем два различных гамильтониана:

$$\hat{H}_1 = v_F \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{H}_2 = v_F \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*, \quad (1)$$

где $\mathbf{p} = -i\hbar(\nabla_x, \nabla_y)$ – оператор импульса, \hbar – постоянная Планка, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ – матрицы Паули, описывающие псевдоспин электрона. Псевдоспиновая степень свободы связана с тем, что в элементарной ячейке графена находятся два атома углерода. Для описания электронных свойств графена, в котором энергия Ферми расположена вблизи положения дираковской точки, необходимо ввести два различных набора электронов, которые отвечают двум независимым дираковским точкам [9; 10]. Волновые функции этих электронов удовлетворяют двумерному безмассовому уравнению Дирака:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial t} = \hat{H}_{1,2} \psi_{1,2}. \quad (2)$$

В восьмидесятих годах прошлого века движение электрона в шестиугольной решетке, при наличии внешнего магнитного поля с симметрией решетки, рассматривалось в связи с исследованиями топологических эффектов, таких как эффект Холла, см., например, работы [11; 12], а также ссылки в современных обзорах, связанных с топологическими изоляторами [13–15]. В девяностых годах прошлого века электронные свойства графена исследовались при изучении электронных свойств фуллеренов [9; 10].

Огромный интерес к графену возник после его успешного создания [16] и измерения его электронных свойств [16–22]. В этих экспериментах было показано, что одноэлектронная динамика в графене действительно описывается двумерным уравнением Дирака с нулевой массой. Поскольку электроны имеют ненулевой заряд, в графене реализуется интересный вариант квантовой электродинамики с заряженными частицами, имеющими нулевую массу и локализованными на двумерной поверхности. При этом, поле, создаваемое зарядами, распространяется в трехмерном пространстве. С одной стороны, данная теория проще квантовой электродинамики, поскольку в ней можно пренебречь запаздыванием [9; 10], поэтому взаимодействие между электронами описывается кулоновским потенциалом. С другой стороны, скорость Ферми для электронов в графене примерно в 300 раз меньше скорости света, поэтому эффективная константа взаимодействия “постоянная тонкой структуры” $\alpha = e^2/\hbar v_F \sim 1$, где e – заряд электрона. До Главы 4 мы используем единицы $\hbar = v_F = 1$. Поскольку константа взаимодействия порядка единицы, возникает вариант квантовой электродинамики с сильным взаимодействием. Поэтому исследование электронных свойств графена важно не только с точки зрения теории твердого тела, но и для понимания структуры двумерных теорий с сильной связью, поскольку графен выступает как некоторая “настолярная” модель двумерной квантовой теории поля с сильным взаимодействием. В Главе 1 мы рассматриваем эффекты экранировки примеси в графене, которые важны для понимания транспортных свойств графена. Задача нахождения экранировки примеси в графене аналогична задаче вычисления индуцированного заряда ядра в квантовой электродинамике. Поэтому, при исследовании экранировки примеси мы будем использовать методы, развитые в квантовой электродинамике. В разделе 1.1 мы вычисляем точно по полю функцию Грина электрона в графене в присутствии кулоновского поля. Используя найденную функцию Грина, мы вычисляем индуцированный заряд, что позволяет нам решить эту задачу. Затем мы переходим к исследованию экранировки локализованного потенциала, то есть потенциала, спадающего на больших расстояниях быстрее чем $1/r$. Для этого мы также находим функцию Грина электрона в поле. С ее помощью мы вычисляем точно по потенциалу асимптотику плотности индуцированного заряда на расстояниях много больших, чем размер локализации потенциала. Исследуя эту асимптотику, мы находим критические значения потенциалов, при которых возникают

эффекты, аналогичные эффектам рождения электрон-позитронных пар в сильных полях в квантовой электродинамике.

В Главе 2 мы переходим к изучению эффекта Бома-Ааронова в графене. Эффект Бома-Ааронова, то есть рассеяние заряженной частицы на соленоиде бесконечно малого радиуса, отсутствует в классической механике. В работе [23] было показано, что в рамках квантовой механики рассеяние заряженной частицы тонким соленоидом происходит даже в том случае, когда электрон не попадает в область ненулевого магнитного поля. Этот очень интересный эффект обсуждался во множестве работ, см., например, обзор [24]. Эффект Бома-Ааронова исследовался как в случае нерелятивистских уравнений [23; 25–27], так и в случае релятивистских уравнений [25; 26; 28–30]. Подобный эффект, связанный с топологией пространства, также исследовался и в квантовой теории поля [28–35]. В работах [29; 30] было показано, что гамильтониан для дираковской частицы во внешнем поле бесконечно-тонкого соленоида требует самосопряженного расширения. Это связано с неоднозначностью выбора волновой функции заряженной частицы вблизи соленоида. Расширение задается одним параметром θ . Собственные функции гамильтониана и, как следствие, физически-наблюдаемые величины, такие как сечение рассеяния, индуцированный ток, зависят от параметра расширения θ , который не удавалось определить.

После создания графена появилась возможность исследовать в нем эффект Бома-Ааронова. В графене он исследовался как теоретически, так и экспериментально, см., например, [36–42]. В Главе 2 мы исследуем эффект Бома-Ааронова в графене в подходе, который позволил нам найти значение параметра θ и, тем самым, предсказать физически-наблюдаемые величины. Для этого вычисляется плотность индуцированного тока в поле соленоида малого радиуса для двух разных постановок задачи. В первой постановке электрон не может проникать в область ненулевого магнитного поля, во второй – может. Мы показываем, что результат существенно зависит от постановки задачи. В первом случае индуцированный ток не зависит от распределения магнитного поля внутри соленоида, а зависит только от полного магнитного потока через соленоид. Во втором случае мы вычисляем индуцированный ток на расстояниях много большего радиуса соленоида и показываем, что на таких расстояниях индуцированный ток также не зависит от распределения магнитного поля внутри соленоида. Данная постановка задачи эквивалентна постановке, когда

мы рассматриваем индуцированный ток на некотором расстоянии и устремляем радиус соленоида к нулю. Поскольку в этой постановке индуцированный ток не зависит от распределения магнитного поля внутри соленоида, это означает, что мы нашли значение параметра расширения гамильтониана θ .

Электрон-электронное взаимодействие в графене. В Главе 3 мы исследуем взаимодействие двух электронов в графене. Эти исследования также необходимы для понимания высокой проводимости графена, которая наблюдается в экспериментах [16]. Множество работ посвящено исследованию влияния взаимодействия электронов с примесями и влиянию этого взаимодействия на проводимость графена [43–51], см. также обзоры [52; 53]. Взаимодействие электронов с дырками, а так же с электронами выше и ниже поверхности Ферми, см. [10; 54–61], важно для понимания проводимости. Прогресс в теоретическом исследовании электрон-электронного взаимодействия в графене пока довольно скромный [53; 60]. Это связано со сложностью построения гамильтониана взаимодействующих электронов в графене.

Очевидно, что гамильтониан двух невзаимодействующих электронов в графене является суммой двух гамильтонианов свободных электронов. Задача учета взаимодействия довольно сложна, поскольку для этого необходимо учесть взаимодействие электронов с электронами ниже поверхности Ферми. Учет этого взаимодействия включает в себя возникновение электрон-дырочных возбуждений в промежуточных состояниях, которые являются аналогом возбуждений электрон-позитронных пар в квантовой электродинамике. Подобные эффекты в квантовой электродинамике учитываются в уравнении Швингера-Дайсона [1; 3]. В нерелятивистской квантовой электродинамике эффекты виртуальных электрон-позитронных пар в промежуточных состояниях малы. В графене, как писалось выше, электроны имеют нулевую массу, и, как следствие, для графена “нерелятивистское” приближение неприменимо. Поэтому электрон-дырочные возбуждения в графене могут существенно изменить электрон-электронное взаимодействие.

Хотя электрон-дырочные возбуждения важны, в качестве первого шага можно исключить их из рассмотрения и записать гамильтониан системы двух электронов в графене в следующем виде:

$$\hat{H}_V = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_2 + V(r), \quad (3)$$

где первые два слагаемых в правой части – это гамильтонианы свободных электронов, $V(r) = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ – потенциал электрон-электронного взаимодействия, $\sigma_{1,2}$ – матрицы Паули, отвечающие оператору псевдоспина для первого и второго электрона. Решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (3) исследовались в работе [60]. В работе [60] было показано, что эти решения обладают необычными свойствами. В разделе 3.1 мы подробно исследуем стационарное уравнение Шредингера $\hat{H}_V \psi = E \psi$ и уравнение, зависящее от времени. Показано, что необычные свойства волновой функции ψ отражаются в нетривиальной временной эволюции волнового пакета. В частности, при рассеянии электрона на электроне может возникнуть локализованное долгоживущее состояние двух электронов.

В качестве следующего шага мы учитываем электрон-дырочные возбуждения в промежуточных состояниях, см. раздел 3.2. Для этого мы используем уравнение Бете-Солпитера в лидирующем приближении по потенциалу. В этом приближении нам удалось получить волновое уравнение, описывающее взаимодействие двух электронов при произвольном положении энергии Ферми относительно дираковской точки. Мы показываем, что для решений найденного уравнения существует уравнение непрерывности, для которого мы нашли явный вид плотности и тока, и выяснили их физический смысл. Анализ решений показал, что электрон-дырочные возбуждения действительно существенно меняют картину электрон-электронного взаимодействия в графене. Тем не менее, долгоживущие локализованные состояния двух электронов в графене могут возникнуть в процессе их рассеяния даже при учете поверхности Ферми. Также мы демонстрируем, что при наличии поверхности Ферми два электрона в графене могут образовывать локализованные состояния с определенной энергией.

На этом мы заканчиваем исследование электронов в графене и переходим к исследованию эффекта разделения спина и заряда в магнитных системах с квантовой критической точкой.

Эффект разделения спина и заряда. Квантовые критические явления – довольно бурно развивающаяся область как экспериментальной, так и теоретической физики твердого тела [62]. Наиболее яркое проявление квантового фазового перехода возникает в низкоразмерных системах, таких как купраты и соединения железа с элементами пятой группы таблицы Менделеева. Так-

же квантовые критические явления были обнаружены и в трехмерных системах, таких как TlCuCl_3 . В этом материале была найдена магнитная квантовая критическая точка [63]. При нормальных условиях этот материал находится в магнитно-неупорядоченной фазе, однако при увеличении давления происходит квантовый фазовый переход в неелевскую (антиферромагнитную) фазу.

На критические свойства квантовой системы могут сильно влиять примеси. Например, замена атома меди в соединении TlCuCl_3 на атом магния приводит к возникновению нескомпенсированного спина $1/2$ на месте примеси. Данный нескомпенсированный спин приводит к возникновению намагниченности вблизи примеси и возникновению магнитного упорядочивания на макроскопических масштабах [64]. В магнитно-неупорядоченной фазе наведенная примесью намагниченность спадает экспоненциально на нескольких шагах решетки. Однако вблизи квантовой критической точки эффект влияния примеси может быть усилен. Экспериментальные наблюдения показывают взаимосвязь между намагниченностью, вызванной примесью, и квантовыми критическими явлениями вблизи квантовой критической точки [65–67].

Существует большое количество работ, посвященных исследованию намагниченности, индуцированной примесью, в квазиодномерных и двумерных системах, см. работы [68–73] и ссылки в них. В Главе 4 мы рассматриваем поведение индуцированной примесью намагниченности в трехмерных системах. Мы исследуем примесь со спином S , помещенную в трехмерный антиферромагнетик, который находится вблизи квантовой критической точки. Данная точка разделяет магнитно-упорядоченную и неупорядоченную фазы. Идеологически исследуемый эффект похож на эффект Кондо, см. [74–76], поскольку индуцированное облако спина экранирует спин примеси в квантовой критической точке. Хотя эффекты похожи, имеется большая разница между двумя эффектами, так как в нашем случае нет фермионов проводимости. В Главе 4 мы исследуем плотность наведенного спина и антиферромагнитную намагниченность, используя эффективную теорию поля. Используя метод самосогласованного борновского приближения и метод ренорм-группы, мы показываем, что при приближении к квантовой критической точке со стороны неупорядоченной фазы наведенная плотность спина спадает как $1/r^3$ с логарифмическими поправками, где r – расстояние от примеси до точки наблюдения. Кроме того, полный нелокализо-

ванный индуцированный спин равен спину примеси S . Мы также показали, что антиферромагнитная намагниченность спадает как $1/r$.

Так как облако индуцированного спина (намагниченности) при приближении к квантовой критической точке имеет полный спин S , спин примеси полностью экранирован. Поэтому рассматриваемая задача тесно связана с задачей разделения спина и заряда. Обычно, когда говорят о разделении спина и заряда, подразумевают, что существует два набора частиц: одни являются переносчиками только спина (спионы), другие переносят только заряд (холоны). Это происходит в одномерной Томонага-Латтингеровской жидкости [77; 78]. В более высоких пространственных измерениях неизвестны системы с подобным разделением спина и заряда. Однако эффект разделения спина и заряда присутствует в двумерных моделях, таких как допированные антиферромагнетики [79–82]. Более того, в недавних исследованиях [83] продемонстрирован эффект разделения спина и заряда вблизи магнитной квантовой критической точки. В последней работе эффект разделения спина и заряда понимается в том смысле, что дырка индуцирует спиновое облако, радиус которого увеличивается до бесконечности при приближении системы к квантовой критической точке. Как результат, спин дырки размазывается по всему образцу, а заряд дырки по-прежнему локализован на месте примеси. В Главе 4 мы показываем, что подобный эффект разделения спина и заряда реализуется и в трех измерениях.

На этом заканчивается введение, посвященное исследованию эффектов в физике твердого тела. Далее мы перейдем к теории передачи информации через нелинейные линии связи с шумом.

Математическая теория информации. Пусть есть некоторая информация, которую нам необходимо предать через канал связи. Канал связи состоит из передатчика, линии связи, в которой сигнал распространяется, и приемника. Передатчик передает сигнал, который распространяется по линии связи. В линии связи сигнал каким-то образом изменяется и смешивается с шумом. На выходе из линии связи получившийся сигнал детектируется приемником. Возникает вопрос, какое количество информации можно передать через линию связи без ошибок, или какова пропускная способность канала связи. Пропускную способность канала связи называют емкостью канала. Задача поиска емкости линейного канала связи с шумом была решена Шенноном, см. [84]. В этой

работе было показано, что емкость линейного канала связи имеет следующий вид:

$$C \propto \log \left(1 + \frac{P}{N} \right), \quad (4)$$

где P – мощность сигнала, N – мощность шума в канале. Поэтому при фиксированной мощности шума для увеличения емкости канала необходимо увеличивать мощность сигнала.

Интерес к нелинейным линиям связи вырос в начале двухтысячных годов. Это связано с бурным развитием оптоволоконных коммуникационных систем. Для увеличения емкости данных систем связи увеличивалась как их частотная ширина, так и средняя мощность входных сигналов. Развитие оптоволоконных систем связано с тем, что количество передаваемой информации растет каждый год примерно на 40%. По некоторым оценкам [85], такой рост приведет к тому, что примерно в 2020 емкость современных линий связи достигнет шенноновского предела, что может привести к кризису в передаче информации. Именно поэтому в последнее время быстро растет интерес исследователей к емкости нелинейных каналов связи.

В оптоволоконном канале связи сигнал из передатчика попадает в оптоволокно, по которому распространяется и затухает вследствие потерь. Через некоторые расстояния в линиях связи установлены усилители, которые компенсируют потери в оптоволокне. Кроме компенсации потерь, усилители вносят шум в линию связи. Поэтому сигнал при распространении по такой линии связи помимо того, что искажается из-за керровской нелинейности и дисперсии оптоволокна, еще и нелинейно смешивается с шумом усилителей. Для описания такого канала связи используют нелинейное уравнение Шредингера с аддитивным шумом:

$$\partial_z \psi(t, z) - i \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \psi(t, z) - i \gamma |\psi(t, z)|^2 \psi(t, z) = \eta(t, z), \quad (5)$$

где $\psi(t, z)$ – функция, описывающая распространяющийся сигнал, β_2 – коэффициент второй дисперсии, γ – коэффициент керровской нелинейности, а функция $\eta(t, z)$ описывает шум, вносимый усилителями. Таким образом, вместо системы, в которой сигнал затухает между усилителями, а усилители компенсируют затухание и добавляют шум, в модели (5) сигнал не затухает, а шум распределяется

по всей длине распространения сигнала. Конечно, данная модель проще, чем реальные линии связи, однако она подходит в качестве первого приближения для изучения нелинейных каналов связи, поскольку учитывает нелинейность, дисперсию и шум в канале. Подобные оптоволоконные нелинейные линии связи исследовались как аналитически, так и численно, см. [86–93] и ссылки в них.

Несмотря на то, что модель (5) проще, чем реальные линии связи, емкость модельного канала для произвольных параметров γ , β_2 и мощности шума все еще не найдена. Для понимания влияния нелинейности, модель (5) можно еще упростить, положив коэффициент дисперсии равным нулю. Данная модель называется нелинейным бездисперсионным каналом связи. Бездисперсионные каналы связи рассматривались в следующих работах [94–98]. Данная модель является сильно упрощенной и вряд ли имеет непосредственное отношение к линиям связи. Однако она учитывает эффекты, связанные с нелинейностью, и эффекты нелинейного смешивания сигнала с шумом и позволяет в общих чертах понять поведение емкости при увеличении мощности сигнала. Несмотря на простоту модели нелинейного бездисперсионного канала связи, емкость данного канала связи в общем случае до сих пор не найдена. Нижний предел для емкости данного канала связи, при больших мощностях сигнала, был найден в работе [97]. В работе [98] рассматривалась емкость бездисперсионного канала связи для промежуточных значений мощности сигнала в случае большого отношения мощности сигнала к мощности шума.

Емкость канала является максимумом взаимной информации $I_{P[X]}$ по функции плотности распределения начального сигнала $P[X]$, где X – начальный сигнал. Взаимная информация выражается через разность энтропии H_Y принятого сигнала Y и условной энтропии $H_{Y|X}$. Данные энтропии выражаются через интеграл от функции плотности условной вероятности $P[Y|X]$. Поэтому для нахождения емкости канала связи необходимо развить методы вычисления функции плотности условной вероятности. В разделе 5.1 мы исследуем канал (5). Для этого канала связи мы представляем функцию $P[Y|X]$ в виде интеграла по траекториям. Методы вычисления подобных континуальных интегралов развивались при решении задач квантовой теории поля и квантовой механики [2; 99]. Мы используем эти методы для вычисления функции плотности условной вероятности. В случае, когда нелинейность можно считать малой, мы используем теорию возмущений по параметру нелинейности. Для случая,

когда мощность шума много меньше мощности сигнала, мы развиваем подход, похожий на квазиклассическое приближение в квантовой механике.

В разделах 5.2 и 5.3 мы вычисляем емкость бездисперсионного нелинейного канала связи точно по константе керровской нелинейности. Для этого мы вычисляем континуальный интеграл для функции плотности условной вероятности в приближении большого отношения мощности сигнала к мощности шума. Это позволяет нам вычислить емкость канала в данном приближении.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- Вычисление точно по параметру $Z\alpha$ плотности индуцированного кулоновской примесью заряда в графене. Исследование зависимости эффективного зарядового номера примеси от величины параметра $Z\alpha$.
- Исследование плотности индуцированного заряда в графене в присутствии локализованного потенциала. Исследование поведения плотности индуцированного заряда на больших расстояниях при значениях потенциала, близких к критическому.
- Исследование плотности индуцированного тока в графене в поле соленоида малого радиуса на расстояниях много больших радиуса соленоида. Рассмотрение случаев проникновения и непроникновения электронов в область ненулевого магнитного поля.
- Изучение электрон-электронного взаимодействия в графене при различных положениях энергии Ферми относительно положения дираковской точки.
- Исследование эффекта разделения спина и заряда в трехмерном квантовом антиферромагнетике вблизи квантовой критической точки.
- Развитие методов вычисления функции плотности условной вероятности для нелинейных оптоволоконных каналов связи, описываемых нелинейным уравнением Шредингера с аддитивным шумом.
- Вычисление функции плотности условной вероятности, взаимной информации и емкости для нелинейного бездисперсионного канала связи точно по константе керровской нелинейности.

Глава 1. Плотность индуцированного заряда в графене

1.1 Экранировка кулоновской примеси в графене

Задача исследования экранировки кулоновской примеси в графене подобна задаче нахождения экранировки поля ядра в квантовой электродинамике. Последняя эквивалентна задаче вычисления поляризации вакуума в квантовой электродинамике. Задача вычисления поляризации вакуума вблизи ядра исследовалась как для докритических зарядов ядер, электрон-позитронные пары не рождаются полем ядра, так и для критических и закритических зарядов ядер, в этом случае рождение пар полем ядра становится возможным [100–103]. Задача поиска экранировки примеси в графене (вычисления поляризации вакуума в поле кулоновской примеси) привлекает большое внимание как в связи с необходимостью понимания влияния примесей на транспортные свойства графена, так и для общего понимания теории графена, см. [43–50; 104].

В работах [47–49; 105] было показано, что в лидирующем порядке по параметру $Z\alpha$ при $Z\alpha \ll 1$ индуцированный примесью заряд в графене отрицателен и локализован на примеси:

$$\rho_{ind}(\mathbf{r}) = -\frac{\pi|e|Z\alpha}{2}\delta(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения: $Z|e|$ – заряд примеси, Z – зарядовый номер примеси, $e = -|e|$ – заряд электрона. В работе [47] рассматривалась задача сильной связи, т.е. случай, когда зарядовый номер удовлетворяет условию $Z\alpha \sim 1$. Было показано, что при зарядовых номерах примеси Z таких, что $Z\alpha \geq 1/2$, заряд примеси становится закритическим, то есть должны проявиться процессы, схожие с процессами рождения электрон-позитронный пар в квантовой электродинамике. Кроме того, высказывалось предположение, что для закритических зарядов ядер плотность индуцированного заряда должна спадать как $1/r^2$, тогда как для докритических зарядов примеси ($Z\alpha < 1/2$) индуцированный заряд всегда локализован на примеси. Аналитические результаты были дополнены численными результатами работы [48], в которой получили аналогичные выводы относительно поведения плотности индуцированного заряда. В

работе [49] авторы отметили, что степенное поведение плотности индуцированного заряда может возникнуть и в докритическом режиме из поправок порядка $Z\alpha^2$, связанных с электрон-электронным взаимодействием.

В этой главе мы исследуем аналитически плотность индуцированного заряда в докритическом режиме, т. е. параметр $Z\alpha < 1/2$. Вычисления основаны на методе, предложенном в работе [102]. В [102] плотность индуцированного заряда в сильном кулоновском поле была получена в координатном представлении в трехмерной квантовой электродинамике. Используя метод, развитый в работе [102], мы выражаем плотность индуцированного заряда через точную функцию Грина электрона в кулоновском поле, которую мы вычислили, используя операторный метод, см. [106]. Затем мы вычисляем интеграл от функции Грина по энергии и получаем точное выражение для индуцированного заряда по параметру $Z\alpha$. Используя этот результат, мы находим эффективный заряд примеси Z_{eff} с учетом самосогласования. Здесь Z_{eff} – зарядовый номер примеси с учетом эффектов экранирования. Интересным следствием вычислений стало то, что примесь с зарядовым номером $Z = 1$ не переходит в закритическую область при увеличении параметра α , т.е. $Z_{eff}\alpha$ всегда меньше $1/2$. Это означает, что эффекты экранирования важны, поскольку можно получить, что $Z_{eff} \ll 1$ для достаточно большого параметра α .

Точная функция Грина электрона в кулоновском поле. Как было отмечено выше, масса электрона в графене равна нулю, однако для удобства дальнейших вычислений мы введем массу электрона M , которую положим равной нулю в конце вычислений. Данный трюк позволяет нам избежать трудностей, которые возникают при вычислении индуцированного заряда в безмассовой квантовой теории поля [101]. Параметр M необходим для выполнения процедуры перенормировки. Физический смысл параметра M – расщепление энергий между атомами углерода в различных подрешетках графена, что переводит графен из полуметалла в диэлектрик. В данной главе мы рассматриваем только случай электронейтрального графена, это означает, что валентная зона полностью заполнена, поэтому мы полагаем химический потенциал равным нулю.

Функция Грина электрона в графене удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(\epsilon + \frac{Z\alpha}{r} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) - \sigma_z M \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \epsilon) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.2)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$, $\sigma_{x,y,z}$ – матрицы Паули, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ – оператор импульса. Следуя работе [106], мы представляем решение уравнения (1.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \epsilon) &= -i \left(\epsilon + \frac{Z\alpha}{r} + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) + \sigma_z M \right) \\ &\times \int_0^\infty ds e^{2is\epsilon Z\alpha} \exp \left(is \left[r \Delta_r + \frac{\hat{K}}{r} + r(\epsilon^2 - M^2) \right] \right) \\ &\times \sqrt{\frac{r}{r'}} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi'), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где Δ_r радиальная часть двумерного оператора Лапласа, $\hat{K} = \partial^2 / \partial \phi^2 + (Z\alpha)^2 - iZ\alpha(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Затем мы выражаем дельта-функцию по угловым переменным $\delta(\phi - \phi')$ через проекторы P_λ , которые являются собственными функциями оператора \hat{K} , $\hat{K}P_\lambda = -\lambda^2 P_\lambda$. Разложение имеет следующий вид:

$$\delta(\phi - \phi') = \sum_\lambda P_\lambda(\phi, \phi'), \quad \lambda = \gamma \mp \frac{1}{2}, \quad \gamma = \sqrt{\varkappa^2 - (Z\alpha)^2}, \quad \varkappa = m + 1/2, \quad (1.4)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, а проектор P_λ в случае $\lambda = \gamma - \frac{1}{2}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} P_\lambda(\phi, \phi') &= \frac{1}{4\pi\gamma} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \\ P_{11} &= (\gamma + \varkappa) e^{im(\phi - \phi')} + (\gamma - \varkappa) e^{-i(m+1)(\phi - \phi')}, \\ P_{12} &= -iZ\alpha \left(e^{-i(m+1)\phi} e^{im\phi'} + e^{im\phi} e^{-i(m+1)\phi'} \right), \\ P_{11} &= P_{22}^*, \quad P_{12} = -P_{21}^*. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для собственного значения $\lambda = \gamma + 1/2$ проектор получается из выражения (1.5) заменой $\gamma \rightarrow -\gamma$. После подстановки выражения (1.4) в уравнение (1.3), задача нахождения функции Грина сводится к действию оператора $\exp(-2is [A_1 + k^2 \frac{A_3}{2}])$ на $\sqrt{\frac{r}{r'}} \delta(r - r')$. Здесь $k^2 = M^2 - \epsilon^2$, а операторы A_1 и A_3 определены следующим образом:

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda^2}{r} \right), \quad A_3 = r.$$

Данные операторы вместе с оператором $A_2 = -i(r\partial/\partial r + 1/2)$ образуют $O(2,1)$ алгебру, которая обсуждалась в работе [106] при получении функции Грина трехмерного уравнения Дирака с кулоновским потенциалом. Поэтому мы используем операторные преобразования, найденные в работе [106], и получаем следующее интегральное представление для функции Грина электрона в графене в поле кулоновской примеси:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \epsilon) = - \left(\epsilon + \frac{Z\alpha}{r} + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) + \sigma_z M \right) \times \sum_{\lambda} P_{\lambda}(\phi, \phi') \times \int_0^{\infty} ds \frac{k}{\sin(ks)} e^{2is\epsilon Z\alpha} \exp [ik(r+r') \cot(ks) - i\pi\lambda] J_{2\lambda} \left(\frac{2k\sqrt{rr'}}{\sin(ks)} \right), \quad (1.6)$$

где $J_{\nu}(x)$ – функция Бесселя первого рода.

Индукцированный заряд. Плотность индуцированного заряда можно представить в виде интеграла:

$$\rho_{ind}(\mathbf{r}) = -ieN \int_C \frac{d\epsilon}{2\pi} \text{Tr}\{G(\mathbf{r}, \mathbf{r} | \epsilon)\}, \quad (1.7)$$

где G – функция Грина, вычисленная выше, коэффициент $N = 4$ учитывает спиновое вырождение и вырождение, связанное с существованием двух независимых дираковских точек в зоне Бриллюэна. Контур интегрирования C расположен ниже оси абсцисс в левой полуплоскости и выше оси абсцисс в правой полуплоскости комплексной переменной ϵ , см. рис. 1.1. Учитывая аналитиче-

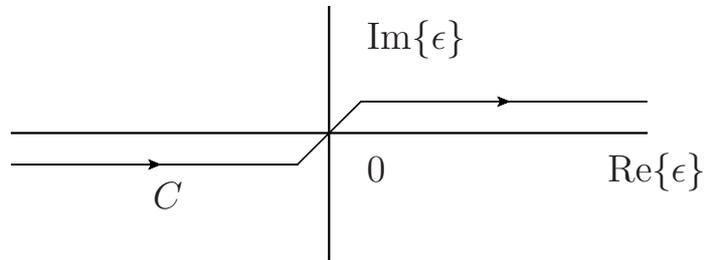


Рисунок 1.1 — Контур интегрирования C в комплексной плоскости параметра ϵ .

ские свойства функции Грина, мы деформируем контур интегрирования C так, что он совпадает с осью ординат. Затем в выражении (1.6) мы деформируем кон-

тур по переменной s так, что он совпадает с мнимой осью переменной s , причем если $\text{Im}\{\epsilon\} > 0$, то переменная s меняется от нуля до $-i\infty$, а если $\text{Im}\{\epsilon\} < 0$, то s меняется от нуля до $i\infty$. После преобразований и очевидной замены переменных мы получаем следующее выражение для плотности индуцированного заряда:

$$\rho_{ind}(r) = -N \frac{e}{\pi^2 r} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\epsilon ds e^{-y \cosh s} \quad (1.8)$$

$$\times \left(2Z\alpha \cos(\mu s) \coth s I_{2\gamma}(y) - \sin(\mu s) \frac{\epsilon}{k} y I'_{2\gamma}(y) \right),$$

где $k = \sqrt{\epsilon^2 + M^2}$, $y = 2rk/\sinh s$, $\mu = 2Z\alpha\epsilon/k$, $I_{\gamma}(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода, $I'_{2\gamma} = dI_{2\gamma}(y)/dy$. Отметим, что $\rho_{ind}(r)$, см. (1.8), является нечетной функцией параметра $Z\alpha$.

Выражение (1.8) плохо определено, поскольку ответ зависит от порядка интегрирования по переменным ϵ и s . Для того, чтобы избавиться от этой неопределенности, мы следуем обычной процедуре квантовой электродинамики. Для этого мы регуляризуем выражение (1.8), вводя конечный верхний предел в интеграле по переменной ϵ и ненулевой нижний предел по переменной s . Затем мы выполняем перенормировку выражения (1.8), накладывая физическое требование нулевого полного индуцированного заряда. Мы можем удовлетворить этому требованию, поскольку мы ввели ненулевую массу M и, как следствие, плотность индуцированного заряда быстро спадает на расстояниях $r \gg 1/M$. После перенормировки результат не зависит от параметров регуляризации и порядка интегрирования. Процедуру перенормировки удобно выполнить в импульсном пространстве. Данная процедура аналогична процедуре перенормировки плотности индуцированного заряда, выполненной в работе [102] в рамках трехмерной квантовой электродинамики. В итоге получаем перенормированную плотность индуцированного заряда в импульсном представлении $\rho_{ind}^R(q/M)$. Лидирующий член асимптотики этой функции при $M \rightarrow 0$ (или $q/M \rightarrow \infty$) равен константе Q_{ind} . Поэтому в координатном пространстве плотность индуцированного заряда имеет следующий вид:

$$\rho_{ind}(\mathbf{r}) = Q_{ind} \delta(\mathbf{r}) + \rho_{distr}, \quad (1.9)$$

где индуцированный заряд Q_{ind} равняется

$$\begin{aligned}
Q_{ind} &= eN \left[\frac{\pi}{8} Z\alpha + \Lambda(Z\alpha) \right] \equiv -|e|A(Z\alpha), \\
\Lambda(Z\alpha) &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \text{Im} \left[\ln \Gamma(\gamma - iZ\alpha) + \frac{1}{2} \ln(\gamma - iZ\alpha) \right. \\
&\quad \left. - (\gamma - iZ\alpha)\psi(\gamma - iZ\alpha) + \frac{iZ\alpha}{2\kappa} - iZ\alpha\kappa\psi'(\kappa) \right]. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма функция Эйлера, $\psi(x) = d \ln \Gamma(x)/dx$. Видно, что индуцированный заряд Q_{ind} отрицателен, поскольку функция $A(Z\alpha)$ положительна, см. ниже. Нелокальная часть плотности ρ_{distr} в выражении (1.9) положительна. На расстояниях $r \ll 1/M$, $\rho_{distr} \propto M^2 \ln(1/Mr)$. Данная плотность исчезает при условии $M \rightarrow 0$, однако полный распределенный заряд равен $-Q_{ind}$. В стандартной трехмерной квантовой электродинамике плотность индуцированного заряда также состоит из локализованной и распределенной частей. Распределенная часть плотности в этом случае ведет себя как $\rho_{distr} \propto -|e|Z\alpha/r^3$ при $r \ll 1/M$ [107]. Интересно, что знаки локализованной и распределенной частей заряда в трехмерной квантовой электродинамике и в выражении (1.9) отличаются. Отличие в знаках возникает в лидирующем члене (линейном по параметру $Z\alpha$), тогда как следующие за ведущими вклады (нелинейная поляризация вакуума) имеют одинаковые знаки. Физическая причина отличия знаков плотности индуцированного заряда в квантовой электродинамике и графене заключается в том, что эффективный заряд e^2 в квантовой электродинамике перенормируется (величина заряда растет на малых расстояниях), тогда как в графене заряд неперенормируется [9].

Разложение функции $A(Z\alpha) = (\pi/2)Z\alpha + 4\Lambda(Z\alpha)$ при малом значении параметра $Z\alpha$ имеет следующий вид:

$$A(Z\alpha) = \frac{\pi}{2}(Z\alpha) + 0.783(Z\alpha)^3 + 1.398(Z\alpha)^5 + \dots \quad (1.11)$$

Первый член разложения в выражении (1.11) является линейным однопетлевым вкладом поляризации вакуума [47; 49]. Коэффициент при $(Z\alpha)^3$ в выражении (1.11) отличается знаком от результата, полученного в работе [49].

Можно заметить, что в выражении (1.11) коэффициенты при $(Z\alpha)^n$ не малы и растут с ростом n . Такое поведение отличается от того, что происходит в

трехмерной квантовой электродинамике, где коэффициенты малы и быстро спадают [101]. Поведение функции $A(Z\alpha)$ показано на рис. 1.2. На рис. 1.2 видно, что при $Z\alpha > 0.3$ точное выражение для функции $A(Z\alpha)$ заметно отличается от ее разложения до лидирующего вклада по параметру $Z\alpha$. При критическом значении $Z\alpha = 1/2$ отличие составляет приблизительно 40%. Вблизи $Z\alpha = 1/2$ разложение функции $A(Z\alpha)$ имеет следующий вид:

$$A(Z\alpha) = 1.12 - 1.19\sqrt{\frac{1}{2} - Z\alpha} - 0.29\left(\frac{1}{2} - Z\alpha\right) + \dots \quad (1.12)$$

Отметим, что такое поведение функции $A(Z\alpha)$ отличается от предсказаний работы [47], полученных с помощью численного расчета. В работе [47] найденное отличие функции $A(Z\alpha)$ от линейного по $Z\alpha$ вклада вблизи точки $Z\alpha = 1/2$, меньше чем предсказывает аналитический результат (1.10) примерно на 13%.

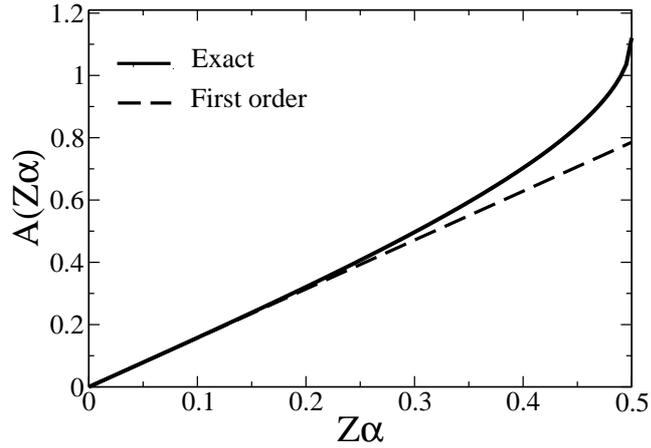


Рисунок 1.2 — Зависимость индуцированного заряда $Q_{ind}/e \equiv A$ от $Z\alpha$. Сплошная линия отвечает точному выражению (1.10), пунктирная линия отвечает однопетлевому приближению $A^{(1)} = \pi(Z\alpha)/2$.

Отметим, что индуцированный заряд $Q_{ind} = -|e|A < 0$ имеет знак, противоположный знаку заряда примеси, что приводит к экранировке заряда примеси. Это означает, что эффективный зарядовый номер примеси $Z_{eff} = Z - A(Z\alpha)$ уменьшается. Видно, что для $Z = 1$ возможна полная экранировка вблизи точки $\alpha \approx 1/2$, где $Z_{eff} = 0$. Однако, как мы покажем ниже, самосогласованный поиск эффективного зарядового номера примеси (эффективного заряда) полностью меняет последнее утверждение.

Самосогласованный подход. Поскольку индуцированный заряд локализован на примеси, мы можем учесть электрон-электронное взаимодействие, используя подход Хартри. В этом подходе мы полагаем, что фоковский вклад (обменное взаимодействие) подавлен параметрически в случае $N \gg 1$ (в нашем случае $N = 4$ – учет вырождения по спину и по количеству дираковских конусов). Для нахождения Z_{eff} в приближении Хартри мы решаем следующее уравнение, учитывающее самосогласование:

$$Z_{eff}\alpha = Z\alpha - \alpha A(Z_{eff}\alpha). \quad (1.13)$$

Если в качестве функции $A(Z\alpha)$ мы подставим в уравнение (1.13) первый член ее разложения $A^{(1)} = \pi(Z\alpha)/2$ по параметру $Z\alpha$, то полученное уравнение эквивалентно уравнению в приближении случайных фаз. Поскольку в уравнении (1.13) стоит точная функция $A(Z\alpha)$, в которой учтены все поправки по параметру $Z\alpha$, то это уравнение точнее, чем приближение случайных фаз. В частности, для случая $Z = 1$ вычисления в рамках приближения случайных фаз и решения нелинейного уравнения (1.13) приводят к качественно различным результатам, см. ниже.

Решение Z_{eff} уравнения (1.13) является функцией Z и α . Функция $Z_{eff}\alpha$ как функция $Z\alpha$ для различных значений затравочного зарядового номера Z приведена на рис. 1.3. Видно, что примесь с зарядовым номером $Z = 1$, наиболее важный случай, остается в докритическом режиме для всех значений параметра α , то есть Z_{eff} всегда меньше $1/2$. Такое поведение связано с существенным вкладом высших порядков по параметру $Z\alpha$ в разложение функции $A(Z\alpha)$. Отметим, что в рамках приближения случайных фаз примесь с $Z = 1$ становится критической при $\alpha \approx 2.25$. Примеси с зарядовыми номерами $Z = 2$ и выше становятся критическими и в нашем приближении. Так, примесь с зарядовым номером $Z = 2$ становится критической в точке $\alpha_c^{Z=2} = 0.568$, а для примеси с $Z = 3$ критическая точка равна $\alpha_c^{Z=3} = 0.266$, см. рис. 1.3. Развитый нами подход не позволяет продвинуться в область критических значений зарядов примесей. Несмотря на это, мы полагаем, что параметр $Z_{eff}\alpha$ продолжит непрерывно расти при увеличении $\alpha \geq \alpha_c$.

Хотя примесь с $Z = 1$ никогда не переходит в критическое состояние, экранировка очень важна, см. вставку на рис. 1.3. Например, для $\alpha = 0.5$, $Z = 1$ находим, что $Z_{eff}/Z = 0.55$. Для примеси с $Z = 2$ эффективный заряд

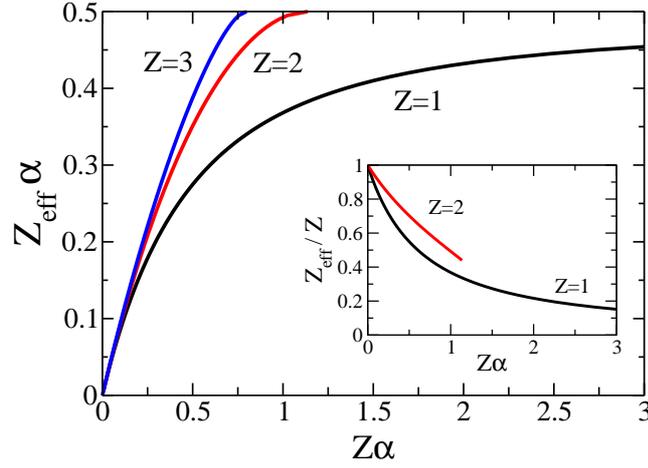


Рисунок 1.3 — Функция $Z_{eff}\alpha$ как функция $Z\alpha$, решение уравнения (1.13), для $Z = 1$ (черная линия), $Z = 2$ (красная линия) и $Z = 3$ (синяя линия).

Вставка: отношение Z_{eff}/Z .

не может быть вычислен нашим методом если $Z\alpha$ выше чем $Z\alpha_c = 1.136$, где примесь становится критической. Однако отношение Z_{eff}/Z , где Z_{eff} определяет эффективный зарядовый номер примеси, скорее всего, продолжит падать с увеличением параметра $Z\alpha$ при $Z\alpha > Z\alpha_c$. Это связано с тем, что критические явления, такие как рождение “электрон-позитронных” пар, происходит на больших масштабах [47; 103], поэтому будет слабо влиять на локализованный заряд примеси. Для точного решения задачи экранировки примеси, при критических зарядах примесей, необходим другой метод [103]. В нашей работе мы не будем рассматривать эту задачу.

Случай $Z = 1$ наиболее интересен с точки зрения эксперимента, поскольку щелочные атомы, такие как калий, добавляются в качестве источников рассеяния зарядов в графене [22]. Для графена на кремниевой подложке с диэлектрической постоянной $\epsilon \approx 4$ параметр $\alpha \approx 0.9$ ($e^2 \rightarrow 2e^2/(1 + \epsilon)$). Для таких больших значений константы связи эффекты экранирования примесей велики и, поэтому, должны быть важны при интерпретации экспериментальных результатов [22].

В данной главе мы рассмотрели графен с энергией Ферми равной нулю (энергия Ферми совпадает с положением дираковской точкой). Однако наш результат справедлив и при малой отличной от нуля энергии Ферми. Поскольку индуцированный заряд пропорционален δ -функции, то есть локализован на размере шага решетки, а размер экранировки электронами проводимости мно-

го больше чем шаг решетки ($\lambda \propto (\alpha k_F)^{-1} = v_F/(\alpha \epsilon_F)$), поэтому потенциал примеси начинает отличаться от кулоновского на масштабах $r \gtrsim \lambda$.

В заключение отметим, что в данной главе мы решили задачу экранировки кулоновской примеси в графене в докритическом режиме. Мы вычислили индуцированный заряд (1.10) точно по параметру $Z\alpha$. Используя этот результат и подход Хартри, мы получили самосогласованное решение для эффективного зарядового номера примеси. Мы показали, что в рамках нашего подхода, примесь с $Z = 1$ всегда остается в докритическом режиме и индуцированный заряд всегда локализован на примеси. Также экранировка приводит к существенному уменьшению эффективного заряда примеси. Примеси с зарядами $Z = 2$ и больше могут переходить в критический режим. В следующей главе мы рассмотрим как экранируется потенциал, спадающий на больших расстояниях быстрее чем кулоновский.

1.2 Экранировка локализованного потенциала в графене и исследование критических потенциалов

Кулоновская примесь в графене с нулевой щелью $M = 0$ может находиться в нескольких режимах: докритическом и закритическом. В последнем возможны процессы, сходные с процессами рождения электрон-позитронных пар в стандартной квантовой электродинамике. В докритическом режиме в порядке α и точно по параметру $Z\alpha$ индуцированный заряд локализован на примеси [47–49; 51], см. также предыдущую главу. В закритическом режиме кулоновская примесь рассматривалась в работах [44] и [108]. В этом случае плотность индуцированного заряда не локализована на примеси из-за эффектов, аналогичных эффектам рождения электрон-позитронных пар в сильном поле ядра. В этой главе мы исследуем поведение индуцированного заряда, возникающего в локализованном азимутально-симметричном потенциале с характерным радиусом локализации R и глубиной U_0 . Для этого мы вычисляем асимптотику плотности индуцированного потенциалом заряда $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях $r \gg R$. Для вычисления асимптотики мы используем метод, развитый в работе [109] для вычисления влияния эффектов конечного размера ядра на

плотность индуцированного заряда в квантовой электродинамике. Исследуя поведение $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ на больших расстояниях, мы показываем, что в нашей задаче также существуют докритический и закритический режимы. В докритическом режиме на расстояниях $r \lesssim R$ эффекта локализации заряда не происходит, а на больших расстояниях $r \gg R$ плотность индуцированного заряда спадает степенным образом, в отличие от случая кулоновской примеси (индуцированный заряд локализован на примеси). Вблизи перехода докритический режим-закритический режим малые изменения параметров потенциала приводят к существенному изменению плотности индуцированного заряда. Мы показываем, что такое поведение не связано с гладкостью потенциала. Ранее в работе [104] авторы пытались вычислить распределение плотности заряда, индуцированного локализованным потенциалом. В этой работе применялся метод вычислений, похожий на метод вычисления осцилляций Фриделя. Результаты наших вычислений не совпадают с результатами работы [104], поскольку авторы этой работы допустили ошибку при вычислении фазы рассеяния.

Данная глава построена следующим образом. В начале мы получаем выражение для плотности индуцированного заряда, которое удобно для нахождения асимптотического поведения плотности на больших расстояниях. Затем мы рассматриваем функцию Грина электрона в азимутально-симметричном потенциале. Используя функцию Грина, мы вычисляем асимптотику $\rho_{ind}(\mathbf{r})$. После чего мы исследуем поведение фаз рассеяния для волновой функции электрона в потенциале, величина которого близка критическому значению. Затем мы вычисляем индуцированный заряд в области $r \gg R$.

Общее рассмотрение выражения для плотности индуцированного заряда. Как было показано в Главе 1.1, плотность индуцированного заряда в графене может быть записана через функцию Грина электрона следующим образом:

$$\rho_{ind}(\mathbf{r}) = -ieN \int_C \frac{d\epsilon}{2\pi} \text{Tr}\{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\epsilon)\}, \quad (1.14)$$

где контур интегрирования C изображен на рис. 1.1, а функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$[\epsilon - U(r) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.15)$$

Здесь $U(r)$ – азимутально-симметричный потенциал. Используя аналитические свойства функции Грина, мы деформируем контур интегрирования C в (1.14) таким образом, что он совпадает с мнимой осью переменной ϵ . Для нахождения плотности индуцированного заряда мы должны найти функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \epsilon)$. Следуя работе [109], мы переписываем уравнение (1.15) в интегральном виде:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon) = G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon) + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 | i\epsilon) [U(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | i\epsilon) U(\mathbf{r}_2)] G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}' | i\epsilon), \quad (1.16)$$

где $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \epsilon)$ – решение уравнения (1.15) с нулевым потенциалом. Подставляя функцию Грина в форме (1.16) в выражение (1.14), мы получаем:

$$\rho_{ind}(r) = \rho_{ind}^{(1)}(r) + \rho_{ind}^{(2)}(r), \quad (1.17)$$

где $\rho_{ind}^{(1)}(r)$ – линейное по внешнему потенциалу $U(r)$ слагаемое, а функция $\rho_{ind}^{(2)}(r)$ содержит слагаемые более высокой степени по потенциалу $U(r)$:

$$\rho_{ind}^{(1)}(r) = eN \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 \text{Tr} \left\{ G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 | i\epsilon) U(r_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r} | i\epsilon) \right\}, \quad (1.18)$$

$$\rho_{ind}^{(2)}(r) = eN \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \text{Tr} \left\{ G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 | i\epsilon) \times U(r_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | i\epsilon) U(r_2) G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r} | i\epsilon) \right\}. \quad (1.19)$$

Выражения (1.18) и (1.19) удобны для вычисления асимптотики плотности индуцированного заряда, так как в подынтегральных выражениях происходит разделение масштабов. Дело в том, что потенциал локализован на масштабе R , а переменная $r \gg R$, см. обсуждение ниже.

Функция Грина электрона в азимутально-симметричном потенциале.

Решение для функции $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon)$ имеет следующий вид:

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon) = -\frac{i\epsilon}{2\pi} \left[K_0(|\epsilon|\xi) - \text{sign}(\epsilon) \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\xi})}{\xi} K_1(|\epsilon|\xi) \right], \quad (1.20)$$

где $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $K_{0,1}(x)$ функции Макдональда. Для дальнейших вычислений удобно представить функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon)$ в виде:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \begin{pmatrix} A_m(r, r' | \epsilon) & -ie^{-i\phi'} B_m(r, r' | \epsilon) \\ ie^{i\phi} C_m(r, r' | \epsilon) & e^{i(\phi-\phi')} D_m(r, r' | \epsilon) \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Используя следующее разложение δ -функции

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r')}{2\pi\sqrt{rr'}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \quad (1.22)$$

в правой части уравнения (1.15), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\epsilon - U(r))A_m - \frac{\partial C_m}{\partial r} - \frac{m+1}{r}C_m &= \frac{\delta(r - r')}{\sqrt{rr'}}, \\ (\epsilon - U(r))C_m + \frac{\partial A_m}{\partial r} - \frac{m}{r}A_m &= 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Функции D_m и B_m связаны с функциями A_m и C_m следующим образом:

$$D_m = A_{-m-1}, \quad B_m = -C_{-m-1}.$$

Поэтому для нахождения функции Грина в азимутально-симметричном потенциале необходимо решить систему уравнений (1.23).

Поведение плотности индуцированного заряда на больших расстояниях. Для вычисления асимптотики функции $\rho_{ind}^{(1)}$ на расстояниях $r \gg R$ мы можем положить $r_1 = 0$ в аргументе функции Грина в выражении (1.18). После этого выполняем интегрирование по переменной ϵ и получаем:

$$\rho_{ind}^{(1)}(r) = \frac{eN}{16r^3} \int dr' r' U(r'). \quad (1.24)$$

Видно, что в лидирующем порядке по потенциалу $U(r)$ плотность индуцированного заряда спадает на больших расстояниях как $1/r^3$.

Для вычисления асимптотики функции $\rho_{ind}^{(2)}(r)$ при $r \gg R$ мы подставляем выражения (1.20) и (1.21) в (1.19), затем полагаем $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$ в аргументах функций Грина и выполняем интегрирование по углам векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . В итоге

получаем:

$$\rho_{ind}^{(2)}(r) = -\frac{eN}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 [K_0^2(|\epsilon|r) - K_1^2(|\epsilon|r)] \times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dr_1 dr_2 r_1 r_2 U(r_1) U(r_2) A_0(r_1, r_2 | i\epsilon). \quad (1.25)$$

Здесь $A_0(r_1, r_2 | i\epsilon)$ решение системы (1.23) с $m = 0$. Отметим, что в выражение (1.25) дают вклад только слагаемые ряда (1.21) с $m = 0$ и $m = -1$, поскольку $D_{-1} = A_0$. Для дальнейших вычислений удобно ввести следующие функции

$$a(r, \epsilon) = \int_0^{\infty} dr' r' U(r') A_0(r, r' | i\epsilon), \quad c(r, \epsilon) = \int_0^{\infty} dr' r' U(r') C_0(r, r' | i\epsilon), \quad (1.26)$$

Умножим левые и правые стороны уравнений (1.23) на $r'U(r')$ и вычислим интегралы по переменной r' от нуля до бесконечности. В результате получаем систему уравнений на функции $a(r, i\epsilon)$ и $c(r, i\epsilon)$:

$$\begin{aligned} (i\epsilon - U(r))a(r, \epsilon) - \frac{\partial c(r, \epsilon)}{\partial r} - \frac{c(r, \epsilon)}{r} &= U(r), \\ (i\epsilon - U(r))c(r, \epsilon) + \frac{\partial a(r, \epsilon)}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Граничные условия для этих уравнений следующие:

$$a(0, \epsilon), c(0, \epsilon) < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a(r, \epsilon) = \lim_{r \rightarrow \infty} c(r, \epsilon) = 0.$$

Выражая плотность (1.25) через функцию $a(r, i\epsilon)$, мы получаем

$$\rho_{ind}^{(2)}(r) = -\frac{eN}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \epsilon^2 [K_0^2(|\epsilon|r) - K_1^2(|\epsilon|r)] \int_0^{\infty} dr' r' U(r') a(r', \epsilon). \quad (1.28)$$

Затем переходим от переменной интегрирования ϵ к переменной $E = r\epsilon$. Поскольку вычисляется асимптотика на больших расстояниях, то в выражении (1.28) можно заменить $a(r', E/r)$ на $a(r', 0)$. Мы можем выполнить такую замену, поскольку интеграл по переменной E сходится на масштабе $E \sim 1$ в силу свойств функций Макдональда. После замены, выполняем интегрирование по

переменной E и получаем:

$$\rho_{ind}^{(2)}(r) = \frac{eN}{16r^3} \int_0^\infty dr' r' U(r') a(r', 0). \quad (1.29)$$

Таким образом, функции $\rho_{ind}^{(2)}(r)$ и $\rho_{ind}^{(1)}(r)$ имеют одинаковое поведение на больших расстояниях.

Рассмотрим случай простого потенциала $U(r) = -U_0\theta(R - r)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, R – радиус потенциала. Для данного потенциала решение $a(r, 0)$ системы (1.27) имеет вид:

$$a(r, 0) = \begin{cases} \frac{J_0(U_0 r)}{J_0(U_0 R)} - 1, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (1.30)$$

Используя это решение, мы находим сумму вкладов (1.24) и (1.29):

$$\rho_{ind}(r) = -\frac{eN J_1(g) R}{16 J_0(g) r^3}, \quad (1.31)$$

где $g = U_0 R$ является эффективной безразмерной константой связи. Видно, что плотность индуцированного заряда (1.31) является нечетной функцией параметра g , что согласуется с теоремой Фарри в квантовой электродинамике. Выражение (1.31) содержит сингулярности в критических значениях константы связи $g = g_c$, где g_c является решением уравнения $J_0(g_c) = 0$. В нашем случае первые три критических значения равны $g_c \approx 2.41, 5.52, 8.65$. Наличие сингулярностей не связано с резким изменением конкретного потенциала вблизи точки $r = R$. Для того чтобы показать это, мы нашли численно первые три критические значения константы $g = U_0 R$ для гладких потенциалов $U_1(r) = -U_0 e^{-r/R}$ и $U_2(r) = -U_0 e^{-r^2/R^2}$. Для первого потенциала $g_c \approx 2.87, 5.9, 9.0$. В случае второго потенциала $g_c \approx 2.7, 5.7, 8.0$. Видно, что соответствующие численные значения g_c близки для всех трех потенциалов.

Сингулярности в выражении (1.31) возникли вследствие замены

$$a(r', E/r) \rightarrow a(r', 0)$$

в выражении (1.29). Вблизи критической константы связи мы не можем выполнить такую замену, поскольку выражение (1.30) не имеет смысла в точке $g = g_c$.

Вблизи точки $g = g_c$ необходимо вычислять интеграл в выражении (1.28) более аккуратно. В случае ступенчатого потенциала $U(r) = -U_0\theta(R - r)$ решение системы (1.27) при условии $\epsilon \neq 0$ имеет следующий вид:

$$a(r, \epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} J_0((U_0 + i\epsilon)r) - U_0/(U_0 + i\epsilon), & r < R, \\ \beta K_0(|\epsilon|r), & r > R, \end{cases} \quad (1.32)$$

$$c(r, \epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} J_1((U_0 + i\epsilon)r), & r < R, \\ -i\beta \text{sign}(\epsilon) K_1(|\epsilon|r), & r > R. \end{cases} \quad (1.33)$$

Учитывая непрерывность функций $a(r, \epsilon)$ и $c(r, \epsilon)$ в точке $r = R$, мы получаем:

$$\gamma = \left(1 + \frac{i\epsilon}{U_0}\right) \left[J_0((U_0 + i\epsilon)R) - i \text{sign}(\epsilon) J_1((U_0 + i\epsilon)R) \frac{K_0(|\epsilon|R)}{K_1(|\epsilon|R)} \right]. \quad (1.34)$$

Затем мы подставляем выражения (1.32), (1.34) в (1.28) и выполняем интегрирование по переменной r' . Как отмечалось выше, главный вклад в интеграл по переменной ϵ при $r \gg R$ дает область $\epsilon \lesssim 1/r$, что в этой области $\epsilon R \ll 1$ и $\epsilon/U_0 \ll 1$. В итоге мы получаем, что асимптотика для суммы $\rho_{ind}^{(1)}(r)$ и $\rho_{ind}^{(2)}(r)$ на больших расстояниях имеет вид:

$$\rho_{ind}(r) = \frac{eN J_0(g) J_1(g) R}{\pi^2} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^2 \frac{K_0^2(\epsilon r) - K_1^2(\epsilon r)}{J_0^2(g) + J_1^2(g) (\epsilon R)^2 \ln^2(\epsilon R)}. \quad (1.35)$$

Данное выражение справедливо для произвольного значения константы связи $g = U_0 R$. В случае $|J_0(g)| \gg (R/r) \ln(r/R)$ можно пренебречь вторым слагаемым в знаменателе интеграла, тогда выражение (1.35) переходит в (1.31). В случае, когда g близка к g_c , причем $|J_0(g)| \ll (R/r) \ln(r/R) \ll 1$, мы получаем:

$$\rho_1(r) = -\frac{eN \text{sign}(g - g_c)}{2\pi r^2 \ln |g - g_c|}. \quad (1.36)$$

В этом случае плотность индуцированного заряда спадает как $1/r^2$ и имеет противоположные знаки для $g < g_c$ и $g > g_c$. Асимптотика (1.36) справедлива на расстояниях

$$1 \ll \frac{r}{R} \ll -\frac{\ln |g - g_c|}{|g - g_c|}.$$

На расстояниях $r/R \gg -\ln|g - g_c|/|g - g_c|$ при $|g - g_c| \ll 1$, мы получаем (см. (1.31)):

$$\rho_2(r) = \frac{eNR}{16r^3(g - g_c)}. \quad (1.37)$$

Для того, чтобы показать переход от асимптотики (1.36) к асимптотике (1.37) можно рассмотреть отношение $\rho_{ind}(r)/\rho_2(r)$ при условиях $r \gg R$ и $|g - g_c| \ll 1$. В этом случае отношение $\rho_{ind}(r)/\rho_2(r)$ зависит только от параметра $\eta = -r|g - g_c|/(R \ln|g - g_c|)$. Данная зависимость как функция параметра η приведена на рис. 1.4. Видно, что $\rho_{ind}(r) \approx \rho_2(r)$ уже при $\eta \simeq 2$.

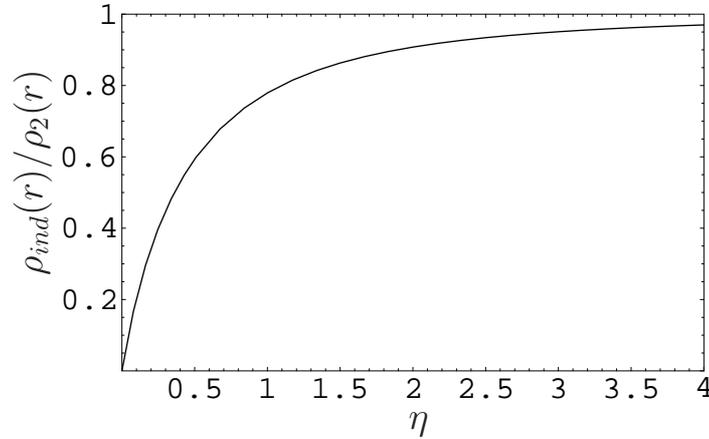


Рисунок 1.4 — Отношение $\rho_{ind}(r)/\rho_2(r)$ как функция параметра $\eta = -r|g - g_c|/(R \ln|g - g_c|)$ при условиях $r \gg R$ и $|g - g_c| \ll 1$. Асимптотика $\rho_2(r)$ приведена в выражении (1.37), а ρ_{ind} в (1.35).

Критические значения потенциала и задача рассеяния. Критическое значение потенциала можно объяснить в рамках теории рассеяния так же, как это обычно делается при рассмотрении осцилляций Фриделя, см. [110]. Записывая волновую функцию электрона в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u_m(r)e^{im\phi} \\ id_m(r)e^{i(m+1)\phi} \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

мы получаем следующие уравнения на функции $u_m(r)$ и $d_m(r)$:

$$\begin{aligned} (\epsilon - U(r))u_m - \frac{\partial d_m}{\partial r} - \frac{m+1}{r}d_m &= 0, \\ (\epsilon - U(r))d_m + \frac{\partial u_m}{\partial r} - \frac{m}{r}u_m &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Решения этих уравнений в случае ступенчатого потенциала имеют вид:

$$u_m(r) = \begin{cases} J_m(|U_0 + \epsilon|r), & r < R, \\ \mu_m J_m(|\epsilon|r) + \nu_m N_m(|\epsilon|r), & r > R, \end{cases} \quad (1.40)$$

$$d_m(r) = \begin{cases} \text{sign}(U_0 + \epsilon) J_{m+1}(|U_0 + \epsilon|r), & r < R, \\ \text{sign}(\epsilon) [\mu_m J_{m+1}(|\epsilon|r) + \nu_m N_{m+1}(|\epsilon|r)], & r > R. \end{cases} \quad (1.41)$$

Где $N_m(x)$ – функция Неймана. Используя условия непрерывности функций $u_m(r)$ и $d_m(r)$ в точке $r = R$, мы получаем

$$\begin{aligned} \mu_m &= -\frac{\pi|\epsilon|R}{2} \left[J_m(|U_0 + \epsilon|R) N_{m+1}(|\epsilon|R) \right. \\ &\quad \left. - J_{m+1}(|U_0 + \epsilon|R) N_m(|\epsilon|R) \text{sign}(\epsilon) \text{sign}(\epsilon + U_0) \right], \\ \nu_m &= -\frac{\pi|\epsilon|R}{2} \left[-J_m(|U_0 + \epsilon|R) J_{m+1}(|\epsilon|R) \right. \\ &\quad \left. + J_{m+1}(|U_0 + \epsilon|R) J_m(|\epsilon|R) \text{sign}(\epsilon) \text{sign}(\epsilon + U_0) \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Используя асимптотики функций Бесселя и Неймана при больших аргументах, мы находим фазу рассеяния $\delta_m(\epsilon) = -\arctan(\nu_m/\mu_m)$. Критическое значение константы g является корнем уравнения $J_m(g_c) = 0$ при $m \geq 0$ и $J_{|m|-1}(g_c) = 0$ при $m < 0$. Учитывая асимптотическое поведение

$$N_0(x) \approx \frac{2 \ln x}{\pi}, \quad N_{|m|}(x) \approx -\frac{2^{|m|} (|m| - 1)!}{x^{|m|} \pi}$$

при $x \ll 1$, мы находим фазы рассеяния при условиях $|\epsilon|R \ll 1$, $|\epsilon| \ll U_0$, g близкой к g_c :

$$\begin{aligned}\delta_0(\epsilon) &= \arctan \left[\frac{\frac{\pi}{2}\epsilon R}{\epsilon R \ln(|\epsilon|R) - (g - g_c)} \right], \\ \delta_m(\epsilon) &= -\arctan \left[\frac{\pi(\epsilon R)^{2m+1}}{2^{2m}m!(m-1)![(2m+1)\epsilon R + 2m(g - g_c)]} \right] \text{ для } m > 0, \\ \delta_{-|m|}(\epsilon) &= \delta_{|m|-1}(\epsilon).\end{aligned}\tag{1.43}$$

Если $\epsilon < 0$, что соответствует электрону находящемуся под поверхностью Ферми, и $g < g_c$, тогда δ_m всегда малы. Для $g > g_c$ фазовый сдвиг $\delta_m(\epsilon)$ может быть равен $\pm\pi/2$ для некоторой $\epsilon < 0$. Это означает возникновение дополнительного локализованного состояния под поверхностью Ферми см. [103].

Вычисления фаз рассеяния на ступенчатом потенциале впервые было выполнено в работе [104]. Однако коэффициенты μ_m и ν_m см. (1.42), были найдены в работе [104] сшивкой функции $u_m(r)$ и ее первой производной в точке $r = R$ вместо сшивки функций $u_m(r)$ и $d_m(r)$. Легко проверить, что первая производная функции $u_m(r)$ имеет разрыв в точке $r = R$. Как следствие, асимптотика плотности индуцированного заряда на больших расстояниях, полученная в работе [104] не верна.

Индукцированный заряд. Рассмотрим индуцированный заряд $Q_>(r)$ вне окружности радиуса $r \gg R$:

$$\begin{aligned}Q_>(r) &= 2\pi \int_r^\infty dr' r' \rho_{in}(r') = -\frac{eN J_0(g) J_1(g) R r^2}{\pi} \times \\ &\int_0^\infty d\epsilon \epsilon^2 \frac{K_0^2(\epsilon r) + K_0(\epsilon r) K_2(\epsilon r) - 2K_1^2(\epsilon r)}{J_0^2(g) + J_1^2(g) (\epsilon R)^2 \ln^2(\epsilon R)}.\end{aligned}\tag{1.44}$$

В случае $|J_0(g)| \gg (R/r) \ln(r/R)$ мы получаем:

$$Q_>(r) = -\frac{eN\pi R J_1(g)}{8J_0(g)r}.\tag{1.45}$$

В случае $|g - g_c| \ll (R/r) \ln(r/R)$ мы получаем с логарифмической точностью:

$$Q_>(r) = eN \text{sign}(g - g_c) \left(1 + \frac{\ln(r/R)}{\ln|g - g_c|} \right).\tag{1.46}$$

Поскольку $N = 4$, заряд $Q_{>}(r)/e$ стремится к целому числу $N \text{sign}(g - g_c)$ при $g \rightarrow g_c$, причем, при стремлении g к g_c слева и справа, заряд имеет противоположный знак.

Рассмотрим индуцированный заряд $Q_{<}(r)$ внутри окружности радиуса $r \gg R$. Поскольку полный индуцированный заряд $Q_{tot} = Q_{>}(r) + Q_{<}(r)$ равен нулю для потенциала с константой связи g меньшей чем минимальная критическая g_c , для таких значений g мы получаем, что $Q_{<}(r) = -Q_{>}(r)$. Отметим, что Q_{tot} не равен нулю для безмассового электрона в графене в кулоновском потенциале $U_C(r) = -Z\alpha/r$ даже в случае докритического режима $Z\alpha < 1/2$. Это происходит вследствие нулевой массы электронов и медленно убывания потенциала. Для параметра g больше чем минимальное значение g_c , полный индуцированный заряд не равен нулю из-за эффектов аналогичных рождению электрон-позитронных пар в поле сверхтяжелых ядер [103; 111]. В этом случае $Q_{tot} = eNP$, где P – число g_c меньших чем g , мы получаем, что $Q_{<}(r) = -Q_{>}(r) + eNP$. Число P – это также число квазилокализованных состояний при заданном параметре g , см. обсуждение после формулы (1.43).

Отметим, что в нашей работе мы рассматривали вклады угловых моментов $m = 0$ в $m = -1$ функции Грина (1.21) при вычислении плотности индуцированного заряда на больших расстояниях и индуцированного заряда. Конечно, вклады с $m > 0$ и $m < -1$ не равны нулю, но они подавлены параметрически R/r относительно вычисленных нами вкладов даже вблизи критических значений потенциала. Однако число P , которое входит в $Q_{tot} = eNP$, включает все критические значения g_c , которые возникают и от вкладов с $m > 0$ и $m < -1$.

Для того чтобы проиллюстрировать как ведет себя индуцированный заряд вблизи критической точки g_c , удобно представить $Q_{>}(r)$ и $Q_{<}(r)$ при $r \gg R$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_{>}(r) &= eN[\text{sign}(g - g_c) + H(g,r)], \\ Q_{<}(r) &= eN[\text{sign}(g_c - g) - H(g,r) + P], \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $H(g,r)$ непрерывная функция параметра g . Функцию $H(g,r)$ можно получить из выражения (1.44). Зависимость этой функции от g при минимальном значении g_c и $R/r = 0.1$ приведена на рис. 1.5 сплошной линией, а асимптоти-

ка, полученная с помощью выражения (1.45), пунктирной линией. Видно, что выражение (1.45) неприменимо в довольно узкой области.

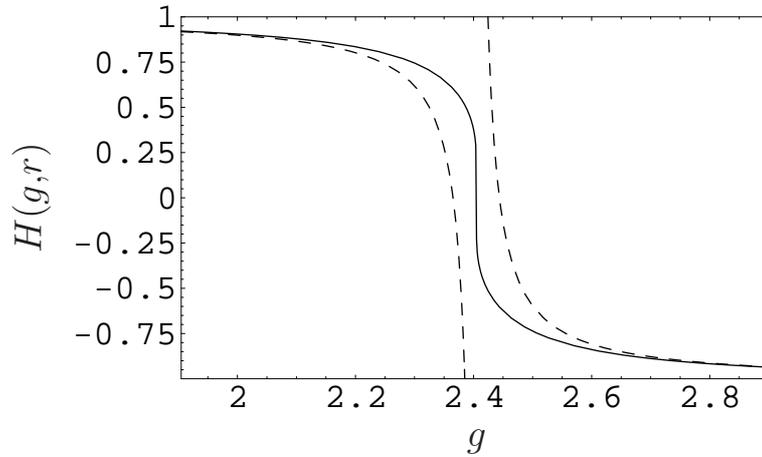


Рисунок 1.5 — Зависимость функции $H(g, r)$ от g при $R/r = 0.1$ вблизи минимального значения g_c . Точный результат, полученный из выражения (1.44), изображен сплошной линией. Асимптотика, полученная из выражения (1.45), изображается пунктирной линией.

В данной главе мы вычислили плотность заряда, индуцированного локализованным потенциалом в графене. Кроме того, мы получили индуцированный заряд вне окружности радиуса $r \gg R$ в случае докритического и закритического режимов. Мы показали, что малое изменение параметров потенциала вблизи критического значения константы связи g существенно изменяет плотность индуцированного заряда.

Глава 2. Индуцированный ток и эффект Бома-Ааронова в графене

В предыдущих главах мы исследовали индуцированный заряд в графене. Приступим к исследованию индуцированного тока. Пусть в графене создается магнитное поле $\mathbf{B}(r) = B(r)\boldsymbol{\nu}$, соответствующее полю соленоида малого радиуса. Здесь $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, направленный по оси z , которая перпендикулярна плоскости графена, а $B(r)$ – функция, затухающая на некотором расстоянии от точки $r = 0$, то есть $B(r) = 0$ при $r > R$. Для такого магнитного поля удобно выбрать вектор-потенциал в виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{2\pi r} V(r), \quad (2.1)$$

где Φ – полный магнитный поток магнитного поля \mathbf{B} через плоскость графена, а функция $V(r)$ выражается через магнитное поле следующим образом:

$$V(r) = \frac{2\pi}{\Phi r} \int_0^r dy y B(y). \quad (2.2)$$

Для вычисления плотности индуцированного заряда мы используем выражение (1.14), а плотность индуцированного тока имеет следующий вид:

$$\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r}) = -ieN \int_C \frac{d\epsilon}{2\pi} \text{Tr}\{\boldsymbol{\sigma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\epsilon)\}, \quad (2.3)$$

где контур интегрирования C изображен на рис. 1.1. Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\left[\epsilon - \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.4)$$

где c – скорость света. В этой главе мы рассмотрим две различные постановки задачи. Вначале мы найдем плотности индуцированных заряда и тока в случае бесконечно-тонкого соленоида в постановке, когда электроны не могут проникать в область ненулевого магнитного поля. В случае, если плотности индуцированного заряда или тока будут отличны от нуля, это будет являться проявлением эффекта Бома-Ааронова. Затем мы перейдем к рассмотрению тонкого

соленоида при условии, что электроны могут проникать в область ненулевого магнитного поля.

2.1 Плотность индуцированного тока в поле бесконечно-тонкого соленоида

В случае бесконечно-тонкого соленоида магнитное поле пропорционально $\delta(\mathbf{r})$, это означает, что функция $V(r) = 1$, а вектор-потенциал имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{2\pi r^2}.$$

Для удобства вычислений представим функцию Грина электрона в виде:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon) = \left[\epsilon + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon), \quad (2.5)$$

где $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon)$ функция Грина квадратированного уравнения Дирака:

$$\left[\epsilon^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \frac{\Phi}{\Phi_0} \delta(\mathbf{r}) \sigma_3 \right] D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.6)$$

Здесь $\Phi_0 = c/(2\pi e)$ – элементарный магнитный поток. В случае $r \neq 0$ и $r' \neq 0$ слагаемое, содержащее δ -функцию, можно опустить:

$$\left[\epsilon^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \right] D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.7)$$

Существуют регулярные и нерегулярные решения данного уравнения в точках $r = 0$ и $r' = 0$. Функция Грина уравнения Дирака для электрона в магнитном поле с учетом регулярной и иррегулярной частей рассматривалась в работе [112]. Сингулярное решение возникает вследствие сингулярного поведения вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в точке $r = 0$. Поэтому, для того чтобы найти правильную комбинацию из регулярного и сингулярного решений уравнения, необходимо выполнить регуляризацию уравнения. В качестве регуляризации мы можем рассмотреть соленоид конечного радиуса R , см. [28]. Используя такую регуляризацию, можно показать, что для вычисления плотности индуцированного

заряда и тока на расстояниях $r \gg R$ мы можем использовать только регулярную часть функции Грина уравнения (2.7), тогда как учет сингулярной части функции Грина необходим для изучения поведения плотности индуцированных заряда и тока на масштабах $r \lesssim R$. На таких расстояниях эти величины зависят от распределения поля в соленоиде и поэтому являются модельно-зависимыми. На расстояниях $r \gg R$ вклад сингулярной части функции Грина в величины ρ_{ind} и \mathbf{j}_{ind} содержит фактор $(\epsilon R)^\beta$, где $\beta > 0$, а главный вклад в интегралы по переменной ϵ при $r \gg R$ дает область $\epsilon \sim 1/r$. Таким образом, вклад сингулярной части функции Грина подавлен параметрически как $(R/r)^\beta$. Детали этих рассуждений приведены в следующей главе. Появление здесь иррегулярных решений и доопределение функции Грина вблизи особенности потенциала аналогично появлению иррегулярных решений при вычислении эффектов конечного размера ядра и их влияния на эффекты поляризации вакуума в тяжелых атомах [109]. Далее в этой главе мы рассматриваем вклады только регулярных частей функции Грина в плотность индуцированных заряда и тока. Вклад нерегулярных частей обсуждается в следующей главе.

Для нахождения функции Грина мы подставляем $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \epsilon)$ в виде

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} A_m(r, r' | \epsilon) \quad (2.8)$$

в (2.7), а правую часть уравнения (2.7) представляем в виде ряда

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r')}{2\pi\sqrt{rr'}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \quad (2.9)$$

и получаем уравнение на функцию $A_m(r, r' | \epsilon)$:

$$\left(\epsilon^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(m - \gamma)^2}{r^2} \right) A_m(r, r' | \epsilon) = \frac{\delta(r - r')}{\sqrt{rr'}}, \quad (2.10)$$

где мы ввели обозначение $\gamma = \Phi/\Phi_0$. Видно, что уравнение на функцию $A_m(r, r' | \epsilon)$ похоже на радиальное уравнение для функции Грина свободного двумерного уравнения Шредингера с заменой m на $m - \gamma$. Удобное интегральное представление для функции $A_m(r, r' | \epsilon)$ может быть получено с помощью операторного метода, развитого в работе [106]. Используя результат (1.6) при $Z\alpha = 0$,

мы получаем интегральное представление для функции $A_m(r, r' | \epsilon)$:

$$A_m(r, r' | \epsilon) = - \int_0^{\mu\infty} \frac{ds}{\sinh s} \exp[i\epsilon(r + r') \coth s - i\pi\lambda] J_{2\lambda} \left(\frac{2\epsilon\sqrt{rr'}}{\sinh s} \right), \quad (2.11)$$

где, $\lambda = |m - \gamma|$, $\mu = +1$ если $\text{Re } \epsilon > 0$ и $\mu = -1$ если $\text{Re } \epsilon < 0$. Параметр μ введен для учета аналитических свойств функции Грина.

Учитывая аналитические свойства функции Грина при вычислении плотности индуцированного заряда и тока, мы опять деформируем контур интегрирования C таким образом, что он совпадает с мнимой осью переменной ϵ . После интегрирования по параметру ϵ мы получаем, что $\rho_{ind}(\mathbf{r}) = 0$. Это является следствием теоремы Фарри, поскольку функция $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ должна быть нечетной функцией параметра $\gamma = e\Phi/(2\pi)$. Однако в нашем случае мы должны получить, что величина $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ является псевдоскаляром, что противоречит сохранению четности безмассового двумерного уравнения Дирака. Для плотности индуцированного тока получаем следующее выражение:

$$\mathbf{j}_{ind}(r) = -\frac{eN}{\pi^2 r^2} [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}] \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m - \gamma) \int_0^{\infty} d\epsilon \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sinh s} e^{-2\epsilon r \coth s} I_{2\lambda} \left(\frac{2\epsilon r}{\sinh s} \right), \quad (2.12)$$

Отметим, что $\mathbf{j}_{ind}(r)$ является нечетной функцией параметра γ , что согласуется с теоремой Фарри. Для того чтобы поменять местами суммирование и интегрирование, мы регуляризуем выражение (2.12), вводя параметр $\delta \ll 1$ в качестве нижнего предела в интеграле по переменной s . Затем интегрируем по переменной ϵ и получаем:

$$\mathbf{j}_{ind}(r) = -\frac{eN}{2\pi^2 r^3} [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}] \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m - \gamma) \int_{\delta}^{\infty} \frac{ds}{\sinh s} e^{-2\lambda s}. \quad (2.13)$$

Видно, что величина $\mathbf{j}_{ind}(r)$ зависит только от дробной части $\tilde{\gamma}$ параметра γ , $|\tilde{\gamma}| < 1$. Величина $\tilde{\gamma}$ равна $\tilde{\gamma} = \gamma - n$, если $\gamma > 0$ и $\tilde{\gamma} = \gamma + n$, если $\gamma < 0$, где n максимальное целое значение меньше чем $|\gamma|$. Выполняя суммирование в

выражении (2.13) по m и полагая $\delta = 0$, получаем:

$$\mathbf{j}_{ind}(r) = \frac{eN}{2\pi^2 r^3} [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}] \int_0^\infty \frac{ds}{\sinh s} \left[\tilde{\gamma} e^{-2|\tilde{\gamma}|s} + \tilde{\gamma} e^{-s} \frac{\cosh(2\tilde{\gamma}s)}{\sinh s} - \frac{\sinh(2\tilde{\gamma}s)}{2 \sinh^2 s} \right]. \quad (2.14)$$

Затем, интегрируя по переменной s , мы приходим к следующему выражению для плотности индуцированного тока:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{ind}(r) &= \frac{eN}{16\pi} F(\tilde{\gamma}) \operatorname{rot} \left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{r} \right), \\ F(\tilde{\gamma}) &= (1 - 2|\tilde{\gamma}|)^2 \tan(\pi\tilde{\gamma}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Интересно, что плотность тока $\mathbf{j}_{ind}(r)$ равняется нулю в точке $|\tilde{\gamma}| = 1/2$, см. рис. 2.1. Это можно объяснить следующим образом. Поскольку ток $\mathbf{j}_{ind}(r)$ инвари-

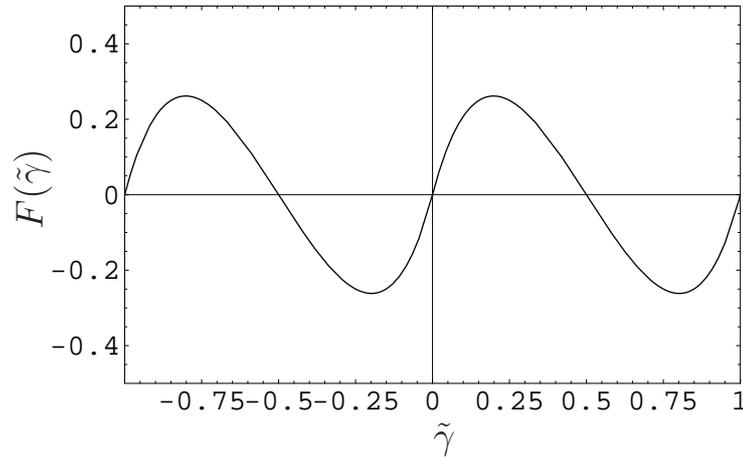


Рисунок 2.1 — Зависимость функции $F(\tilde{\gamma})$ от дробной части $\tilde{\gamma}$ параметра $\gamma = e\Phi/(2\pi)$, где Φ — магнитный поток через бесконечно тонкий соленоид.

антен относительно замены $\gamma \rightarrow \gamma - 1$, мы получаем, что функция F должна удовлетворять условию $F(|\tilde{\gamma}|) = F(|\tilde{\gamma}| - 1)$. В силу теоремы Фарри, функция F так же должна удовлетворять условию $F(\tilde{\gamma}) = -F(-\tilde{\gamma})$. Из этих двух соотношений мы получаем, что $F(\pm 1/2) = 0$.

Плотность индуцированного заряда и тока в присутствии поля бесконечно тонкого соленоида также обсуждались в работах [34; 113]. Результаты этих работ содержат вклады как регулярной, так и сингулярной частей функции Грина. Это связано с тем, что регуляризация особенностей, связанных с особенностью вектор-потенциала, не выполнялось. Поэтому выражения для плотно-

сти индуцированных заряда и тока имеют неопределенности, которые приводят к тому, что невозможно сделать точных предсказаний для этих величин. Как было отмечено во введении, эта неопределенность связана с необходимостью расширения гамильтониана, см. также следующую главу. Отметим, что наш результат хорошо определен, поскольку мы доопределили задачу в точке $r = 0$, и совпадает с вкладами регулярных частей, полученных в работе [113] (первое слагаемое в формуле (6.14)).

Для того, чтобы подробнее разобраться с расширениями гамильтониана уравнения Дирака в поле бесконечно-тонкого соленоида, мы вычислим плотность индуцированного тока в поле соленоида конечного радиуса.

2.2 Индуцированный ток в поле соленоида конечного радиуса

Для соленоида конечного радиуса удобно выбрать вектор-потенциал в виде (2.2). Подставляя функцию Грина электрона в графене в поле соленоида в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon) = \left[i\epsilon + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \right] D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon) \quad (2.16)$$

в уравнение Дирака, мы получаем уравнение на матрицу $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon)$:

$$\left[\epsilon^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 - \frac{e}{c} \sigma_z B(r) \right] D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.17)$$

Подставляя функцию $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon)$ в виде

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | i\epsilon) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(\phi-\phi')}}{2\pi} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_m^{(+)}(r, r' | i\epsilon) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_m^{(-)}(r, r' | i\epsilon) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

а δ -функцию в виде (2.9) в уравнение (2.17), мы получаем следующие уравнения на функции $\mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon)$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \epsilon^2 - \left(\frac{m}{r} - \gamma V(r) \right)^2 + s_{\pm} \frac{\gamma \partial(rV(r))}{r \partial r} \right] \mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon) = \frac{\delta(r - r')}{\sqrt{rr'}}, \quad (2.19)$$

где $s_{\pm} = \pm 1$, $\gamma = \Phi/\Phi_0$. В области $r, r' > R$ функция $V(r)$ равна $V(r) = 1/r$, таким образом, слагаемое, содержащее s_{\pm} в уравнении (2.19), исчезает. В этой области общее решение уравнения (2.19) имеет вид:

$$\mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon) = - \left(I_{|\lambda|}(|\epsilon|r_{<}) K_{|\lambda|}(|\epsilon|r_{>}) + \beta_m^{(\pm)} K_{|\lambda|}(|\epsilon|r) K_{|\lambda|}(|\epsilon|r') \right), \quad r, r' > R. \quad (2.20)$$

Здесь $r_{>} = \max(r, r')$, $r_{<} = \min(r, r')$, а $\lambda = m - \gamma$. Коэффициент перед первым слагаемым в уравнении (2.20) находится из условий сшивки функций $\mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon)$ в точке $r = r'$, коэффициент $\beta_m^{(\pm)}$ зависит от распределения магнитного поля внутри соленоида. Этот коэффициент может быть найден из условий сшивки в точке $r = R$ решения (2.20) и решения уравнения (2.19) в области $r < R$.

Подставляя функцию Грина в форме (2.16) с учетом (2.18) в выражение (2.3), мы получаем следующее представление для плотности индуцированного тока при $r > R$:

$$\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r}) = \frac{eN[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{4\pi^2 r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \left[\frac{\lambda}{r} \left(\mathcal{D}_m^{(+)}(r, r' | i\epsilon) + \mathcal{D}_m^{(-)}(r, r' | i\epsilon) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathcal{D}_m^{(+)}(r, r' | i\epsilon) - \mathcal{D}_m^{(-)}(r, r' | i\epsilon) \right) \right]_{r'=r}. \quad (2.21)$$

Затем, подставляя решение (2.20) для $\mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon)$ в выражение (2.21), мы получаем:

$$\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{ind}^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_{ind}^{(1)}(\mathbf{r}) &= -\frac{eN[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{\pi^2 r^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda \int_0^{\infty} d\epsilon I_{|\lambda|}(|\epsilon|r) K_{|\lambda|}(|\epsilon|r) \\
&= \frac{eNv_F[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3} \left(\frac{1}{2} - |\tilde{\gamma}| \right)^2 \tan(\pi\tilde{\gamma}), \tag{2.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r}) &= -\frac{eN[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{2\pi^2 r} \times \\
&\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon \left(\beta_m^{(+)} K_{|\lambda|+\mu}(|\epsilon|r) - \beta_m^{(-)} K_{|\lambda|-\mu}(|\epsilon|r) \right) K_{|\lambda|}(|\epsilon|r), \tag{2.24}
\end{aligned}$$

где $\mu = \text{sign}(\lambda)$, а параметр $\tilde{\gamma}$, как и в предыдущей главе, является дробной частью параметра γ . Вклад $\mathbf{j}_{ind}^{(1)}(\mathbf{r})$ совпадает с вкладом, полученным в предыдущей главе, см. (2.15). Вклад $\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r})$ зависит от радиуса соленоида R и распределения магнитного поля внутри соленоида через коэффициенты $\beta_m^{(\pm)}$. Данные коэффициенты являются функциями параметров ϵ , R , γ и m .

Случай чистого эффекта Бома-Ааронова. В этом случае электрон не может проникнуть в область ненулевого магнитного поля, то есть в область $r < R$. Соответствующее граничное условие имеет вид $\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{R}) = 0$. В этом случае $\mathcal{D}_m^{(+)}(r, r' | i\epsilon) = \mathcal{D}_m^{(-)}(r, r' | i\epsilon)$. Подставляя это условие в уравнение (2.21), мы получаем:

$$\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r}) = \frac{eN[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{\pi^2 r^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda \int_0^{\infty} d\epsilon \mathcal{D}_m^{(+)}(r, r' | i\epsilon). \tag{2.25}$$

Из граничного условия следует выражение для коэффициента $\beta_m^{(+)}$ (см. (2.20)):

$$\beta_m^{(+)} = -I_{|\lambda|}(x) / K_{|\lambda|}(x), \quad x = |\epsilon|R. \tag{2.26}$$

при $x \ll 1$, коэффициент $\beta_m^{(+)}$ в лидирующем порядке по параметру x имеет следующий вид

$$\beta_m^{(+)} \approx -\frac{2^{1-2|\lambda|} |\lambda|}{\Gamma^2(|\lambda| + 1)} x^{2|\lambda|}. \tag{2.27}$$

Используя это выражение, мы получаем асимптотику слагаемого $\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r})$ в выражении (2.24) на расстояниях $r \gg R$

$$\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r}) = -\frac{eN[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{2\pi r^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda|\lambda| \frac{\Gamma(|\lambda| + 1/2)\Gamma(2|\lambda| + 1/2)}{\Gamma^3(|\lambda| + 1)} \left(\frac{R}{2r}\right)^{2|\lambda|}. \quad (2.28)$$

Вклад $\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r})$ также равен нулю при полуцелом значении параметра γ . Это происходит вследствие сокращений между различными слагаемыми суммы. Для остальных значений γ мы вводим величину $\tilde{\lambda} = \tilde{m} - \gamma$, где \tilde{m} минимизирует значение величины $|\gamma - m|$, и получаем следующее выражение для $\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r})$ в лидирующем и следующем за лидирующем порядке по параметру R/r

$$\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r}) = \frac{eN[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3} \left[\left(\frac{1}{2} - |\tilde{\gamma}|\right)^2 \tan(\pi\tilde{\gamma}) + 2\tilde{\lambda}|\tilde{\lambda}| \frac{\Gamma(|\tilde{\lambda}| + 1/2)\Gamma(2|\tilde{\lambda}| + 1/2)}{\Gamma^3(|\tilde{\lambda}| + 1)} \left(\frac{R}{2r}\right)^{2|\tilde{\lambda}|} \right]. \quad (2.29)$$

Лидирующий вклад $\mathbf{j}_{ind}^{(1)}(\mathbf{r})$ совпадает с полученным ранее, см. (2.15), и спадает как $1/r^2$ при $r \rightarrow \infty$, а поправка $\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r})$ подавлена параметрически и спадает как $(R/r)^{2|\tilde{\lambda}|}/r^2$.

Электрон проникает в область ненулевого магнитного поля. Начнем рассмотрение со случая, когда распределение магнитного поля имеет следующий вид: $B(r) = B_0\theta(R - r)$, тогда для функции $V(r)$ получаем:

$$V(r) = \frac{r}{R^2} \theta(R - r) + \frac{1}{r} \theta(r - R). \quad (2.30)$$

Данная функция непрерывна в точке $r = R$, поэтому условия сшивки для функций $\mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon)$, следующие из уравнения (2.17), имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m^{(\pm)}(R - 0, r' | i\epsilon) &= \mathcal{D}_m^{(\pm)}(R + 0, r' | i\epsilon), \\ \frac{\partial \mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon)}{\partial r} \Big|_{r=R-0} &= \frac{\partial \mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon)}{\partial r} \Big|_{r=R+0}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Решение уравнения (2.19) в области $r < R$, $r' > R$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon) &= C_m^{(\pm)}(r') r^{|m|} \exp \left\{ -\frac{|\gamma| r^2}{2R^2} \right\} {}_1F_1 \left(a^{(\pm)}, |m| + 1, \frac{|\gamma| r^2}{R^2} \right), \\ a^{(\pm)} &= \frac{\epsilon^2 R^2}{4|\gamma|} + \frac{|\gamma||m| - \gamma m + |\gamma| - s_{\pm}\gamma}{2|\gamma|}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $C_m^{(\pm)}(r')$ некоторая функция, которая может быть найдена из условий (2.31), ${}_1F_1(a, b, x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Используя уравнения (2.20), (2.31) и (2.32), мы получаем следующее выражение для коэффициента $\beta_m^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} \beta_m^{(\pm)} &= -\frac{\mathcal{F} [bI_{|\lambda|}(x) + xI_{|\lambda|+1}(x)] - 2|\gamma|\mathcal{F}'I_{|\lambda|}(x)}{\mathcal{F} [bK_{|\lambda|}(x) - xK_{|\lambda|+1}(x)] - 2|\gamma|\mathcal{F}'K_{|\lambda|}(x)}, \\ \mathcal{F} &= {}_1F_1 \left(a^{(\pm)}, |m| + 1, |\gamma| \right), \\ \mathcal{F}' &= \frac{a^{(\pm)}}{|m| + 1} {}_1F_1 \left(a^{(\pm)} + 1, |m| + 2, |\gamma| \right), \\ b &= |\lambda| + |\gamma| - |m|, \quad x = |\epsilon|R. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из уравнений (2.33) и (2.24) следует, что плотность индуцированного тока является нечетной функцией параметра γ , что согласуется с теоремой Фарри. Ниже, без потери общности, мы полагаем, что $\gamma > 0$.

Используя уравнения (2.33) и (2.24), легко получить асимптотику функции $\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r})$ на расстояниях $r \gg R$. В этом случае главный вклад в интеграл по переменной ϵ в выражении (2.24) дает область $\epsilon \sim 1/r$. В этой области $x = |\epsilon|R \ll 1$. Главный вклад в сумму по m в выражении (2.24) дает слагаемое, пропорциональное $\beta_m^{(+)}$ с $m = [\gamma]$, где $[y]$ означает целую часть величины y . Для таких m асимптотика коэффициента $\beta_m^{(+)}$ при $x \ll 1$ имеет вид:

$$\beta_m^{(+)} = -\frac{2}{\pi} \sin(\pi\tilde{\gamma}). \quad (2.34)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.24) и интегрируя по ϵ , мы находим, что

$$\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r}) = -\frac{eN[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3} \left(\frac{1}{2} - |\tilde{\gamma}| \right) \tan(\pi\tilde{\gamma}). \quad (2.35)$$

Суммируя результаты для $\mathbf{j}_{ind}^{(1)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r})$, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r}) &= \frac{eN[\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}]}{16\pi r^3} F_{tot}(\gamma), \\ F_{tot}(\gamma) &= (1 - 4\tilde{\gamma}^2) \tan(\pi\tilde{\gamma}).\end{aligned}\quad (2.36)$$

Функция $F_{tot}(\gamma)$ построена на рис. 2.2.

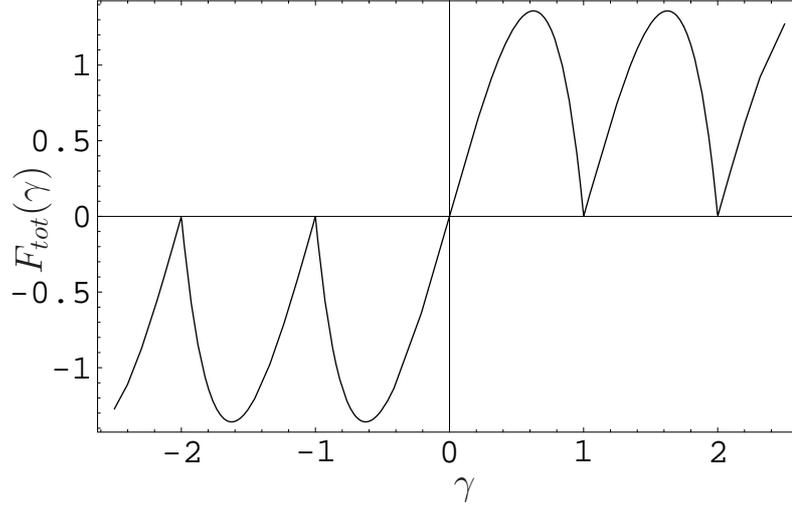


Рисунок 2.2 — Зависимость функции $F_{tot}(\gamma)$ от $\gamma = \Phi/\Phi_0$ см. (2.36).

В случае чистого эффекта Бома-Ааронова индуцированный ток является периодической функцией потока магнитного поля через соленоид, см. (2.15) и (2.29). Причина этого довольно проста – когда электрон не может проникнуть в область ненулевого поля, целую часть параметра γ можно убрать из волнового уравнения калибровочным преобразованием. В случае, когда электрон проникает в область ненулевого поля, мы не можем убрать целую часть γ калибровочным преобразованием. Поэтому, как видно из уравнения (2.35) и рис. 2.2, плотность индуцированного тока не является периодической функцией полного магнитного потока, проходящего через соленоид.

Результат (2.36), полученный для магнитного поля, распределенного как $B(r) = B_0\theta(R-r)$, совпадает с результатами работы [33] для параметра расширения $\theta = \pi/2$. Теперь мы покажем, что лидирующая асимптотика плотности индуцированного тока при $R/r \ll 1$ не зависит от распределения магнитного поля при фиксированном магнитном потоке. Как было отмечено выше, при $R/r \ll 1$ главный вклад в интеграл по параметру ϵ в уравнении (2.24) дает область $\epsilon \sim 1/r$, поэтому $|\epsilon|R \ll 1$. Для $r, r' > R$ решение (2.20) справедливо

при любом распределении магнитного поля. Поэтому мы используем это решение при $r' > r \geq R$. В случае $r' > R \geq r$ мы можем пренебречь слагаемым, пропорциональным ϵ^2 в уравнении (2.19). В итоге, уравнения (2.19) на функции $\mathcal{D}_m^{(\pm)}(r, r' | i\epsilon)$ принимают вид:

$$\begin{aligned}\hat{A}_m \hat{B}_m \mathcal{D}_m^{(+)}(r, r' | i\epsilon) &= 0, \\ \hat{B}_{m-1} \hat{A}_{m-1} \mathcal{D}_m^{(-)}(r, r' | i\epsilon) &= 0, \\ \hat{A}_m &= \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m+1}{r} - \gamma V(r), \\ \hat{B}_m &= \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{r} + \gamma V(r).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Регулярные в точке $r = 0$ решения уравнений (2.37) имеют вид:

$$\mathcal{D}_m^{(+)}(r, r' | i\epsilon) = \zeta_m^{(+)}(r') r^m e^{-\gamma \int_0^r V(y) dy} \begin{cases} 1, & m \geq 0, \\ \int_0^r x^{-(2m+1)} e^{2\gamma \int_0^x V(y) dy} dx, & m < 0, \end{cases}\tag{2.38}$$

$$\mathcal{D}_m^{(-)}(r, r' | i\epsilon) = \zeta_m^{(-)}(r') r^{-m} e^{\gamma \int_0^r V(y) dy} \begin{cases} \int_0^r x^{2m-1} e^{-2\gamma \int_0^x V(y) dy} dx, & m > 0, \\ 1, & m \leq 0. \end{cases}\tag{2.39}$$

Где $\zeta_m^{(\pm)}(r')$ некоторая функция переменной r' . Подставляя решения (2.20), (2.38), и (2.39) в условия сшивки (2.31) и используя асимптотики функций $I_\lambda(x)$ и $K_\lambda(x)$ при малых x , мы находим коэффициенты $\beta_m^{(\pm)}$. В пределе $|\epsilon|R \rightarrow 0$ только $\beta_{[\gamma]}^{(+)}$ не исчезает и совпадает с результатом (2.34), полученным для магнитного поля, распределенного как $B(r) = B_0 \theta(R - r)$. Таким образом, главная асимптотика плотности индуцированного тока не зависит от распределения магнитного поля внутри соленоида.

В этой главе мы исследовали плотность индуцированного тока в графене в магнитном поле соленоида малого радиуса. Мы показали, что в случае, когда электроны не могут проникать в область ненулевого магнитного поля, индуцированный ток является периодической функцией магнитного потока. Если же электроны проникают в область ненулевого поля, индуцированный ток не является периодической функцией магнитного потока. В этом случае лидирующая асимптотика плотности индуцированного тока при $r \gg R$ зависит только от полного магнитного потока через соленоид и не зависит от распределения магнитного поля внутри соленоида. Таким образом, было показано, что параметр расширения θ , введенный ранее, имеет универсальное значение равное $\pi/2$. По-

хожим способом можно показать, что волновые функции уравнения Дирака в $(2 + 1)$ измерениях в поле соленоида радиуса R также имеют универсальное поведение при $R \rightarrow 0$. Поскольку плотность индуцированного тока в случае чистого эффекта Бома-Ааронова существенно отличается от случая, когда электрон проникает в область магнитного поля, измерение плотности индуцированного тока позволит понять, попадают ли электроны в область ненулевого магнитного поля в эксперименте.

На этом мы заканчиваем изучение эффектов, связанных с поляризацией электронного газа внешними полями в графене, и переходим к исследованию электрон-электронного взаимодействия.

Глава 3. Взаимодействие двух электронов в графене

Очевидно, что уравнение, описывающее два невзаимодействующих электрона в графене, имеет следующий вид:

$$i\partial_t\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \hat{H}_0\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t), \quad (3.1)$$

$$\hat{H}_0 = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2, \quad (3.2)$$

где $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ – волновая функция, зависящая от координат двух электронов и псевдоспиновых переменных обоих электронов. Как отмечалось во Введении, обобщение уравнения (3.1) на случай взаимодействующих электронов является нетривиальной задачей. Причина сложности заключается в том, что на самом деле электронов в графене не два, поскольку все уровни энергии ниже энергии Ферми заполнены электронами. Это значит, что при рассмотрении двух взаимодействующих электронов в графене, находящихся выше поверхности Ферми, необходимо учитывать их взаимодействие с электронами, имеющими энергии меньше энергии Ферми. Учет такого взаимодействия приводит к необходимости включать в рассмотрение возбуждения типа частица-дырка в промежуточных состояниях. Рассмотрение подобных эффектов в квантовой электродинамике приводит к уравнению Швингера-Дайсона, которое редуцируется к уравнению Бете-Солпитера при исследовании связанных состояний [1;2]. Однако в нерелятивистской квантовой электродинамике эффекты виртуального рождения электрон-позитронных пар в промежуточных состояниях подавлены. Для безмассовых электронов в графене подавления нет, поэтому возбуждения типа частица-дырка в промежуточных состояниях важны при рассмотрении электрон-электронного взаимодействия. В качестве первого шага мы забудем о возбуждениях типа частица-дырка и исследуем взаимодействие двух электронов. Физический смысл такого приближения заключается в том, что энергии рассматриваемых электронов много больше энергии Ферми. Затем мы учтем существование поверхности Ферми. Для этого мы получим уравнение Бете-Солпитера в лидирующем приближении по потенциалу взаимодействия, и покажем, как возбуждения типа частица-дырка влияют на картину взаимодействия двух электронов, имеющих энергии больше чем энергия Ферми.

3.1 Простая модель

Заменяем гамильтониан \hat{H}_0 в уравнении (3.1) на гамильтониан \hat{H}_V , который имеет вид:

$$\hat{H}_V = \hat{H}_0 + V(r) = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2 + V(r), \quad (3.3)$$

где $V(r) = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ – потенциал электрон-электронного взаимодействия. Данная модель рассматривалась в работе [60]. В этой работе было показано, что собственные функции гамильтониана (3.3) имеют необычные свойства. Для того, чтобы понять источник этих свойств мы вновь рассмотрим стационарную задачу $\hat{H}_V \psi = E \psi$. Кроме того, мы рассмотрим нестационарную задачу и покажем, что необычные свойства собственных функций гамильтониана (3.3) отражаются в очень необычной картине эволюции волновых пакетов.

Мы ограничим наше рассмотрение случаем нулевого полного импульса двух электронов, кроме того, полагаем, что потенциал $V(r)$ – гладкая положительная монотонно убывающая функция, которая стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Потенциал также может расти не быстрее чем $1/r$ при $r \rightarrow 0$.

Очевидно, что гамильтониан \hat{H}_V в выражении (3.3) коммутирует с полным импульсом электронов $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, поэтому можно искать волновую функцию в виде $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \exp(i\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{R}) \psi(t, \mathbf{r})$, где $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ – координата “центра-масс”, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ расстояние между частицами. Отметим, что волновая функция $\psi(t, \mathbf{r})$ нетривиально зависит от полного импульса системы \mathbf{P}_0 см. [60]. Далее мы рассматриваем случай $\mathbf{P}_0 = 0$. При $\mathbf{P}_0 = 0$ волновое уравнение имеет следующий вид:

$$i\partial_t \psi(t, \mathbf{r}) = \hat{H} \psi(t, \mathbf{r}), \quad (3.4)$$

$$\hat{H} = (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{p} + V(r). \quad (3.5)$$

Гамильтониан \hat{H} коммутирует с операторами

$$\hat{J}^z = \hat{T}^z + \hat{L}^z = \frac{1}{2} (\sigma_1^z + \sigma_2^z) - i\partial_\varphi, \quad (3.6)$$

и

$$\hat{O} = \hat{\mathbf{T}}^2 - 2 \left(\hat{T}^z \right)^2, \quad (3.7)$$

где оператор \hat{T}^z является z компонентой оператора псевдоспина $\mathbf{T} = (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)/2$, φ – азимутальный угол вектора \mathbf{r} , а $\hat{\mathbf{T}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 (\sigma_1^i + \sigma_2^i)^2$. Операторы \hat{T}^z и \hat{O} также коммутируют друг с другом. Поэтому ищем решения уравнения (3.4) в виде

$$\psi_0(t, \mathbf{r}) = e^{im\varphi} \left(a_{00}(t, r) |0,0\rangle + e^{-i\varphi} a_{11}(t, r) |1,1\rangle + e^{i\varphi} a_{1-1}(t, r) |1, -1\rangle \right), \quad (3.8)$$

$$\psi_2(t, \mathbf{r}) = e^{im\varphi} g(t, r) |1,0\rangle. \quad (3.9)$$

Функции ψ_k также являются собственными функциями операторов \hat{J}^z и \hat{O} : $\hat{J}^z \psi_k = m \psi_k$ и $\hat{O} \psi_k = k \psi_k$. Здесь $|s, s_z\rangle$ – собственная функция операторов $\hat{\mathbf{T}}^2$ и \hat{T}^z . Для дальнейших вычислений удобно перейти от функций a_{ij} к функциям

$$f = i \frac{a_{11} + a_{1-1}}{\sqrt{2}}, \quad h = i \frac{a_{11} - a_{1-1}}{\sqrt{2}}, \quad d = a_{00}. \quad (3.10)$$

Используя уравнения (3.4), (3.8), (3.9), и (3.10), мы получаем следующую систему уравнений:

$$i\partial_t g = V(r) g, \quad (3.11)$$

$$i\partial_t f = V(r) f - \frac{2m}{r} d, \quad (3.12)$$

$$i\partial_t h = V(r) h - 2\partial_r d, \quad (3.13)$$

$$i\partial_t d = V(r) d - \frac{2m}{r} f + 2 \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) h, \quad (3.14)$$

Три последних уравнения могут быть записаны в матричном виде:

$$i\partial_t F = \hat{H}_r F, \quad (3.15)$$

где

$$F = \begin{pmatrix} f \\ h \\ d \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_r = \begin{pmatrix} V(r) & 0 & -\frac{2m}{r} \\ 0 & V(r) & -2\partial_r \\ -\frac{2m}{r} & 2\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right) & V(r) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Легко показать, что гамильтониан \hat{H}_r является эрмитовым оператором, т.е.

$$\int_0^{\infty} dr r F_1^\dagger \hat{H}_r F_2 = \int_0^{\infty} dr r \left(\hat{H}_r F_1 \right)^\dagger F_2$$

для непрерывных функций $F_{1,2}(r)$, которые достаточно быстро спадают на бесконечности $r \rightarrow \infty$ и конечны в точке $r = 0$.

Уравнение (3.11) может быть проинтегрировано. Общее решение имеет вид:

$$g(t, r) = g(0, r) e^{-iV(r)t}. \quad (3.17)$$

Общее решение уравнения (3.15) не может быть найдено аналитически.

Сохраняющийся ток и плотность для уравнения (3.4) имеет вид:

$$\mathbf{j} = \psi^\dagger (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \psi, \quad \rho = \psi^\dagger \psi. \quad (3.18)$$

Для двух решений ψ_0 и ψ_2 , ток и плотность выражаются следующим образом:

$$\psi_0: \quad j_r = 4 \operatorname{Im}(dh^*), \quad j_\varphi = -4 \operatorname{Re}(df^*), \quad \rho = |f|^2 + |h|^2 + |d|^2, \quad (3.19)$$

$$\psi_2: \quad j_r = 0, \quad j_\varphi = 0, \quad \rho = |g|^2, \quad (3.20)$$

где j_r и j_φ радиальная и угловая компоненты тока, соответственно.

3.1.1 Стационарная задача

Для начала рассмотрим стационарное уравнение для функции g :

$$Eg = V(r)g. \quad (3.21)$$

Рассмотрение этого уравнения поможет лучше понять свойства решений F стационарного уравнения (3.15). В случае $E > V_{\max}$ и $E < 0$ уравнение (3.21) не имеет ненулевых решений, тогда как в случае $0 < E < V_{\max}$ формальное решение уравнения имеет вид $g_a(r) = \delta(r - a)$, где a является решением уравнения $E = V(a)$. Функции $g_a(r)$ для различных значений параметра a ортогональны

и нормированы условием:

$$\int_0^{\infty} dr r g_a(r) g_{\tilde{a}}(r) = a \delta(a - \tilde{a}) . \quad (3.22)$$

Отметим, что плотность $\rho(r) = |g_a(r)|^2$ см. (3.20), отвечающая таким решениям, плохо определена. Несмотря на это, функции $g_a(r)$ образуют полный набор и могут быть использованы для решения временной задачи. В самом деле,

$$g(t, r) = \int_0^{\infty} da e^{-iV(a)t} g(0, a) g_a(r) = g(0, r) e^{-iV(r)t},$$

что согласуется с решением (3.17).

Перейдем к рассмотрению стационарного уравнения для функции F :

$$EF = \hat{H}_r F . \quad (3.23)$$

Гамильтониан \hat{H}_r является дифференциальным оператором первого порядка, см. уравнение (3.16). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение y системы $\partial_r y(r) = A(r) y(r)$ может иметь особенности только в тех точках, в которых элементы матрицы $A(r)$ сингулярны. Однако мы не можем представить уравнение (3.23) в таком виде, поскольку матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

перед оператором дифференцирования ∂_r в \hat{H}_r вырождена. Ниже мы покажем, что эта вырожденность приводит к сингулярности решений F с $m \neq 0$ в точке $r = r_*$, где r_* является решением уравнения $E = V(r_*)$.

Уравнение второго порядка для функции d . Запишем уравнение (3.23) в явном виде:

$$(E - V) f = -\frac{2m}{r} d, \quad (3.24)$$

$$(E - V) h = -2\partial_r d, \quad (3.25)$$

$$(E - V) d = 2\partial_r h + \frac{2}{r} h - \frac{2m}{r} f. \quad (3.26)$$

Используя два первых уравнения, мы исключаем функций f и h из третьего уравнения и получаем уравнение на функцию d в виде:

$$d'' + p(r) d' + q(r) d = 0, \quad (3.27)$$

$$p(r) = \frac{V'}{E - V} + \frac{1}{r}, \quad (3.28)$$

$$q(r) = \frac{1}{4} (E - V)^2 - \frac{m^2}{r^2}, \quad (3.29)$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной r .

Найдем граничные условия для функции d в точке $r = 0$. Если $V(0) < \infty$, то поведение общего решения уравнения (3.27) $r = 0$ вблизи имеет следующий вид:

$$d \approx a_1 r^{|m|} + a_2 \times \begin{cases} r^{-|m|}, & m \neq 0 \\ \ln r, & m = 0 \end{cases}. \quad (3.30)$$

В случае кулоновского потенциала $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \alpha/r$ асимптотика общего решения имеет вид:

$$d \approx a_1 r^{\nu-1/2} + a_2 r^{-\nu-1/2}, \quad (3.31)$$

где $\nu = \frac{1}{2} \sqrt{4m^2 + 1 - \alpha^2}$, а a_1 и a_2 некоторые константы. Мы выбираем в качестве граничных условий в точке $r = 0$ условие регулярности

$$a_2 = 0. \quad (3.32)$$

Данное условие обеспечивает выполнение условия $\int_0^\delta dr r |F|^2 < \infty$ для достаточно малых $\delta > 0$.

Для понимания свойств решений уравнения (3.27) рассмотрим аналитические свойства коэффициентов $p(r)$ и $q(r)$, см. (3.28) и (3.29), на интерва-

ле $[0, \infty)$. Вблизи точки $r = 0$ коэффициенты имеют поведение $p(r) \sim r^{-1}$, $q(r) \sim r^{-2}$, поэтому $r = 0$ – регулярная особая точка уравнения (3.27). Коэффициент $q(r)$ стремится к константе при $r \rightarrow \infty$, поэтому бесконечность является иррегулярной особой точкой уравнения. Данные свойства коэффициентов аналогичны свойствам коэффициентов обычного радиального уравнения Шредингера. Однако в нашем случае коэффициент $p(r)$ имеет дополнительную особую точку $r = r_*(E)$ в случае $E \in (0, V_{\max})$. В принципе, сингулярность коэффициента в некоторой точке не означает, что и функция будет иметь особенность в этой точке. Можно показать, что при $m = 0$ общее решение – действительно гладкая функция в точке при $r = r_*$. Поэтому мы сосредоточимся на случае $m \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (3.27) не является гладким в точке $r = r_*$. Поведение функции d в окрестности точки $r = r_*$ имеет вид:

$$d(r) \approx b_1 \left(1 + \frac{m^2 (1 - r/r_*)^2}{2} \ln |1 - r/r_*| \right) + b_2 (1 - r/r_*)^2. \quad (3.33)$$

Поэтому мы ищем решения в двух областях:

$$d(r) = \begin{cases} \tilde{b}_1 d_{\text{irr}}(r) + \tilde{b}_2 d_{\text{reg}}(r), & 0 < r < r_* \\ b_1 d_{\text{irr}}(r) + b_2 d_{\text{reg}}(r) & r_* < r < \infty \end{cases}, \quad (3.34)$$

где $b_{1,2}$ и $\tilde{b}_{1,2}$ некоторые константы, а функции d_{irr} и d_{reg} имеют следующие асимптотики:

$$d_{\text{irr}}(r) \approx 1 + \frac{m^2 (r_* - r)^2}{2r_*^2} \ln |1 - r/r_*|, \quad (3.35)$$

$$d_{\text{reg}}(r) \approx \frac{(r_* - r)^2}{r_*^2} \quad (3.36)$$

вблизи точки $r \rightarrow r_*$.

Стандартный анализ уравнения (3.27), показывает, что в точке r_* функция d и ее производная должны быть непрерывны. Используя условия сшивки, мы получаем

$$\tilde{b}_1 = b_1. \quad (3.37)$$

Отметим, что коэффициент b_2 остается свободным параметром, поэтому функция $d(r)$ в области $r > r_*$ не полностью определяется поведением функции в области $r < r_*$.

Граничное условие (3.32) в нуле фиксирует отношение

$$\tilde{b}_2/\tilde{b}_1 = \beta, \quad (3.38)$$

где β – константа, которая зависит от энергии и формы потенциала. Поэтому мы получаем два условия (3.37) и (3.38) на четыре константы $b_{1,2}$ и $\tilde{b}_{1,2}$. Это означает, что для любой энергии из интервала $E \in (0, V_{\max})$ существует два линейно независимых решения, которые мы выбираем следующим образом:

$$d_1(r) = b_1 [d_{\text{irr}}(r) + \beta d_{\text{reg}}(r)], \quad (3.39)$$

$$d_2(r) = b_2 \theta(r - r_*) d_{\text{reg}}(r). \quad (3.40)$$

Решение системы уравнений (3.24)–(3.26). Вернемся к системе уравнений (3.24)–(3.26). Отметим, что уравнения (3.24) и (3.25) определяют функции f и h с точностью до обобщенных функций, локализованных в точке $r = r_*$. Подставляя (3.39) и (3.40) в уравнения (3.24)–(3.26), мы получаем два решения уравнения (3.23):

$$F_1(E, r) = \begin{pmatrix} \frac{d_1(E, r)}{r} \text{P} \frac{2m}{V(r) - E} \\ \frac{2\partial_r d_1(E, r)}{V(r) - E} \\ d_1(E, r) \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$F_2(E, r) = \begin{pmatrix} \frac{2md_2(E, r)}{r(V(r) - E)} - \frac{2r\partial_r^2 d_2(E, r_*)}{m} \delta(V(r) - E) \\ \frac{2\partial_r d_2(E, r)}{V(r) - E} \\ d_2(E, r) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Здесь $\text{P} \frac{1}{x}$ обозначает главное значение, определенное как

$$\text{P} \frac{1}{V(r) - E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V(r) - E + i0} + \frac{1}{V(r) - E - i0} \right).$$

Для проверки того, что F_1 и F_2 являются решениями уравнения (3.23) вблизи точки r_* можно проинтегрировать уравнения (3.24)–(3.26) по переменной r от $r_* - \delta_1$ до $r_* + \delta_2$ и рассмотреть предел $\delta_{1,2} \rightarrow +0$.

Подобно решению $g_a(r)$ уравнения (3.21), функции $F_{1,2}$ содержат обобщенные функции. Плотность $\rho = F^\dagger F$, соответствующая решению F_1 , неинтегрируема в точке $r = r_*$, а плотность, соответствующая функции F_2 , плохо определена. Поэтому для энергий из интервала $(0, V_{\max})$ не существует решения $F(E, r)$ стационарной задачи с интегрируемой плотностью вблизи точки $r_*(E)$. Данное утверждение противоречит утверждению работы [60], в которой авторы утверждают, что неаналитичность вблизи точки $r = r_*$ дает конечный вклад в вероятность.

Может показаться, что подобное рассмотрение для случая $m = 0$ также приведет к двукратному вырождению спектра $0 < E < V_{\max}$. Однако подстановка d_2 из (3.40) в уравнения (3.24)–(3.26), приводит к тому, что для $m = 0$ δ -функциональный член нарушает уравнение (3.26).

Для полноты картины рассмотрим свойства решений уравнения (3.23) для энергий больше максимального значения потенциала и меньше нуля. В этом случае коэффициент $p(r)$ не содержит сингулярности на интервале $(0, \infty)$. Поэтому спектр для энергий $E < 0$ и $E > V_{\max}$ невырожден, так как решения однозначно определены (с точностью до нормировки) граничным условием в нуле. Данные решения имеют вид (3.41), в котором можно опустить символ R . В дальнейшем мы полагаем, что функции $F_1(E, r)$, в случаях $E < 0$ или $E > V_{\max}$, нормированы условием

$$\int_0^\infty dr r F_1^\dagger(E, r) F_1(E', r) = 2\pi \delta(E - E'), \quad (3.43)$$

поэтому на больших r асимптотика $F_1(E, r)$ имеет вид:

$$F_1(E, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{Er + \eta}{2} \\ \cos \frac{Er + \eta}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

где η – некоторая функция энергии.

Еще один способ получения решения. Приведем еще один способ получения решений (3.41) и (3.42) для $m \neq 0$, который поможет лучше понять возникновение второго решения F_2 . Для этого мы рассматриваем уравнение (3.23) с действительной энергией E как предел уравнения

$$(E + i\epsilon) F = \hat{H}_r F \quad (3.45)$$

при $\epsilon \rightarrow \pm 0$. Этот предел зависит от знака ϵ , и мы обозначаем соответствующие решения индексами $+$ или $-$. Уравнение на функцию $d(r)$ имеет вид (3.27) с заменой $E \rightarrow E + i\epsilon$. В случае $\epsilon \neq 0$ коэффициент $p(r)$ этого уравнения не имеет сингулярностей в интервале $(0, \infty)$, поэтому решение d_{\pm} фиксируется с точностью до постоянного множителя граничным условием в нуле. Первые две компоненты функции F_{\pm} выражаются через функцию d_{\pm} следующим образом:

$$F_{\pm}(E, r) = \begin{pmatrix} f_{\pm}(E, r) \\ h_{\pm}(E, r) \\ d_{\pm}(E, r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2md_{\pm}(E, r)}{r(V(r) - E \mp i0)} \\ \frac{2\partial_r d_{\pm}(E, r)}{V(r) - E \mp i0} \\ d_{\pm}(E, r) \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

где мы подразумеваем, что $\epsilon \rightarrow \pm 0$. На интервале $(0, r_*(E))$ функции F_+ и F_- совпадают. Без потери общности, мы можем сделать функции F_+ и F_- действительными на этом интервале. Очевидно, что $F_+(E, r) = F_-^*(E, r)$ на всем интервале $(0, \infty)$. На интервале $(r_*(E), \infty)$ функции F_{\pm} имеют мнимые части, что видно из асимптотики функции d_{\pm} вблизи точки r_* :

$$\begin{aligned} d_{\pm}(E, r) &\approx b_1 \left(1 + \frac{m^2(1 - r/r_*)^2}{2} \ln \left(\frac{V(r) - E \mp i0}{|V'(r_*)| r_*} \right) + \beta(1 - r/r_*)^2 \right) \\ &\approx b_1 \left(1 + \frac{m^2(1 - r/r_*)^2}{2} \ln \left(\frac{r_* - r}{r_*} \mp i0 \right) + \beta(1 - r/r_*)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Мнимая часть $\pm i0$ определяет выбор ветки логарифма так, что

$$\begin{aligned} d_{\pm}(E, r) &\approx b_1 \left(1 + \frac{m^2(1 - r/r_*)^2}{2} \ln \left| \frac{r_* - r}{r_*} \right| + \right. \\ &\quad \left. \left(\beta \mp i \frac{\pi m^2}{2} \theta(r - r_*) \right) (1 - r/r_*)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Используя эти функции, а также равенство

$$\frac{1}{V(r) - E \mp i0} = P \frac{1}{V(r) - E} \pm i\pi\delta(V(r) - E), \quad (3.49)$$

можно показать, что реальная часть F_{\pm} пропорциональна функции F_1 , см. (3.41), а мнимая часть F_{\pm} пропорциональна функции F_2 , см. (3.42).

Ортонормированность и дуальный базис. В случае потенциала, спадающего быстрее чем $1/r$, асимптотика функции d_{\pm} при $r \rightarrow \infty$ имеет следующий вид:

$$d_{\pm}(E, r) \rightarrow \frac{c}{2\sqrt{r}} \left(e^{\mp i(Er+\eta)/2} + \gamma e^{\pm i(Er+\eta)/2} \right), \quad (3.50)$$

где c , γ и η некоторые действительные функции энергии. В случае потенциала, спадающего как α/r при $r \rightarrow \infty$, необходимо сделать замену $\eta \rightarrow \eta - \alpha \ln Er$ в выражении (3.50). Мы выбираем константу нормировки c действительной, и получаем, что асимптотика функции F_{\pm} имеет вид

$$F_{\pm}(E, r) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{r}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix} e^{\mp i(Er+\eta)/2} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ \mp i \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm i(Er+\eta)/2} \right]. \quad (3.51)$$

Функции F_{\pm} удовлетворяют следующему условию:

$$\int_0^{\infty} dr r F_{\sigma}^{\dagger}(E, r) F_{\sigma'}(E', r) = 2\pi\delta(E - E') N_{\sigma\sigma'}, \quad (3.52)$$

$$N_{++} = N_{--} = \frac{1 + \gamma^2}{2} + \frac{4\pi m^2 |b_1|^2}{r^* |V'(r_*)|}, \quad (3.53)$$

$$N_{+-} = N_{-+} = \gamma, \quad (3.54)$$

где $b_1 = d_{\pm}(E, r_*)$, см. уравнение (3.48). Существует тонкое соотношение между константами b_1 и γ , которое следует из сохранения полного радиального тока $J_r(r) = 2\pi r j_r$, где j_r определен в (3.19). А именно, используя равенство $J_r(r \rightarrow r_* + 0) = J_r(r \rightarrow \infty)$, мы получаем

$$\frac{4\pi m^2 |b_1|^2}{r^* |V'(r_*)|} = \frac{1 - \gamma^2}{2}, \quad (3.55)$$

откуда следует, что

$$N_{++} = N_{--} = 1. \quad (3.56)$$

Отметим, что $J_r \neq 0$ в области $r > r_*$. Существование решения с ненулевым радиальным током является следствием вырождения спектра. Для $r < r_*$, мы получаем $J_r = 0$. Может показаться, что такое поведение противоречит уравнению непрерывности в точке $r = r_*$. Однако плотность $\rho = F^\dagger F$ плохо определена в точке $r = r_*$, поэтому не имеет смысла обсуждать условие непрерывности j_r в этой точке.

Поскольку волновые функции $F_\pm(E, r)$ не являются ортогональными друг другу, удобно ввести функции дуального базиса $G_\pm(E, r)$, которые являются линейной комбинацией функций $F_\pm(E, r)$. Функции дуального базиса удовлетворяют соотношению

$$\int_0^\infty dr r G_\sigma^\dagger(E, r) F_{\sigma'}(E', r) = 2\pi \delta(E - E') \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (3.57)$$

Из уравнений (3.52), (3.56) мы получаем

$$G_\pm(E, r) = \frac{F_\pm - \gamma F_\mp}{1 - \gamma^2}. \quad (3.58)$$

Используя уравнение (3.51), мы получаем асимптотики функций G_\pm :

$$G_\pm(E, r) \rightarrow \frac{e^{\mp i(Er + \eta)/2}}{2\sqrt{r}} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Видно, что асимптотики функций G_\pm соответствуют сходящейся и расходящейся сферическим волнам. Это свойство важно при рассмотрении нестационарной задачи.

Ранее мы отмечали, что собственные функции гамильтониана H_V , см. (3.3), рассматривались в работе [60]. Однако результаты, полученные нами в этой главе, существенно отличаются от результатов работы [60]. Хотя решения, найденные в работе [60], имеют сингулярности, авторы этой работы утверждают, что “эти неаналитичности дают конечный вклад в вероятность”. Мы показали, что данное утверждение неверно, см. обсуждение после формулы (3.42).

Кроме того, функции, полученные в работе [60], не образуют полного набора, поскольку авторы просмотрели дополнительное вырождение спектра в области $0 < E < V_{\max}$. Поэтому набор функций, найденный в работе [60], не может использоваться для решения задачи эволюции волнового пакета.

3.1.2 Нестационарная задача

Стационарные решения, полученные в предыдущей главе для случая $m \neq 0$, имеют сингулярное поведение в точке $r = r_*$. Такое поведение должно отражаться во временной эволюции волнового пакета. Отметим, что уравнение (3.15) имеет вид, разрешенный относительно производной $\partial_t F$. Кроме того, коэффициенты дифференциального оператора \hat{H}_r в правой части уравнения являются гладкими функциями на интервале $(0, \infty)$. Поэтому для подходящего начального и граничного условий задача поиска решения функции $F(t, r)$ хорошо поставлена.

Мы выбираем начальное условие в виде

$$F(0, r) = \frac{C}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\frac{E_0 r}{2}} \Omega\left(\frac{r - r_0}{\Delta}\right), \quad (3.60)$$

$$\Omega(x) = (1 - x^2)^2 \theta(1 - x^2), \quad (3.61)$$

где C – нормировка, определяемая условием $\int_0^\infty dr r |F|^2 = 1$. Данное начальное условие соответствует постановке задачи рассеяния, в которой начальный волновой пакет имеет среднюю энергию E_0 , ширину Δ и движется от точки r_0 к нулю, см., например, (3.51). Далее мы полагаем, что $r_0 \gg \Delta \gg |E_0|^{-1}$, то есть ширина пакета в координатном пространстве мала по сравнению с начальным положением пакета, а его ширина в импульсном пространстве мала по сравнению со средней энергией E . Для случая локализованного потенциала $V(r)$, который спадает до нуля на масштабе $r \sim R$, мы также полагаем $\Delta \gg R$. Выполнив численное интегрирование уравнения (3.15) по переменной t , мы находим $F(t, r)$. Начальный пакет с энергией E_0 больше V_{\max} ($E_0 - V_{\max} \gg 1/\Delta$) или меньше нуля ($-E_0 \gg 1/\Delta$) движется со скоростью $2v_F$ (2 в наших едини-

цах), приходит на малые расстояния, отражается и уходит на бесконечность. Нормировка уходящего на бесконечность пакета совпадает с нормировкой падающего пакета. Такое поведение похоже на поведение волнового пакета, движение которого подчиняется безмассовому уравнению Дирака в центральном поле.

Эволюция волнового пакета с энергией E_0 , лежащей в глубине интервала $(0, V_{\max})$, существенно другая. Для такого волнового пакета в процессе рассеяния возникает узкий пик в точке $r_*(E_0)$. Форма пика стабилизируется на больших временах. Нормировка уходящего пакета меньше нормировки падающего. Однако полная нормировка, с учетом нормировки возникшего пика вблизи точки $r_*(E_0)$, сохраняется. Этот пик соответствует “прилипшей” частице. Для того чтобы это продемонстрировать мы изобразили на рис. 3.1 эволюцию волнового пакета (3.60) в кулоновском потенциале $V(r) = \alpha/r$. Можно увидеть, что после

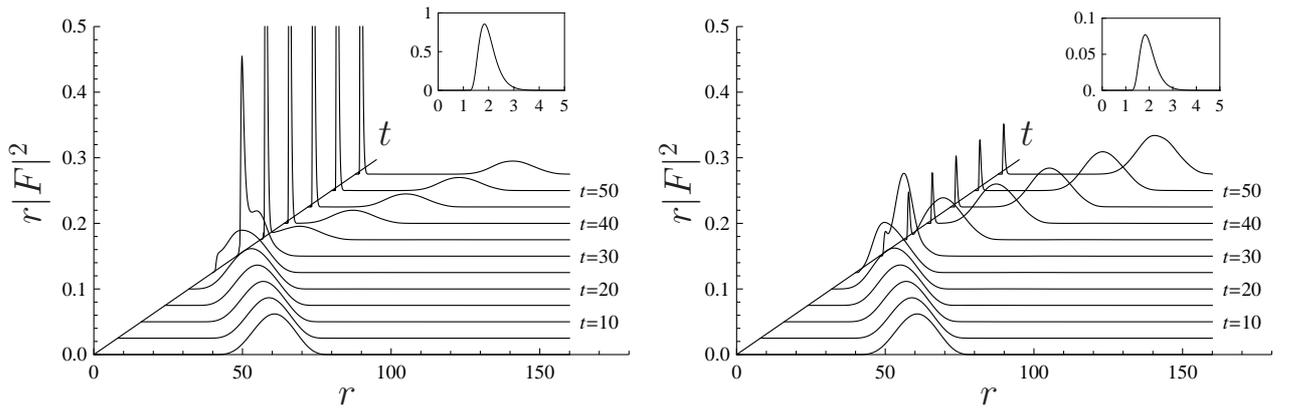


Рисунок 3.1 — Временная эволюция плотности, отвечающая волновому пакету (3.60) в кулоновском потенциале $V(r) = \alpha/r$, при следующих параметрах $E_0 = 1$, $r_0 = 60$, $\Delta = 20$, $\alpha = 2$, $m = 1$ (левых рисунок) и $m = 2$ (правый рисунок). Вставки: формы пиков на больших временах.

отражения возникает узкий пик в точке $r_* = \alpha/E_0$.

Метод разложения по собственным функциям. Для того чтобы глубже понять описанное поведение волнового пакета, мы исследуем его эволюцию методом разложения начального волнового пакета по собственным функциям

гамильтониана. Разложение имеет следующий вид:

$$F(t, r) = \int_0^{V_{\max}} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} [C_+(E) F_+(E, r) + C_-(E) F_-(E, r)] + \int_{-\infty}^0 \frac{dE}{2\pi} C(E) e^{-iEt} F_1(E, r) + \int_{V_{\max}}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} C(E) e^{-iEt} F_1(E, r). \quad (3.62)$$

Коэффициенты $C(E)$ и $C_{\pm}(E)$ выражаются через начальные условия следующим образом:

$$C(E) = \int_0^{\infty} dr r F_1^{\dagger}(E, r) F(0, r), \quad (3.63)$$

$$C_{\pm}(E) = \int_0^{\infty} dr r G_{\pm}^{\dagger}(E, r) F(0, r). \quad (3.64)$$

Отметим, что коэффициенты $C_{\pm}(E)$ перед функциями $F_{\pm}(E, r)$ в разложении (3.62) выражаются через интеграл перекрытия функции $F(0, r)$ с функциями $G_{\pm}^{\dagger}(E, r)$ дуального базиса. Обсудим разложение волнового пакета (3.60) с энергией E_0 , находящейся в глубине интервала $(0, V_{\max})$ и при условиях $V_{\max} - E_0 \gg 1/\Delta$ и $E_0 \gg 1/\Delta$. В этом случае главный вклад в интегралы, в формулах (3.63) и (3.64), дает область больших расстояний $r \sim r_0$. Поэтому для вычислений коэффициентов $C(E)$ и $C_{\pm}(E)$, можно использовать асимптотики (3.44) и (3.51). Мы получаем, что коэффициенты $C(E)$ и $C_-(E)$ подавлены вследствие быстрых осцилляций подынтегрального выражения. Мы опускаем соответствующие им вклады в уравнении (3.62). Коэффициенты $C_+(E)$ имеют вид:

$$C_+(E) = \tilde{C}(E) \exp(iEr_0/2) \tilde{\Omega} \left(\frac{(E - E_0) \Delta}{2} \right), \quad (3.65)$$

$$\tilde{\Omega}(q) = \int dx \exp(iqx) \Omega(x) = \frac{16}{q^5} [(3 - q^2) \sin q - 3q \cos q], \quad (3.66)$$

$$\tilde{C}(E) = \frac{\sqrt{\Delta/2}}{\sqrt{\int dx \Omega^2(x)}} e^{-i(E_0 r_0 - \eta(E))/2} = \sqrt{\frac{315\Delta}{512}} e^{-i(E_0 r_0 - \eta(E))/2}. \quad (3.67)$$

Функция $\tilde{\Omega}\left(\frac{(E-E_0)\Delta}{2}\right)$ пикована вблизи точки $E = E_0$ и имеет ширину порядка $1/\Delta$, а $\tilde{C}(E)$ – некоторая медленно меняющаяся функция энергии. Поэтому функция $F(t,r)$ представляется в следующем виде:

$$F(t,r) = \tilde{C}(E_0) \int_0^{V_{\max}} \frac{dE}{2\pi} e^{-iE\tau} \tilde{\Omega}\left(\frac{(E-E_0)\Delta}{2}\right) F_+(E,r), \quad (3.68)$$

где $\tau = t - r_0/2$.

Покажем, что данное разложение приводит к возникновению пика на больших временах вблизи точки $r = r_*(E_0)$. Для этого рассмотрим асимптотический вид функции $F(t,r)$ для времен t и координат r , удовлетворяющих условиям $|2t - r_0| \gg \Delta$ и $r_* |V'(r_*)| |r - r_*| \ll 1$, соответственно. Оставляя в функции $F_+(E,r)$, см. (3.46), только сингулярную компоненту

$$f_+(E,r) = \frac{2md_+(E,r)}{r(V(r) - E - i0)}, \quad (3.69)$$

и используя равенство (3.49), мы получаем

$$f(t,r) \approx \frac{2m\tilde{C}(E_0)}{r} \int_0^{V_{\max}} \frac{dE}{2\pi} e^{-iE\tau} \tilde{\Omega}\left(\frac{(E-E_0)\Delta}{2}\right) \times \left(\text{P}\frac{1}{V-E} + i\pi\delta(V-E)\right) d_+(E,r). \quad (3.70)$$

Переходя к переменной $\varepsilon = E - V$, получаем, что

$$f(t,r) \approx \frac{2m\tilde{C}(E_0)}{r} e^{-iV\tau} \int_{L_1}^{L_2} \frac{d\varepsilon}{2\pi} e^{-i\tau\varepsilon} \tilde{\Omega}\left(\frac{\Delta(V-E_0+\varepsilon)}{2}\right) \times \left(i\pi\delta(\varepsilon) - \text{P}\frac{1}{\varepsilon}\right) d_+(V+\varepsilon,r), \quad (3.71)$$

где $L_1 = -V$, $L_2 = V_{\max} - V$. Поскольку $|\tau| \gg \Delta$ и $|\tau L_{1,2}| \gg 1$, мы переписываем (3.71) в виде

$$f(t, r) \approx \frac{2m\tilde{C}(E_0)}{r} e^{-iV\tau} \tilde{\Omega} \left(\frac{\Delta(V - E_0)}{2} \right) d_+(V, r) \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} e^{-i\tau\varepsilon} \left(i\pi\delta(\varepsilon) - \text{P} \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (3.72)$$

Используя то, что оставшийся интеграл равен $i\theta(\tau)$, получаем асимптотику функции $f(t, r)$ при $|\tau| = |t - r_0/2| \gg \Delta$:

$$f(t, r) \approx \frac{2im\tilde{C}(E_0)}{r} e^{-iV\tau} \tilde{\Omega} \left(\frac{\Delta(V - E_0)}{2} \right) d_+(V, r) \theta(\tau). \quad (3.73)$$

Заметим, что правая часть уравнения (3.73) исчезает для $\tau \ll -\Delta$ и главная асимптотика функции $F(t, r)$ набирается из вкладов несингулярных частей. Однако мы можем утверждать, что эта асимптотика не имеет пика вблизи точки $r_*(E_0)$. Для $\tau \gg \Delta$, плотность $|F|^2 \approx |f|^2$ не зависит от τ и имеет пик, так как содержит множитель $\tilde{\Omega}$, который имеет ширину $\delta \sim 1/|V'(r_*)\Delta|$. Таким образом, мы продемонстрировали, что метод разложения по собственным функциям гамильтониана приводит к возникновению пика на больших временах. Это согласуется с результатами прямого численного решения дифференциального уравнения. Для кулоновского потенциала мы также проверили численно, что временная эволюция, полученная методом разложения по собственным функциям, совпадает с эволюцией, полученной прямым численным решением дифференциального уравнения, см. рис. 3.1.

Коэффициент адгезии. Рассмотрим величину

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^L dr r |F(t, r)|^2. \quad (3.74)$$

Верхний предел в этой формуле – некоторый фиксированный параметр, удовлетворяющий условию $L \gg r_*(E_0)$. Будем называть величину A коэффициентом адгезии, то есть вероятностью двух электронов остаться на конечном расстоянии на больших временах. Используя уравнения (3.73), (3.66), (3.67), (3.48) и

(3.55), мы получаем, что

$$A \approx \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^L dr r |f(t, r)|^2 \approx 1 - \gamma^2, \quad (3.75)$$

где $\gamma = \gamma(E_0)$. Для кулоновского потенциала $V(r) = \alpha/r$ размерностные соображения приводят к тому, что величина γ не зависит от $|E_0|$. На рис. 3.2 изображено поведение коэффициента адгезии A от параметра α для кулоновского потенциала α/r . Видно, что коэффициент A растет при изменении параметра α от 0 до его критического значения $\alpha_m = \sqrt{1 + 4m^2}$, при котором параметр ν в уравнении (3.31) равняется нулю.

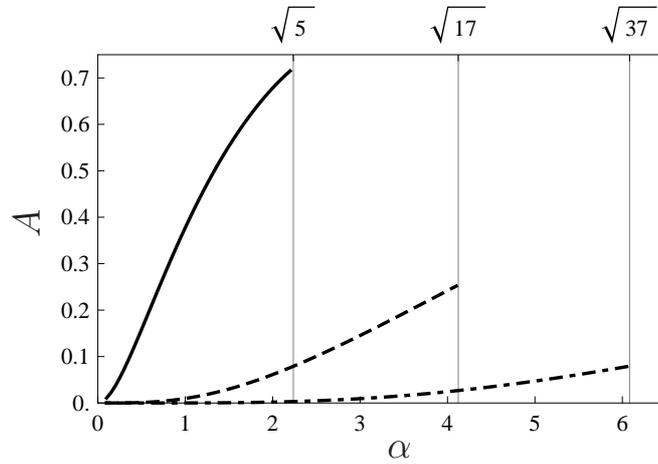


Рисунок 3.2 — Коэффициент адгезии A для кулоновского потенциала как функция α для $m = 1$ (сплошная линия), $m = 2$ (пунктирная линия), $m = 3$ (штрих-пунктирная линия). Вертикальные линии соответствуют критическим значениям параметра $\alpha_m = \sqrt{1 + 4m^2}$.

Асимптотически локализованное состояние. Численное решение уравнения (3.15) показывает, что на больших временах и фиксированных r функции $h(t, r)$ и $d(t, r)$ исчезают. Из уравнения (3.12) следует, что

$$f(t, r) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-iV(r)t} f_0(r),$$

где $f_0(r)$ — некоторая функция r . Такой вид асимптотики также согласуется с решением (3.73). Функция $f_0(r)$ пикована вблизи точки $r = r_*$ и зависит от

формы начального волнового пакета (3.60). Данная асимптотика может рассматриваться как намек на существование нормируемого решения уравнения (3.15) с постоянной плотностью $\rho(r) = |f_0(r)|^2$. Однако уравнение (3.15) не имеет решений вида

$$F(t, r) = e^{-iV(r)t} \begin{pmatrix} f_0(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, решение в таком виде удовлетворяет уравнениям (3.12) и (3.13), но не удовлетворяет уравнению (3.14). Поэтому мы будем искать асимптотику решения уравнений (3.12)-(3.14) в виде

$$F(t, r) = e^{-iV(r)t} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} f_n(r) \\ h_n(r) \\ d_n(r) \end{pmatrix} t^{-n}. \quad (3.76)$$

Подставляя функцию $F(t, r)$ в таком виде в уравнение (3.15), получаем рекуррентные соотношения для функций $f_n(r)$, $h_n(r)$ и $d_n(r)$, которые можно использовать для выражения асимптотики (3.76) через одну функцию $f_0(r)$. В лидирующем приближении имеем

$$f(t, r) = e^{-iV(r)t} [f_0(r) + O(t^{-2})], \quad (3.77)$$

$$h(t, r) = \frac{e^{-iV(r)t}}{t} \left[\frac{imf_0(r)}{rV'(r)} + O(t^{-1}) \right], \quad (3.78)$$

$$d(t, r) = \frac{e^{-iV(r)t}}{t^3} \left[-\frac{imf_0(r)}{2rV'^2(r)} + O(t^{-1}) \right]. \quad (3.79)$$

Хотя функция $h(t, r)$ исчезает при $t \rightarrow \infty$, ее производная $\partial_r h(t, r)$ не равна нулю: $|\partial_r h(t, r)| \rightarrow |mf(r)/r|$. Вследствие такого поведения функции $h(t, r)$ уравнение (3.14) выполняется. Мы видим, что асимптотики (3.77)-(3.79) согласуются с поведением, полученным в численном решении дифференциального уравнения. Отметим, что асимптотики (3.77)-(3.79) приводят к занулению радиального и азимутального токов, см. (3.19).

Мы рассмотрели простую модель электрон-электронного взаимодействия в графене в пренебрежении возбуждениями электрон-дырка в промежуточных состояниях. Несмотря на простоту модели, она приводит к очень необычной

динамике. Мы показали как численно, так и аналитически, что в процессе рассеяния волнового пакета на больших временах возникает локализованное состояние. С точки зрения внешнего наблюдателя, данный процесс выглядит как неупругий. Причина этого феномена – дополнительное двукратное вырождение спектра гамильтониана H_r для энергий $0 < E < V_{\max}$. Это вырождение является следствием вырожденности матрицы производных в гамильтониане H_r . Хотя мы не учитывали статистику Ферми при исследовании взаимодействия, требования статистики можно удовлетворить подходящим выбором спиновой части волновой функции.

Для простоты мы рассматривали состояния с определенным J^z . Очевидно, что наблюдаемое явление (возникновение локализованного состояния) останется и для суперпозиции состояний с различными J^z . Наше рассмотрение не применимо для ненулевого полного импульса двух электронов ($\mathbf{P} \neq 0$), но похоже, что возникновение локализованного состояния будет происходить и в этом случае, поскольку матрица при производной по переменной r в гамильтониане H_V , см. (3.3), также вырождена.

Как мы отмечали выше, в графене есть две независимых дираковских точки в зоне Бриллюэна (два независимых дираковских конуса). Строго говоря, гамильтониан H_V описывает взаимодействие двух электронов из одного конуса. Гамильтониан H'_V , описывающий взаимодействие электронов из разных дираковских конусов, может быть получен из H_V заменой $\sigma_2 \rightarrow \sigma_2^*$. Однако такой гамильтониан сводится к гамильтониану H_V преобразованием $\sigma_2^x H'_V \sigma_2^x = H_V$ и поэтому описывает такую же динамику. В принципе, потенциал взаимодействия электронов из разных конусов может немного отличаться от потенциала для электронов из одного конуса, но это отличие не может привести к существенно другой динамике.

Отметим еще раз, данная модель не учитывает наличие электронов ниже поверхности Ферми. Данные эффекты мы учтем в следующей главе. Однако в случае, когда $E_F < 0$ и $|E_F| \gg E_0$, эффекты, связанные с наличием электронов под поверхностью Ферми, малы, где E_F – разница между энергией Ферми и энергией дираковской точки. Поэтому возможно, что существует способ наблюдать локализованные состояния в графене. Отметим, однако, что дифференциальное уравнение (3.4) не учитывает эффекты конечности шага решетки $l_0 \sim 0.14\text{nm}$, поэтому уравнение (3.8) справедливо в случае, когда волновая

функция слабо меняется на размере l_0 . Это дает нам два условия: ширина локализованного состояния должна быть много больше шага решетки и изменение фазы на размере шага решетки должно быть мало по сравнению с единицей. Первое условие дает ограничение на дисперсию энергии волнового пакета:

$$\delta E \gg |V'(r_*)| l_0.$$

Из уравнения (3.73) следует, что на больших временах фаза волновой функции существенно меняется на размере шага решетки. Это условие дает ограничение на нижнюю границу времени жизни τ_0 локализованного состояния:

$$\tau_0 \sim \frac{1}{l_0 |V'(r_*)|} \gg 1/\delta E. \quad (3.80)$$

Поэтому локализованное состояние живет достаточно долго. Для кулоновского потенциала эти условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta E &\gg \frac{E_0^2 l_0}{\alpha}, \\ \tau_0 &\sim \frac{\alpha}{l_0 E_0^2}. \end{aligned}$$

Первое условие совместимо с условием $\delta E \ll E_0$. Для $E_0 \sim 1$ мэВ, и $\alpha \sim 1$ мы получаем достаточно большое время жизни $\tau_0 \sim 1$ мкс. Отметим, однако, что при получении оценки предполагалось, что такого параметра, как E_F в задаче нет. Как будет показано ниже, при учете существования поверхности Ферми, оценка времени жизни зависит от E_F . Приступим к исследованию влияния поверхности Ферми на электрон-электронное взаимодействие в графене.

3.2 Влияние поверхности Ферми на взаимодействие двух электронов в графене

Начнем рассмотрение с получения волнового уравнения для двух электронов с учетом взаимодействия электрон-дырка. Для этого рассмотрим уравнение Бете-Солпитера для двухчастичной функции $\Phi(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1 | \varepsilon_2, \mathbf{p}_2)$ в лидирующем при-

ближении по потенциалу взаимодействия (см. [3]):

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1 | \varepsilon_2, \mathbf{p}_2) &= iG(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1)G(\varepsilon_2, \mathbf{p}_2) \times \\ &\quad \int \frac{d\mathbf{q} d\omega}{(2\pi)^3} \tilde{V}(q) \Phi(\varepsilon_1 + \omega, \mathbf{p}_1 + \mathbf{q} | \varepsilon_2 - \omega, \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}), \\ G(\varepsilon_i, \mathbf{p}_i) &= \frac{1}{\varepsilon_i - \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{p}_i + i0 \operatorname{sgn}(\varepsilon_i - E_F)}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

где $\tilde{V}(q)$ – Фурье образ потенциала, $G(\varepsilon, \mathbf{p})$ – одночастичная функция Грина электрона в графене, E_F – энергия Ферми, которая отсчитывается от энергии дираковской точки. Выполняя замену $\varepsilon_1 = E/2 + \Omega$, $\varepsilon_2 = E/2 - \Omega$ в уравнении (3.81) и интегрируя по переменной Ω , мы получаем

$$\begin{aligned} \Xi(E, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= i \int \frac{d\Omega}{2\pi} G\left(\frac{1}{2}E + \Omega, \mathbf{p}_1\right) G\left(\frac{1}{2}E - \Omega, \mathbf{p}_2\right) \\ &\quad \times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q) \Xi(E, \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}, \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (3.82)$$

где

$$\Xi(E, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int \frac{d\Omega}{2\pi} \Phi\left(\frac{1}{2}E + \Omega, \mathbf{p}_1 | \frac{1}{2}E - \Omega, \mathbf{p}_2\right).$$

Интегрируя в правой части уравнения (3.82) по переменной Ω , получаем волновое уравнение на функцию $\Xi(E, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$:

$$\begin{aligned} (E - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2) \Xi(E, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= \frac{1}{2} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \vartheta(p_1 - |E_F|) + \right. \\ &\quad \left. \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \vartheta(p_2 - |E_F|) - \operatorname{sgn}(E_F) [\vartheta(|E_F| - p_1) + \vartheta(|E_F| - p_2)] \right\} \times \\ &\quad \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q) \Xi(E, \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}, \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (3.83)$$

где $\mathbf{n}_1 = \mathbf{p}_1/p_1$ и $\mathbf{n}_2 = \mathbf{p}_2/p_2$. Данное уравнение справедливо для любых \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и E_F .

Как и в предыдущей главе, мы будем рассматривать случай нулевого полного импульса системы, то есть $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. В этом случае уравнение (3.83)

принимает следующий вид:

$$(E - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p})\chi(E, \mathbf{p}) = K \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q)\chi(E, \mathbf{p} + \mathbf{q}),$$

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \vartheta(p - |E_F|) - \text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p), \quad (3.84)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2$, а $\chi(E, \mathbf{p}) = \Xi(E, \mathbf{p}, -\mathbf{p})$.

Уравнение непрерывности. Для того, чтобы у уравнения (3.84) была физическая интерпретация, необходимо найти уравнение непрерывности на сохраняющиеся плотность и ток. Для этого мы вводим следующие проекторы:

$$\Lambda^{\pm\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{4}(1 \pm \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(1 \mp \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}) \quad (3.85)$$

и операторы:

$$\begin{aligned} L_1(\mathbf{p}) &= \vartheta(p - |E_F|)\Lambda^{++}(\mathbf{p}) + \vartheta(-E_F)\vartheta(|E_F| - p), \\ L_2(\mathbf{p}) &= \vartheta(p - |E_F|)\Lambda^{--}(\mathbf{p}) + \vartheta(E_F)\vartheta(|E_F| - p), \\ L_3(\mathbf{p}) &= \vartheta(p - |E_F|)\Lambda^{+-}(\mathbf{p}), \quad L_4(\mathbf{p}) = \vartheta(p - |E_F|)\Lambda^{-+}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Последние также являются проекторами, то есть удовлетворяют соотношениям $L_i L_j = \delta_{ij} L_i$ и $\sum_{i=1}^4 L_i = 1$. Также мы вводим следующие функции:

$$\begin{aligned} \chi_+(E, \mathbf{p}) &= L_1(\mathbf{p})\chi(E, \mathbf{p}), \quad \chi_-(E, \mathbf{p}) = L_2(\mathbf{p})\chi(E, \mathbf{p}), \\ \chi_{+-}(E, \mathbf{p}) &= L_3(\mathbf{p})\chi(E, \mathbf{p}), \quad \chi_{-+}(E, \mathbf{p}) = L_4(\mathbf{p})\chi(E, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Отметим, что

$$\chi = \chi_+ + \chi_- + \chi_{+-} + \chi_{-+}. \quad (3.88)$$

Из уравнения (3.84) следует, что $\chi_{+-}(E, \mathbf{p}) = \chi_{-+}(E, \mathbf{p}) = 0$, поэтому $\chi = \chi_+ + \chi_-$. Подставляя функцию χ в виде (3.88) в (3.84), мы получаем уравнения

на функции $\chi_+(E, \mathbf{p})$ и $\chi_-(E, \mathbf{p})$

$$\begin{aligned} (E - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_+(E, \mathbf{p}) &= L_1(\mathbf{p}) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q)\chi(E, \mathbf{p} + \mathbf{q}), \\ (E - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_-(E, \mathbf{p}) &= -L_2(\mathbf{p}) \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q)\chi(E, \mathbf{p} + \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Выполняя Фурье преобразование этого уравнения по переменным энергия и импульс, получаем зависящее от времени уравнение на волновую функцию $\psi_{\pm}(t, \mathbf{r})$ в координатном представлении

$$\begin{aligned} (i\partial_t - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \psi_{\pm}(t, \mathbf{r}) &= \pm \int d\mathbf{r}' Q_{\pm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(r') \psi(t, \mathbf{r}'), \\ Q_+(\mathbf{r}) &= \vartheta(-E_F) f_0 + f_1 + f_2, \quad Q_-(\mathbf{r}) = \vartheta(E_F) f_0 - f_1 + f_2, \\ f_0 &= \frac{y J_1(y)}{2\pi r^2}, \quad f_1 = i \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{y}}{8\pi r^2 y} \left[y J_0(y) + 1 - \int_0^y J_0(x) dx \right] \\ f_2 &= \frac{1}{4} \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{y J_1(y)}{2\pi r^2} \right] \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{2} \right) \\ &+ \frac{2(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{y})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{y}) - y^2 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{16\pi r^2 y^2} [2J_0(y) + y J_1(y)], \end{aligned} \quad (3.90)$$

где функции $\psi_{\pm}(t, \mathbf{r})$ являются Фурье образами функций $\chi_{\pm}(E, \mathbf{p})$, $\psi(t, \mathbf{r}) = \psi_+(t, \mathbf{r}) + \psi_-(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{y} = |E_F| \mathbf{r}$. Операторы $Q_+(\mathbf{r})$ и $Q_-(\mathbf{r})$ являются Фурье образами проекторов $L_1(\mathbf{p})$ и $L_2(\mathbf{p})$ в координатном представлении. Из уравнения (3.90) следует, что волновая функция $\psi(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$(i\partial_t - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \psi(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' [Q_+(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - Q_-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] V(r') \psi(t, \mathbf{r}'), \quad (3.91)$$

которое в пределе $E_F \rightarrow -\infty$ переходит в уравнение (3.4).

Используя (3.90), мы находим уравнение непрерывности

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t, \mathbf{r}) + \text{div} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) + F(t, \mathbf{r}) &= 0, \\ \rho &= \psi_+^+ \psi_+ - \psi_-^+ \psi_-, \quad \mathbf{j} = \psi_+^+ \boldsymbol{\Sigma} \psi_+ - \psi_-^+ \boldsymbol{\Sigma} \psi_-, \\ F &= 2 \text{Im} \int d\mathbf{r}' V(r') [\psi_+^+(t, \mathbf{r}) Q_+(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \psi_-^+(t, \mathbf{r}) Q_-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \psi(t, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Пользуясь тем, что Q_+ и Q_- являются проекторами и эрмитовыми операторами, можно доказать следующее соотношение:

$$\int d\mathbf{r} F(t, \mathbf{r}) = 2 \operatorname{Im} \int d\mathbf{r}' V(r') \psi^+(t, \mathbf{r}') \psi(t, \mathbf{r}') = 0. \quad (3.93)$$

Поэтому величина $\int d\mathbf{r} \rho(t, \mathbf{r})$ не зависит от времени. Уравнение (3.92) может быть записано в более привычном виде:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t, \mathbf{r}) + \operatorname{div} \mathbf{j}_{tot}(t, \mathbf{r}) &= 0, \\ \mathbf{j}_{tot} &= \mathbf{j} + \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} F(r'). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Существование уравнения неразрывности позволяет трактовать функцию $\psi(t, \mathbf{r})$ как волновую функцию двух электронов. Поскольку $\rho(t, \mathbf{r})$ не является положительно определенной величиной, мы не можем трактовать ее как плотность вероятности, но можем рассматривать величину $e\rho(t, \mathbf{r})$ как локальную плотность заряда (e – заряд электрона).

3.2.1 Временная эволюция волнового пакета

Исследование временной эволюции волнового пакета удобно проводить в импульсном пространстве. Для этого запишем уравнение для функции $\chi(t, \mathbf{p})$:

$$(i\partial_t - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p})\chi(t, \mathbf{p}) = K \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q)\chi(t, \mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad (3.95)$$

где оператор K определен в (3.84). Затем, подобно разложению волновой функции по собственным функциям оператора \hat{J}^z , см. раздел 3.1, мы представляем $\chi(t, \mathbf{p})$ в виде:

$$\begin{aligned} \chi(t, \mathbf{p}) &= \sum_m c_m \chi_m(t, p, \varphi), \\ \chi_m(t, p, \varphi) &= e^{im\varphi} \left[a_{00}(t, p) |0, 0\rangle + e^{-i\varphi} a_{11}(t, p) |1, 1\rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{i\varphi} a_{1-1}(t, p) |1, -1\rangle + g(t, p) |1, 0\rangle \right], \end{aligned} \quad (3.96)$$

где c_m – некоторые константы, а функция $\chi_m(t, p, \varphi)$ является собственной функцией оператора

$$J^z = T^z - i\partial_\varphi$$

с собственным значением m , а $|1, k\rangle$ и $|0, 0\rangle$ являются собственными функциями операторов \mathbf{T}^2 и T^z . Рассмотрим эволюцию функции $\chi_m(t, p, \varphi)$. Как и в предыдущей главе, удобно перейти от функций a_{ij} к функциям f, h , и d :

$$f = \frac{a_{11} + a_{1-1}}{\sqrt{2}}, \quad h = \frac{a_{11} - a_{1-1}}{\sqrt{2}}, \quad d = a_{00}, \quad (3.97)$$

которые удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} i\partial_t f &= -\text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p) \left[\hat{U}_+ f + \hat{U}_- h \right], \\ i\partial_t h &= -2pd - \text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p) \left[\hat{U}_- f + \hat{U}_+ h \right] - \vartheta(p - |E_F|)\hat{U}_0 d, \\ i\partial_t d &= -2ph - \vartheta(p - |E_F|) \left[\hat{U}_- f + \hat{U}_+ h \right] - \text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p)\hat{U}_0 d, \\ i\partial_t g &= -\text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p)\hat{U}_0 g. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{U}_\pm H &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dk k [V_{m-1}(p, k) \pm V_{m+1}(p, k)] H(k), \\ \hat{U}_0 H &= \int_0^\infty dk k V_m(p, k) H(k), \\ V_m(p, k) &= \int_0^\infty dr r V(r) J_m(pr) J_m(kr), \end{aligned}$$

где $H(k)$ произвольная функция. В случае $E_F \rightarrow -\infty$, мы получаем

$$\begin{aligned} i\partial_t f &= \hat{U}_+ f + \hat{U}_- h, \quad i\partial_t h = -2pd + \hat{U}_- f + \hat{U}_+ h, \\ i\partial_t d &= -2ph + \hat{U}_0 d, \quad i\partial_t g = \hat{U}_0 g. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Данная система исследовалась в координатном представлении в предыдущей главе, где было показано, что рассеяние волнового пакета с $m \neq 0$ приводит к появлению локализованного состояния. Это происходит потому, что в первом уравнении системы (3.99), записанной в координатном представлении, отсут-

ствуется слагаемое с оператором дифференцирования по переменной координаты r . Это приводит к тому, что это уравнение является уравнением связи. Ниже мы хотим проследить, останется ли локализованное состояние, возникающее при рассмотрении гамильтониана (3.3), в случае конечной энергии Ферми E_F .

Отметим, что система (3.98) при $m = 0$ не проявляет необычных свойств при любой энергии Ферми. Это происходит потому, что в случае $m = 0$ мы получаем, что $U_- = 0$ и система (3.98) переходит в

$$\begin{aligned} i\partial_t f &= -\text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p)\hat{U}_+ f, \\ i\partial_t h &= -2pd - \text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p)\hat{U}_+ h - \vartheta(p - |E_F|)\hat{U}_0 d, \\ i\partial_t d &= -2ph - \vartheta(p - |E_F|)\hat{U}_+ h - \text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p)\hat{U}_0 d, \\ i\partial_t g &= -\text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p)\hat{U}_0 g. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Видно, что система распалась на независимые уравнения для функций f и g и систему для двух функций h и d . Можно показать, что функции f и g при $m = 0$ затухают быстрее, чем $1/\sqrt{r}$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому они не имеют отношения к задаче рассеяния. А в системе уравнений для функций h и d отсутствует уравнение связи, и поэтому необычное поведение также отсутствует. Ниже мы будем исследовать более интересный случай, отвечающий $m \neq 0$.

Рассмотрим сходящийся на $t \rightarrow -\infty$ волновой пакет со средней энергией $E > \max(0, E_F)$ и некоторой шириной δl в координатном пространстве, такой, что разброс по энергии $\delta E \sim 1/\delta l$ и $\delta E \ll E$. Для того чтобы проследить эволюцию такого пакета, мы исследуем поведение плотности $\rho(t, r)$, см. (3.92), при различных E_F . Для этого мы вначале решаем систему (3.98), затем переходим в координатное представление, выполняя преобразование Фурье. В результате получаем плотность $\rho(t, r) = \rho_+(t, r) - \rho_-(t, r)$ в координатном представлении, которая отвечает функции $\chi_m(t, p, \phi)$:

$$\begin{aligned} \rho_{\pm}(t, r) &= |a_{\pm}|^2 + |b_{\pm}|^2 + 2|c_{\pm}|^2, \\ \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \\ c_+ \end{pmatrix} &= \int_{|E_F|}^{\infty} dp p (h - d) \begin{pmatrix} J_{m-1} \\ J_{m+1} \\ J_m \end{pmatrix} + 2\vartheta(-E_F) \int_0^{|E_F|} dp p \begin{pmatrix} (h + f)J_{m-1} \\ (h - f)J_{m+1} \\ -dJ_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_- \\ b_- \\ c_- \end{pmatrix} = \int_{|E_F|}^{\infty} dp p(h+d) \begin{pmatrix} J_{m-1} \\ J_{m+1} \\ J_m \end{pmatrix} + 2\vartheta(E_F) \int_0^{|E_F|} dp p \begin{pmatrix} (h+f)J_{m-1} \\ (h-f)J_{m+1} \\ dJ_m \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

где аргументы функций Бесселя равны pr , а функции f , h и d являются решением уравнений (3.98). Отметим, что функция $g(t,r)$ не имеет отношения к задаче рассеяния при любом m , поэтому мы ее опустили в уравнении (3.101).

Рассмотрим процесс рассеяния при нескольких значениях E_F . В случае $E_F = 0$, система (3.98) примет простой вид:

$$\begin{aligned} i\partial_t f &= 0, & i\partial_t g &= 0, \\ i\partial_t h &= -2pd - \hat{U}_0 d, & i\partial_t d &= -2ph - \hat{U}_- f - \hat{U}_+ h. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Функции f и g не зависят от времени, поэтому они не связаны с задачей рассеяния, и мы можем положить их равными нулю. Таким образом, мы получаем систему уравнений:

$$i\partial_t h = -2pd - \hat{U}_0 d, \quad i\partial_t d = -2ph - \hat{U}_+ h. \quad (3.103)$$

В отличие от системы (3.99) для случая $E_F = -\infty$, система (3.103) не имеет уравнений связи, поэтому локализованные состояния не возникают в процессе рассеяния. Это утверждение также верно и для случая $m = 0$ при любом значении параметра E_F . Для случая $m \neq 0$ и конечным значением $E_F < 0$ возникает долгоживущее локализованное состояние. Время жизни этого состояния зависит от E_F и формы потенциала, см. ниже.

Для того чтобы понять качественное отличие решений уравнений (3.90) и (3.4), мы вначале рассмотрим рассеяние на локализованном потенциале, а затем на кулоновском потенциале. Рассмотрим локализованный потенциал

$$V(r) = u_0 \exp[-r^2/R^2] \quad (3.104)$$

с параметром $u_0 > 0$. Также мы примем, что разброс энергий в волновом пакете удовлетворяет условию $\delta E \ll u_0$. На рис. 3.3 изображена временная эволюция функции $r\rho(t,r)$, см. (3.92), для рассеяния волнового пакета с параметрами

$m = 1$, $\delta E = 0.1$, $E = 4$ (левый рисунок) и $E = 2$ (правый рисунок) в потенциале с параметрами $u_0 = 3$ и $R = 2$ в случае $E_F = 0$. Видно, что локализованного

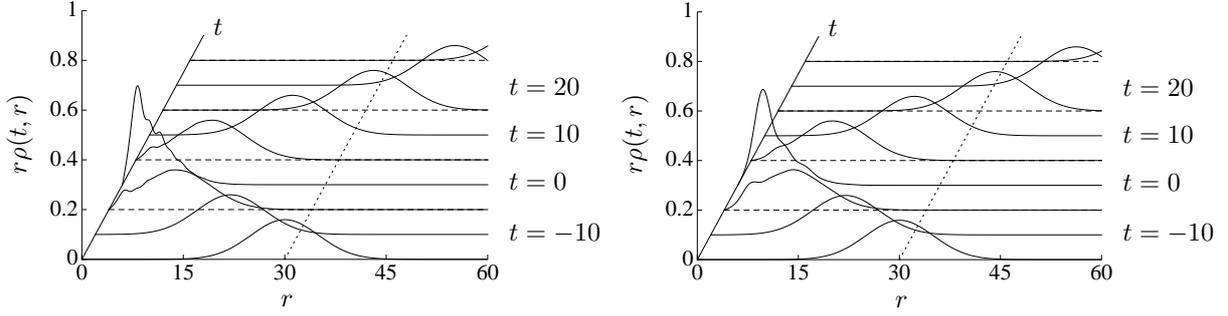


Рисунок 3.3 — Временная эволюция функции $r\rho(t, r)$ для волнового пакета с параметрами $m = 1$, $\delta E = 0.1$, $E = 4$ (левый рисунок) и $E = 2$ (правый рисунок) в потенциале (3.104) с параметрами $u_0 = 3$, $R = 2$; $E_F = 0$.

состояния не возникает, а форма уходящего пакета похожа на форму падающего. Кроме того, сохраняется нормировка $\int dr r \rho(-\infty, r) = \int dr r \rho(\infty, r)$. Данное утверждение справедливо для обоих случаев $E > u_0$ и $E < u_0$. В случае $E_F = -6$ и тех же параметрах падающего пакета и потенциала эволюция функции $r\rho(t, r)$ показана на рис. 3.4. Данная картина типична для эволюции волнового пакета при ненулевой отрицательной энергии Ферми. В случае $E > u_0$ (левый рисунок) мы видим, что уходящий пакет имеет форму, похожую на форму падающего пакета и имеет ту же нормировку. В случае $E < u_0$ (правый рисунок) картина рассеяния существенно другая. Когда падающий пакет приходит в область ненулевого потенциала, возникает долгоживущий локализованный пик вблизи точки $r = r_*$. Затем часть пакета уходит, а пик распадается в набор следующих друг за другом волновых пакетов. При $t \rightarrow \infty$ пик распадается, а полная нормировка всех уходящих пакетов совпадает с нормировкой падающего пакета. При $E_F \rightarrow -\infty$ время жизни пакета стремится к бесконечности с

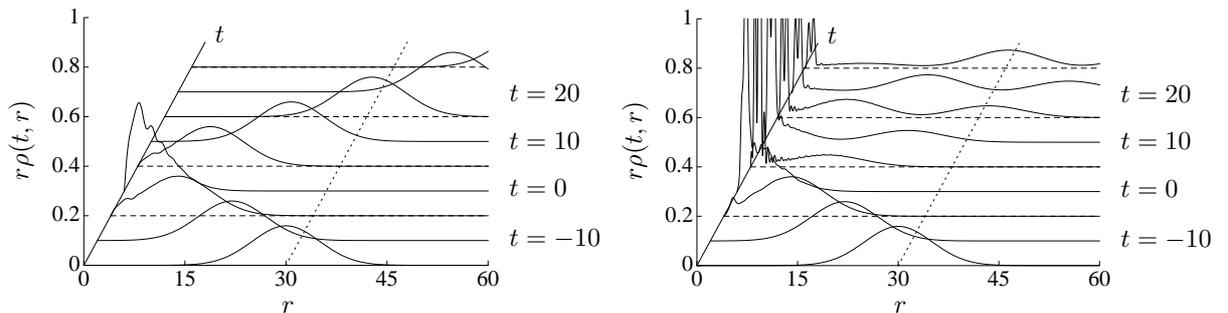


Рисунок 3.4 — То же, что и на рис. 3.3 но при $E_F = -6$.

оговорками приведенными в конце раздела 3.1.2. Время жизни возникающих пиков при конечной E_F можно оценить следующим образом: $\tau \sim |E_F|/|V'(r_*)|$, где r_* определяется уравнением $E = V(r_*)$. Принимая во внимание оценку (3.80), получаем $\tau \sim \min(|E_F|, 1/l_0)/|V'(r_*)|$.

В случае, когда $E_F > 0$ и $E > E_F$, картина рассеяния эквивалентна картине рассеяния при $E_F = 0$, то есть пик не возникает.

Хотя здесь мы рассмотрели случай конкретного потенциала, мы проверили, что подобная картина возникает и в случаях других монотонно спадающих локализованных потенциалов.

Перейдем к рассмотрению кулоновского потенциала

$$V_C(r) = \frac{\alpha}{r}. \quad (3.105)$$

В этом случае картина рассеяния аналогична случаю локализованного потенциала (3.104). На рис. 3.5 изображена эволюция функции $r\rho(t,r)$ для рассеивающегося волнового пакета с параметрами $m = 1$, $\delta E = 0.1$, $E = 1$, $E_F = 0$ (левый рисунок) и $E_F = -6$ (правый рисунок) в кулоновском поле с $\alpha = 1$. Видно, что качественно процесс рассеяния в кулоновском потенциале похож на случай рассеяния в локализованном потенциале.

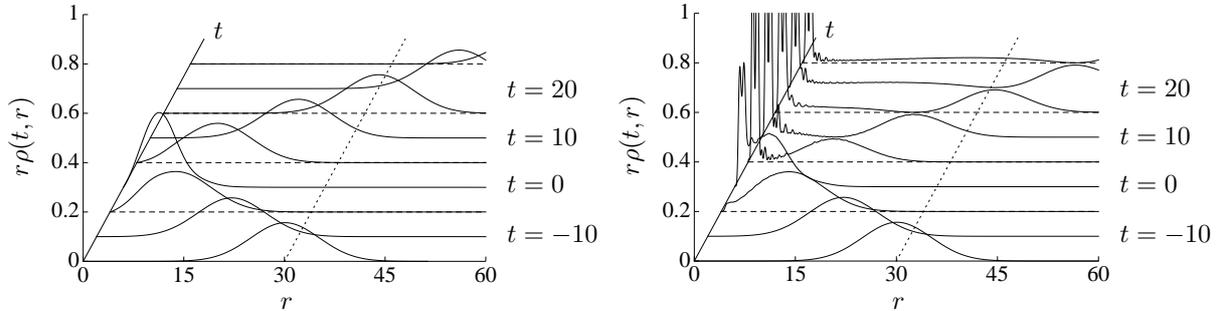


Рисунок 3.5 — Временная эволюция функции $r\rho(t,r)$ для рассеивающегося волнового пакета с параметрами $m = 1$, $\delta E = 0.1$, $E = 1$, $E_F = 0$ (левый рисунок) и $E_F = -6$ (правый рисунок) в кулоновском потенциале с параметром $\alpha = 1$.

3.2.2 Локализованные состояния в стационарной задаче

Как отмечалось выше, функции f и g при $m = 0$ не имеют отношения к задаче рассеяния. Поэтому интересно узнать, отвечают ли эти функции некоторым локализованным состояниям с определенной энергией. Данные состояния можно будет назвать связанными состояниями. Ответ на поставленный вопрос положителен. Для того чтобы показать это, рассмотрим уравнения на функции f и g при $m = 0$ и определенной энергией E :

$$Ef = -\text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p)\hat{U}_+f, \quad Eg = -\text{sgn}(E_F)\vartheta(|E_F| - p)\hat{U}_0g. \quad (3.106)$$

В частном случае потенциала (3.104), в случае $E_F < 0$ эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} Ef(p) &= \frac{u_0 R^2}{2} \vartheta(|E_F| - p) \int_0^\infty dk k e^{-R^2(p^2+k^2)/4} I_1\left(\frac{R^2 pk}{2}\right) f(k), \\ Eg(p) &= \frac{u_0 R^2}{2} \vartheta(|E_F| - p) \int_0^\infty dk k e^{-R^2(p^2+k^2)/4} I_0\left(\frac{R^2 pk}{2}\right) g(k), \end{aligned} \quad (3.107)$$

Видно, что если представить параметр E в виде $E = u_0 \mathcal{E}$, то параметр \mathcal{E} зависит от $|E_F|R$ и не зависит от величины потенциала u_0 . Далее, переходя от функций $f(p)$ и $g(p)$ к функциям $\sqrt{p}f(p)$ и $\sqrt{p}g(p)$, мы получаем интегральные уравнения с симметричным ядром. Поэтому, следуя теории интегральных уравнений, мы получаем, что для уравнений (3.107) имеется бесконечный набор ортонормированных решений с энергиями $|E_1| > |E_2| > |E_3| \dots$

Рассмотрим два предельных случая $|E_F|R \ll 1$ и $|E_F|R \gg 1$. В первом случае мы получаем, что $|E_{n+1}/E_n| \ll 1$, а вид решения f и g , отвечающие максимальным собственным значениям, равны:

$$f(p) \propto p \vartheta(|E_F| - p), \quad f(r) = \int_0^\infty dp p J_1(pr) f(p) = \frac{J_2(|E_F|r)}{r}, \quad E_1 = \frac{u_0 (|E_F|R)^4}{32};$$

$$g(p) \propto \vartheta(|E_F| - p), g(r) = \int_0^\infty dp p J_0(pr) g(p) = \frac{J_1(|E_F|r)}{r}, E_1 = \frac{u_0(|E_F|R)^2}{4}. \quad (3.108)$$

Во втором случае мы получаем $|1 - E_{n+1}/E_n| \ll 1$, а решения, отвечающие максимальному собственному значению, имеют вид:

$$\begin{aligned} f(p) \propto \vartheta(|E_F| - p), \quad f(r) &= \frac{1}{\varepsilon_F r^2} \int_0^{|E_F|r} dx x J_1(x), \quad E_1 = u_0; \\ g(p) \propto \vartheta(|E_F| - p), \quad g(r) &= \frac{1}{r} J_1(|E_F|r), \quad E_1 = u_0. \end{aligned} \quad (3.109)$$

В обоих случаях характерный размер волновых функций в координатном представлении равен $r \sim 1/|E_F|$.

В случае $m \neq 0$ локализованное решение с определенной энергией возникает только в уравнении на функцию g . В этом случае мы получаем решение для максимального собственного значения:

$$g(p) \propto p^m \vartheta(|E_F| - p), g(r) = \frac{J_{m+1}(|E_F|r)}{r}, E_1 = \frac{u_0(|E_F|R/2)^{2m+2}}{(m+1)!} \quad (3.110)$$

в случае $|E_F|a \ll 1$ и

$$g(p) \propto \vartheta(|E_F| - p), \quad g(r) = \frac{1}{|E_F|r^2} \int_0^{|E_F|r} dx x J_m(x), \quad E_1 = u_0 \quad (3.111)$$

в случае $|E_F|R \gg 1$.

Легко заметить, см. (3.106), что собственные значения E_n в случае $E_F > 0$ имеют те же абсолютные значения, что и собственные значения при $E_F < 0$, но противоположный знак. В этом случае $E_n < 0$, таким образом, $E_n < E_F$. Но поскольку все состояния ниже поверхности Ферми заняты, из принципа Паули следует, что локализованные решения при $E_F > 0$ не имеют физического смысла.

Для кулоновского потенциала (3.105), при $m = 0$ и $E_F < 0$ уравнения (3.106) имеют вид:

$$\begin{aligned} Ef(p) &= \frac{\alpha p}{2} \vartheta(|E_F| - p) \int_0^\infty dk \sqrt{k} [\vartheta(1 - k)G(1, k) + \vartheta(k - 1)G(1, 1/k)] f(pk), \\ Eg(p) &= \alpha p \vartheta(|E_F| - p) \int_0^\infty dk \sqrt{k} [\vartheta(1 - k)G(0, k) + \vartheta(k - 1)G(0, 1/k)] g(pk), \end{aligned} \quad (3.112)$$

где $G(m, x) = x^{m+1/2} {}_2F_1(m + 1/2, 1/2; m + 1; x^2)$, здесь ${}_2F_1(a, b; c; x)$ гипергеометрическая функция. Собственные значения E_n в уравнениях (3.112) могут быть представлены в виде $E_n = \alpha E_F \kappa(n)$, $n = 1, 2, \dots$, где $\kappa(n)$ не зависят от E_F и α . Зависимость функций $\kappa(n)$ от n для первого и второго уравнения (3.112) изображена на правом и левом графиках рисунка 3.6 соответственно. Данные результаты получены численно. При $n \rightarrow \infty$ функции $\kappa(n)$ стремятся к нулю. Отметим, что размер локализованных состояний в этом случае также $r \sim 1/|E_F|$. Как и в предыдущем случае, для $E_F > 0$ не существует локализованных состояний.

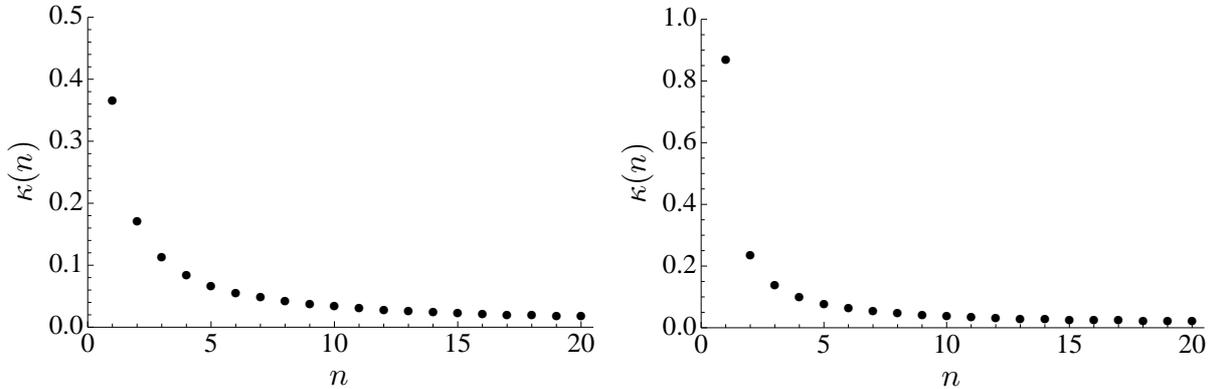


Рисунок 3.6 — Зависимость функции $\kappa(n)$ от n для первого (левый график) и второго (правый график) уравнений в (3.112).

Мы рассмотрели задачу влияния положения энергии Ферми на взаимодействия двух электронов в графене. Для этого, используя уравнение Бете-Солпитера, мы получили уравнение на волновую функцию двух электронов. Мы подробно рассмотрели это уравнение при $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, см. (3.90). В этом случае мы нашли плотность $\rho(t, \mathbf{r})$ и ток $\mathbf{j}_{tot}(t, \mathbf{r})$, удовлетворяющие уравнению

непрерывности. Мы проследили как картина рассеяния зависит от положения энергии Ферми E_F в случаях локализованного и кулоновского потенциалов. Мы показали, что при $m \neq 0$, $E_F < 0$, и $E < \max V(r)$ в случае, когда волновой пакет, отвечающий задаче рассеяния, приходит в область ненулевого потенциала, возникает долгоживущее локализованное состояние, которое затем распадается в набор волновых пакетов, следующих друг за другом. При $t \rightarrow \infty$ полная нормировка ушедших волновых пакетов совпадает с нормировкой падающего волнового пакета. Данная картина отличается от картины, возникающей в простой модели (3.4), где появившийся пик живет бесконечно долго (до тех пор, пока не возникают эффекты, связанные с конечным размером шага решетки). При $E_F \rightarrow -\infty$ простая модель и модель, полученная в рамках уравнения Бете-Солпитера, совпадают. При $E > \max V(r)$ для обеих моделей локализованное состояние не возникает. В рамках уравнения Бете-Солпитера при $m = 0$ и произвольной E_F , долгоживущее локализованное состояние не возникает в процессе рассеяния. В случае $E_F \geq 0$ никаких пиков также не возникает при любых m .

В случае $E_F < 0$ возникает бесконечный набор локализованных стационарных решений с конечной нормировкой и типичным масштабом локализации $1/|E_F|$. Данные решения не имеют отношения к задаче рассеяния. Экспериментальное наблюдение таких состояний является довольно интересной задачей.

Глава 4. Эффект разделения спина и заряда в антиферромагнетиках вблизи квантовой критической точки

Перейдем к изучению эффекта разделения спина и заряда вблизи квантовой критической точки. Пример трехмерной решеточной модели, в которой присутствуют эффекты, связанные с квантовой критической точкой, изображен на рис. 4.1. Данная модель соответствует кубическому антиферромагнетику, в каждом узле которого локализован спин $S = 1/2$, взаимодействующий с ближайшими соседями с энергиями взаимодействия $J > 0$ и $J' > 0$, см. рис. 4.1. Данная система имеет квантовую критическую точку по параметру $g = J'/J$,

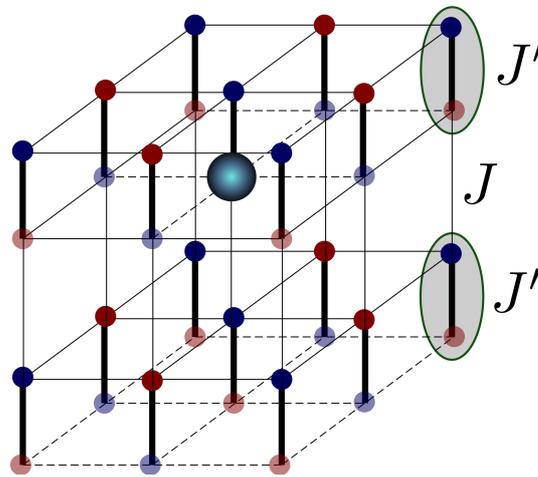


Рисунок 4.1 — Пример решеточной модели для трехмерного антиферромагнетика с квантовой критической точкой. Спин $S = 1/2$ локализован в каждом узле решетки. Тонкие линии обозначают слабую связь J , толстые линии – сильную связь J' . Квантовый фазовый переход между антиферромагнитным порядком и димеризованной парамагнитной фазой возникает при $(J'/J)_c = 4.013$ [114; 115]. Большая голубая сфера обозначает примесь (дырку), созданную в решетке.

которая находится при $g = g_c = 4.013$. Критическая точка разделяет неупорядоченную магнитную фазу спиновых димеров, которая существует при $g > g_c$, и антиферромагнитную фазу, которая реализуется при $g < g_c$ см. [114; 115]. Данная решеточная модель описывает различные свойства соединения TlCuCl_3 вблизи давления, которое отвечает квантовой критической точке при нулевом

и ненулевом внешнем магнитном поле [114]. Замена иона Cu^{2+} с $S = 1/2$ на бесспиновый Mg^{2+} создает вакансию (дырку). Это показано на рис. 4.1. Вакансия в решетке проявляет себя как примесь со спином $S = 1/2$ и создает облако намагниченности вокруг положения примеси. В этой главе мы вычисляем пространственное распределение спиновой плотности и антиферромагнитной намагниченности в спиновом облаке.

Свойства системы вблизи критической точки определяются низкоэнергетическими возбуждениями. В нашей задаче возбуждениями являются магноны в антиферромагнитной фазе и триплоны в парамагнитной фазе. В дальнейшем мы будем использовать термин магноны для обоих типов квазичастиц. Эффективная теория для магнонов в окрестности квантовой критической точки задается следующим лагранжианом (см. [4]):

$$\mathcal{L}_M = \frac{(\partial_t \phi)^2}{2} - \frac{(\nabla_i \phi_\mu)^2}{2} - \frac{\Delta_0^2 \phi^2}{2} - \frac{\alpha_0 (\phi^2)^2}{4!}, \quad (4.1)$$

где $\phi_\mu = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ – магнонное поле, $\Delta_0^2 \propto g - g_c$ – квадрат магнонной щели, α_0 – четырехмагнонная константа взаимодействия, ∂_t – производная по времени, $\nabla_i = \partial/\partial r_i$ – трехмерный градиент. В этой главе мы работаем в единицах, в которых постоянная Планка и скорость магнонов равны единице: $\hbar = c_m = 1$. Вблизи квантовой критической точки магнонная щель $\Delta_0 \rightarrow 0$.

Лагранжиан (4.1) содержит как квадратичные по полю ϕ слагаемые, так и слагаемые $\propto \phi^4$, которые описывают самодействие магнонов. Такое самодействие приводит к перенормировке магнонной щели Δ_0 в лагранжиане (4.1). Из однопетлевых ренорм-групповых вычислений [4] следует, что в неупорядоченной фазе эволюция перенормированной щели имеет вид:

$$\Delta^2 \propto \Delta_0^2 \left[\ln \frac{C(\Lambda)}{g - g_c} \right]^{-\frac{N+2}{N+8}}, \quad (4.2)$$

где в нашем случае $N = 3$, а $C(\Lambda)$ – положительная постоянная, которая определяется масштабом ультрафиолетового обрезания. Кроме того, слагаемое ϕ^4 в лагранжиане приводит к перенормировке квазичастичного вычета магнонов [4]. Однако изменение вычета появляется только в двухпетлевой ренорм-группе, поэтому мы считаем его малым. Следовательно мы отбрасываем самодействие из

лагранжиана (4.1) и заменяем голую магنونную щель на перенормированную: $\Delta_0 \rightarrow \Delta$.

Лагранжиан невзаимодействующей примеси со спином S имеет вид:

$$\mathcal{L}_{imp} = i (\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \partial_t \psi(\mathbf{r}, t) - (\partial_t \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)) \psi(\mathbf{r}, t)) , \quad (4.3)$$

где ψ является $2S + 1$ компонентным спинором. Мы полагаем энергию невзаимодействующей примеси равной нулю. Лагранжиан, описывающий взаимодействие примеси и магنونного поля в неупорядоченной области, имеет вид (см. [71]):

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{S} \psi^\dagger (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\phi}) \psi , \quad (4.4)$$

где λ – константа взаимодействия, $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ – оператор спина примеси, который действует в $(2S + 1)$ мерном гильбертовом пространстве.

Взаимодействие примеси с магнонами приводит к появлению нелокальной части спиновой плотности $\mathbf{s}(\mathbf{r})$. Для того чтобы найти $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, мы используем лагранжиан взаимодействия системы с внешним магнитным полем [116]:

$$\mathcal{L}_B = -(\partial_t \boldsymbol{\phi} \cdot [\mathbf{B} \times \boldsymbol{\phi}]) + \frac{[\mathbf{B} \times \boldsymbol{\phi}]^2}{2} + \psi^\dagger (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) \psi . \quad (4.5)$$

Здесь мы положили $\mu_B g = 1$. Отметим, что выражение (4.5) справедливо в случае неоднородного магнитного поля \mathbf{B} . Неоднородность пробного магнитного поля \mathbf{B} имеет существенное значение для настоящей работы. Используя линейные по магнитному полю \mathbf{B} слагаемые в лагранжиане (4.5), мы находим следующее выражение для спиновой плотности:

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \langle \frac{1}{2} ([\boldsymbol{\phi} \times \partial_t \boldsymbol{\phi}] + \text{h.c.}) + \psi^\dagger \mathbf{S} \psi \rangle = \mathbf{s}_{nl}(\mathbf{r}) + \mathbf{S}_{imp} \delta(\mathbf{r}) . \quad (4.6)$$

Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по основному состоянию системы. Слагаемое $1/2 \langle [\boldsymbol{\phi} \times \partial_t \boldsymbol{\phi}] + \text{h.c.} \rangle$ в (4.6) соответствует нелокальной спиновой плотности $\mathbf{s}_{nl}(\mathbf{r})$, которая индуцирована примесью. Слагаемое $\langle \psi^\dagger \mathbf{S} \psi \rangle$ в уравнении (4.6) отвечает спину локализованному на месте примеси.

Кроме спиновой плотности, мы рассмотрим антиферромагнитную намагниченность, индуцированную примесью. Записывая уравнение Эйлера-Лагран-

жа для магнетонного поля ϕ , следующее из действия $\int dt d^3r \{ \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} \}$, и вычисляя среднее, мы получаем Юкава-подобный результат для антиферромагнитной намагниченности:

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = -\lambda \frac{e^{-\Delta r}}{4\pi r} \frac{\mathbf{S}_{imp}}{S}. \quad (4.7)$$

Вблизи квантовой критической точки экспонента в (4.7) близка к единице и $\langle \phi(r) \rangle \propto 1/r$. Поэтому для вычисления антиферромагнитной намагниченности необходимо найти только локальную часть спиновой плотности \mathbf{S}_{imp} .

Для нахождения нелокальной части плотности спина мы вычислим сдвиг энергии основного состояния ϵ_B , который отвечает пробному магнитному полю $\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \mathbf{B}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$. Затем, поскольку $\epsilon_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r})$, мы найдем спиновую плотность:

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial \epsilon_B}{\partial \mathbf{B}} \right|_{\mathbf{B}=0}. \quad (4.8)$$

Спиновая плотность и антиферромагнитная намагниченность направлены вдоль направления спина примеси ($\mathbf{S}_{imp} = \mathbf{e}S_{imp}$) и зависят только от $r = |\mathbf{r}|$ в силу изотропии пространства, то есть $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}s(r)$, $\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{e}\langle \phi(r) \rangle$, где \mathbf{e} – единичный вектор. Энергия основного состояния ϵ_g системы совпадает с положением особенности запаздывающей функции Грина примеси $\hat{G}_B(\epsilon)$, и может быть найдена из уравнения Дайсона:

$$\hat{G}_B^{-1}(\epsilon) = \epsilon - \hat{\Sigma}(\epsilon) - B^\mu \hat{\Gamma}^\mu(\epsilon, r) = 0, \quad (4.9)$$

где $\hat{\Sigma}(\epsilon)$ – массовый оператор примеси при нулевом магнитном поле, $\hat{\Gamma}^\mu(\epsilon, r)$ – вершинная функция, отвечающая взаимодействию системы с пробным магнитным полем. Отметим, что в уравнении (4.9) нам необходимы только линейные по магнитному полю части. Из вращательной симметрии системы следует, что единственный возможный вид вершины выглядит следующим образом:

$$\hat{\Gamma}^\mu(\epsilon, r) = \Gamma(\epsilon, r) \hat{S}^\mu / S. \quad (4.10)$$

Вершинная функция может быть разделена на локальную и нелокальную части:

$$\hat{\Gamma}^\mu(\epsilon, r) = \begin{cases} \hat{\Gamma}_{imp}^\mu(\epsilon), & r = 0, \\ \hat{\Gamma}_{nl}^\mu(\epsilon, r), & r > 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Вычисляя сдвиг ϵ_B положения особенности функции Грина $\hat{G}_B(\epsilon)$, связанный с пробным магнитным полем, затем используя выражение (4.8), мы находим локальную и распределенную компоненты спиновой плотности $s(r)$. Ниже мы найдем спиновую плотность, используя два подхода: самосогласованное борновское приближение для случая $S = 1/2$ и ренорм-групповой (РГ) подход для спина произвольной величины S .

4.1 Самосогласованное борновское приближение

Стандартный подход при вычислении однофермионной функции Грина – использование $1/N$ разложения для $O(N)$ группы, где $N = 3$ – число магнонных компонент. Суммирование лидирующих по параметру $1/N$ слагаемых приводит к приближению, которое называется самосогласованным борновским приближением (СБП). В этом приближении уравнение на функцию Грина схематично изображено на рис. 4.2. Мы будем применять приближение СБП только в случае примеси с $S = 1/2$. Как будет показано ниже, в случае $S > 1/2$ поправки к вершине взаимодействия примесь-магнон, которыми мы пренебрегаем в СБП, становятся важными. В этом случае приближение СБП неприменимо, и мы будем использовать РГ подход.

$$\overline{\longrightarrow} = \longrightarrow + \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \nearrow \\ \longrightarrow \\ \searrow \\ \text{wavy line} \end{array} + \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \searrow \\ \text{wavy line} \\ \nearrow \\ \longrightarrow \end{array} + \dots$$

Рисунок 4.2 — Уравнение Дайсона в самосогласованном борновском приближении. Двойная линия отвечает точной функции Грина примеси, одинарная линия – “голая” функция Грина, то есть функция Грина без учета взаимодействия с магнонным полем, волнистая линия – функция Грина магнона.

Функция Грина примеси в нулевом магнитном поле. Мы начнем рассмотрение с поиска функции Грина примеси при нулевом пробном магнит-

ном поле. В этом случае функция Грина пропорциональна единичной матрице $\hat{G}(\epsilon) = G(\epsilon)$. Уравнение Дайсона для функции Грина графически изображено на рис. 4.2, а в аналитическом виде

$$G(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \Sigma(\epsilon) + i0}, \quad (4.12)$$

где массовый оператор определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(\epsilon) &= \lambda^2 \int \frac{id\omega}{2\pi} \sum_{\mathbf{q}} \sigma^\mu \hat{G}(\epsilon - \omega) D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}) \sigma^\nu = \\ &= 3 \sum_{\mathbf{q}} M_{\mathbf{q}}^2 \hat{G}(\epsilon - \omega_{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь $\omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{\Delta^2 + \mathbf{q}^2}$, $M_{\mathbf{q}} = \lambda/\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}$ – матричный элемент, отвечающий испусканию примесью магнона с импульсом \mathbf{q} , $D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}) = \delta_{\mu\nu}/(\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2 + i0)$ – пропагатор магнона. Мы представили оператор спина через матрицы Паули $S^\mu = \sigma^\mu/2$. Множитель 3 в выражении (4.13) возникает из суммирования по поляризациям магнонов в промежуточном состоянии.

Сумма по импульсу \mathbf{q} в уравнении (4.13) расходится при больших $|\mathbf{q}|$, поэтому мы вводим параметр ультрафиолетового обрезания Λ . Этот параметр зависит от конкретной реализации системы, мы можем оценить его как обратный шаг решетки.

Решение уравнения Дайсона (4.12) вблизи квантовой критической точки имеет вид:

$$G^{-1}(\epsilon) = (\epsilon - \epsilon_0 + i0) \sqrt{1 + \frac{3\lambda^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{\epsilon_0 + \Delta - \epsilon - i0} \right)}. \quad (4.14)$$

Это решение справедливо вблизи сингулярной точки $\epsilon_0 \approx -3\Lambda\lambda^2/4\pi^2$. Выражение (4.14) для функции Грина получено с логарифмической точностью, т.е. мы полагаем, что $\ln \left(\frac{\Lambda}{\epsilon_0 + \Delta - \epsilon} \right) \gg 1$.

Функция Грина (4.14) имеет нетривиальную аналитическую структуру. Для конечной магнонной щели квазичастичный полюс при $\epsilon = \epsilon_0$ отделен щелью Δ от разреза функции Грина. В квантовой критической точке, когда $\Delta \rightarrow 0$, полюс и точка начала разреза сливаются. Квазичастичный вычет функции Грина примеси $G(\epsilon)$ зануляется вблизи критической точки следующим об-

разом:

$$Z = \left(1 - \frac{\partial \Sigma(\epsilon_0)}{\partial \epsilon}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3\lambda^2}{2\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{\Delta}\right)}} \Big|_{\Delta \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (4.15)$$

Величина квазичастичного вычета показывает вероятность найти “голую” примесь в основном состоянии системы, поэтому зануление вычета является указанием на делокализацию индуцированного примесью облака спина, что является указанием на эффект разделения спина и заряда [83].

Характерная величина примесь-магнонного взаимодействия может быть оценена из решеточной модели, изображенной на рис. 4.1. Решеточные вычисления [117] показывают, что эффективная константа связи $\kappa = 3\lambda^2/2\pi^2$, стоящая при логарифме, имеет порядок $\kappa \sim 0.5$. Поэтому логарифмические поправки важны вблизи квантовой критической точки.

Аналитический результат (4.14) для функции Грина примеси можно сравнить с результатами прямого численного решения уравнения Дайсона (4.12). На рис. 4.3 построена спектральная функция $-1/\pi \operatorname{Im}\{G(\epsilon)\}$. При численном

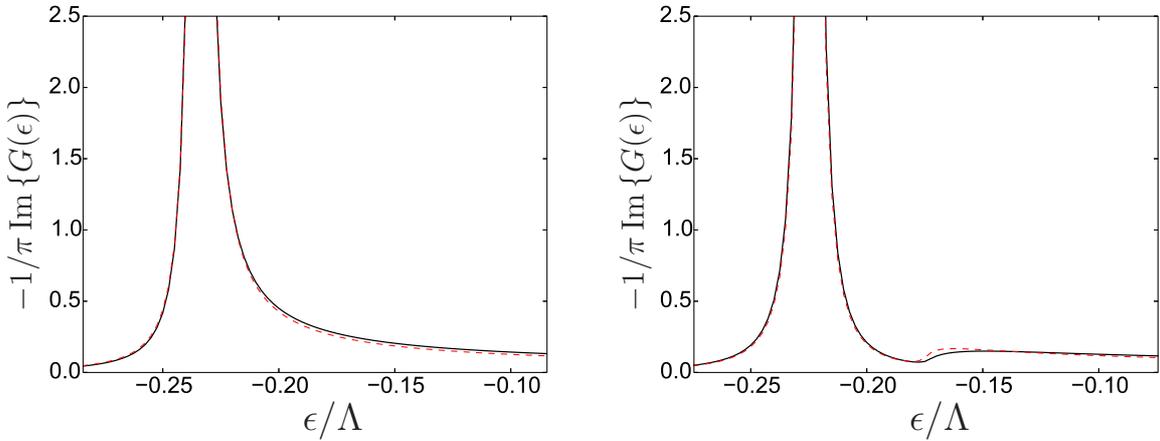


Рисунок 4.3 — Спектральная функция для примеси с $S = 1/2$, полученная в СБП. Левый рисунок соответствует случаю $\Delta = 0$; правый рисунок соответствует $\Delta = 0.05\Lambda$. Эффективная константа положена равной $\kappa = 0.6$. Сплошная черная линия соответствует функции Грина, найденной численно. Красная пунктирная линия соответствует аналитическому результату (4.14) с заменой $i0 \rightarrow i2.5 \times 10^{-3}\Lambda$. Отметим, что на левом графике положение полюса и точка начала разреза слились.

решении уравнения мы ввели искусственное уширение $i0 \rightarrow i2.5 \times 10^{-3}\Lambda$. Для сравнения численного и аналитического результатов мы заменили $i0$ в выраже-

нии (4.14) на $i2.5 \times 10^{-3}\Lambda$. Видно хорошее согласие численного и аналитического результатов.

Отметим, что формально приближение СБП опирается только на $1/N$ разложение и не зависит от величины константы связи λ . Поэтому СБП применимо для произвольного значения λ , в отличие от РГ метода, который работает только при $\lambda < 1$. Мы вернемся к обсуждению этого факта ниже.

Вычисление нелокальной спиновой плотности $s_{nl}(\mathbf{r})$. Для вычисления спиновой плотности на расстояниях $r > 0$ мы подставляем положение полюса ϵ_g функции Грина в виде $\epsilon_g = \epsilon_0 + \epsilon_B$ в уравнение (4.9). Затем раскладываем полученное уравнение по магнитному полю до первого порядка и используем уравнение (4.8). В результате $s_{nl}(r)$ имеет вид:

$$s_{nl}(r) = Z\Gamma_{nl}(\epsilon_0, r). \quad (4.16)$$

Лидирующий по константе связи λ вклад в вершину $\hat{\Gamma}_{nl}^\mu$ представлен на рис. 4.4 (b). Аналитическое выражение для диаграммы имеет следующий вид:

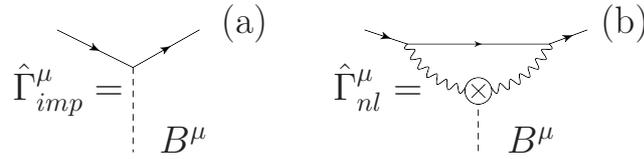


Рисунок 4.4 — Пример диаграмм, описывающих взаимодействие пробного магнитного поля \mathbf{B} и (a) — спина примеси, (b) — нелокальной спиновой плотности. Сплошная линия соответствует голой, с $\lambda = 0$, функции Грина примеси, волнистая линия — пропагатор магнона, пунктирная линия — магнитное поле. Крест на магнонной линии обозначает вершину взаимодействия магнон-магнитное поле, которая соответствует слагаемому

$\mathbf{B}[\boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{\phi}}]$ в лагранжиане (4.5).

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{nl}^\mu(\epsilon, r) &= \Gamma_{nl}(\epsilon, r)\sigma^\mu = \int \frac{id\omega}{2\pi} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} (\lambda\sigma^z) \hat{G}_0(\epsilon - \omega) \\ &(\lambda\sigma^\beta) D_{z\nu}(\omega, \mathbf{k}) \left[-2i\omega \varepsilon_{\mu\nu\alpha} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})r} \right] D_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\hat{G}_0(\epsilon) = 1/(\epsilon + i0)$ – запаздывающая функция Грина для невзаимодействующей с магнонами и магнитным полем примеси. Выражение в квадратных скобках соответствует вершине взаимодействия магнон-магнитное поле, которая обозначается кругом с крестом внутри на рис. 4.4 (b).

Уравнение на вершину $\hat{\Gamma}_{nl}^\mu(\epsilon, r)$ в приближении СБП графически представлено на рис. 4.5 и отвечает следующему аналитическому выражению:

$$\Gamma_{nl}(\epsilon, r) = \Gamma_{nl}^{(0)}(\epsilon, r) - \sum_q M_q^2 G^2(\epsilon - \omega_q) \Gamma_{nl}(\epsilon - \omega_q, r), \quad (4.18)$$

где функция $\Gamma_{nl}^{(0)}(\epsilon, r)$ соответствует первому слагаемому в правой части диаграммного уравнения рис. 4.5 и имеет вид:

$$\Gamma_{nl}^{(0)}(\epsilon, r) = 2\lambda^2 \sum_{q,k} e^{i(q-k)r} \frac{G(\epsilon - \omega_q) - G(\epsilon - \omega_k)}{\omega_q^2 - \omega_k^2}. \quad (4.19)$$

Для того чтобы получить уравнения (4.18) и (4.19), мы выполнили интегрирование по параметру ω в правой части уравнения, изображенного на рис. 4.5. Множитель (-1) в уравнении (4.18) возникает из соотношения на матрицы Паули $\sigma^\mu \sigma^\nu \sigma^\mu = -\sigma^\nu$. Выражение (4.19) получается из выражения (4.17) заменой голой функции Грина на решение уравнения Дайсона (4.12).

Рисунок 4.5 – Уравнение на нелокальную часть вершины $\hat{\Gamma}_{nl}^\mu$.

Для нахождения $s_{nl}(r)$ мы численно решаем уравнение (4.18) для вершины $\Gamma_{nl}(\epsilon, r)$, затем подставляем результат вычислений и результат для квазичастичного вычета Z в выражение (4.16). Решение уравнения (4.18) находилось с помощью метода итераций, где в качестве нулевой итерации взята $\Gamma_{nl}(\epsilon, r) = \Gamma_{nl}^{(0)}(\epsilon, r)$. Результаты вычислений спиновой плотности $s_{nl}(r)$ для различных значений магнонной щели Δ и константы связи представлены на рис. 4.6.

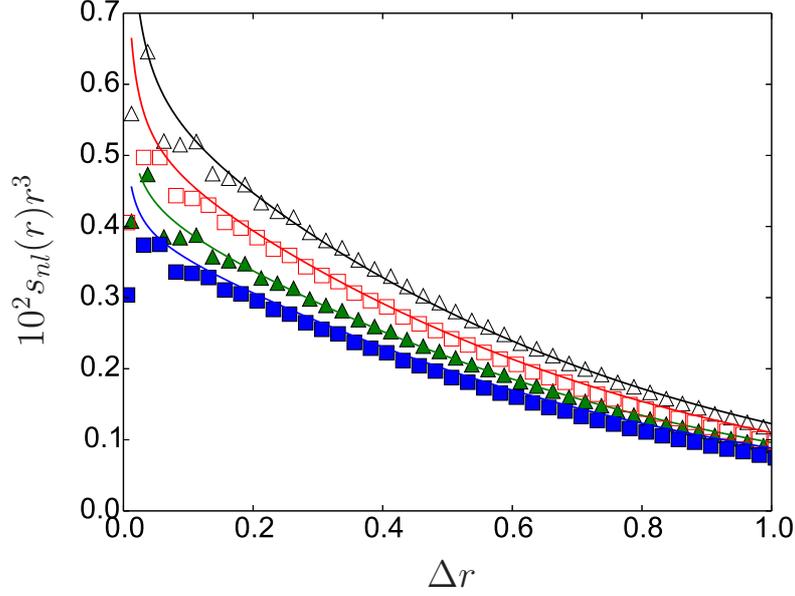


Рисунок 4.6 — Индуцированная примесью с $S = 1/2$ спиновая плотность $s_{nl}(r)$. Изображена величина $r^3 s_{nl}(r)$ как функция безразмерного расстояния $y = \Delta r$, вычисленная в приближении СБП. Точками обозначены численные результаты для различных значений магной щели и эффективной константы связи $\kappa = 3\lambda^2/2\pi^2$. Квадраты соответствуют $\Delta = 6.25 \times 10^{-3}\Lambda$, треугольники — $\Delta = 1.25 \times 10^{-2}\Lambda$, закрашенные квадраты и треугольники соответствуют $\kappa = 0.3$, а пустые $\kappa = 0.6$. Сплошные линии отвечают аналитическому приближению (4.20).

Для облегчения численного счета мы вместо интегрирования по кубической зоне Бриллюэна используем сферически-симметричное обрезание по импульсам ($|\mathbf{q}|, |\mathbf{k}| \leq \Lambda$) в интегралах (4.18) и (4.19). Эта схема обрезания приводит к возникновению заметного осциллирования индуцированной плотности спина в r -пространстве, где период колебаний имеет порядок $r \sim 1/\Lambda$, а амплитуда колебаний спадает с ростом r . Понятно, что эти колебания являются артефактом способа обрезания и будут существенно подавлены при корректном вычислении трехмерных интегралов по зоне Бриллюэна. Поэтому мы строим численные данные для плотности спина, усредняя результаты вычислений по периоду осцилляций.

Из численных результатов видно, что начальное приближение $\Gamma_{nl}^{(0)}(\epsilon, r)$ для вершинной функции и решение $\Gamma_{nl}(\epsilon, r)$, полученное решением (4.18), близки. Поэтому для получения аналитической аппроксимации нелокальной спиновой

плотности мы подставляем (4.19) в (4.16) и используем выражение (4.14) для функции Грина примеси. В итоге получаем:

$$s_{nl}(r) = \frac{\lambda^2 \Delta}{4\pi^3 \sqrt{1 + \frac{3\lambda^2}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Delta}} \sqrt{1 + \frac{3\lambda^2}{2\pi^2} \ln \Lambda r}} \frac{K_1(2\Delta r)}{r^2}. \quad (4.20)$$

Используя асимптотику функции Макдональда $K_1(x) \rightarrow 1/x$ при $x \rightarrow 0$ на расстояниях $1/\Lambda < r < 1/\Delta$, мы получаем асимптотику спиновой плотности. Асимптотика является степенной с логарифмическими поправками:

$$s_{nl}(r) \rightarrow \frac{\lambda^2}{8\pi^3 r^3} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{3\lambda^2}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Delta}\right) \left(1 + \frac{3\lambda^2}{2\pi^2} \ln \Lambda r\right)}}. \quad (4.21)$$

На больших расстояниях $r > 1/\Delta$ спиновая плотность подавлена экспоненциально: $s_{nl}(r) \propto e^{-2\Delta r}/r^{5/2}$. На рис. 4.6 сплошные линии соответствуют аналитическому результату (4.20). Можно увидеть хорошее согласие между численными и аналитическими результатами.

Полный спин системы, который равен сумме локализованного спина на месте примеси, и спина, распределенного в облаке, сохраняется и должен быть равен $S = 1/2$. Интегральный спин, отвечающий распределенному спину (спин облака), равен

$$S_{nl} = \int d^3r s_{nl}(r) \quad (4.22)$$

и приведен на рис. 4.7 для различных значений отношения Δ/Λ . Для вычисления спина S_{nl} мы используем численные результаты для $s_{nl}(r)$, приведенные на рис. 4.6. Можно увидеть, что нелокальный спин S_{nl} растет логарифмически при уменьшении параметра Δ и идет к $S_{nl} = 1/2$ в критической точке. Поэтому остаточная часть спина должна быть отнесена к спину примеси $S_{imp} = 1/2 - S_{nl}$, которая зануляется в квантовой критической точке. Мы проверим это утверждение в следующей секции, в которой вычислим локальный спин примеси.

Локальный спин примеси и антиферромагнитная намагниченность.

Для того, чтобы вычислить локализованный при $\mathbf{r} = 0$ спин, мы вводим локальное магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}\delta(\mathbf{r})$ и вычисляем сдвиг энергии примеси,

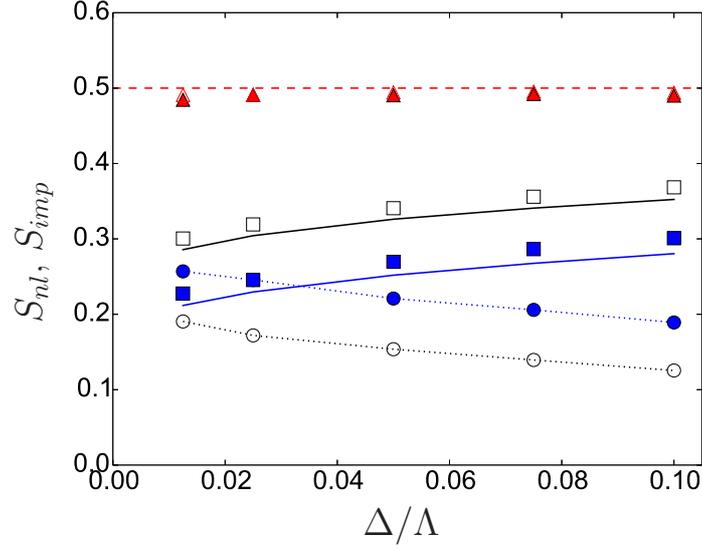


Рисунок 4.7 — Интеграл нелокального спина S_{nl} и спина, локализованного на примеси, S_{imp} как функция магнонной щели Δ в приближении СБП. Закрашенные и пустые значки отвечают значению эффективной константы связи $\kappa = 0.6$ и $\kappa = 0.3$ соответственно. Кружки соответствуют S_{nl} , квадраты — S_{imp} . Треугольники — полному спину $S_{nl} + S_{imp}$. Сплошная линия соответствует теоретическому предсказанию для локального спина примеси S_{imp} см. (4.25). Точки — соединяют численные результаты для S_{nl} . Пунктирная линия соответствует полному спину $1/2$.

связанный с магнитным полем. Результат для спина примеси имеет вид:

$$S_{imp} = \frac{Z}{2} \Gamma_{imp}(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\epsilon_0}. \quad (4.23)$$

Уравнение для вершины $\hat{\Gamma}_{imp}^\mu(\epsilon) = \Gamma_{imp}(\epsilon)\sigma^\mu$ в диаграммном виде в приближении СБП приведено на рис. 4.8. Соответствующее аналитическое уравнение имеет вид:

$$\Gamma_{imp}(\epsilon) = 1 - \sum_q M_q^2 G^2(\epsilon - \omega_q) \Gamma_{imp}(\epsilon - \omega_q). \quad (4.24)$$

$$\hat{\Gamma}_{imp}^{\mu} = \times + \text{diagram}$$

Рисунок 4.8 — Уравнение для “локальной” вершинной функции $\hat{\Gamma}_{imp}^{\mu}$ в графическом виде. Крест обозначает “голую” вершину $\Gamma_{imp}^{(0)} = 1$.

Решая уравнение (4.24) и подставляя результат в уравнение (4.23), мы получаем с логарифмической точностью следующий результат для спина примеси:

$$S_{imp} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3\lambda^2}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Delta}\right)^{2/3}}. \quad (4.25)$$

Мы также вычислили спин примеси численно, решая уравнение (4.24) методом итераций. Аналитический и численный результаты для S_{imp} при различных значениях параметров Δ и λ представлены на рис. 4.7. Видно хорошее согласие численных и аналитических результатов. Из результатов, приведенных на рис. 4.7, видно, что спин примеси уменьшается при уменьшении параметра Δ , а из уравнения (4.25) следует, что спин примеси логарифмически стремится к нулю при приближении к квантовой критической точке ($\Delta \rightarrow 0$). На рис. 4.7 так же представлены результаты для полного спина $S_{imp} + S_{nl}$ при различных значениях параметров Δ и λ .

Результаты наших вычислений, см. уравнения (4.21), (4.25) и рисунки 4.6 и 4.7, показывают, что в квантовой критической точке спин, локализованный на примеси, зануляется, а спин, распределенный в облаке вокруг примеси, равняется спину примеси. Размер спинового облака имеет порядок $r \simeq 1/\Delta$, и поэтому при $\Delta \rightarrow 0$ формально растекается по всему образцу, а полный делокализованный спин равняется спину примеси.

Полный спин системы равен $1/2$. Это точное утверждение, которое может быть показано на диаграммном уровне. При этом можно проследить взаимное сокращение поправок к спину примеси и полному спину, распределенному в облаке в каждом порядке по параметру λ . Численные результаты для полного спина системы, см. рис. 4.7, согласуются с сохранением спина.

Используя уравнения (4.7) и (4.25), мы получаем следующее решение для антиферромагнитной намагниченности, индуцированной примесью со спином

1/2:

$$\langle \phi(r) \rangle = -\lambda \frac{e^{-\Delta r}}{4\pi r} \frac{1}{\left(1 + \frac{3\lambda^2}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Delta}\right)^{2/3}}. \quad (4.26)$$

Вдали от квантовой критической точки антиферромагнитная намагниченность экспоненциально мала. Вблизи критической точки коэффициент в (4.26) логарифмически подавлен, однако намагниченность спадает только как $\langle \phi(r) \rangle \propto 1/r$.

4.2 Ренорм-групповой подход в 3 + 1 мерном пространстве

Перейдем к вычислению нелокальной и локальной части спиновой плотности, используя РГ подход в 3 + 1 измерениях. В этом подходе константа связи λ зависит от энергетического масштаба. В размерности 3 + 1 эволюция бегущей константы связи логарифмическая. Это приводит к логарифмическим поправкам для s_{nl} и $\langle \phi(r) \rangle$, которые похожи на результаты (4.21) и (4.26), полученные в СБП. Мы получим результаты, справедливые для произвольной величины спина примеси S . Затем рассмотрим предел большого спина примеси.

В РГ подходе мы рассматриваем эволюцию константы связи λ , квазичастичного вычета Z , спиновой плотности и антиферромагнитной намагниченности на масштабе μ , стартуя с ультрафиолетового масштаба Λ и заканчивая инфракрасным масштабом Δ . Здесь масштаб μ имеет смысл характерной передачи энергии от магнонов примеси. Мы полагаем, что на масштабе Λ параметры теории равны “голым” значениям. В наших вычислениях параметр Λ играет роль точки перенормировки. Наблюдаемые вблизи квантовой критической точки получаются как РГ эволюция с ультрафиолетового масштаба Λ к инфракрасному масштабу $\mu = \Delta$.

Эволюция константы связи и квазичастичного вычета. Вначале мы найдем эволюцию константы связи $\lambda(\mu)$. Однопетлевые поправки к константе связи показаны на рис. 4.9.

Отметим, что в РГ подходе поправки к константе связи включают вершинные поправки, рис. 4.9 (b), и поправки к массовому оператору, рис. 4.9 (c). Это

отличается от подхода СБП, в котором мы пренебрегаем вкладом диаграммы (b).

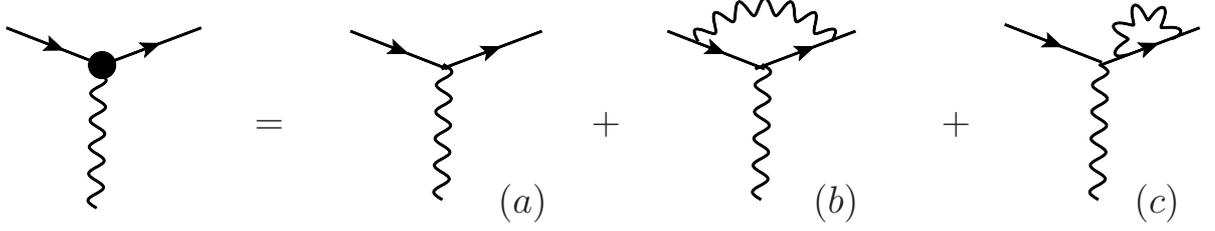


Рисунок 4.9 — Главный вклад и однопетлевые поправки к константе взаимодействия λ .

Вклад $\delta\lambda^{(b)}$ в константу связи дается диаграммой (b) на рис. 4.9 и имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^\mu \delta\lambda^{(b)} &= \lambda^3 \frac{\mathbf{S}^\nu \mathbf{S}^\mu \mathbf{S}^\nu}{S^2} \int \frac{id\omega'}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} G_0(\mu - \omega') G_0(\mu - \omega - \omega') D(\omega', \mathbf{k}) \approx \\ &\mathbf{S}^\mu \frac{(S(S+1) - 1)}{S^2} \frac{\lambda^3}{4\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

После сокращения множителя \mathbf{S}^μ в обеих частях уравнения (4.27) мы получаем $\delta\lambda^{(b)}$. Вклад $\delta\lambda^{(c)}$, который приходит из диаграммы (c) на рис. 4.9, равняется

$$\begin{aligned} \delta\lambda^{(c)} &= \lambda^3 \left(1 + \frac{1}{S}\right) G_0(\mu - \omega) \times \\ &\int \frac{id\omega'}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} G_0(\mu - \omega - \omega') D(\omega', \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

и содержит линейное и логарифмическое по Λ слагаемые. Линейное по Λ слагаемое соответствует сдвигу положения квазичастичного полюса ϵ_0 в функции Грина примеси, поэтому этот вклад не важен для нашего рассмотрения. Логарифмический вклад в $\delta\lambda^{(c)}$ имеет вид:

$$\delta\lambda^{(c)} \rightarrow -\frac{\lambda^3}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{S}\right) \ln \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (4.29)$$

Полная поправка к константе связи имеет вид:

$$\delta\lambda = \delta\lambda^{(b)} + \delta\lambda^{(c)} = -\frac{\lambda^3}{4S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (4.30)$$

Отметим, что для случая $S = 1/2$ вершинная поправка (4.27) подавлена фактором $1/N = 1/3$ в сравнении с $\delta\lambda^{(c)}$. Однако при больших S подавление $1/N$ для $\delta\lambda^{(b)}$ компенсируется S , поэтому вклады $\delta\lambda^{(b)}$ и $\delta\lambda^{(c)}$ компенсируют друг друга $\delta\lambda^{(b)} \approx -\delta\lambda^{(c)}$. Таким образом, при больших S вершинная поправка становится существенной и не может быть отброшена. Это является причиной, почему СБП не работает в случае большого спина примеси.

В парадигме РГ эволюция физических параметров на некотором энергетическом масштабе μ определяется значением $\lambda(\mu)$ на том же масштабе. Уравнение (4.30) приводит к следующему уравнению Геллмана-Лоу

$$\frac{d\lambda(\mu)}{d\ln\mu} = \frac{\lambda^3(\mu)}{4S^2\pi^2}. \quad (4.31)$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\lambda(\Lambda) = \lambda$ имеет вид:

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}}}. \quad (4.32)$$

Отметим, что бегущая константа связи (4.32) зануляется в инфракрасном пределе: $\lambda(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \simeq \Delta \rightarrow 0$. Масштаб μ ограничен снизу: $\mu \geq \Delta$.

Для вычисления квазичастичного вычета функции Грина примеси мы рассматриваем однопетлевую поправку к массовому оператору примеси. Логарифмическая часть этой поправки уже вычислена как часть диаграммы (с) на рис. 4.9. Соответствующее уравнение для $Z(\mu)$ имеет вид:

$$\frac{d\ln Z(\mu)}{d\ln\mu} = \left(1 + \frac{1}{S}\right) \frac{\lambda^2(\mu)}{4\pi^2}. \quad (4.33)$$

Решая уравнение (4.33) с начальным условием $Z(\Lambda) = 1$, получаем:

$$Z(\mu) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}\right)^{S(S+1)/2}} = \left(\frac{\lambda(\mu)}{\lambda}\right)^{S(S+1)}. \quad (4.34)$$

Видно, что квазичастичный вычет $Z(\mu)$ стремится к нулю при приближении системы к квантовой критической точке, $\mu \simeq \Delta \rightarrow 0$.

Отметим, что РГ подход применим, если эффективная константа связи

$$\tilde{\kappa} = \lambda^2 / (2S^2\pi^2) < 1,$$

поскольку мы используем теорию возмущений по константе связи. Однако подходящий параметр разложения вблизи критической точки не $\tilde{\kappa}$, а $\tilde{\kappa} \ln \Lambda / \Delta$. РГ метод (в однопетлевом приближении) позволяет просуммировать лидирующие логарифмические поправки следующего типа:

$$\tilde{\kappa}^m \sum_n \tilde{\kappa}^n \ln^n(\Lambda/\Delta).$$

Поэтому результаты, полученные в этом подходе, справедливы, если $\tilde{\kappa} < 1$ и $\tilde{\kappa}^2 \ln(\Lambda/\Delta) < 1$, но произведение $\tilde{\kappa} \ln(\Lambda/\Delta)$ может иметь произвольное значение.

Спин примеси и нелокальная спиновая плотность. Перейдем к исследованию изменений спина примеси и спиновой плотности $s(r)$ с изменением масштаба μ . Для этого мы вычислим S_{imp} и $s(r)$, рассматривая взаимодействие системы с пробным магнитным полем $\mathbf{B}(r)$.

Начнем с рассмотрения поправок к S_{imp} , связанных со взаимодействием примеси с магнонами. Однопетлевые поправки к S_{imp} показаны на рис. 4.10. Отметим, что диаграммы на рис. 4.10 аналогичны диаграммам на рис. 4.9.

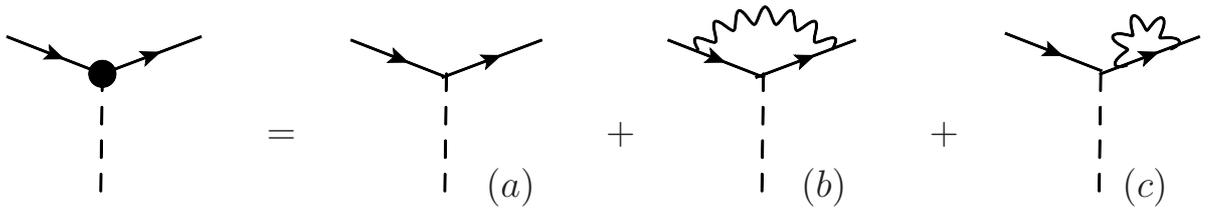


Рисунок 4.10 — Однопетлевые поправки к “локальному” спину S_{imp} .

Единственное отличие заключается в том, что константа связи примесь-магнитное поле $\mathbf{S}_{imp} \cdot \mathbf{B}$ пропорциональна примеси спина \mathbf{S}_{imp} . Следовательно РГ уравнение имеет вид:

$$\frac{dS_{imp}(\mu)}{d \ln \mu} = \frac{\lambda^2(\mu)}{4S^2\pi^2} S_{imp}(\mu). \quad (4.35)$$

Решая это уравнение с условием $S_{imp}(\Lambda) = S$, получаем решение:

$$S_{imp}(\mu) = \frac{S}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}}}, \quad (4.36)$$

которое пропорционально решению (4.32) для бегущей константы связи $\lambda(\mu)$. Локальный спин примеси $S_{imp}(\mu \simeq \Delta)$ стремится к нулю при приближении к квантовой критической точке. Используя результат (4.36) и соотношение (4.7) мы получаем распределение антиферромагнитной намагниченности

$$\langle \phi(r) \rangle = -\frac{\lambda}{4\pi r} \frac{e^{-\Delta r}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Delta}}}. \quad (4.37)$$

Перейдем к вычислению нелокальной плотности $s_{nl}(r)$. Эту величину удобнее вычислять в импульсном представлении, поэтому мы запишем эволюционное уравнение для Фурье-образа $s_{nl}(q)$. Лидирующий по λ^2 вклад в $s_{nl}(q)$, который дается однопетлевой диаграммой, изображен на рис. 4.4, (b). Вычисление этой диаграммы с логарифмической точностью приводит к следующему результату:

$$s_{nl}^{(0)}(q) \approx \begin{cases} \frac{\lambda^2}{4S\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}, & \mu \gg q, \\ \frac{\lambda^2}{4S\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{q}, & \mu \ll q. \end{cases} \quad (4.38)$$

Фурье преобразование второй строчки уравнения (4.38) приводит к следующему выражению для плотности $s_{nl}^{(0)}(r) = \lambda^2/16S\pi^3 r^3$ на расстояниях $1/\Lambda < r < 1/\Delta$. Аналогично результатам (4.21), полученным в приближении СБП, при вычислении в рамках РГ подхода мы ожидаем логарифмические поправки к степенному поведению $\propto 1/r^3$. Отметим, что логарифмические поправки важны, поскольку их учет приводит к правильному полному интегралу нелокальной плотности спина $\int d^3r s_{nl}(r) \rightarrow S$ в квантовой критической точке. Объемный интеграл спиновой плотности, ведущей себя как $\propto 1/r^3$, расходится ($\propto \ln \Lambda/\Delta$), поэтому нам необходимо учесть логарифмические поправки.

Для того чтобы учесть РГ эволюцию спиновой плотности, мы вычисляем однопетлевые поправки к лидирующей диаграмме, представленной на рис. 4.4, (b). Диаграммы (b) и (c) на рис. 4.11 являются поправками, которые похожи на поправки изображенные на рис. 4.9 и 4.10. РГ уравнение для спиновой

плотности имеет вид:

$$\frac{ds_{nl}(q,\mu)}{d \ln \mu} = \begin{cases} \frac{\lambda^2(\mu)}{4S^2\pi^2} s_{nl}(q,\mu) - \frac{\lambda^2(\mu)}{4S\pi^2}, & \mu \gg q, \\ \frac{\lambda^2(\mu)}{4S^2\pi^2} s_{nl}(q,\mu), & \mu \ll q. \end{cases} \quad (4.39)$$

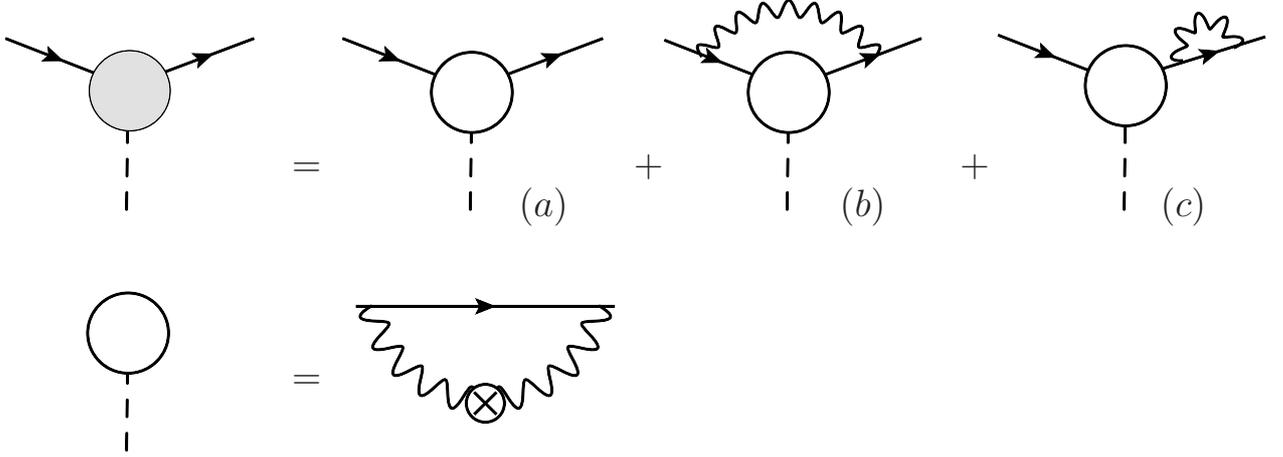


Рисунок 4.11 — Однопетлевые поправки к нелокальной спиновой плотности $s_{nl}(q)$.

Отметим, что уравнение для эволюции спиновой плотности по параметру μ различно в областях $\mu \gg q$ и $\mu \ll q$. Это связано с тем, что однопетлевое выражение (4.38) для спиновой плотности имеет различный вид в разных областях. Мы решаем уравнение (4.39) в различных областях, затем сшиваем решения в точке $\mu \simeq q$. Поскольку начальное условие для уравнения эволюции (4.39) имеет вид $s_{nl}(\Lambda) = 0$, мы получаем следующий результат для спиновой плотности на инфракрасном масштабе:

$$s_{nl}(q) = \frac{S}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Delta}}} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{q}} - 1 \right). \quad (4.40)$$

Условие сохранения полного спина в импульсном представлении имеет вид $s_{nl}(q)|_{q \rightarrow 0} + S_{imp} = S$. Используя выражения (4.36) и (4.40), легко проверить сохранение полного спина, учитывая то, что импульс q в наших выражениях имеет порядок $q \simeq \Delta$.

Вычисляя преобразование Фурье выражения (4.40), мы получаем пространственное распределение индуцированной спиновой плотности на масшта-

бах $1/\Lambda < r < 1/\Delta$:

$$s_{nl}(r) = \frac{\lambda^2}{16S\pi^3 r^3 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Delta}} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \Lambda r}}. \quad (4.41)$$

Используя выражения (4.41) и (4.36), можно проверить сохранение полного спина в r -представлении: $\int d^3r s_{nl}(r) + S_{imp} = S$. Интегрирование нелокальной плотности спина должно быть выполнено в области $1/\Lambda < r < 1/\Delta$, которая в нашей теории определена инфракрасным и ультрафиолетовым обрезанием.

Отметим, что вблизи квантовой критической точки главный вклад в нелокальный спин $\int d^3r s_{nl}(r)$ набирается в области $r < 1/\Delta \rightarrow \infty$. Действительно, интеграл

$$\int_{1/\Lambda \leq r \leq R} d^3r s_{nl}(r) = S \frac{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \Lambda R} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2S^2\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\Delta}}} \quad (4.42)$$

логарифмически растет как функция верхнего предела интегрирования R . Это означает, что главная часть спина в нелокальном облаке аккумулируется на расстояниях порядка $R \simeq 1/\Delta$. При этом локальный спин S_{imp} исчезает в квантовой критической точке, см. (4.36). Поэтому, мы можем заключить, что в квантовой критической точке спин примеси пространственно отделен от заряда примеси. Это означает, что мы наблюдаем эффект разделения спина и заряда.

Результаты (4.34), (4.37) и (4.41), полученные в РГ подходе похожи на соответствующие результаты (4.15), (4.26) и (4.21), полученные в рамках СБП. В случае $S = 1/2$ разница возникает в численном коэффициенте перед логарифмом: $3\lambda^2/2\pi^2$ в СБП и $2\lambda^2/\pi^2$ в РГ подходе. Для величин Z и $\langle \phi(r) \rangle$ степени логарифмов также различаются не сильно: $1/2 \rightarrow 3/8$ и $2/3 \rightarrow 1/2$ соответственно. Причина небольших изменений связана с вершинными поправками порядка $1/N$, которые учитываются в РГ подходе (см. диаграмму (b) на рис. 4.9), и не учитывается в СБП. Поэтому РГ результаты более аккуратны, чем результаты полученные в СБП. Однако разложение РГ результатов и СБП результатов совпадают в одной петле (первый порядок по λ^2).

Квазиклассический предел: примесь с большим спином. Интересно рассмотреть квазиклассический случай большого спина примеси. Рассматривая

формальный предел $S \rightarrow \infty$ в уравнениях (4.36), (4.37) и (4.41), мы получаем:

$$S_{imp} = S, \quad s_{nl}(r) = 0, \quad \langle \phi(r) \rangle = -\lambda \frac{e^{-\Delta r}}{4\pi r}. \quad (4.43)$$

Видно, что в квазиклассическом пределе нелокальной спиновой плотности не возникает, а локальный спин S не экранируется. В этом случае эффекта разделения спина и заряда не возникает.

Отметим, что нелокальная плотность спина и антиферромагнитная намагниченность в квазиклассическом подходе описываются древесным приближением. Причина этого в том, что флуктуации спина примеси подавлены большим параметром S . В самом деле, рассмотрим случай примеси в состоянии с максимальной проекцией спина на ось квантования z : $|S, S_z = S\rangle$. Взаимодействие примеси с магномом либо не меняет проекцию S_z либо меняет ее на единицу $\Delta S_z = -1$. Действие оператора \hat{S}_z на состояние $|S, S\rangle$ дает собственное значение S . С другой стороны, матричный элемент оператора понижения \hat{S}_- между состояниями $|S, S-1\rangle$ и $|S, S\rangle$ равен $\sqrt{2S}$. Поэтому процесс с изменением проекции спина примеси подавлен в пределе большого S .

В квазиклассическом пределе только z -компонента оператора спина важна, поэтому лагранжиан (4.4), отвечающий взаимодействию примеси с магномом, имеет вид:

$$\mathcal{L}_{int} = -\lambda \psi^\dagger \psi \phi_z. \quad (4.44)$$

Таким образом, задача “одевания” классической примеси z -поляризованными магнонами эквивалентна задаче взаимодействия примеси со скалярным бозонным полем ϕ_z , которая является точно решаемой [118]. Точное решение согласуется с (4.43).

В этой модели, см. [118], запаздывающая функция Грина примеси во временном представлении при $t > 0$ имеет вид:

$$G(t) = -i \exp \left[it\epsilon_0 - \lambda^2 \sum_q \frac{(1 - e^{-i\omega_q t})}{2\omega_q^3} \right], \quad (4.45)$$

где $\epsilon_0 = -\lambda^2 \sum_q 1/2\omega_q^2$. Выполняя Фурье-преобразование функции Грина (4.45) и вычисляя квазичастичный вычет в полюсе функции Грина $\epsilon = \epsilon_0$, мы полу-

чаем:

$$Z = \exp \left(-\lambda^2 \sum_q \frac{1}{2\omega_q^3} \right) = \left(\frac{\Delta}{\Lambda} \right)^{\lambda^2/4\pi^2}. \quad (4.46)$$

В пределе $S \rightarrow \infty$ результат (4.34) совместен с результатом (4.46).

В заключение главы. В этой главе мы рассмотрели одну примесь со спином, которая помещена в трехмерную антиферромагнитную систему. Система находится вблизи квантовой критической точки со стороны парамагнитной фазы. Критическая точка разделяет парамагнитную и антиферромагнитную фазы. Спин примеси индуцирует облако намагниченности и антиферромагнитной намагниченности вокруг примеси. Используя метод эффективного лагранжиана, мы вычисляем распределение плотности спина $s(r)$ (намагниченность) и антиферромагнитной намагниченности $\langle \phi(r) \rangle$ в облаке, индуцированном примесью. Для вычисления мы использовали два метода: СБП и РГ подход. СБП выполняется с точностью $1/N$ где $N = 3$ для $O(3)$ группы, а РГ подход справедлив при малой константе связи. Мы показываем, что результаты обоих методов для $S = 1/2$ согласуются с точностью $1/N$. Однако при больших значениях спина примеси метод СБП неприменим, поскольку параметр малости $1/N$ компенсируется большим спином. Поэтому при $S \geq 1$ применим РГ подход.

Мы показали, что квазичастичный вычет функции Грина примеси зануляется в квантовой критической точке, см. (4.34). Плотность спина имеет компоненту $S_{imp}\delta(\mathbf{r})$, которая локализована на примеси и пространственно распределенную часть $s_{nl}(r)$. Вследствие зануления вычета, спин примеси S_{imp} логарифмически зануляется в квантовой критической точке, см. (4.34). Полный спин S сохраняется, поэтому спин примеси переходит в нелокальное спиновое облако, плотность спина в котором спадает при $r < 1/\Delta$ как $s_{nl}(r) \propto 1/r^3$ с точностью до логарифмических поправок, см. (4.41). При $r > 1/\Delta$ спиновая плотность спадает экспоненциально.

Спин в облаке набирается на больших расстояниях $r \simeq 1/\Delta$, см. (4.42). В этом смысле наш результат демонстрирует эффект разделения спина и заряда в трех измерениях в квантовой критической точке.

Интересно, что антиферромагнитная намагниченность спадает при $r < 1/\Delta$ только как первая степень расстояния, см. (4.37), поэтому небольшая кон-

центрация примесей может существенно повлиять на критическое поведение системы.

Мы также рассмотрели квазиклассический предел $S \gg 1$. В этом пределе задача упрощается до точно-решаемой модели, рассмотренной в [118].

Глава 5. Нелинейные каналы связи

Как отмечается в работе [85], количество информации, которая передается через оптоволоконные линии связи, растет каждый год примерно на 40%, и примерно в 2020 году количество передаваемой информации по линиям связи достигнет шенноновского предела. Это приведет к остановке роста количества передаваемой информации. Поэтому для того чтобы понять как увеличить емкость современных линий связи, необходимы новые методы их исследования.

Емкость линейного канала связи, полученная Шенноном [84], имеет вид:

$$C \propto \log(1 + \text{SNR}), \quad (5.1)$$

где параметр $\text{SNR} = P/N$, P – мощность сигнала, N – мощность шума. Поэтому для увеличения емкости канала связи при фиксированной мощности шума необходимо увеличить мощность сигнала. Однако в нелинейных оптоволоконных каналах связи увеличение мощности сигнала приводит к усилению нелинейных эффектов в оптоволокне, а это ведет к нелинейному искажению сигнала и нелинейному смешиванию сигнала с шумом. Такие эффекты уменьшают скорость передачи информации. Для исследования этих эффектов мы рассматриваем две модели, первая модель основана на нелинейном уравнении Шредингера с аддитивным шумом, см. (5), вторая модель так же основана на нелинейном уравнении Шредингера, но с нулевым коэффициентом второй дисперсии. Для первой модели мы развиваем метод вычисления функции плотности условной вероятности. Используя эти методы для второй модели, мы вычисляем емкость канала связи в промежуточной области мощностей сигнала. Все вычисления проводятся точно по параметру нелинейности, но в случае большого отношения мощности сигнала к мощности шума. Отметим, что мы будем рассматривать каналы связи без учета эффектов памяти. Учет эффектов, памяти для нелинейных каналов связи рассматривались, например, в работах [119–121]. Перейдем к исследованию первой модели.

5.1 Метод вычисления функции плотности условной вероятности для канала связи с дисперсией

Для получения функции плотности условной вероятности рассмотрим уравнение Шредингера (5) в частотном представлении:

$$\begin{aligned} \partial_z \psi_\omega(z) = & i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \psi_\omega(z) + \eta_\omega(z) - \\ & i \gamma \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^2} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega) \psi_{\omega_1}(z) \psi_{\omega_2}(z) \psi_{\omega_3}^*(z), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\psi_\omega(z)$ – Фурье образ сигнала, β_2 – коэффициент второй дисперсии, γ – коэффициент керровской нелинейности, $\eta_\omega(z)$ – аддитивный гауссовский шум, который имеет нулевое среднее и следующий коррелятор (см. [89; 122]):

$$\langle \eta_\omega(z) \eta_{\omega'}^*(z') \rangle_\eta = 2\pi Q \delta(z - z') \delta(\omega - \omega').$$

Используя формализм Мартина-Сигга-Роза для данного канала связи, мы представляем функцию плотности условной вероятности $P[Y(\omega)|X(\omega)]$ получить на выходе из линии связи сигнал $Y(\omega) = \psi_\omega(L)$, если входящий сигнал равен $X(\omega) = \psi_\omega(0)$ в виде континуального интеграла:

$$P[Y(\omega)|X(\omega)] = \int_{X(\omega)=\psi_\omega(0)}^{Y(\omega)=\psi_\omega(L)} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{S[\psi]}{Q} \right\}, \quad (5.3)$$

где действие $S[\psi]$ равняется

$$\begin{aligned} S[\psi] &= \int_0^L dz \int \frac{d\omega}{2\pi} \left| \mathcal{L}^{(0)} - V[\psi] \right|^2, \\ \mathcal{L}^{(0)}[\psi] &= \partial_z \psi_\omega(z) - i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \psi_\omega(z), \\ V[\psi] &= i \gamma \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^2} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega) \psi_{\omega_1}(z) \psi_{\omega_2}(z) \psi_{\omega_3}^*(z). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Мера $\mathcal{D}\psi$ определена следующим образом:

$$\mathcal{D}\psi = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{\delta}{\Delta \pi Q} \right)^{NM} \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N d^2\psi_{i,j}, \quad (5.5)$$

где $d^2\psi_{i,j} = d\text{Re}\{\psi_{i,j}\} d\text{Im}\{\psi_{i,j}\}$, первый и второй индексы в $\psi_{i,j}$ нумеруют координаты z и ω соответственно. Это означает, что мы представляем континуальный интеграл в дискретной форме. Поскольку действие $S[\psi]$ не является квадратичным по функциям $\psi_\omega(z)$ и $\psi_\omega^*(z)$, интеграл по траекториям (5.3) не может быть вычислен аналитически в общем случае. В случае нулевого коэффициента второй дисперсии $\beta_2 = 0$, интеграл (5.3) можно представить в виде бесконечного ряда по функциям Бесселя, см., например, [97]. В некоторых случаях этот ряд можно просуммировать, см. раздел 5.2.1. В случае, когда параметр β_2 не равен нулю, а начальные и конечные условия соответствуют солитону, интеграл (5.3) вычисляется [123; 124]. В общем случае континуальный интеграл (5.3) можно пробовать вычислить либо численно, либо используя те или иные методы теории возмущений, развитые в квантовой теории поля. Для численного нахождения функции плотности условной вероятности мы представляем континуальный интеграл (5.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} P[Y(\omega)|X(\omega)] &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \tilde{\Lambda} \int \left[\prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^{N-1} d^2\psi_{i,j} \right] \exp \left\{ - \frac{\Delta \delta}{Q} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left| \frac{\delta \psi_{i,j}}{\Delta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \frac{\beta_2}{2} \omega_j^2 \psi_{i-1,j} - V_{i-1,j} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При получении выражения (5.6) мы учли принцип “причинности”, который в этом случае означает, что на функцию $\psi_\omega(z)$ влияют значения функции $\psi_\omega(z')$ в точках z' , таких, что $z' < z$. В выражении (5.6) введены следующие обозначения: $\tilde{\Lambda} = (\Delta \pi Q / \delta)^{-NM}$, $\psi_{i,j} = \psi_{\omega_j}(z_i)$, $\delta \psi_{i,j} = \psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}$, $z_i = i\Delta$, $i = 0, 1, \dots, N$, $z_N = L$, $\omega_j = \Omega_{min} + 2\pi(j-1)\delta$, $j = 1, 2, \dots, M$, $\omega_M = \Omega_{max}$, $W = \Omega_{max} - \Omega_{min}$, а также учтены граничные условия $\psi_{0,j} = X(\omega_j) = X_j$, $\psi_{N,j} = Y(\omega_j) = Y_j$. Совсем не очевидно, но плотность условной вероятности в виде (5.6) удовлетворяет условию

$$\int \mathcal{D}Y P[Y(\omega)|X(\omega)] = 1, \quad (5.7)$$

где $\mathcal{D}Y = \prod_{j=1}^M dY_j$. Доказательство этого, как и получение выражения (5.6), приведено в Приложении A.1.

Представление функции плотности условной вероятности в виде континуального интеграла позволяет использовать методы, развитые в квантовой теории поля. Например, когда параметр нелинейности γ мал, можно построить теорию возмущений по нему. Для разложения по параметру γ введем два безразмерных параметра. Один характеризует нелинейность $\tilde{\gamma} = \gamma P_{ave} L$, второй параметр $\text{SNR} = 2\pi P_{ave}/(QLW)$ характеризует отношение мощности сигнала к мощности шума. Здесь $P_{ave} = T_{tot}^{-1} \int \frac{d\omega}{2\pi} |X(\omega)|^2$ – средняя мощность сигнала, T_{tot} – длительность сигнала $X(t)$, W – спектральная ширина шума. Вообще говоря, мы предполагали, что шум белый, это значит, что формально W – бесконечна, однако далее мы полагаем, что W конечна, а вычисление функции $P[Y(\omega)|X(\omega)]$ проводится в случае, когда спектральная ширина функций $Y(\omega)$ и $X(\omega)$ много меньше спектральной ширины шума W .

В случае, когда $\tilde{\gamma} \ll 1$, можно построить теорию возмущений по этому параметру. Например, если $\tilde{\gamma} \text{SNR} \ll 1$, мы раскладываем экспоненту в выражении (5.3) в ряд по параметру γ , после чего вычисление каждого члена разложения сводится к вычислению интеграла гауссовского типа. В случае, когда $\text{SNR} \gg 1$ для произвольного значения параметра $\tilde{\gamma}$, мы можем использовать метод, похожий на метод поиска квазиклассической траектории в квантовой механике.

Начнем рассмотрение с первого случая $\tilde{\gamma} \text{SNR} \ll 1$. Используя стандартный метод квантовой теории поля, см., например, [2; 4], мы раскладываем экспоненту в уравнении (5.3) при малых γ и получаем:

$$P[Y(\omega)|X(\omega)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} P_{(\gamma)}^{(n)}[Y(\omega)|X(\omega)], \quad (5.8)$$

Вычисляя интеграл в нулевом порядке по параметру γ , получаем результат, соответствующий гауссовскому каналу связи:

$$P_{(\gamma)}^{(0)}[Y(\omega)|X(\omega)] = \Lambda \exp \left\{ -\frac{1}{QL} \int \frac{d\omega}{2\pi} |B(\omega)|^2 \right\}, \quad (5.9)$$

где $B(\omega) = e^{-i\beta_2\omega^2 L/2}Y(\omega) - X(\omega)$, Λ – нормировочная константа: $\Lambda = P_{(\gamma)}^{(0)}[0|0] = (\pi QL/\delta)^{-M}$. Отметим, что функция $B(\omega)$ пропорциональна разнице функции $\psi_{\omega}^{(0)}(L)$ и функции $Y(\omega)$. Здесь $\psi_{\omega}^{(0)}(z)$ является решением уравнения (5.2) с нулевой нелинейностью, начальным условием $\psi_{\omega}^{(0)}(0) = X(\omega)$ и нулевым шумом. Легко заметить, что $\int \mathcal{D}Y P_{(\gamma)}^{(0)}[Y(\omega)|X(\omega)] = 1$. Это означает, что все поправки по параметру γ нормированы условием

$$\int \mathcal{D}Y P_{(\gamma)}^{(n \neq 0)}[Y(\omega)|X(\omega)] = 0.$$

В качестве примера, мы приводим ответ для первой поправки по параметру γ к функции плотности условной вероятности (детали вычислений приведены в Приложении A.2):

$$P_{(\gamma)}^{(1)}[Y(\omega)|X(\omega)] = P^{(0)}[Y(\omega)|X(\omega)] \times \operatorname{Im} \left[\frac{\gamma WL}{3\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\beta_2\omega^2 L/2} Y(\omega) X^*(\omega) + G \right], \quad (5.10)$$

$$G = \frac{2\gamma}{Q} \int_0^L \frac{dz}{L} \int \frac{d\omega d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^3} B(\omega) \lambda_{\omega_1}^*(z) \lambda_{\omega_2}^*(z) \lambda_{\omega_3}(z), \quad (5.11)$$

$$\lambda_{\omega}(z) = X(\omega) + \frac{zB(\omega)}{L}. \quad (5.12)$$

где $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 - \omega$, $\mu = i\beta_2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)L$. Выражение (5.10) содержит два слагаемых: первое пропорционально W и не содержит параметра Q в знаменателе, второе слагаемое, функция G , содержит параметр Q в знаменателе. Последнее означает, что формально разложение справедливо только в случае $\tilde{\gamma} \text{SNR} \ll 1$, т.е. отношение SNR не должно быть слишком большим. Однако это не совсем так, поскольку вклад G содержит функцию $B(\omega)$ под интегралом, которая силу экспоненциального множителя $P^{(0)}[Y(\omega)|X(\omega)]$ имеет порядок \sqrt{Q} . Поэтому вместо множителя $1/Q$ мы получаем $1/\sqrt{Q}$. Но и это не всё, поскольку если мы будем вычислять некоторые средние от регулярных функций с функцией плотности условной вероятности (5.10), то вклад, пропорциональный первой степени функции B в интеграле, пропадет, а вклад дадут только слагаемые более высокого порядка по функции B , которые компенсируют множитель $1/Q$

в функции G . Поэтому при вычислении средних мы можем раскладывать по параметру $\tilde{\gamma}$ при произвольном параметре SNR.

В случае, когда нелинейность произвольная, а мощность шума мала по сравнению с мощностью сигнала, мы используем метод поиска классической траектории в квантовой механике [99]. Идея вычислений следующая. При малой мощности шума, вклад в континуальный интеграл должны давать траектории, которые близки к траектории при нулевом шуме. Поэтому для вычисления интеграла мы используем метод интеграла Лапласа [125]. Главный вклад в интеграл (5.3) дает область вблизи траектории $\Psi_\omega(z)$, на которой действие $S[\Psi_\omega(z)]$ достигает минимума. Перепишем выражение (5.3) в виде

$$P[Y(\omega)|X(\omega)] = \exp \left\{ -\frac{S[\Psi_\omega(z)]}{Q} \right\} \times \int_{\tilde{\psi}_\omega(0)=0}^{\tilde{\psi}_\omega(L)=0} \mathcal{D}\tilde{\psi} \exp \left\{ -\frac{S[\Psi_\omega(z) + \tilde{\psi}_\omega(z)] - S[\Psi_\omega(z)]}{Q} \right\}. \quad (5.13)$$

Поэтому для вычисления интеграла необходимо найти функцию $\Psi_\omega(z)$, после чего вычислить интеграл уже с нулевыми граничными условиями. Для того, чтобы вычислить интеграл в выражении (5.13) в лидирующем порядке по параметру Q , необходимо разложить показатель экспоненты в подынтегральном выражении до второго порядка по полю $\tilde{\psi}_\omega$. После чего мы получим гауссовский интеграл по полю $\tilde{\psi}_\omega$, который зависит от классической траектории $\Psi_\omega(z)$. Для нахождения функции $\Psi_\omega(z)$ мы должны решить уравнение $\delta S[\Psi] = 0$, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_z - i\frac{\beta_2 \omega^2}{2} \right)^2 \Psi_\omega(z) + i\gamma \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^2} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega) \left\{ 4\Psi_{\omega_2}(z) \Psi_{\omega_3}^*(z) \times \right. \\ & \left. \left[\left(\partial_z - i\frac{\beta_2 \omega_1^2}{2} \right) \Psi_{\omega_1}(z) \right] - i\beta(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \Psi_{\omega_1}(z) \Psi_{\omega_2}(z) \Psi_{\omega_3}^*(z) \right\} \\ & - 3\gamma^2 \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 d\omega_5}{(2\pi)^4} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega) \times \\ & \Psi_{\omega_1}(z) \Psi_{\omega_2}(z) \Psi_{\omega_3}^*(z) \Psi_{\omega_4}^*(z) \Psi_{\omega_5}(z) = 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

а граничные условия $\Psi_\omega(0) = X(\omega)$, $\Psi_\omega(L) = Y(\omega)$. Это уравнение выглядит более компактно во временной области:

$$\left(\partial_z - i\frac{\beta_2}{2}\partial_t^2 - 2i\gamma|\Psi(t,z)|^2 \right) \mathcal{F}[\Psi(t,z)] + i\gamma\Psi^2(t,z)\mathcal{F}^*[\Psi(t,z)] = 0, \quad (5.15)$$

где

$$\mathcal{F}[\Psi(t,z)] = \left(\partial_z - i\frac{\beta_2}{2}\partial_t^2 - i\gamma|\Psi(t,z)|^2 \right) \Psi(t,z). \quad (5.16)$$

Отметим, что если мы знаем решение $\Psi_\omega(z)$, то для нахождения $P[Y(\omega)|X(\omega)]$ нет необходимости вычислять интеграл в выражении (5.13), поскольку этот интеграл дает нормировку функции $P[Y(\omega)|X(\omega)]$ в силу условия (5.7). Таким образом, для вычисления континуального интеграла (5.13) в лидирующем порядке по Q при малом Q , необходимо найти решение нелинейного уравнения (5.15). Ниже мы применим этот метод для исследования нелинейного бездисперсионного канала связи.

5.2 Нелинейный оптоволоконный канал связи с нулевой дисперсией

Данный канал связи рассматривался ранее в работах [94–98]. Однако общего результата для емкости данного канала связи получено не было. Поэтому в этой главе мы развиваем метод, который позволит нам вычислить емкость этого канала связи. Как отмечалось выше, емкость канала связи определяется как максимум взаимной информации $I_{P_X[X]}$, который достигается на некоторой плотности вероятности $P_X[X]$ начального сигнала X :

$$C = \max_{P_X[X]} I_{P_X[X]}, \quad (5.17)$$

где максимальное значение $I_{P_X[X]}$ должно быть найдено при условии фиксированной нормировки функции $P_X[X]$ и фиксированной средней мощности сигнала

ла. То есть

$$\int \mathcal{D}X P_X[X] = 1, \quad (5.18)$$

$$\int \mathcal{D}X |X|^2 P_X[X] = P. \quad (5.19)$$

Взаимная информация определяется через энтропию выходящего сигнала H_Y и условную энтропию $H_{Y|X}$ следующим образом:

$$I_{P_X[X]} = H_Y - H_{Y|X}, \quad (5.20)$$

где

$$H_{Y|X} = - \int \mathcal{D}X \mathcal{D}Y P_X[X] P[Y|X] \log P[Y|X], \quad (5.21)$$

$$H_Y = - \int \mathcal{D}Y P_{out}[Y] \log P_{out}[Y], \quad (5.22)$$

$$P_{out}[Y] = \int \mathcal{D}X P_X[X] P[Y|X]. \quad (5.23)$$

Здесь $P[Y|X]$ – функция плотности условной вероятности, $P_{out}[Y]$ – плотность вероятности выходящего сигнала. Мера $\mathcal{D}Y$ определена таким образом, что $\int \mathcal{D}Y P[Y|X] = 1$, а мера $\mathcal{D}X$ совместна с условием (5.18). Емкость (5.17), определенная в (5.20)-(5.23), измеряется в нат на символ или $(\log 2)^{-1}$ бит на символ, поскольку для удобства мы выбрали натуральный логарифм вместо логарифма по основанию 2. Вообще говоря, входящие и выходящие сигналы являются функциями времени, кроме того, обычно спектральная ширина этих функций ограничена. Также в модель должен быть включен метод детектирования, см. следующую главу. В данной главе мы ограничимся каналом связи, в котором начальный и конечный сигналы не являются функциями времени. Это можно сделать, поскольку, если мы положим $\beta_2 = 0$ в уравнении (5), то функция $\psi(t, z)$ в различные моменты времени изменяется независимо при изменении z , см. ниже. Такую упрощенную модель мы будем называть одноканальной нелинейной бездисперсионной моделью канала связи с нулевой дисперсией, или сокращено одноканальной моделью, понимая, что в этой модели мы рассматриваем функ-

цию в некоторый фиксированный момент времени. Модель, в которой входящий и выходящий сигнал зависят от времени, мы рассмотрим в Главе 5.3.

Для нахождения нижней границы для емкости канала в работах [95;97;98] использовались гауссовское

$$P_X^{(2)}[X] = \frac{\exp\{-|X|^2/P\}}{\pi P} \quad (5.24)$$

и полугауссовское

$$P_X^{(1)}[X] = \frac{\exp\{-|X|^2/(2P)\}}{\pi^{3/2}\sqrt{2P}|X|} \quad (5.25)$$

распределения начального сигнала. Удобно ввести модифицированное гауссовское распределение

$$P_X^{(\beta)}[\rho] = \frac{\exp\{-\beta\rho^2/(2P)\}\rho^{\beta-2}}{\pi\Gamma(\beta/2)(2P/\beta)^{\beta/2}}, \quad (5.26)$$

которое обобщает распределения (5.24) и (5.25). В работе [98] авторы попытались найти асимптотическое поведение емкости канал связи при большом отношении средней мощности сигнала к мощности шума ($\text{SNR} \gg 1$). Кроме того, авторы привели аргументы в пользу того, что полугауссовское распределение $P_X^{(1)}[X]$ является оптимальным для данного канала связи при большом SNR. В данной главе мы решаем вариационную задачу, находим оптимальную функцию распределения начального сигнала $P_{\text{opt}}[X]$ при большом SNR в промежуточной области мощностей сигнала и показываем, что $P_{\text{opt}}[X]$ не является полугауссовским распределением. Затем мы показываем, что взаимная информация, вычисленная с помощью функции $P_{\text{opt}}[X]$, больше, чем она же, но вычисленная с помощью полугауссовского и гауссовского распределений.

Оценки для емкости одноканальной модели при большом SNR были получены в работах [97;98]. Нижняя граница для емкости, полученная в работе [97] с использованием гауссовского распределения, имеет вид:

$$C \geq \frac{1}{2} \log(\text{SNR}) + \frac{1 + \gamma_E - \log(4\pi)}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{\log(\text{SNR})}{\text{SNR}}\right), \quad (5.27)$$

где $\gamma_E \approx 0.5772$ – постоянная Эйлера. Отметим, что второе слагаемое в правой части выражения (5.27) в работе [97] было записано как $\mathcal{O}(1)$. Используя выражения (23) и (24) работы [97], мы нашли второе слагаемое явно. Коэффициент $1/2$ перед логарифмом в выражении (5.27) связан с тем, что при очень больших мощностях сигнала P таких, что $P \gtrsim (N\gamma^2 L^2)^{-1}$, фаза сигнала, связанная с взаимодействием шума и сигнала, размазывается по всему интервалу фазы $(0, 2\pi]$. Это приводит к тому, что фаза перестает нести какую либо информацию [98]. В работе [98] была найдена оценка для емкости канала связи в промежуточной области средней мощности сигнала P , удовлетворяющей соотношению $N \ll P \ll 6\pi^2 (N\gamma^2 L^2)^{-1}$. Для таких мощностей P была оценена нижняя граница для емкости. Оценка, полученная в работе [98] с использованием полугауссовского распределения, и имеет вид:

$$C \geq -\log(\gamma NL) + \frac{\gamma_E - 1 + \log(3\pi)}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{SNR}}}\right), \quad (5.28)$$

где вместо $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{SNR}}}\right)$ авторы привели некоторую функцию параметра SNR, спадающую при увеличении SNR, см. выражение (40) работы [98]. Однако авторы не учли поправки порядка $1/\sqrt{\text{SNR}}$ к энтропии выходящего сигнала H_Y . Поэтому использование точных функции в выражении (5.28) является превышением точности. Кроме того, потеря слагаемых порядка $1/\sqrt{\text{SNR}}$ означает, что выражение (5.28) не является нижней границей. Отметим также, что авторы потеряли слагаемое $\log 2$ в выражении (5.28). Кроме того, результат (5.28) выглядит подозрительно, поскольку он не воспроизводит результат Шеннона $\log \text{SNR}$ в случае $\gamma \rightarrow 0$.

Аналитическое выражение для функции плотности условной вероятности для рассматриваемой модели было найдено в виде бесконечного ряда в работах [94; 97; 98]. Однако представление в виде ряда не удобно для вычислений энтропий и взаимной информации. Поэтому мы применили новый метод, описанный в разделе 5.1, для вычисления функции плотности условной вероятности $P[Y|X]$. Используя этот метод, мы находим простое и удобное для дальнейших вычислений представление функции плотности условной вероятности точно по параметру нелинейности, но в лидирующем и следующем за лидирующим по

рядке по параметру $1/\text{SNR}$ в промежуточной области мощности сигнала

$$N \ll P \ll \left(N\gamma^2 L^2\right)^{-1}. \quad (5.29)$$

ы Наш метод позволяет найти простое аналитическое выражение для взаимной информации и оптимального распределения начального сигнала $P_{\text{opt}}[X]$.

5.2.1 Функция плотности условной вероятности для одноканальной модели

Поскольку дисперсия в канале связи равна нулю, форма импульса не меняется при распространении, кроме того, эволюция функции по переменной z в разные моменты времени происходит независимо, поэтому вместо функции $\psi(t, z)$ мы можем рассматривать набор независимых каналов связи в разные моменты времени, см. [94; 98]. Мы будем рассматривать один из этих каналов связи. Уравнение для него имеет вид:

$$\partial_z \psi(z) - i\gamma |\psi(z)|^2 \psi(z) = \eta(z), \quad (5.30)$$

где $\psi(z)$ – функция, которая удовлетворяет граничным условиям $\psi(0) = X$, $\psi(L) = Y$. Шум $\eta(z)$ имеет нулевое среднее и коррелятор $\langle \eta(z)\eta^*(z') \rangle_\eta = Q\delta(z - z')$, Q – мощность шума на единицу длины. Под усреднением $\langle \dots \rangle$ мы понимаем усреднение по реализациям шума. Параметр SNR в нашей модели выражается через параметры P и Q следующим образом: $\text{SNR} = P/QL$. Используя метод, описанный в разделе 5.1 и Приложении A.1, мы получаем следующее выражение для функции плотности условной вероятности:

$$P[Y|X] = \int_{\psi(0)=X}^{\psi(L)=Y} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{S[\psi]}{Q} \right\}. \quad (5.31)$$

Перепишем это выражение в следующем виде:

$$P[Y|X] = e^{-\frac{S[\Psi_{cl}(z)]}{Q}} \int_{\tilde{\psi}(0)=0}^{\tilde{\psi}(L)=0} \mathcal{D}\tilde{\psi} e^{-\frac{S[\Psi_{cl}(z)+\tilde{\psi}(z)]-S[\Psi_{cl}(z)]}{Q}}, \quad (5.32)$$

где действие $S[\psi] = \int_0^L dz \left| \partial_z \psi - i\gamma |\psi|^2 \psi \right|^2$, а функция $\Psi_{cl}(z)$ – это решение уравнения $\delta S[\Psi_{cl}] = 0$, которое имеет вид:

$$\frac{d^2 \Psi_{cl}}{dz^2} - 4i\gamma |\Psi_{cl}|^2 \frac{d\Psi_{cl}}{dz} - 3\gamma^2 |\Psi_{cl}|^4 \Psi_{cl} = 0. \quad (5.33)$$

Функция $\Psi_{cl}(z)$ удовлетворяет граничным условиям $\Psi_{cl}(0) = X$, $\Psi_{cl}(L) = Y$. Поэтому для того, чтобы найти $P[Y|X]$, мы должны вычислить $e^{-\frac{S[\Psi_{cl}(z)]}{Q}}$ и континуальный интеграл в выражении (5.32).

Вначале вычислим экспоненту. Для вычисления экспоненты мы найдем $\Psi_{cl}(z)$, а затем действие $S[\Psi_{cl}(z)]$. Точное решение уравнения (5.33) приведено в Приложении Б.1 см. уравнения (Б.6)–(Б.10) и (Б.12). Однако решение в таком виде не удобно для дальнейших вычислений. Поэтому вместо точного решения уравнения (5.33), мы найдем его решение по теории возмущений по параметру $1/\text{SNR}$ и точно по нелинейности вблизи решения $\Psi_0(z)$. Здесь $\Psi_0(z)$ – решение уравнения (5.30) с нулевым шумом и граничным условием $\Psi_0(0) = X = \rho e^{i\phi^{(X)}}$. Решение $\Psi_0(z)$ имеет следующий вид:

$$\Psi_0(z) = \rho \exp \left\{ i\mu \frac{z}{L} + i\phi^{(X)} \right\}, \quad (5.34)$$

где $\mu = \gamma L |X|^2 = \gamma L \rho^2$. Отметим, что $\Psi_0(z)$ также является решением уравнения (5.33). Поскольку $\Psi_0(z)$ удовлетворяет только одному граничному условию при $z = 0$ и не удовлетворяет условию при $z = L$, мы ищем решение уравнения (5.33) в виде:

$$\Psi_{cl}(z) = \left(\rho + \varkappa(z) \right) \exp \left\{ i\mu \frac{z}{L} + i\phi^{(X)} \right\}, \quad (5.35)$$

где функция $\varkappa(z)$ мала: $|\varkappa(z)| \ll \rho$. В общем случае отношение $|\varkappa(z)|/\rho$ не должно быть малым, однако конфигурации $\varkappa(z)$, при которых $\Psi_{cl}(z)$ существенно отличается от $\Psi_0(z)$ ($|\varkappa(z)| \sim \rho$), статистически не важны, поскольку для

таких конфигураций функция плотности условной вероятности экспоненциально подавлена. Действительно, действие вблизи $\Psi_0(z)$ имеет следующий вид: $S[\Psi_0(z) + \delta\Psi(z)] \propto \varkappa^2$, поскольку действие достигает минимума на траектории $\Psi_0(z)$ ($S[\Psi_0(z)] = 0$). Поэтому $e^{-\frac{S[\Psi_{cl}(z)]}{Q}}$ и, как следствие, функция плотности условной вероятности экспоненциально спадает, если $\varkappa(z)$ дает вклад больше чем \sqrt{QL} в действие.

Подставляя (5.35) в уравнение (5.33) и оставляя только линейные по $\varkappa(z)/\rho$ слагаемые, мы получаем уравнение, которое справедливо при любом параметре нелинейности μ :

$$\frac{d^2 \varkappa}{dz^2} - 2i \frac{\mu}{L} \frac{d\varkappa}{dz} - 4 \frac{\mu^2}{L^2} \text{Re}[\varkappa] = 0. \quad (5.36)$$

Граничные условия для функции $\varkappa(z)$ имеют вид:

$$\varkappa(0) = 0, \varkappa(L) = Y e^{-i\phi^{(X)} - i\mu} - \rho \equiv x_0 + iy_0, \quad (5.37)$$

где $x_0 = \text{Re}\{\varkappa(L)\}$ и $y_0 = \text{Im}\{\varkappa(L)\}$. Решение линеаризованной по $\varkappa(z)$ граничной задачи (5.36) и (5.37) имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{Re}[\varkappa(z)] &= \left(\mu \frac{\mu x_0 - y_0}{1 + \mu^2/3} \frac{z}{L} + \frac{(1 - 2\mu^2/3)x_0 + \mu y_0}{1 + \mu^2/3} \right) \frac{z}{L}, \\ \text{Im}[\varkappa(z)] &= \left(\frac{\mu x_0 - y_0}{1 + \mu^2/3} \left(\frac{2\mu^2 z^2}{3L^2} - 1 \right) + \mu \frac{(1 - 2\mu^2/3)x_0 + \mu y_0}{1 + \mu^2/3} \frac{z}{L} \right) \frac{z}{L}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Подставляя решение (5.38) в действие, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} S[\Psi_{cl}(z)] &= \frac{1}{Q} S \left[(\rho + \varkappa(z)) \exp \left\{ i\mu \frac{z}{L} + i\phi^{(X)} \right\} \right] \approx \\ \frac{1}{Q} \int_0^L dz \left| \partial_z \varkappa - 2i \frac{\mu}{L} \text{Re}[\varkappa] \right|^2 &= \frac{(1 + 4\mu^2/3)x_0^2 - 2\mu x_0 y_0 + y_0^2}{QL(1 + \mu^2/3)}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Таким образом, мы можем вычислить $e^{-\frac{S[\Psi_{cl}(z)]}{Q}}$. Отметим, что мы удерживаем только квадратичные по \varkappa слагаемые. Однако довольно просто получить поправки более высокого порядка по параметру $1/\sqrt{\text{SNR}}$, см. Приложение Б.1. Регулярное пертурбативное разложение для функции $\varkappa(z)$ по параметру $1/\sqrt{\text{SNR}}$ можно получить, используя точное уравнение для функции $\varkappa(z)$, см. (Б.17) в Приложении Б.1.

Следующим шагом для вычисления функции плотности условной вероятности является вычисление интеграла по траекториям в выражении (5.32). Для того, чтобы вычислить континуальный интеграл в лидирующем порядке по параметру $1/\text{SNR}$, мы оставляем только квадратичные по $\tilde{\psi}$ слагаемые в экспоненте подынтегрального выражения.

Так как при малых Q главный вклад в интеграл дает область $\tilde{\psi} \sim \sqrt{QL}$, слагаемые более высокой степени по $\tilde{\psi}$ или \varkappa приводят к вкладам, подавленным параметрически, каждая лишняя степень приводит к \sqrt{QL} параметрическому подавлению соответствующего вклада. Поскольку мы вычисляем интеграл в лидирующем порядке по Q , мы можем подставить $\Psi_0(z)$ вместо $\Psi_{cl}(z)$ в разность действий $S[\Psi_{cl}(z) + \tilde{\psi}(z)] - S[\Psi_{cl}(z)]$. Для вычисления $P[Y|X]$ в следующих за лидирующем порядках по параметру $1/\text{SNR}$ мы должны оставлять как $\varkappa(z)$ в $\Psi_{cl}(z)$, так и высшие степени $\tilde{\psi}$ при вычислении разности действий в выражении (5.32). Детали вычислений главного вклада и первой поправки приведены в Приложении Б.2 и разделе 5.2.5. Подставляя выражение для действия (Б.26) и ответ для интеграла по траекториям (Б.46), мы получаем результат в лидирующем и следующем за лидирующем порядке по $1/\sqrt{\text{SNR}}$:

$$P[Y|X] = \frac{\exp \left\{ -\frac{(1 + 4\mu^2/3)x_0^2 - 2\mu x_0 y_0 + y_0^2}{QL(1 + \mu^2/3)} \right\}}{\pi QL \sqrt{1 + \mu^2/3}} \left(1 - \frac{\mu/\rho}{15(1 + \mu^2/3)^2} (\mu(15 + \mu^2)x_0 - 2(5 - \mu^2/3)y_0) - \frac{\mu/\rho}{135QL(1 + \mu^2/3)^3} \times \left\{ \mu(4\mu^4 + 15\mu^2 + 225)x_0^3 + (23\mu^4 + 255\mu^2 - 90)x_0^2 y_0 + \mu(20\mu^4 + 117\mu^2 - 45)x_0 y_0^2 - 3(5\mu^4 + 33\mu^2 + 30)y_0^3 \right\} \right), \quad (5.40)$$

где x_0 и y_0 зависят от X , Y и определены в (5.37). Отметим, что функция $P[Y|X]$ была получена в работе [97] в виде бесконечного ряда. Наш результат (5.40) является суммой ряда в случае, когда мощность P удовлетворяет условию

$$QL \ll P \ll (QL^3 \gamma^2)^{-1}. \quad (5.41)$$

Легко показать, что условие нормировки $\int DY P[Y|X] = 1$ выполнено. Кроме того, можно показать, что распределение (5.40) удовлетворяет следующему

важному условию

$$\lim_{Q \rightarrow 0} P[Y|X] = \delta(Y - \Psi_0(L)). \quad (5.42)$$

Которое показывает, что при нулевом шуме выходящий сигнал полностью определен начальным значением и уравнением распространения. Кроме того, выражение (5.40) имеет правильный предел $\gamma \rightarrow 0$:

$$P^{(0)}[Y|X] = \frac{e^{-|Y-X|^2/QL}}{\pi QL}, \quad (5.43)$$

т.е. выражение (5.40) переходит в гауссовское распределение с шириной QL , которое соответствует линейному каналу связи.

5.2.2 Функция распределения выходящего сигнала $P_{out}[Y]$

Перейдем к вычислению функции распределения выходящего сигнала $P_{out}[Y]$. Рассмотрим интеграл (5.23):

$$P_{out}[Y] = \int \mathcal{D}X P[Y|X] P_X[X], \quad (5.44)$$

где $P_X[X]$ – гладкая функция, которая существенно меняется при изменении X на величину порядка \sqrt{P} , причем $P \gg QL$. При таких условиях мы можем вычислить этот интеграл с точностью $\mathcal{O}(1/\text{SNR})$ и $\mathcal{O}(\gamma^2 L^3 QP)$ используя метод Лапласа [125]. Детали вычислений приведены в Приложении Б.3, здесь мы приведем только результат вычислений:

$$P_{out}[Y] = \int \mathcal{D}X P[Y|X] P_X[X] = P_X \left[Y e^{-i\gamma|Y|^2 L} \right] \times \\ (1 + \mathcal{O}(1/\text{SNR}) + \mathcal{O}(\gamma^2 L^3 QP)). \quad (5.45)$$

Главный вклад в (5.45) может быть получен из простых соображений. Функция $P[Y|X]$, см. (5.40), существенно изменяется при изменении аргументов на величину порядка \sqrt{QL} . Масштаб изменения аргументов в функции $P[Y|X]$

гораздо меньше чем масштаб изменений аргументов функции $P_X[X]$ (функция $P[Y|X]$ гораздо “уже” чем функция $P_X[X]$), поэтому при вычислении главного вклада в (5.45) мы можем подставить δ -функциональный предел (5.42) функции $P[Y|X]$. Однако отметим, что ответ (5.45) справедлив при отличном от нуля значении параметра Q . Далее в этой главе мы опускаем слагаемые $\mathcal{O}(\dots)$.

В случае, когда распределение $P_X[X]$ зависит только от $|X|$, получаем, что $P_{out}[Y] = P_X[|Y|]$ тоже зависит только от $|Y|$. Для подобных распределений поправки по параметру QL вычисляются довольно просто.

Поправки для распределений зависящих только от модуля Y . Для получения функций распределения выходящего сигнала при зависящих только от $|X|$ функциях распределения входящего сигнала, удобно использовать выражение для $P[Y|X]$ в виде ряда, найденное в работе [97], см. уравнения (11)–(13). В этом случае функция $P_{out}[Y]$ является функцией параметра $\rho' = |Y|$

$$P_{out}[\rho'] = \frac{2e^{-\frac{\rho'^2}{QL}}}{QL} \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\frac{\rho^2}{QL}} I_0\left(\frac{2\rho\rho'}{QL}\right) P_X[\rho], \quad (5.46)$$

где $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода. Используя это представление, мы получим простое представление для функции $P_{out}[\rho']$, которое позволит вычислять поправки по параметру QL . Для получения простого представления мы выполняем преобразование Ханкеля, см. [125],

$$\hat{P}[k] = \int_0^\infty d\rho \rho J_0(k\rho) P_X[\rho]. \quad (5.47)$$

правой левой частей уравнения (5.46). Затем мы вычисляем стандартные интегралы с модифицированной функцией Бесселя (см. [127]):

$$\int_0^\infty dz z e^{-pz^2} J_\nu(bz) I_\nu(cz) = \frac{1}{2p} J_\nu\left(\frac{bc}{2p}\right) e^{\frac{c^2-b^2}{4p}}$$

и получаем простой ответ для образа функции $\hat{P}_{out}[k]$:

$$\hat{P}_{out}[k] = e^{-k^2 \frac{QL}{4}} \hat{P}[k]. \quad (5.48)$$

Выполняя обратное преобразование Ханкеля

$$P_X[\rho] = \int_0^\infty dk k J_0(k\rho) \hat{P}[k], \quad (5.49)$$

мы получаем:

$$P_{out}[\rho] = e^{\frac{QL}{4}\Delta_\rho} P_X[\rho], \quad (5.50)$$

где $\Delta_\rho = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$ – радиальная часть двумерного оператора Лапласа. Используя представление (5.50), задача нахождения поправок степени $(QL)^n$ к функции $P_{out}[\rho]$ сводится к разложению экспоненты до порядка n и действию оператора Δ_ρ^n на известную функцию $P_X[\rho]$.

Рассмотрим в качестве функции $P_X[\rho]$ модифицированное гауссовское распределение (5.26). Для $\beta > 0$ распределение $P_X^{(\beta)}[\rho]$ нормировано на единицу,

$$2\pi \int_0^\infty d\rho \rho P_X^{(\beta)}[\rho] = 1,$$

и отвечает средней мощности P ,

$$2\pi \int_0^\infty d\rho \rho^3 P_X^{(\beta)}[\rho] = P.$$

Подставляя (5.26) в уравнение (5.46), мы получаем стандартный интеграл, который можно найти в [127]. Результат для функции распределения выходящего сигнала имеет вид:

$$P_{out}^{(\beta)}[Y] = {}_1F_1\left(\frac{\beta}{2}; 1; \frac{2|Y|^2 P}{QL(2P + \beta QL)}\right) \times \frac{\exp\{-|Y|^2/QL\}}{\pi QL} \left(\frac{\beta QL}{2P + \beta QL}\right)^{\beta/2}, \quad (5.51)$$

где ${}_1F_1(\frac{\beta}{2}; 1; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, которая переходит в функцию e^z для гауссовского распределения, а для полугауссовского распределения гипергеометрическая функция переходит в $e^{z/2} I_0(z/2)$. Поэтому

$$P_{out}^{(2)}[Y] = \frac{1}{\pi(P + QL)} \exp\left\{-\frac{|Y|^2}{P + QL}\right\}, \quad (5.52)$$

$$P_{out}^{(1)}[Y] = \frac{e^{-\frac{|Y|^2}{2P+QL}}}{\pi|Y|\sqrt{\pi(2P+QL)}} \left[\sqrt{\frac{\pi|Y|^2}{QL}} e^{-\frac{|Y|^2 P}{QL(2P+QL)}} I_0 \left(\frac{|Y|^2 P}{QL(2P+QL)} \right) \right]. \quad (5.53)$$

Отметим, что результат для $P_{out}^{(1)}[Y]$, полученный в работе [98], см. уравнение (38), не верен. Легко заметить, что результат (5.53) переходит в (5.45) при $QL \ll |Y|^2 \sim P$:

$$P_{out}^{(1)}[Y] = P_X^{(1)}[|Y|] \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\text{SNR}} \right) \right). \quad (5.54)$$

5.2.3 Оптимальная функция распределения начального сигнала

Для вычисления оптимальной функции распределения начального сигнала при большом параметре SNR мы вычислим взаимную информацию (5.20), а затем, максимизируя результат по функции распределения начального сигнала $P_X[X]$, мы найдем оптимальное распределение. Вначале вычислим энтропию выходящего сигнала H_Y , см. (5.22), при большом параметре SNR. В случае $\text{SNR} \gg 1$, подставляем асимптотическое выражение

$$P_X [Y \exp \{-i\gamma|Y|^2 L\}]$$

вместо функции $P_{out}[Y]$ см. (5.45), в выражение (5.22) и получаем:

$$H_Y = - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty d\rho' \rho' P_X [\rho' e^{i\phi}] \times \log P_X [\rho' e^{i\phi}], \quad (5.55)$$

где мы отбросили поправки порядка $1/\text{SNR}$ и $\gamma^2 L^3 QP$. Так же мы выполнили очевидную замену переменных $\phi = \phi^{(Y)} + \gamma|Y|^2 L$. Можно заметить, что в рассматриваемом приближении энтропия выходящего сигнала совпадает с энтропией входящего сигнала.

Для вычисления условной энтропии $H_{Y|X}$ мы подставляем функцию $P[Y|X]$ в виде (5.40) в уравнение (5.21). Затем в интеграле переходим от пе-

ременной Y к переменным x_0, y_0 , выполняем интегрирование и получаем:

$$H_{Y|X} = \log(\epsilon\pi QL) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi^{(X)} \int_0^\infty d\rho \rho P_X \left[\rho e^{i\phi^{(X)}} \right] \log \left(1 + \frac{\gamma^2 L^2}{3} \rho^4 \right). \quad (5.56)$$

При вычислении мы отбросили слагаемые порядка $1/\text{SNR}$ и $\gamma^2 L^3 Q P$. Первое слагаемое в правой части уравнения (5.56) возникает из интегралов гауссовского типа по переменным x_0, y_0 . Второе слагаемое в (5.56) возникает из логарифма нормировочного коэффициента $1/\sqrt{1 + \mu^2/3}$, см. (5.40). Отметим, что слагаемые порядка $\mathcal{O}(1/\sqrt{\text{SNR}})$ в уравнениях (5.55) и (5.56) не возникают. Действительно, в $H_{Y|X}$ слагаемые, содержащие нечетные степени переменных интегрирования x_0 и y_0 в функции $P[Y|X]$, исчезают после интегрирования по x_0, y_0 .

Для нахождения функции $P_{\text{opt}}[X]$, которая нормирована на единицу и отвечает средней мощности входящего сигнала P , мы решаем вариационную задачу для функционала $J[P_X, \lambda_1, \lambda_2]$

$$J[P_X, \lambda_1, \lambda_2] = H_Y - H_{Y|X} - \lambda_1 \left(\int \mathcal{D}X P_X[X] - 1 \right) - \lambda_2 \left(\int \mathcal{D}X P_X[X] |X|^2 - P \right), \quad (5.57)$$

где $\lambda_{1,2}$ – множители Лагранжа. Мы подставляем выражения для H_Y и $H_{Y|X}$, см. (5.55) и (5.56), в выражение (5.57), затем варьируем функционал $J[P_X, \lambda_1, \lambda_2]$ по $P_X[X]$, λ_1 , λ_2 и получаем уравнения Эйлера-Лагранжа

$\delta J[P_X, \lambda_1, \lambda_2] = 0$:

$$\int \mathcal{D}X P_X[X] = 1, \quad (5.58)$$

$$\int \mathcal{D}X P_X[X] |X|^2 = P, \quad (5.59)$$

$$-1 - \log P_X[X] - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\gamma^2 L^2}{3} |X|^4 \right) - \lambda_1 - \lambda_2 |X|^2 = 0. \quad (5.60)$$

Решение $P_{\text{opt}}[X]$ уравнений (5.58)-(5.60), которое мы будем называть оптимальным распределением, зависит только от $|X|$ и имеет вид:

$$P_{\text{opt}}[X] = N^{(0)}(P) \frac{\exp\{-\lambda_0(P)|X|^2\}}{\sqrt{1 + \gamma^2 L^2 |X|^4/3}}, \quad (5.61)$$

где функции $N^{(0)}(P)$ и $\lambda_0(P)$ определяются из условий нормировки (5.58), (5.59):

$$\int \mathcal{D}X P_{\text{opt}}[X] = 2\pi N^{(0)}(P) \int_0^\infty \frac{d\rho \rho e^{-\lambda_0(P)\rho^2}}{\sqrt{1 + \gamma^2 L^2 \rho^4/3}} = 1, \quad (5.62)$$

$$\int \mathcal{D}X P_{\text{opt}}[X] |X|^2 = 2\pi N^{(0)}(P) \int_0^\infty \frac{d\rho \rho^3 e^{-\lambda_0(P)\rho^2}}{\sqrt{1 + \gamma^2 L^2 \rho^4/3}} = P. \quad (5.63)$$

В параметрическом виде коэффициенты $N^{(0)}(P)$ и $\lambda_0(P)$ определены следующим образом:

$$\lambda_0(P) = \frac{\gamma L}{\sqrt{3}} \alpha, \quad N^{(0)}(P) = \frac{\gamma L}{\pi \sqrt{3} G(\alpha)}, \quad (5.64)$$

здесь $G(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dz e^{-\alpha z}}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\pi}{2} \{H_0(\alpha) - N_0(\alpha)\}$, $N_0(\alpha)$ – функция Неймана, $H_0(\alpha)$ – функция Струве. Параметр $\alpha(P) > 0$ является действительным решением нелинейного уравнения $\frac{d}{d\alpha} \log G(\alpha) = -\gamma L P / \sqrt{3}$, которое следует из уравнений (5.62) и (5.63). Отметим, что найденная оптимальная функция распределения начального сигнала (5.61) отличается от полугауссовского распределения. Для достаточно большой мощности сигнала P такой, что $\log(\gamma P L) \gg 1$, мы можем упростить (5.64), используя асимптотику функций $N_0(\alpha)$ и $H_0(\alpha)$ при малом параметре α (см. [127]):

$$\begin{aligned} \lambda_0(P) &\approx \frac{1 - \log \log(c\tilde{\gamma}) / \log(c\tilde{\gamma})}{P \log(c\tilde{\gamma})}, \\ N^{(0)}(P) &\approx \frac{\tilde{\gamma}}{\pi} \lambda_0(P), \end{aligned} \quad (5.65)$$

где $c = 2e^{-\gamma E}$ и $\tilde{\gamma} = \gamma LP/\sqrt{3}$. При малой мощности сигнала такой, что $\tilde{\gamma} \ll 1$, выражения для коэффициентов $\lambda_0(P)$ $N^{(0)}(P)$ упрощаются:

$$\lambda_0(P) = \frac{1}{P} (1 - 2\tilde{\gamma}^2), \quad N^{(0)}(P) = \frac{1}{\pi P} (1 - \tilde{\gamma}^2). \quad (5.66)$$

Отметим, что при $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ распределение (5.61) переходит в гауссовское (5.24), которое является оптимальным для линейного канала связи [84].

5.2.4 Взаимная информация

Подставляя функцию $P_{\text{opt}}[X]$ в виде (5.61) в уравнения (5.55) и (5.56) и используя определение взаимной информации (5.20), мы получаем выражение

$$I_{P_{\text{opt}}[X]} = P\lambda_0(P) - \log N^{(0)}(P) - \log(\pi eQL), \quad (5.67)$$

которое справедливо в лидирующем порядке по параметру $1/\text{SNR}$. Поскольку взаимная информация (5.67) вычислена с использованием распределения $P_{\text{opt}}[X]$, она является емкостью канала связи при средней мощности сигнала, удовлетворяющей условию (5.41). На рис. 5.1 изображена зависимость взаимной информации от мощности входящего сигнала P для следующих значений параметров $Q = 1.5 \times 10^{-7} \text{ мВт км}^{-1}$, $\gamma = 10^{-3} \text{ мВт}^{-1} \text{ км}^{-1}$, $L = 1000 \text{ км}$. Эти значения соответствуют значениям, которые реализуются в современных линиях связи. Отметим, что промежуточная область энергий (5.41) оказывается очень широкой для таких параметров:

$$1.5 \times 10^{-4} \text{ мВт} \ll P \ll 0.66 \times 10^4 \text{ мВт}. \quad (5.68)$$

Мы не нашли простой формы для параметров $N^{(0)}(P)$ и $\lambda_0(P)$, поэтому для построения рисунка 5.1 величина $I_{P[X]}$ находилась численно. В случае большой и малой мощности P мы можем использовать асимптотики (5.65) и (5.66), соответственно. При малом параметре $\tilde{\gamma}$ получаем:

$$I_{P_{\text{opt}}[X]} = \log(\text{SNR}) - \tilde{\gamma}^2. \quad (5.69)$$

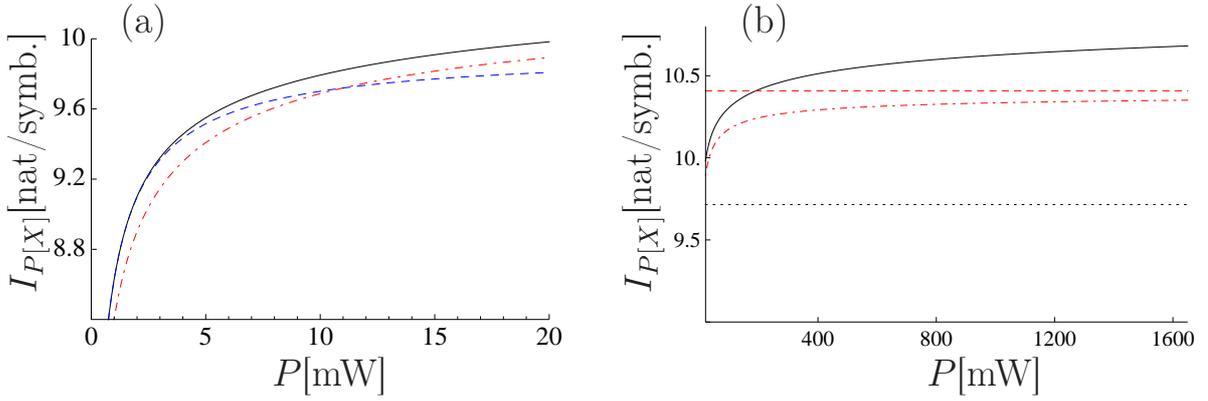


Рисунок 5.1 — Взаимная информация как функция P , построенная для различных функций распределения начального сигнала и следующих параметров: $Q = 1.5 \times 10^{-7} \text{ мВт км}^{-1}$, $\gamma = 10^{-3} \text{ мВт}^{-1} \text{ км}^{-1}$, $L = 1000 \text{ км}$. (а): черная сплошная линия, голубая пунктирная линия и красная штрих-пунктирная линия соответствует взаимной информации, вычисленной по оптимальной $P_{\text{opt}}[X]$, гауссовской $P_X^{(2)}[X]$ и полугауссовской $P_X^{(1)}[X]$ функциям распределения, соответственно. (б): черная сплошная соответствует $I_{P_{\text{opt}}[X]}$, красная штрих-пунктирная линия соответствует $I_{P_X^{(1)}[X]}$, см. (5.73), красная пунктирная линия соответствует предельному значению взаимной информации для полугауссовской функции распределения, см. (5.75), черная линия из точек соответствует пределу, полученному в работе [98], см. (5.28).

В этом результате мы удержали только лидирующий и первый ненулевой порядок по $\tilde{\gamma}$. Первое слагаемое в (5.69) совпадает с результатам Шеннона для линейного канала связи при условии $\text{SNR} \gg 1$, второе слагаемое является первой нелинейной поправкой. Видно, что нелинейная поправка отрицательна, и поэтому нелинейность уменьшает пропускную способность канала связи. Если мощность сигнала велика настолько, что $\log(\gamma LP) \gg 1$ и удовлетворяет условию $(\gamma L)^{-1} \ll P \ll (QL^3\gamma^2)^{-1}$, мы можем найти поведение функции $I_{P_{\text{opt}}[X]}$:

$$\begin{aligned}
 I_{P_{\text{opt}}[X]} = & -\log(QL^2\gamma) - 1 + \frac{\log 3}{2} + \log \log \left(\frac{c\gamma LP}{\sqrt{3}} \right) + \\
 & \frac{1}{\log(c\gamma LP/\sqrt{3})} \left[\log \log \left(\frac{c\gamma LP}{\sqrt{3}} \right) + 1 - \frac{\log \log(c\gamma LP/\sqrt{3})}{\log(c\gamma LP/\sqrt{3})} \right] + \\
 & \mathcal{O}(1/\log^2(\gamma LP)) + \mathcal{O}(1/\text{SNR}) + \mathcal{O}(\gamma^2 L^3 Q P). \tag{5.70}
 \end{aligned}$$

В выражении (5.70) мы отбросили слагаемые порядка $1/\log^2(\gamma LP)$. Видно, что при достаточно больших мощностях взаимная информация для нелинейного канала связи растет как $\log \log P$, тогда как для линейного она растет как $\log P$ при увеличении мощности сигнала. Как мы покажем ниже, в этой области мощностей взаимная информация для полугауссовского распределения стремится к константе.

Рассмотрим взаимную информацию для распределения $P_X^{(\beta)}[X]$, см. уравнение (5.26). В лидирующем порядке по параметру $1/\text{SNR}$, мы получаем следующее выражение для энтропии выходящего сигнала:

$$H_Y^\beta = \log \left(P \frac{2\pi}{\beta} \Gamma \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) + \frac{\beta}{2} + \frac{2-\beta}{2} \psi \left(\frac{\beta}{2} \right), \quad (5.71)$$

где $\psi(a)$ – дигамма-функция $\psi(a) = \Gamma'(a)/\Gamma(a)$ (не путать с функцией огибающей). Подставляя выражение (5.26) в (5.56), мы получаем выражение

$$H_{Y|X}^\beta = \log \left(\pi eQL \right) + \frac{1}{2\Gamma \left(\frac{\beta}{2} \right)} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau} \tau^{\beta/2-1} \log \left(1 + \frac{4\tilde{\gamma}^2}{\beta^2} \tau^2 \right), \quad (5.72)$$

которое верно с точностью до поправок порядка $\mathcal{O}(1/\text{SNR})$. Отметим, что интеграл в (5.72) вычисляется, аналитически см. [127], однако получающийся ответ довольно громоздок, поэтому здесь мы его не приводим.

Используя результаты (5.71) и (5.72), мы получаем следующее выражение для взаимной информации с точностью до слагаемых порядка $\mathcal{O}(1/\text{SNR})$ и $\mathcal{O}(\gamma^2 L^3 QP)$:

$$I_{P_X^{(\beta)}}[X] = \log \text{SNR} + \log \left(\frac{2\Gamma(\beta/2)}{\beta} \right) + \frac{\beta-2}{2} \left(1 - \psi \left(\frac{\beta}{2} \right) \right) - \frac{1}{2\Gamma \left(\frac{\beta}{2} \right)} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau} \tau^{\beta/2-1} \log \left(1 + \frac{4\tilde{\gamma}^2}{\beta^2} \tau^2 \right). \quad (5.73)$$

Этот результат изображен на рис. 5.1 (а). Голубой пунктирной линией изображен результат для гауссовского распределения, а красным штрих-пунктиром для полугауссовского распределения. Видно, что для малых P взаимная информация для гауссовского распределения больше, чем для полугауссовского.

При увеличении мощности P ответы сравниваются, а при $P > 11\text{мВт}$ взаимная информация для полугауссовского распределения больше, чем для гауссовского, но меньше, чем для оптимального. При $\tilde{\gamma} \gg 1$ взаимная информация $I_{P_X^{(\beta)}}[X]$ имеет вид:

$$I_{P_X^{(\beta)}}[X] = -\log(QL^2\gamma) - \frac{2-\beta}{2} + \frac{\log 3}{2} - \frac{\beta}{2}\psi\left(\frac{\beta}{2}\right) + \log(\Gamma(\beta/2)). \quad (5.74)$$

Можно заметить, что при больших SNR величина $I_{P_X^{(\beta)}}[X]$ стремится к константе, которая зависит от мощности шума QL . Взаимная информация для полугауссовского распределения имеет следующий вид:

$$I_{P_X^{(1)}}[X] = -\log(QL^2\gamma) + \log 2 + \frac{\log 3\pi - 1 + \gamma E}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\text{SNR}}\right) + \mathcal{O}(\gamma^2 L^3 QP). \quad (5.75)$$

Сравнивая наше выражение (5.75) с результатом (40) работы [98], мы видим, что наш результат содержит дополнительное слагаемое $+\log 2$. Результат (5.75) и результат работы [98], см. (5.28), приведены на рис. 5.1(b). На рис. 5.1(b) видно, что взаимная информация (5.67) превышает предельное значение (5.75) при $P \sim 190\text{мВт}$.

Поскольку взаимная информация, вычисленная с использованием оптимальной функции распределения начального сигнала является емкостью канала связи, мы можем сказать, что ответ (5.67) является емкостью:

$$C = I_{P_{\text{opt}}}[X]. \quad (5.76)$$

Отметим, что мы вычислили емкость с точностью до поправок порядка $1/\text{SNR}$ и $\gamma^2 L^3 QP$. Сравнение емкости (5.76) с шенноновским результатом для линейного канала связи с аддитивным шумом приведено на рис. 5.2. На рис. 5.2 видно, что шенноновский результат для емкости линейного канала связи с аддитивным шумом всегда больше полученного нами результата для нелинейного канала связи.

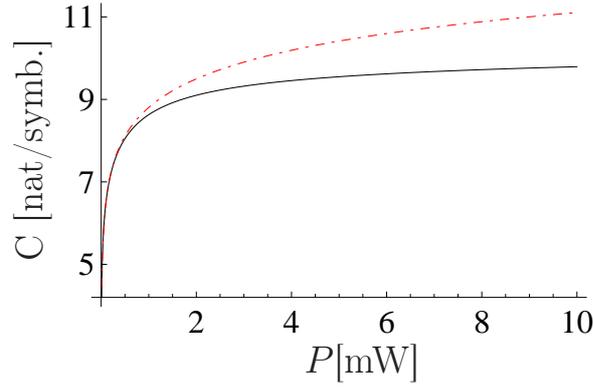


Рисунок 5.2 — Емкости каналов связи для следующих параметров: $Q = 1.5 \times 10^{-7} \text{ мВт км}^{-1}$, $\gamma = 10^{-3} \text{ мВт}^{-1} \text{ км}^{-1}$, $L = 1000 \text{ км}$. Черная сплошная линия соответствует емкости одноканальной модели $I_{P_{\text{opt}}[X]}$, красный штрих-пунктир соответствует результату Шеннона $\log(1 + \text{SNR})$ для емкости линейного канала связи.

5.2.5 Вычисление поправок по параметру $1/\text{SNR}$

Для вычисления поправок к емкости бездисперсионного канала связи необходимо вычислить поправки к функции плотности условной вероятности. Для этого мы вычислим поправки к экспоненте $e^{-\frac{S[\Psi_{cl}(z)]}{Q}}$ и континуальному интегралу, см. (5.32).

Для вычисления экспоненты мы находим решение $\Psi_{cl}(z)$ уравнения (5.33), после чего подставляем его действие. Подставляя функцию $\Psi_{cl}(z)$ в виде (5.35) в уравнение (5.33), мы получаем следующее уравнение на функцию $\varkappa(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varkappa}{dz^2} - 2i \frac{\mu}{L} \frac{d\varkappa}{dz} - 4 \frac{\mu^2}{L^2} \text{Re}[\varkappa] &= \frac{\mu^2}{L^2 \rho} [5\varkappa^2 + 10|\varkappa|^2 + 3(\varkappa^*)^2] + \\ 4i \frac{\mu}{L \rho} (\varkappa + \varkappa^*) \frac{d\varkappa}{dz} + \frac{|\varkappa|^2 \mu}{L^2 \rho^2} \left[4iL \frac{d\varkappa}{dz} + 9\mu\varkappa^2 + 14\mu\varkappa \right] &+ \frac{3\mu^2}{L^2 \rho^2} \varkappa^3 + \\ \frac{3\mu^2}{L^2 \rho^3} |\varkappa|^2 [3|\varkappa|^2 + 2\varkappa^2] + \frac{3\mu^2}{L^2 \rho^4} |\varkappa|^4 \varkappa. & \end{aligned} \quad (5.77)$$

Граничные условия на функцию \varkappa имеют вид (5.37). Затем мы подставляем функцию \varkappa в виде ряда

$$\varkappa(z) = \varkappa_1(z) + \varkappa_2(z) + \varkappa_3(z) + \dots, \quad (5.78)$$

где индекс у функции обозначает порядок по параметру \sqrt{Q} , то есть $\varkappa_i(z)$ имеет порядок $Q^{i/2}$. Первые две функции $\varkappa_1(z)$ и $\varkappa_2(z)$ мы вычислили в Приложении **Б.1**. Для вычисления поправки необходимо вычислить функцию $\varkappa_3(z)$. Используя метод, развитый в Приложении **Б.1**, мы ее вычислили, однако не приводим точный результат, поскольку функция $\varkappa_3(z)$ имеет довольно громоздкий вид. Здесь мы приводим только ответ для действия $S[\Psi_{cl}(z)]$, вычисленного с учетом поправки $\varkappa_3(z)$:

$$S[\Psi_{cl}] = S_1 + S_2 + S_3 + \mathcal{O}\left(\text{SNR}^{-5/2}\right), \quad (5.79)$$

где

$$S_1 = \frac{(1 + 4\mu^2/3)x_0^2 - 2\mu x_0 y_0 + y_0^2}{L(1 + \mu^2/3)}, \quad (5.80)$$

$$S_2 = \frac{\mu/\rho}{135L(1 + \mu^2/3)^3} \left\{ \mu(4\mu^4 + 15\mu^2 + 225)x_0^3 + (23\mu^4 + 255\mu^2 - 90) \times \right. \\ \left. x_0^2 y_0 + \mu(20\mu^4 + 117\mu^2 - 45)x_0 y_0^2 - 3(5\mu^4 + 33\mu^2 + 30)y_0^3 \right\}, \quad (5.81)$$

$$S_3 = \frac{\mu^2}{2100L(\mu^2 + 3)^5 \rho^2} \left[x_0^4(148\mu^8 - 12345\mu^6 - 24570\mu^4 - 806085\mu^2 + \right. \\ \left. 396900) - 12\mu x_0^3 y_0(901\mu^6 + 9990\mu^4 + 84105\mu^2 - 139860) + 36\mu x_0 y_0^3 \times \right. \\ \left. (385\mu^6 + 6198\mu^4 + 30165\mu^2 + 8820) - 6x_0^2 y_0^2(980\mu^8 + 11857\mu^6 + 24210\mu^4 - \right. \\ \left. 350595\mu^2 - 49140) + 3y_0^4(700\mu^8 + 8365\mu^6 + 23826\mu^4 - 32535\mu^2 - 34020) \right]. \quad (5.82)$$

Так как мы полагаем, что x_0 и y_0 имеет порядок \sqrt{Q} , то S_1/Q , S_2/Q и S_3/Q пропорциональны $(\text{SNR})^0$, $\text{SNR}^{-1/2}$ и $(\text{SNR})^{-1}$ соответственно. Подставляя выражение (5.79) в экспоненту и раскладывая результат по параметру Q , мы получаем:

$$e^{-S[\Psi_{cl}]/Q} = e^{-\frac{(1+4\mu^2/3)x_0^2 - 2\mu x_0 y_0 + y_0^2}{QL(1+\mu^2/3)}} \left(1 - \frac{S_2}{Q} + \left[\frac{S_2^2}{2Q^2} - \frac{S_3}{Q} \right] + \mathcal{O}\left(\text{SNR}^{-3/2}\right) \right). \quad (5.83)$$

Для вычисления поправок к континуальному интегралу

$$\Lambda = \int_{\tilde{\psi}(0)=0}^{\tilde{\psi}(L)=0} \mathcal{D}\tilde{\psi} e^{-\frac{S[\Psi_{cl}(z) + \tilde{\psi}(z)] - S[\Psi_{cl}(z)]}{Q}}$$

мы используем метод, описанный в Приложении **Б.2**. После простых, но громоздких вычислений получаем:

$$\Lambda = \frac{1}{\pi QL \sqrt{1 + \mu^2/3}} \left(1 + \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2 + \mathcal{O}(\text{SNR}^{-3/2}) \right), \quad (5.84)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_1 = -\frac{3\mu}{5\rho(3 + \mu^2)^2} (\mu(15 + \mu^2)x_0 - 2(5 - \mu^2/3)y_0), \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_2 = & \frac{\mu^2 (11\mu^4 + 201\mu^2 - 504) QL}{140 (\mu^2 + 3)^3 \rho^2} + \frac{\mu^2}{70 (3 + \mu^2)^4 \rho^2} \left((32\mu^6 + 453\mu^4 + \right. \\ & 8064\mu^2 - 6237) x_0^2 + 12\mu (4\mu^4 + 75\mu^2 - 1323) x_0 y_0 - \\ & \left. 3 (7\mu^6 + 141\mu^4 + 1179\mu^2 - 567) y_0^2 \right). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Вклад $\tilde{\Lambda}_1$ получен в предыдущей главе. Данная поправка содержит первые степени параметров x_0 и y_0 , поэтому данная поправка имеет порядок $\sqrt{QL/\rho^2}$. В поправке $\tilde{\Lambda}_2$ есть два различных вклада. Первый пропорционален QL/ρ^2 , второй содержит полином второй степени по параметрам x_0 и y_0 .

Используя результаты (5.83) и (5.84), мы получаем разложение для функции плотности условной вероятности в виде:

$$P[Y|X] \approx P_0[Y|X] + \delta P_1[Y|X] + \delta P_2[Y|X], \quad (5.87)$$

где

$$P_0[Y|X] = \frac{e^{-\frac{(1+4\mu^2/3)x_0^2 - 2\mu x_0 y_0 + y_0^2}{QL(1+\mu^2/3)}}}{\pi QL \sqrt{1 + \mu^2/3}}, \quad (5.88)$$

$$\delta P_1[Y|X] = P_0[Y|X] \left(\tilde{\Lambda}_1 - \frac{S_2}{Q} \right), \quad (5.89)$$

$$\delta P_2[Y|X] = P_0[Y|X] \left(\frac{S_2^2}{2Q^2} - \frac{S_3 + S_2 \tilde{\Lambda}_1}{Q} + \tilde{\Lambda}_2 \right). \quad (5.90)$$

Можно проверить, что полученная плотность вероятности (5.87) удовлетворяет условиям

$$\lim_{Q \rightarrow 0} P[Y|X] = \delta(Y - \Psi_0(L)), \quad (5.91)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} P[Y|X] = \frac{e^{|Y-X|^2/(QL)}}{\pi QL}, \quad (5.92)$$

$$\int DY P[Y|X] = 1. \quad (5.93)$$

Поскольку интеграл $\int DY P_0[Y|X] = 1$, то

$$\int DY \delta P_{1,2}[Y|X] = 0. \quad (5.94)$$

Функция распределения выходящего сигнала $P_{out}[Y]$. Для вычисления функции $P_{out}[Y]$ нам необходимо вычислить интеграл (5.44). Для его вычисления удобно перейти от переменной $X = x_1 + iy_1$ к переменной $\tau = \tau_1 + i\tau_2$:

$$X = \frac{\left(\sqrt{|Y|^2 - \tau_2^2} - \tau_1\right) \left(\sqrt{|Y|^2 - \tau_2^2} - i\tau_2\right)}{|Y|^2} \times Y \exp \left\{ -i\gamma L \left(\sqrt{|Y|^2 - \tau_2^2} - \tau_1 \right)^2 \right\}. \quad (5.95)$$

Такой переход связан с удобством вычисления, так как при $\tau = 0$ мы получаем $X = Y e^{-i\gamma L|Y|^2}$, а экспонента в функции $P[Y|X]$ имеет максимум в точке $\tau = 0$. После замены переменных, вычисления интеграла методом интеграла Лапласа получаем:

$$P_{out}[Y] = P_X[\tilde{Y}] + \delta P_{out}[\tilde{Y}], \quad (5.96)$$

где $\tilde{Y} = Y e^{-i\tilde{\mu}} = \tilde{y}_1 + i\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_1 = \text{Re}\tilde{Y}$, $\tilde{y}_2 = \text{Im}\tilde{Y}$, $\tilde{\mu} = \gamma L|Y|^2$, а поправка $\delta P_{out}[\tilde{Y}]$ выражается через функцию распределения начального сигнала как

$$\delta P_{out}[\tilde{Y}] = \frac{\gamma QL^2}{3} \left((3\tilde{y}_2 - \tilde{\mu}\tilde{y}_1) \frac{\partial P_X[\tilde{Y}]}{\partial \tilde{y}_1} - (3\tilde{y}_1 + \tilde{\mu}\tilde{y}_2) \frac{\partial P_X[\tilde{Y}]}{\partial \tilde{y}_2} - \frac{1}{2} (3(\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2) + 4\tilde{\mu}\tilde{y}_1\tilde{y}_2) \frac{\partial^2 P_X[\tilde{Y}]}{\partial \tilde{y}_1 \partial \tilde{y}_2} \right) +$$

$$\frac{QL}{12|Y|^2} \left((3|Y|^2 + 6\tilde{\mu}\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + 4\tilde{\mu}^2\tilde{y}_2^2) \frac{\partial^2 P_X[\tilde{Y}]}{\partial \tilde{y}_1^2} + (3|Y|^2 - 6\tilde{\mu}\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + 4\tilde{\mu}^2\tilde{y}_1^2) \frac{\partial^2 P_X[\tilde{Y}]}{\partial \tilde{y}_2^2} \right). \quad (5.97)$$

В полярных координатах $\tilde{Y} = \tilde{\rho} e^{i\tilde{\phi}}$ этот ответ упрощается:

$$\delta P_{out}[\tilde{Y}] = -\frac{\gamma QL^2}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} \left(1 + \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} \right) P_X[\tilde{Y}] + \frac{QL}{4} \Delta_2 P_X[\tilde{Y}], \quad (5.98)$$

где Δ_2 двумерный оператор Лапласа. Можно заметить, что для распределений $P_X[X]$, которые зависят только от $|X| = \rho$, поправка (5.98) принимает вид $\delta P_{out}[\tilde{\rho}] = \frac{QL}{4} \Delta_2 P_X[\rho]$, что согласуется с результатом (5.50).

Поправки к энтропиям. Для вычисления условной энтропии с учетом первой поправки мы подставляем (5.87) в (5.21) и получаем:

$$H_{Y|X} \approx - \int \mathcal{D}X \mathcal{D}Y P_X[X] \left(\log P_0[Y|X] \times (P_0[Y|X] + \delta P_1[Y|X] + \delta P_2[Y|X]) + \frac{\delta P_1^2[Y|X]}{2P_0[Y|X]} \right). \quad (5.99)$$

При получении этого выражения мы использовали условие (5.94). Вычисляя интегралы в (5.99), получаем, что:

$$H_{Y|X} \approx H_{Y|X}^{(0)} + \delta H_{Y|X}, \quad (5.100)$$

где

$$H_{Y|X}^{(0)} = 1 + \log(\pi QL) + \frac{1}{2} \int \mathcal{D}X P_X[X] \log \left(1 + \frac{\mu^2}{3} \right), \quad (5.101)$$

$$\delta H_{Y|X} = QL \int \mathcal{D}X P_X[X] \frac{\mu^2 (-13\mu^4 + 255\mu^2 + 450)}{150 (3 + \mu^2)^3 |X|^2}. \quad (5.102)$$

Отметим, что поправка $\delta H_{Y|X}$ зануляется в пределе $\gamma \rightarrow 0$.

Для вычисления энтропии выходящего сигнала (5.22) мы подставляем (5.96) в (5.22) и получаем:

$$H_Y = - \int \mathcal{D}Y \left(P_X[Y] \log P_X[Y] + \delta P_{out}[Y] \left\{ 1 + \log P_X[Y] \right\} \right). \quad (5.103)$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении формулы (5.103) совпадает с результатом предыдущей главы и равняется энтропии входящего сигнала H_X . Второе слагаемое пропорционально параметру QL . Мы можем отбросить единицу в фигурных скобках уравнения (5.103), поскольку $P_{out}[Y] = P_X[\tilde{Y}] + \delta P_{out}[\tilde{Y}]$, а $\int \mathcal{D}Y P_{out}[Y] = 1$, поэтому $\int \mathcal{D}\tilde{Y} \delta P_{out}[\tilde{Y}] = 0$.

Оптимальная функция распределения начального сигнала. Для вычисления оптимальной функции распределения начального сигнала мы подставляем результаты (5.100), (5.103) и (5.87) в функционал $J[P_X, \lambda_1, \lambda_2]$, см. (5.57). Затем варьируем функционал, решаем уравнение $\delta J[P_X, \lambda_1, \lambda_2] = 0$ и находим, что

$$P_{opt}[X] \approx P_{opt}^{(0)}[X] + P_{opt}^{(1)}[X], \quad (5.104)$$

где

$$P_{opt}^{(0)}[X] = N^{(0)} \frac{\exp \{ -\lambda_0 |X|^2 \}}{\sqrt{1 + \mu^2/3}}, \quad (5.105)$$

$$P_{opt}^{(1)}[X] = QL \left(-\lambda_0^2 |X|^2 + \frac{2\lambda_0}{1 + \mu^2/3} + \mu^2 \frac{(-137\mu^4 + 1095\mu^2 + 4950)}{4050 |X|^2 (1 + \mu^2/3)^3} \right) \times P_{opt}^{(0)}[X] - (\delta\lambda_1 + \delta\lambda_2 |X|^2) P_{opt}^{(0)}[X], \quad (5.106)$$

$$\delta\lambda_1 = \frac{QL/P}{750\tilde{\gamma}^2(\tilde{\gamma}^2(P\lambda_0 - 1) + P\lambda_0 - \pi PN^{(0)})} \left\{ 16P^4\lambda_0^2(\lambda_0 - \pi N^{(0)})^2 + \tilde{\gamma}^4 \left(P\lambda_0(-1370 + 1379P\lambda_0) - 428\pi PN^{(0)} \right) + \tilde{\gamma}^2 \left(P^2\lambda_0^2(685 + 16P\lambda_0(P\lambda_0 - 4)) + \pi P^2 N^{(0)}\lambda_0(48P\lambda_0 - 257) - 428\pi^2 P^2(N^{(0)})^2 \right) \right\}, \quad (5.107)$$

$$\delta\lambda_2 = \frac{\lambda_0 QL/P}{750(\tilde{\gamma}^2(P\lambda_0 - 1) + P\lambda_0 - \pi PN^{(0)})} \left\{ \tilde{\gamma}^2 \left(685 - 347P\lambda_0(1 + P\lambda_0) + 428\pi PN^{(0)} \right) + P\lambda_0 \left(315\pi PN^{(0)} - P\lambda_0(299 + 16\pi PN^{(0)}) \right) \right\}, \quad (5.108)$$

а коэффициенты λ_0 и $N^{(0)}$ удовлетворяют уравнениям (5.62) и (5.63) с заменой $P_{\text{opt}}[X]$ на $P_{\text{opt}}^{(0)}[X]$.

Вычисление поправки к емкости. Для вычисления емкости с точностью до первой поправки по параметру Q мы подставляем оптимальную функцию распределения (5.104) в выражение для взаимной информации (5.20), вычисляем интегралы и получаем

$$C = C_0 + \Delta C, \quad (5.109)$$

где результат C_0 был получен в предыдущей главе и равняется

$$C_0 = \log(\text{SNR}) + \lambda_0 P - \log(e\pi N^{(0)} P), \quad (5.110)$$

а поправка ΔC имеет вид:

$$\Delta C = \frac{1}{\text{SNR}} \left\{ \pi N^{(0)} P \left[\frac{214}{375} - \frac{8}{375} \left(\frac{\lambda_0 P}{\tilde{\gamma}} \right)^2 \right] + \lambda_0 P \left[\frac{137}{150} + \frac{8}{375} \left(\frac{\lambda_0 P}{\tilde{\gamma}} \right)^2 \right] - \frac{347}{750} (\lambda_0 P)^2 \right\}. \quad (5.111)$$

Можно проверить, что в случае $\gamma L^2 Q \ll 1$, поправка (5.111) всегда мала. В самом деле, выражение в фигурных скобках в (5.111), деленное на $\tilde{\gamma}$, ограничено при любых $\tilde{\gamma}$.

Рассмотрим поведение поправки ΔC при малых $\tilde{\gamma}$. Подставляя λ_0 и $N^{(0)}$ в виде (5.66), мы получаем:

$$\Delta C \approx \frac{1}{\text{SNR}} - \frac{1}{\text{SNR}} \frac{\tilde{\gamma}^2}{3}. \quad (5.112)$$

Используя этот результат, а также выражение (5.69) для C_0 , мы можем записать емкость в виде

$$C \approx \log(1 + \text{SNR}) - \tilde{\gamma}^2 - \frac{1}{\text{SNR}} \frac{\tilde{\gamma}^2}{3}. \quad (5.113)$$

Это выражение верно с точностью до членов порядка $\mathcal{O}(1/\text{SNR}^2)$. Логарифм $\log(1 + \text{SNR})$ является результатом Шеннона для емкости линейного канала связи с аддитивным шумом. Второе и третье слагаемые в (5.113) соответствуют нелинейным поправкам.

В области мощностей P таких, что $\log(\gamma LP) \gg 1$ и $P \ll (\gamma^2 QL^3)^{-1}$, мы получаем, что поправка имеет вид:

$$\Delta C \approx \frac{1}{\text{SNR}} \frac{214}{375} \pi N^{(0)} P. \quad (5.114)$$

Используя асимптотики параметров λ_0 и $N^{(0)}$, см. (5.65), мы получаем, что

$$\Delta C \approx \frac{\gamma L^2 Q}{\sqrt{3}} \frac{214}{375} \left(\log(c\tilde{\gamma} \log(c\tilde{\gamma})) + \frac{\log \log(c\tilde{\gamma})}{\log(c\tilde{\gamma})} \right)^{-1}, \quad (5.115)$$

где $c = 2e^{-\gamma E}$. Отметим, что при таких параметрах поправка ΔC подавлена как $\gamma L^2 Q$, а не как $1/\text{SNR}$. Кроме того, она спадает как $1/\log \tilde{\gamma}$ при больших $\tilde{\gamma}$. Для больших $\tilde{\gamma}$ поправка (5.115) положительна, поэтому она увеличивает емкость канала связи.

Для дальнейшего рассмотрения удобно вычесть вклад $\frac{1}{\text{SNR}}$ из поправки ΔC . Рассмотрим разность

$$\Delta C' = \Delta C - \frac{1}{\text{SNR}}. \quad (5.116)$$

Эта разность удобна для анализа поведения поправки, поскольку ведет себя регулярно при произвольной мощности сигнала. На рисунках 5.3 и 5.4 построена $\Delta C'$ и ее асимптотика как функция P для случая средних и больших мощностей сигнала при параметрах $Q = 1.5 \times 10^{-7} \text{ мВт км}^{-1}$, $\gamma = 10^{-3} \text{ мВт}^{-1} \text{ км}^{-1}$, $L = 1000 \text{ км}$. Можно заметить, что $\Delta C'$ достигает минимума, равного $-7.97 \times 10^{-6} \text{ нат/символ}$ при $P \approx 0.73 \text{ мВт}$, см. рис. 5.3, и максимума, равного $9.35 \times 10^{-6} \text{ нат/символ}$ при $P \approx 43.4 \text{ мВт}$, см. рис. 5.4.

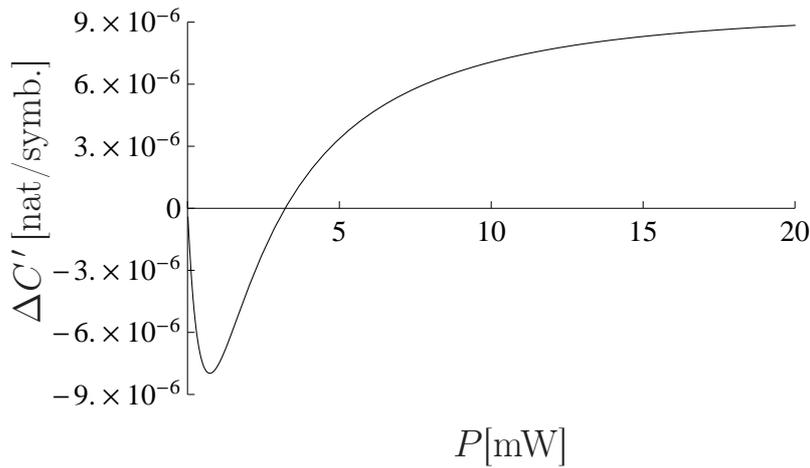


Рисунок 5.3 — Зависимость поправки $\Delta C'$, см. (5.116), от мощности сигнала P при следующих параметрах: $Q = 1.5 \times 10^{-7} \text{ мВт км}^{-1}$, $\gamma = 10^{-3} \text{ мВт}^{-1} \text{ км}^{-1}$, $L = 1000 \text{ км}$.

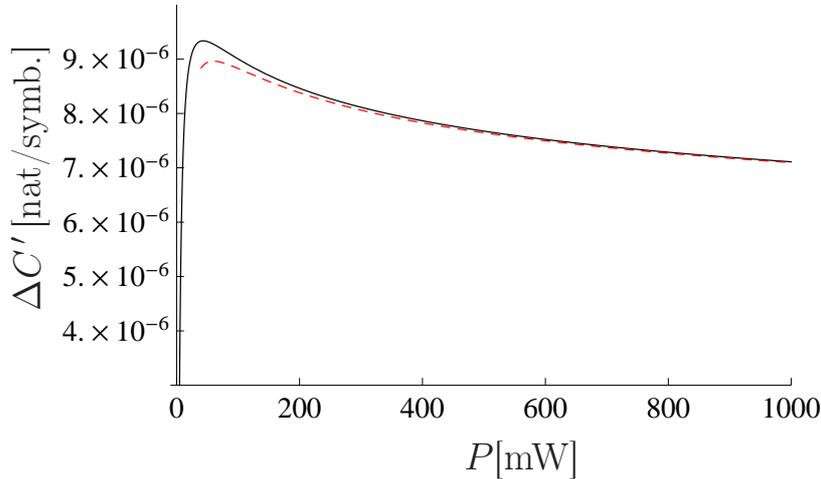


Рисунок 5.4 — Зависимость поправки $\Delta C'$, см. (5.116), от мощности сигнала P при следующих параметрах: $Q = 1.5 \times 10^{-7} \text{ мВт км}^{-1}$, $\gamma = 10^{-3} \text{ мВт}^{-1} \text{ км}^{-1}$, $L = 1000 \text{ км}$. Сплошная черная линия соответствует точному результату (5.111). Красная пунктирная линия соответствует асимптотическому выражению (5.115).

Нам удалось развить новый метод вычисления плотности условной вероятности, используя ее представление в виде континуального интеграла. Данный метод может быть использован для поиска функции плотности условной вероятности для канала связи с ненулевой дисперсией. Используя развитый метод, мы вычислили функцию плотности условной вероятности, энтропию выходящего из канала сигнала, условную энтропию, взаимную информацию, оптимальную функцию распределения начального сигнала и емкость для одноканальной

модели бездисперсионного нелинейного оптоволоконного канала связи в лидирующем и следующем за лидирующем порядке по параметру $1/\text{SNR}$. Мы показали, что оптимальная функция распределения начального сигнала отличается от полугауссовской. Было показано, что при стремлении параметра керровской нелинейности к нулю, наши результаты переходят в соответствующие результаты для линейного канала связи. При большом параметре нелинейности, емкость рассматриваемого канала связи растет как $\log \log P$, т.е. гораздо медленнее, чем емкость линейного канала связи. Тем не менее, в рассматриваемой области мощностей входящего сигнала найденная нами емкость канала выше, чем нижняя граница емкости найденная в работе [97].

Рассмотрим как изменится полученный результат при учете зависимости начального сигнала от времени.

5.3 Учет зависимости начального сигнала от времени

Для того, чтобы начать исследование того, как влияет зависимость начального сигнала от времени на емкость нелинейного бездисперсионного канала связи, мы должны расширить рассмотренную ранее модель. Расширение модели включает учет не только зависимости сигнала от времени, но и процедуру детектирования и извлечения информации из полученного сигнала. Поэтому в модель войдет и модель детектора, от которой будет зависеть емкость построенного канала связи. Мы начнем с построения модели сигнала и модели детектора.

5.3.1 Модель сигнала и детектора

В нашей модели распространение сигнала $\psi(t, z)$ по прежнему описывается нелинейным уравнением Шредингера с нулевой дисперсией и аддитивным

шумом:

$$\partial_z \psi(t, z) - i\gamma |\psi(t, z)|^2 \psi(t, z) = \eta(t, z), \quad (5.117)$$

где функция $\psi(t, z)$ удовлетворяет начальным и конечным условиям $\psi(t, 0) = X(t)$ и $\psi(t, L) = Y(t)$, функция $\eta(t, z)$ описывает шум с нулевым средним $\langle \eta(t, z) \rangle_\eta = 0$ и корреляционной функцией в частотном пространстве:

$$\langle \eta_\omega(z) \eta_{\omega'}^*(z') \rangle_\eta = 2\pi Q \delta(\omega - \omega') \theta\left(\frac{W'}{2} - |\omega|\right) \delta(z - z'), \quad (5.118)$$

где Q — мощность шума в единице длины и в единице частотной ширины, $\theta(\omega)$ — функция Хевисайда, W' — спектральная ширина шума. Поскольку шум конечен в спектральной области, это означает, что он не является белым. Во временной области коррелятор (5.118) имеет следующий вид:

$$\langle \eta(t, z) \eta^*(t', z') \rangle_\eta = Q \frac{W'}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{W'(t - t')}{2}\right) \delta(z - z'). \quad (5.119)$$

Отметим, что если $t - t' = 2n\pi/W'$, то коррелятор (5.119) равен нулю, здесь n — целое число. Поэтому мы можем решать уравнение (5.117) независимо для различных времен $t_j = j\Delta$ (для произвольных целых j), то есть на временной решетке. Мы ввели шаг решетки $\Delta = 2\pi/W'$. Далее мы переходим от непрерывной модели (5.117) к следующей дискретной модели на временной решетке:

$$\partial_z \psi(t_j, z) - i\gamma |\psi(t_j, z)|^2 \psi(t_j, z) = \eta(t_j, z). \quad (5.120)$$

Данное уравнение выполняется для произвольного узла решетки t_j . Это означает, что наша модель состоит из набора независимых одноканальных моделей, рассмотренных выше, поскольку шум в разные моменты времени t_i и t_j не коррелирован. Кроме того, мы задаем начальные и конечные условия в дискретном виде: $\psi(t_j, 0) = X(t_j)$ и $\psi(t_j, L) = Y(t_j)$. Отметим, что решение $\Phi(t_j, z)$ уравнения (5.120) с нулевым шумом и удовлетворяющим начальному условию $\Phi(t_j, 0) = X(t_j)$ равняется следующему:

$$\Phi(z, t_j) = X(t_j) e^{i\gamma z |X(t_j)|^2}. \quad (5.121)$$

Ниже мы полагаем, что спектральная полоса шума W' много шире, чем спектральная полоса W начального сигнала $X(t)$ и спектральная полоса \widetilde{W} выходящего сигнала $\Phi(t, L)$ в отсутствие шума.

В нашей модели входящий сигнал $X(t)$ имеет вид:

$$X(t) = \sum_{k=-N}^N C_k f(t - kT_0), \quad (5.122)$$

где C_k – комплексные случайные коэффициенты, которые имеют некоторую функцию распределения $P_X[\{C\}]$, $\{C\} = \{C_{-N}, \dots, C_N\}$, $f(t)$ – функция, описывающая форму импульса, нормирована как $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{T_0} f^2(t) = 1$. Кроме того, функция $f(t)$ удовлетворяет следующему условию: для функций $f(t - kT_0)$ и $f(t - mT_0)$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t - kT_0) f(t - mT_0) \approx 0$ в случае, когда $k \neq m$, то есть мы подразумеваем, что перекрытием функций при различных k и m можно пренебречь. Это означает, что функция $f(t)$ имеет “почти” конечный носитель $[-T_0/2, T_0/2]$, поэтому носитель функции $X(t)$ в частотной области, строго говоря, равен бесконечности. Однако мы полагаем, что $\int_W |X(\omega)|^2 d\omega \approx \int_{W'} |X(\omega)|^2 d\omega$, где $X(\omega)$ – Фурье образ функции $X(t)$. Последнее соотношение означает, что $T_0 W \gg 1$.

Далее мы полагаем, что средняя мощность сигнала P фиксирована

$$P = \int \left(\prod_{k=-N}^N d^2 C_k \right) P_X[\{C\}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{T} |X(t)|^2, \quad (5.123)$$

где $d^2 C_k = d\text{Re}C_k d\text{Im}C_k$, $T = (2N + 1)T_0$ – длительность сигнала $X(t)$. Функция распределения $P_X[\{C\}]$ имеет следующую нормировку:

$$\int \left(\prod_{k=-N}^N d^2 C_k \right) P_X[\{C\}] = 1. \quad (5.124)$$

Используя свойства функции $f(t)$, мы можем переписать уравнение (5.123) в следующем виде:

$$P = \int d^2 C_m P_X^{(m)}[C_m] |C_m|^2, \quad (5.125)$$

где

$$P_X^{(m)}[C_m] = \int \left(\prod_{k=-N, k \neq m}^N d^2 C_k \right) P_X[\{C\}]. \quad (5.126)$$

Мы также полагаем, что распределение $P_X^{(m)}[C_m]$ не зависит от m , то есть все импульсы в серии равнозначны.

Перейдем к описанию процедуры детектирования. Мы полагаем, что наш детектор извлекает информацию, то есть коэффициенты $\{C\}$, следующим образом: вначале детектор получает сигнал $\psi(t_j, L)$ в моменты времени $t_j = j\Delta$, где $j = -M, \dots, M-1$, $M = T/(2\Delta) \gg N$. Это означает, что временное разрешение детектора совпадает с дискретизацией по времени Δ . Поскольку $\Delta \ll 1/\widetilde{W}$, детектор может полностью восстановить сигнал в случае, когда шум равен нулю. Затем детектор убирает нелинейную фазу, то есть выполняет следующее преобразование полученного сигнала:

$$\widetilde{X}(t_j) = \psi(t_j, L) e^{-i\gamma L |\psi(t_j, L)|^2}. \quad (5.127)$$

После чего детектор извлекает коэффициенты \widetilde{C}_k , проецируя сигнал $\widetilde{X}(t)$ на функции $f(t - kT_0)$:

$$\widetilde{C}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t - kT_0) \widetilde{X}(t). \quad (5.128)$$

Можно показать, что в случае отсутствия шума $\widetilde{X}(t) = X(t)$ и $\widetilde{C}_k = C_k$.

5.3.2 Статистика коэффициентов \widetilde{C}_k

Для того чтобы получить функцию распределения для коэффициентов \widetilde{C}_k , то есть функцию распределения выходящего сигнала, мы должны найти функцию плотности условной вероятности $P[\{\widetilde{C}\}|\{C\}]$, то есть плотность вероятности задетектировать последовательность $\{\widetilde{C}\}$, если передается последовательность $\{C\}$. Зная функцию $P[\{\widetilde{C}\}|\{C\}]$, мы можем вычислить функцию

$P_{out}[\{\tilde{C}\}]$ следующим образом:

$$P_{out}[\{\tilde{C}\}] = \int P[\{\tilde{C}\}|\{C\}]P_X[\{C\}] \prod_{k=-N}^N d^2C_k. \quad (5.129)$$

Поскольку распространение сигналов в различные моменты времени t_j происходит независимо и шум не коррелирован, функция плотности условной вероятности $P[Y(t)|X(t)]$ получить на выходе сигнал $Y(t)$, если передается сигнал $X(t)$, может быть представлена в виде произведения

$$P[Y(t)|X(t)] = \prod_{j=-M}^{M-1} P_j[Y_j|X_j], \quad (5.130)$$

где $X_j = X(t_j)$, $Y_j = Y(t_j)$, а $P_j[Y_j|X_j]$ – функция плотности условной вероятности для одноканальной модели, которая получена в Главе 5.2.1. В лидирующем и следующем за лидирующим приближении по параметру \sqrt{Q} функция $P_j[Y_j|X_j]$ имеет вид:

$$P_j[Y_j|X_j] = \Delta \frac{\exp \left\{ -\Delta \frac{(1 + 4\mu_{(j)}^2/3)x_{(j)}^2 - 2\mu_{(j)}x_{(j)}y_{(j)} + y_{(j)}^2}{QL(1 + \mu_{(j)}^2/3)} \right\}}{\pi QL \sqrt{1 + \mu_{(j)}^2/3}} \times$$

$$\left(1 - \frac{\mu_{(j)}/\rho_{(j)}}{15(1 + \mu_{(j)}^2/3)^2} \left(\mu_{(j)}(15 + \mu_{(j)}^2)x_{(j)} - 2(5 - \mu_{(j)}^2/3)y_{(j)} \right) - \right.$$

$$\frac{\mu_{(j)}\Delta}{135QL\rho_{(j)}(1 + \mu_{(j)}^2/3)^3} \left\{ \mu_{(j)} \left(4\mu_{(j)}^4 + 15\mu_{(j)}^2 + 225 \right) x_{(j)}^3 + \right.$$

$$\left(23\mu_{(j)}^4 + 255\mu_{(j)}^2 - 90 \right) x_{(j)}^2 y_{(j)} + \mu_{(j)} \left(20\mu_{(j)}^4 + 117\mu_{(j)}^2 - 45 \right) x_{(j)} y_{(j)}^2 -$$

$$\left. \left. 3 \left(5\mu_{(j)}^4 + 33\mu_{(j)}^2 + 30 \right) y_{(j)}^3 \right\} \right), \quad (5.131)$$

где мы заменили Q на Q/Δ и ввели обозначения $\rho_{(j)} = |X_j|$, $X_j = \rho_{(j)}e^{i\phi_{(j)}}$, $\mu_{(j)} = \gamma L\rho_{(j)}^2$, $x_{(j)} = \text{Re} [Y_j e^{-i\phi_{(j)}} - \rho_{(j)}]$, $y_{(j)} = \text{Im} [Y_j e^{-i\phi_{(j)}} - \rho_{(j)}]$. Напомним, что выражение (5.131) получено при условии, что средняя мощность

P удовлетворяет условию

$$\frac{QL}{\Delta} \ll P \ll \Delta / (QL^3\gamma^2), \quad (5.132)$$

Представление $P[Y(t)|X(t)]$ в виде произведения (5.130) означает, что существует $2M$ независимых “под”-каналов, однако сигнал $X(t)$ полностью определяется $2N + 1$ коэффициентом C_k , поэтому в сигнале $X(t)$ есть только $2N + 1$ независимых X_j . Однако на выходе из канала мы имеем $2M$ независимых Y_j , поскольку во всех $2M$ подканалах к сигналу примешивается случайный шум. Наш детектор устроен так, что он редуцирует функцию $Y(t)$ до набора $2N + 1$ коэффициентов $\{\tilde{C}_k\}$ с помощью процедур (5.127) и (5.128). Поэтому мы должны редуцировать функцию $P[Y(t)|X(t)]$ к функции $P[\{\tilde{C}_k\}|\{C_k\}]$ с помощью интегрирования по $2M - 2N - 1$ избыточному каналу (степени свободы).

Используя функцию плотности условной вероятности $P[Y(t)|X(t)]$ в виде (5.130), мы можем вычислить любые корреляторы коэффициентов \tilde{C}_k : $\langle \tilde{C}_{k_1} \rangle$, $\langle \tilde{C}_{k_1} \tilde{C}_{k_2} \rangle$, $\langle \tilde{C}_{k_1} \dots \tilde{C}_{k_n} \rangle$. Здесь

$$\langle \tilde{C}_{k_1} \dots \tilde{C}_{k_n} \rangle = \int P[Y(t)|X(t)] \tilde{C}_{k_1} \dots \tilde{C}_{k_n} \prod_{j=-M}^{M-1} d^2Y_j, \quad (5.133)$$

\tilde{C}_k определяется в выражении (5.128), которое мы переписываем с учетом дискретизации в виде:

$$\tilde{C}_k = \frac{\Delta}{T_0} \sum_{j=-M}^{M-1} f(t_j - kT_0) Y_j e^{-i\gamma L |Y_j|^2}. \quad (5.134)$$

Для восстановления функции $P[\{\tilde{C}_k\}|\{C_k\}]$ в лидирующем приближении по параметру Q необходимо вычислить только три коррелятора: $\langle \tilde{C}_k \rangle$, $\langle \tilde{C}_k \tilde{C}_m \rangle$, $\langle \tilde{C}_k \tilde{C}_m^* \rangle$. Подставляя выражения (5.130), (5.131) и (5.134) в выражение (5.133), затем вычисляя интеграл по переменным Y_j , мы получаем корреляторы в лидирующем приближении по параметру Q :

$$\langle \tilde{C}_k \rangle = C_k - \frac{iC_k QL^2\gamma}{\Delta} \left(1 - \frac{i\gamma L |C_k|^2 n_4}{3} \right), \quad (5.135)$$

$$\langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle) (\tilde{C}_n - \langle \tilde{C}_n \rangle) \rangle = -i\delta_{m,n} \frac{C_m^2 Q L^2 \gamma}{T_0} \left(n_4 - \frac{2in_6}{3} \gamma L |C_m|^2 \right), \quad (5.136)$$

$$\langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle) (\tilde{C}_n^* - \langle \tilde{C}_n^* \rangle) \rangle = \delta_{m,n} \frac{Q L}{T_0} \left(1 + \frac{2n_6}{3} \gamma^2 L^2 |C_m|^4 \right), \quad (5.137)$$

где $\delta_{m,n}$ – символ Кронекера, а

$$n_s = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{dt}{T_0} f^s(t). \quad (5.138)$$

Отметим, что коррелятор $\langle \tilde{C}_k - C_k \rangle$ пропорционален $QL/\Delta = QLW'/(2\pi)$, то есть пропорционален полной мощности шума из всей спектральной полосы W' . Корреляторы (5.136) и (5.137) пропорциональны параметру QL/T_0 , то есть мощности шума в спектральной области начального сигнала, и не зависят от параметра Δ . Однако эти корреляторы зависят от Δ в более высоких порядках по параметру Q , см. Приложение В.

Используя корреляторы (5.135)–(5.137), мы строим функцию $P[\{\tilde{C}\}|\{C\}]$ в лидирующем порядке по параметру Q :

$$P[\{\tilde{C}\}|\{C\}] = \prod_{m=-N}^N P_m[\tilde{C}_m|C_m], \quad (5.139)$$

где

$$P_m[\tilde{C}_m|C_m] \approx \frac{T_0}{\pi Q L \sqrt{1 + \xi^2 \mu_m^2 / 3}} \exp \left[-T_0 \frac{(1 + 4n_6 \mu_m^2 / (3)) x_m^2 + 2x_m y_m \mu_m n_4 + y_m^2}{Q L (1 + \xi^2 \mu_m^2 / 3)} \right]. \quad (5.140)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$x_m = \operatorname{Re} \left[e^{-i\phi_m} \left\{ \tilde{C}_m - C_m + \frac{iC_m Q L^2 \gamma}{\Delta} \left(1 - \frac{i\gamma L |C_m|^2 n_4}{3} \right) \right\} \right], \quad (5.141)$$

$$y_m = \text{Im} \left[e^{-i\phi_m} \left\{ \tilde{C}_m - C_m + \frac{iC_m QL^2\gamma}{\Delta} \left(1 - \frac{i\gamma L |C_m|^2 n_4}{3} \right) \right\} \right], \quad (5.142)$$

$$\phi_m = \arg C_m, \quad \mu_m = \gamma L |C_m|^2, \quad (5.143)$$

$$\xi^2 = (4n_6 - 3n_4^2). \quad (5.144)$$

Параметр ξ^2 удовлетворяет неравенству $\xi^2 > n_6 > 0$ в силу неравенства Коши-Буняковского. Отметим, что функция $P[\{\tilde{C}\}|\{C\}]$ имеет факторизованный вид (5.139) только в лидирующем приближении по параметру Q . Факторизация (5.139) означает, что мы имеем $2N + 1$ независимых информационных канала, а канал, отвечающий импульсу m в сигнале $X(t)$, описывается функцией $P_m[\tilde{C}_m|C_m]$, которая удовлетворяет условию нормировки

$$\int d^2\tilde{C}_m P_m[\tilde{C}_m|C_m] = 1. \quad (5.145)$$

Поскольку существует $2N + 1$ независимых каналов связи, мы можем выбрать функцию распределения начального сигнала $P_X[\{C\}]$ в следующем виде:

$$P_X[\{C\}] = \prod_{k=-N}^N P_X^{(k)}[C_k]. \quad (5.146)$$

Поэтому далее мы выбираем некоторый m -тый канал и будем рассматривать только его.

Для этого канала связи мы можем вычислить функцию распределения коэффициента \tilde{C}_m :

$$P_{out}^{(m)}[\tilde{C}_m] = \int d^2C_m P_m[\tilde{C}_m|C_m] P_X^{(m)}[C_m]. \quad (5.147)$$

Далее мы предполагаем, что $P_X^{(m)}[C_m]$ – гладкая функция, которая существенно меняется при изменении аргумента C_m на величину порядка \sqrt{P} . Мы также проводим вычисления при условии, что мощность сигнала много больше мощности шума, то есть

$$P \gg QL/\Delta \gg QL/T_0. \quad (5.148)$$

В этом случае мы используем метод Лапласа для вычисления интеграла (5.147) и получаем следующий результат в лидирующем приближении по параметру Q :

$$P_{out}^{(m)}[\tilde{C}_m] \approx P_X^{(m)}[\tilde{C}_m]. \quad (5.149)$$

Можно заметить, что в этом приближении статистика коэффициентов \tilde{C}_m совпадает со статистикой коэффициентов C_m , что отличается от результата одноканальной модели, в которой $P_{out}[Y] = P_X \left[Y e^{-i\gamma L |Y|^2} \right]$. Это связано с тем, что модельный детектор убирает нелинейную фазу см. (5.127).

5.3.3 Сравнение аналитических и численных результатов

Сравним аналитические и численные результаты для корреляторов. Численные результаты получены двумя различными методами: методом расщепления по физическим процессам [128; 129] и методом Рунге-Кутты четвертого порядка [130]. Два метода использовались для того, чтобы продемонстрировать независимость численных результатов для корреляторов от метода интегрирования уравнения. Для численного нахождения корреляторов решалось уравнение (5.117) для фиксированного начального сигнала $X(t)$ и различных реализаций шума $\eta(t, z)$. Затем выполняются процедуры (5.127) и (5.128), после чего мы извлекаем коэффициенты \tilde{C}_k и усредняем их комбинации по реализациям шума.

При получении численных результатов мы выбрали параметры, которые близки к параметрам современных линий связи: $T_0 = 10^{-10}$ сек; длина распространения $L = 800$ км; коэффициент керровской нелинейности $\gamma = 1.25$ (км×Вт)⁻¹.

Метод расщепления по физическим процессам. Уравнение (5.117) интегрировалось численно по переменной z от 0 до L . В этом методе функция на шаге $z + h$ выражается через функцию на шаге z следующим образом:

$$\psi(t, z + h) = \psi(t, z) \exp(i\gamma |\psi(t, z)|^2 h) + \hat{F}_- \{\delta Q_h\}, \quad (5.150)$$

где $\psi(t, z)$ – численное решение уравнения (5.117), h – шаг решетки по переменной z , \hat{F}_- обозначает дискретное обратное преобразование Фурье. Величина δQ_h обозначает добавку шума на шаге h , которая выполняется в частотной области следующим образом:

$$\psi(z, \omega_j) \rightarrow \psi(z, \omega_j) + \sqrt{\frac{hQ}{T}} \cdot \frac{\eta_X + i\eta_Y}{\sqrt{2}}, \quad (5.151)$$

где индекс $j = 0, \dots, 2M - 1$ обозначает шаг сетки в ω пространства, $2M$ – число точек в сетках t и ω пространств, T размер рассматриваемой области в t пространстве. Мы выбрали $T = 63T_0$; η_X и η_Y – независимые гауссовские случайные числа с нулевым средним и $\sigma^2 = 1$; $Q = 10^{-21}$ Вт км $^{-1}$ Гц $^{-1}$.

Начальный сигнал при $z = 0$ имеет вид

$$\psi(t, 0) = X(t) = \sum_{k=-31}^{31} C_k f(t - kT_0), \quad (5.152)$$

Мы используем форму импульса в гауссовском виде:

$$f(t) = \sqrt{\frac{T_0}{T_1\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{t^2}{2T_1^2}\right), \quad (5.153)$$

где $T_1 = T_0/10 = 10^{-11}$ сек. При таком выборе параметра T_1 перекрытием импульсов можно пренебречь. Для формы импульса (5.153) коэффициенты n_s равняются $n_4 = \frac{T_0/T_1}{\sqrt{2\pi}} \approx 3.989$, $n_6 = \frac{(T_0/T_1)^2}{\pi\sqrt{3}} \approx 18.38$, $n_8 = \frac{(T_0/T_1)^3}{2\pi\sqrt{\pi}} \approx 89.79$, $\xi \approx 5.08$.

При численном моделировании мы варьируем среднюю мощность входного сигнала $\frac{1}{63} \sum_{k=-31}^{31} |C_k|^2$ от 0.0177 мВт до 4.43 мВт. Кроме того, моделирование проведено для различных разбиений интервала по t , то есть для различных Δ (различной частотной ширины шума и фиксированного параметра Q). Вычисление проводилось для трех различных $\Delta = T/(2M)$: $\Delta_1 = 9.77 \times 10^{-14}$ сек, $\Delta_2 = 1.95 \times 10^{-13}$ сек и $\Delta_3 = 3.91 \times 10^{-13}$ сек, что соответствует частотным ширинам $1/\Delta_1 = 10.26$ ТГц, $1/\Delta_2 = 5.12$ ТГц и $1/\Delta_3 = 2.56$ ТГц, соответственно.

При каждой средней мощности и каждом шаге сетки Δ мы решали уравнение для различных реализаций шума и усредняли полученные результаты по реализациям шума. Полное число реализаций шума для фиксированного $X(t)$

определяется необходимой относительной статистической ошибкой. Мы выбрали число реализаций равным 5.0×10^4 , что соответствует относительной ошибке для корреляторов (5.136) и (5.137) на уровне 0.2%, поскольку полное число импульсов равно $63 \times 5.0 \times 10^4 \approx 3.2 \times 10^6$. Численное моделирование выполнялось для различного числа точек в сетке по переменной z , от 100 до 800 точек. Было показано, что если количество точек в сетке больше 100, то результат не зависит от числа точек в сетке. На рис. 5.5–5.9 приведены численные и аналитические результаты для корреляторов (5.135)–(5.137) при различных Δ . На рис. 5.9

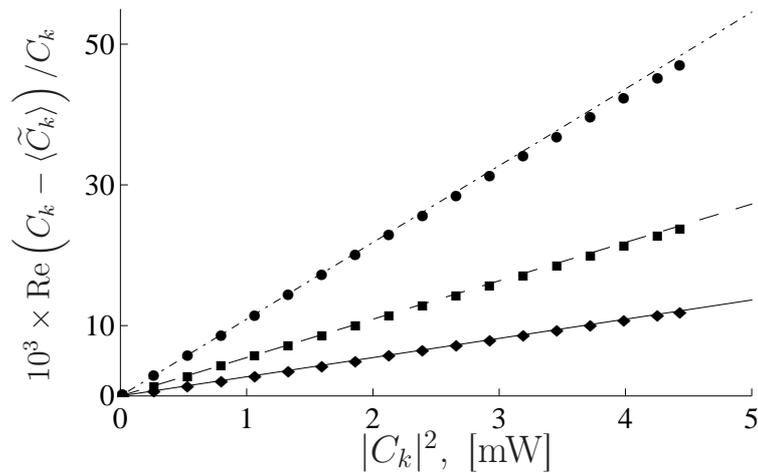


Рисунок 5.5 — Зависимость действительной части отношения $(C_k - \langle \tilde{C}_k \rangle) / C_k$ от мощности сигнала $|C_k|^2$ для формы сигнала $f(t)$, см. (5.153), и параметра $Q = 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Штрих-пунктирная, пунктирная и сплошная линии отвечают аналитическим результатам для шагов решетки по времени Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 соответственно. Кружки, квадраты и ромбы отвечают численным результатам для Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 соответственно.

представлены результаты вычислений величины $\langle |\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle|^2 \rangle$ только для Δ_1 и Δ_3 , поскольку результаты для случаев Δ_1 и Δ_2 практически сливаются. Можно заметить хорошее согласие аналитических и численных результатов вплоть до мощностей сигнала 3 мВт. Большие отличия аналитических и численных результатов для Δ_1 объясняются тем, что чем меньше параметр Δ , тем больше спектральная ширина шума и тем больше полная мощность шума, которая принимается детектором. Однако наши вычисления выполнены в предположении, что параметр $\text{SNR} = P\Delta / (QL)$ велик. Уменьшение Δ приводит к уменьшению параметра SNR и ухудшению нашего приближения. Для улучшения приближения можно вычислить следующие поправки к корреляторам по

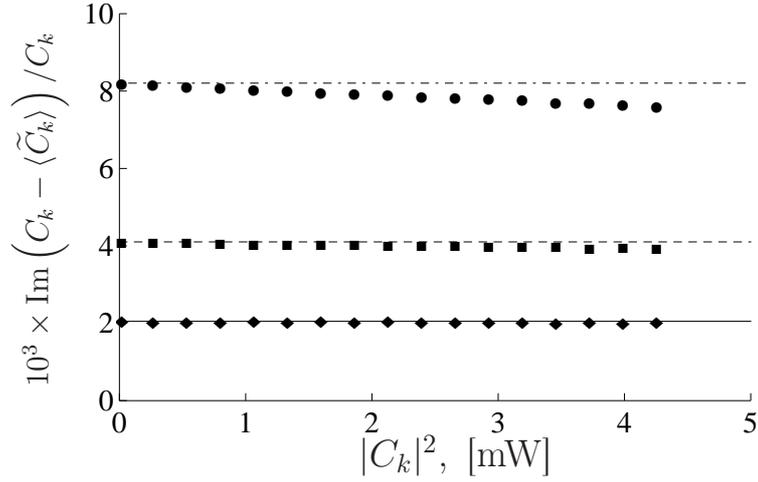


Рисунок 5.6 — Зависимость мнимой части отношения $(C_k - \langle \tilde{C}_k \rangle)/C_k$ от мощности сигнала $|C_k|^2$ для формы сигнала $f(t)$, см. (5.153), и параметра $Q = 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Штрих-пунктирная, пунктирная и сплошная линии отвечают аналитическим результатам для шагов решетки по времени Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 соответственно. Кружки, квадраты и ромбы отвечают численным результатам для Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 соответственно.

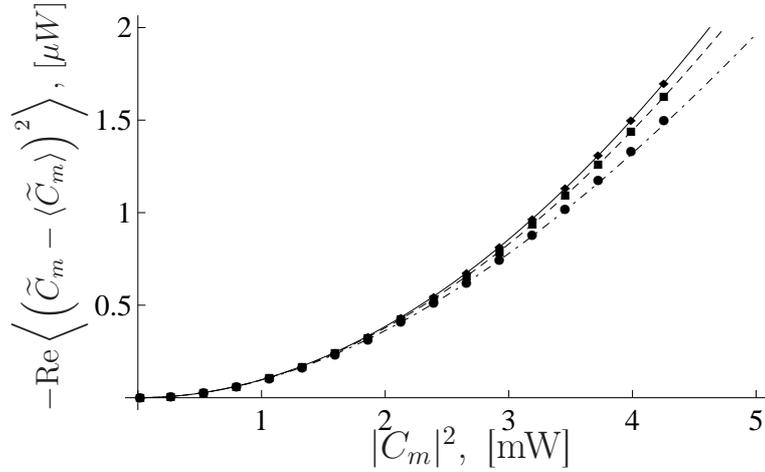


Рисунок 5.7 — Реальная часть коррелятора $-\langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle)^2 \rangle$ как функция средней мощности сигнала $|C_m|^2$, для формы сигнала $f(t)$, см. (5.153), и параметра $Q = 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Штрих-пунктирная, пунктирная и сплошная линии отвечают аналитическим результатам (5.136) с учетом следующих за ведущими поправками по параметру Q см. (B.1) для Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 соответственно. Кружки, квадраты и ромбы отвечают численным результатам для Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 соответственно.

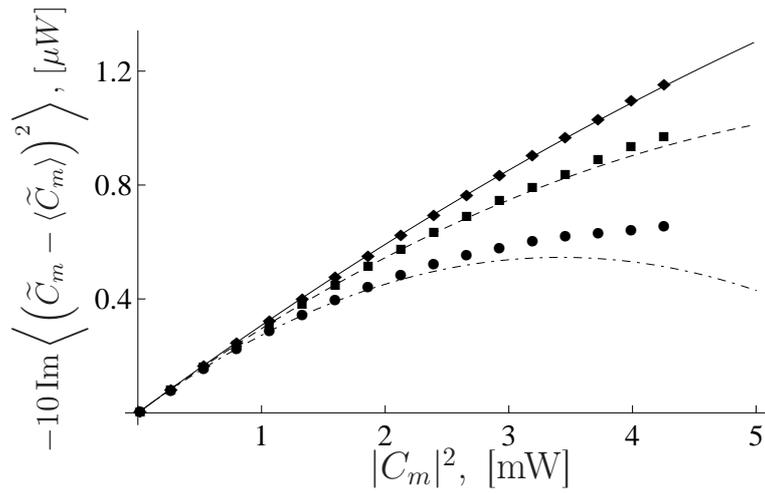


Рисунок 5.8 — Мнимая часть коррелятора $-\langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle)^2 \rangle$ как функция средней мощности сигнала $|C_m|^2$, для формы сигнала $f(t)$, см. (5.153), и параметра $Q = 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Штрих-пунктирная, пунктирная и сплошная линии отвечают аналитическим результатам (5.136) с учетом следующих за ведущими поправками по параметру Q , см. (B.1), для Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 соответственно. Кружки, квадраты и ромбы отвечают численным результатам для Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 соответственно.

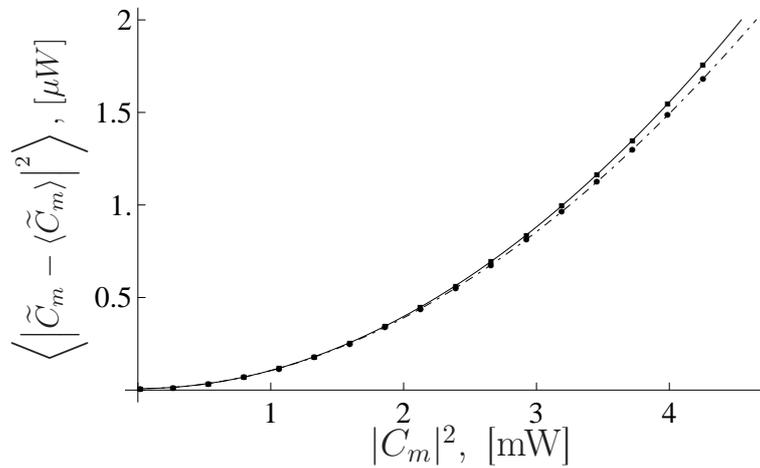


Рисунок 5.9 — Зависимость коррелятора $\langle |\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle|^2 \rangle$ от мощности $|C_m|^2$, для формы сигнала $f(t)$, см. (5.153), и параметра $Q = 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Штрих-пунктирная и сплошная линии отвечают аналитическим результатам (5.137) с учетом следующих за ведущими поправками по параметру Q , см. (B.3), для Δ_1 и Δ_3 соответственно. Кружки и квадраты отвечают численным результатам для Δ_1 и Δ_3 , соответственно.

параметру QL/Δ . Отметим, что в аналитических результатах, изображенных на рис. 5.7–5.9, учтены следующие поправки по параметру Q , см. выражения (В.1) и (В.3) в Приложении В.

Метод Рунге-Кутта. В этом методе время входит в уравнение (5.117) как параметр, поэтому задача сводится к численному решению обыкновенного дифференциального уравнения с различными граничными условиями, которые определяются формой импульса $f(t)$ и коэффициентом C_m , а так же случайной функцией $\eta(t, z)$. При расчете методом Рунге-Кутта мы используем сигнал следующего вида:

$$f_n(t) = A_n \cos^n(\pi t/T_0) \quad (5.154)$$

для $n = 2, 4$, $t \in [-T_0/2, T_0/2]$: $A_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}$ и $A_4 = \sqrt{\frac{128}{35}}$. Кроме того, мы выбираем параметр $\Delta = T_0/64$. Случайный шум реализуется как телеграфный процесс с шагом длины $\Delta_z = 10^{-4}L$, с нулевой средней высотой и дисперсией $\sigma^2 = 2.38 \times 10^{-8}$ Вт/км². Такой процесс реализуется для действительной и мнимой частей шума независимо. Параметр шума выбирался равным $Q = 2\sigma^2\Delta\Delta_z \approx 5.94 \times 10^{-21}$ Вт/(км×Гц), что почти в шесть раз больше чем этот же параметр, используемый в методе разделения по физическим процессам. Мы контролировали этот параметр по численному вычислению коррелятора (5.137) при нулевой нелинейности, то есть в случае $\gamma = 0$. Шум η считался постоянным внутри одного шага по z . Внутри шага уравнение решалось методом Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом $h = \Delta_z/50$. Среднее (5.135) и корреляторы (5.136), (5.137) были вычислены по 16384 значениям \tilde{C}_k , которые вычислялись при различных реализациях шума. Для контроля точности вычислений мы решали уравнение с нулевым шумом от $z = 0$ до $z = L$ с шагом h , а потом выполняли обратное распространение от $z = L$ до $z = 0$. При таких вычислениях начальное условие восстанавливается с относительной точностью порядка 10^{-6} . Аналитические и численные результаты представлены на рис. 5.10–5.14 для различных форм сигнала $f(t)$. Численные результаты изображаются точками с усами статистической ошибки на уровне трех стандартных отклонений, кривыми изображены результаты, полученные из (5.135)–(5.137) с учетом вкладов (В.1) и (В.3). На рис. 5.10 и 5.11 приведена зависимость действительной и мнимой частей относительной разницы $(C_k - \langle \tilde{C}_k \rangle) / C_k$ от $|C_k|^2$ для двух форм

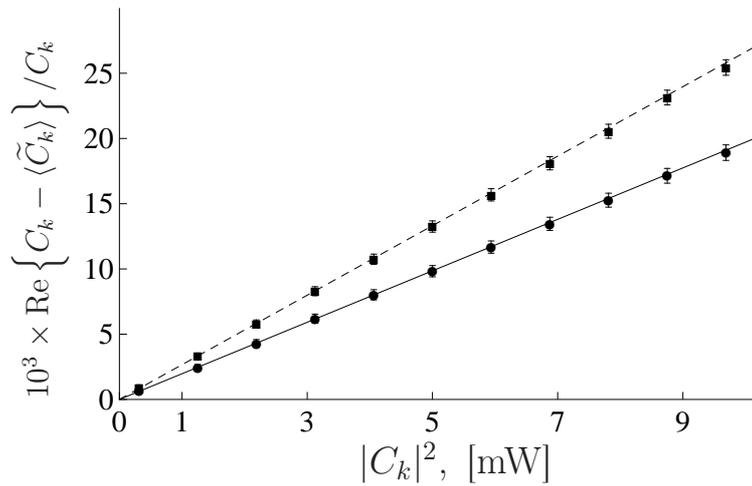


Рисунок 5.10 — Зависимость отношения $\text{Re}\{C_k - \langle \tilde{C}_k \rangle\} / C_k$ от мощности сигнала $|C_k|^2$. Параметр шума $Q = 5.94 \times 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Сплошная линия соответствует форме сигнала $f_2(t)$, пунктирная — $f_4(t)$. Кружки и квадраты с усами ошибок (три стандартных отклонения) отвечают численным результатам, полученным с помощью огибающих f_2 и f_4 , соответственно.

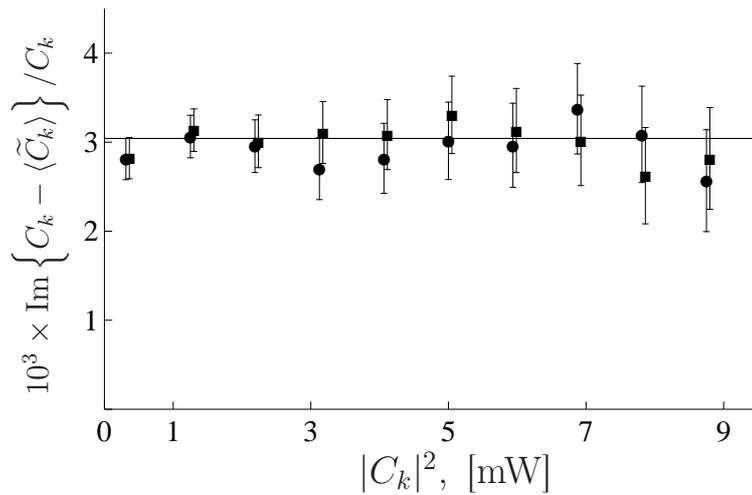


Рисунок 5.11 — Зависимость отношения $\text{Im}\{C_k - \langle \tilde{C}_k \rangle\} / C_k$ от мощности сигнала $|C_k|^2$. Параметр шума $Q = 5.94 \times 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Сплошная линия соответствует форме сигнала $f_2(t)$, пунктирная — $f_4(t)$. Кружки и квадраты с усами ошибок (три стандартных отклонения) отвечают численным результатам, полученным с помощью огибающих f_2 и f_4 , соответственно.

сигнала $f_2(t)$ и $f_4(t)$. Можно заметить, что на рис. 5.10 кривая, соответствующая форме сигнала $f_4(t)$, проходит выше кривой, соответствующей $f_2(t)$. Это связано с тем, что интегралы n_4 и n_6 , вычисленные по функции $f_4(t)$, больше, чем по функции $f_2(t)$. На рис. 5.11 результаты для обеих форм $f_2(t)$ и $f_4(t)$ совпадают,

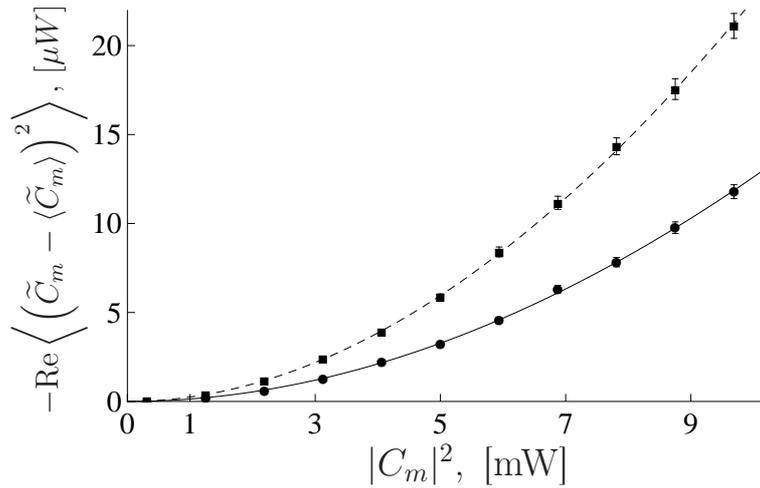


Рисунок 5.12 — Зависимость величины $-\text{Re} \langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle)^2 \rangle$ от мощности сигнала $|C_m|^2$. Параметр шума $Q = 5.94 \times 10^{-21}$ Вт/(км \times Гц). Сплошная и пунктирная линии отвечают аналитическим результатам (5.136) с поправками (B.1), полученным с помощью форм сигналов $f_2(t)$ и $f_4(t)$, соответственно.

Кружки и квадраты с усами статистической ошибки (на уровне трех стандартных отклонений) отвечают численным результатам, полученным с помощью f_2 и f_4 , соответственно.

как и предсказывает выражение (5.135). На рис. 5.12–5.14 мы привели результаты для действительной и мнимой частей выражения $-\langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle)^2 \rangle$ и абсолютного значения $\langle |\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle|^2 \rangle$ соответственно. Подобно результатам, изображенным на рис. 5.10, кривая, соответствующая форме $f_4(t)$, проходит выше, чем кривая, соответствующая форме $f_2(t)$, по той же причине. Можно увидеть хорошее согласие аналитических и численных результатов.

Мы так же проверили, что для одинаковых огибающих $f(t)$ оба численных метода (метод разделения по физическим процессам и метод Рунге-Кутты) дают совпадающие результаты с точностью до статистической ошибки. Поэтому мы представили результаты, полученные методом разделения по физическим процессам для формы (5.153) и результаты, полученные методом Рунге-Кутты для функций $f_2(t)$ и $f_4(t)$ см. (5.154).

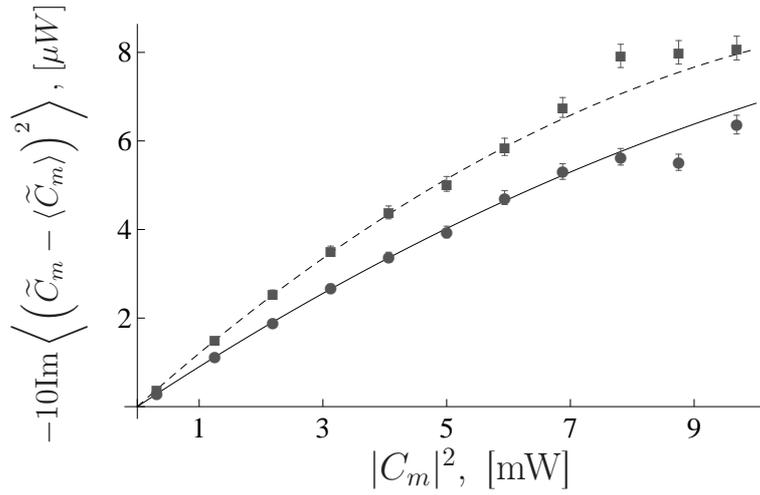


Рисунок 5.13 — Зависимость величины $-\text{Im} \left\langle \left(\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle \right)^2 \right\rangle$ от мощности сигнала $|C_m|^2$. Параметр шума $Q = 5.94 \times 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Сплошная и пунктирная линии отвечают аналитическим результатам (5.136) с поправками (В.1), полученным с помощью форм сигналов $f_2(t)$ и $f_4(t)$, соответственно.

Кружки и квадраты с усами статистической ошибки (на уровне трех стандартных отклонений) отвечают численным результатам, полученным с помощью f_2 и f_4 , соответственно.

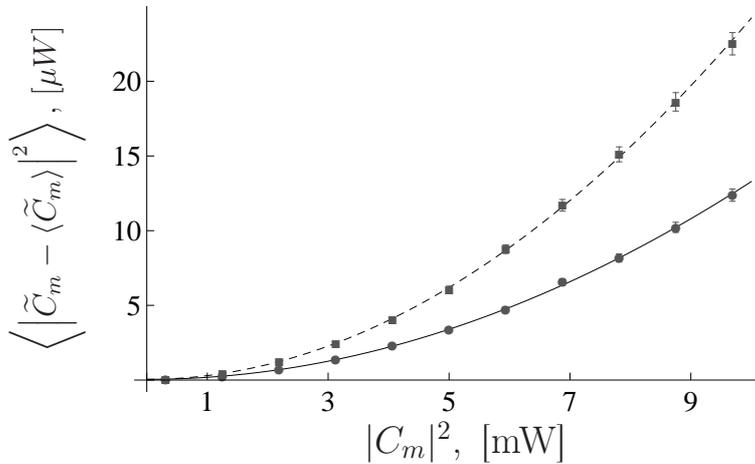


Рисунок 5.14 — Зависимость коррелятора $\left\langle \left| \tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle \right|^2 \right\rangle$ от мощности сигнала $|C_m|^2$. Параметр шума $Q = 5.94 \times 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Сплошная и пунктирная линия отвечают аналитическим результатам (5.137) с поправками (В.3), полученным с помощью форм сигналов $f_2(t)$ и $f_4(t)$, соответственно.

Кружки и квадраты с усами статистической ошибки (на уровне трех стандартных отклонений) отвечают численным результатам, полученным с помощью f_2 и f_4 , соответственно.

5.3.4 Энтروпии и взаимная информация

Перейдем к вычислению энтропий. Энтропия выходящего из канала сигнала имеет вид:

$$H[\tilde{C}_m] = - \int d^2\tilde{C}_m P_{out}^{(m)}[\tilde{C}_m] \log P_{out}^{(m)}[\tilde{C}_m], \quad (5.155)$$

условная энтропия выражается следующим образом:

$$H[\tilde{C}_m|C_m] = - \int d^2\tilde{C}_m d^2C_m P_m[\tilde{C}_m|C_m] \times P_X^{(m)}[C_m] \log P_m[\tilde{C}_m|C_m], \quad (5.156)$$

а взаимная информация равняется

$$I_{P_X^{(m)}} = H[\tilde{C}_m] - H[\tilde{C}_m|C_m]. \quad (5.157)$$

Вычисления энтропий и взаимной информации аналогичны вычислениям, проделанным в Главе 5.2, поэтому здесь мы приводим только ответы:

$$H[\tilde{C}_m] = H[C_m] = - \int d^2C_m P_X^{(m)}[C_m] \log P_X^{(m)}[C_m], \quad (5.158)$$

$$H[\tilde{C}_m|C_m] = \log \left[e\pi \frac{QL}{T_0} \right] + \frac{1}{2} \int d^2C_m P_X^{(m)}[C_m] \log \left[1 + \xi^2 \frac{\gamma^2 L^2 |C_m|^4}{3} \right]. \quad (5.159)$$

Для вычисления оптимального распределения начального сигнала $P_{opt}^{(m)}[C_m]$ мы вычисляем взаимную информацию, подставляя выражения (5.158) и (5.159) в (5.157), затем варьируем ее по функции распределения $P_X^{(m)}[C_m]$ при условии нормировки (5.124) и средней мощности (5.125). Приравнявая вариацию нулю, мы получаем уравнение на $P_{opt}^{(m)}[C_m]$. Решая это уравнение, мы получаем:

$$P_{opt}^{(m)}[C_m] = N^{(0)} \frac{e^{-\lambda_0 |C_m|^2}}{\sqrt{1 + \xi^2 \gamma^2 L^2 |C_m|^4 / 3}}, \quad (5.160)$$

где параметры $N^{(0)} = N^{(0)}(P, \xi\gamma)$ и $\lambda_0 = \lambda_0(P, \xi\gamma)$ зависят от P и параметра $\xi\gamma$. Как и для случая одноканальной модели параметры $N^{(0)}$ и λ_0 являются решениями системы уравнений

$$\int d^2C_m P_{\text{opt}}^{(m)}[C_m] = \int_0^\infty d|C_m| \frac{2\pi N^{(0)} |C_m| e^{-\lambda_0 |C_m|^2}}{\sqrt{1 + \xi^2 \gamma^2 L^2 |C_m|^4/3}} = 1, \quad (5.161)$$

$$\int d^2C_m P_{\text{opt}}^{(m)}[C_m] |C_m|^2 = \int_0^\infty d|C_m| \frac{2\pi N^{(0)} |C_m|^3 e^{-\lambda_0 |C_m|^2}}{\sqrt{1 + \xi^2 \gamma^2 L^2 |C_m|^4/3}} = P. \quad (5.162)$$

В предыдущей главе мы уже решали эту систему уравнений, ее решение имеет вид (5.64) с заменой $\gamma \rightarrow \xi\gamma$. Используя результаты разделов 5.2.3 и 5.2.4, мы получаем, что емкость нашего канала связи имеет вид:

$$C = I_{P_{\text{opt}}^{(m)}} = \log \left(\frac{PT_0}{QL} \right) + P\lambda_0 - \log \left[e\pi P N^{(0)} \right]. \quad (5.163)$$

Можно заметить, что первое слагаемое в правой части уравнения (5.163) соответствует результату Шеннона для емкости линейного канала связи в приближении большого параметра SNR. Кроме того, результат (5.163) совпадает с результатом (5.110) с заменами $QL \rightarrow QL/T_0$ и $\gamma \rightarrow \xi\gamma$. Поэтому форма сигнала входит в емкость через один интегральный параметр $\xi = \sqrt{4n_6 - 3n_4^2}$, который меняет параметр нелинейности с γ на $\xi\gamma$.

Как следствие, емкость канала связи, в котором сигнал зависит от времени, растет как $\log \log P$ при больших мощностях P , что совпадает с поведением емкости для одноканальной модели бездисперсионного канала связи. То есть поведение при учете зависимости сигнала от времени не меняется. Отметим, что результат (5.163) получен для некоторого импульса m в сигнале $X(t)$. Для того чтобы получить полную емкость, необходимо умножить правую часть (5.163) на количество импульсов в сигнале, то есть на $(2N + 1)$.

В настоящей главе мы рассмотрели нелинейный канал связи, описываемый нелинейным уравнением Шредингера с аддитивным шумом. В случае ненулевой дисперсии мы разработали метод вычисления функции плотности условной вероятности. Для случая малой константы керровской нелинейности мы разработали метод вычисления континуального интеграла, используя теорию возмущений по параметру γ . Для случая произвольной нелинейности мы

развили метод, аналогичный методу поиска квазиклассической траектории в квантовой механике. Затем мы применили этот метод для канала связи с нулевой дисперсией.

Для канала связи с нулевой дисперсией и в случае, когда входящий сигнал не зависит от времени, мы вычислили функцию плотности условной вероятности, энтропию выходящего сигнала, условную энтропию, взаимную информацию, оптимальную функцию распределения начального сигнала и емкость канала связи. Мы показали, что при больших мощностях входного сигнала емкость растет только как $\log \log P$, в отличие от линейного канала связи, в котором емкость растет как $\log P$, то есть гораздо быстрее. В случае малой нелинейности, мы воспроизводим результаты для линейного канала связи.

Затем мы расширили модель бездисперсионного канала связи на случай, когда начальный сигнал зависит от времени. Для такой модели канала связи мы построили модель детектирования и извлечения информации из принятого сигнала. Мы показали, что в случае расширенной модели, емкость также растет как $\log \log P$, а форма сигнала входит через один интегральный параметр ξ .

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации:

1. Вычислен индуцированный кулоновской примесью заряд точно по параметру $Z\alpha$ в докритическом режиме в графене. Используя подход Хартри, найдена зависимость эффективного зарядового номера примеси от параметра $Z\alpha$. Показано, что кулоновская примесь с зарядовым номером равным единице всегда остается в докритическом режиме, а индуцированный заряд локализован на примеси. Примеси с зарядовыми номерами больше единицы могут перейти в закритический режим.
2. Исследованы плотность индуцированного заряда и индуцированный заряд в графене в присутствии локализованного потенциала. Вычислена асимптотика плотности индуцированного заряда в области $r \gg R$ в докритическом и закритическом режимах. Здесь R – характерный радиус локализации потенциала. Кроме того, вычислен индуцированный заряд. Показано, что малое изменение параметров потенциала вблизи его критического значения существенно изменяет плотность индуцированного заряда и сам заряд.
3. Исследована плотность индуцированного тока в графене в поле соленоида малого радиуса R на расстояниях много больших R . Показано, что в случае, если электроны не могут проникать в область ненулевого магнитного поля, индуцированный ток является периодической функцией магнитного потока. В случае, если электроны проникают в область ненулевого поля, индуцированный ток не является периодической функцией магнитного потока. Показано, что если электрон может проникать в область ненулевого магнитного поля, то асимптотика плотности индуцированного тока при $r \gg R$ зависит только от полного магнитного потока через соленоид и не зависит от распределения магнитного поля внутри соленоида. Показано, что параметр расширения θ гамильтониана для электрона в графене в поле бесконечно тонкого соленоида имеет универсальное значение $\theta = \pi/2$.
4. Рассмотрена простая модель электрон-электронного взаимодействия в графене в пренебрежении возбуждениями типа электрон-дырка в про-

межуточных состояниях. Показано, что в процессе рассеяния волнового пакета возникает локализованное состояние. С точки зрения внешнего наблюдателя, данный процесс выглядит как неупругий. Причина этого – дополнительное двукратное вырождение спектра гамильтониана двух электронов. Это вырождение является следствием вырожденности матрицы производных в гамильтониане. В случае кулоновского взаимодействия между электронами, вычислен коэффициент адгезии, то есть вероятность того, что рассеивающиеся электроны останутся на конечном расстоянии.

5. Рассмотрена задача взаимодействия двух электронов в графене с учетом возбуждений электрон-дырка в промежуточных состояниях, то есть с учетом электронов под поверхностью Ферми. Используя уравнение Бете-Солпитера в лидирующем приближении по потенциалу взаимодействия, получено уравнение на волновую функцию двух электронов в графене, в котором учтено положение энергии Ферми E_F . Подробно рассмотрено это уравнение в случае, когда полный импульс системы двух электронов равен нулю. В этом случае найдены плотность $\rho(t, \mathbf{r})$ и ток $\mathbf{j}_{tot}(t, \mathbf{r})$, удовлетворяющие уравнению непрерывности. Показано, что картина рассеяния существенно зависит от положения энергии Ферми относительно положения дираковской точки. Показано, что при отличном от нуля угловом моменте, $E_F < 0$ и энергии электронов E , удовлетворяющей условию $0 < E < \max V(r)$, в случае, когда волновой пакет, отвечающий задаче рассеяния, приходит в область ненулевого потенциала, возникает долгоживущее локализованное состояние, которое затем распадается в набор волновых пакетов, следующих друг за другом. При $E > \max V(r)$ локализованное состояние не возникает. При нулевом угловом моменте и произвольной E_F долгоживущее локализованное состояние не возникает. Показано, что при произвольном угловом моменте и $E_F > 0$ локализованные состояния также не возникают. Показано, что в случае $E_F < 0$ возникает бесконечный набор локализованных стационарных состояний с конечной нормировкой и типичным масштабом локализации $1/|E_F|$.
6. Рассмотрена примесь со спином, помещенная в трехмерную антиферромагнитную систему, которая находится вблизи квантовой критиче-

- ской точки со стороны парамагнитной фазы. Точка разделяет парамагнитную и антиферромагнитную фазы. Используя метод эффективно лагранжиана, вычислены распределение плотности спина (намагниченность) и антиферромагнитной намагниченности в индуцированном примесью облаке. Для вычисления использовались два метода: самосогласованное борновское приближение и ренорм-групповой подход. Показано, что результаты обоих методов для примеси со спином $S = 1/2$ согласуются с точностью $1/N$, где в нашем случае $N = 3$. Однако при больших значениях спина примеси самосогласованное борновское приближение неприменимо, поскольку параметр малости $1/N$ компенсируется большим спином. При $S \geq 1$ применим ренорм-групповой подход. Продемонстрировано, что в трех измерениях возникает эффект разделения спина и заряда вблизи квантовой критической точки.
7. Для канала связи, описываемого нелинейным уравнением Шредингера с аддитивным шумом, разработаны методы вычисления функции плотности условной вероятности для двух различных случаев. В случае малого параметра нелинейности разработан метод теории возмущений по параметру нелинейности для вычисления континуального интеграла, описывающего функцию плотности условной вероятности. В случае большого отношения мощности сигнала к мощности шума и произвольного параметра нелинейности разработан метод вычисления функции плотности условной вероятности, аналогичный методу вычислений “квазиклассических” поправок в квантовой механике.
 8. Для нелинейного канала связи с нулевой дисперсией вычислена функция плотности условной вероятности, энтропия выходящего сигнала, условная энтропия, взаимная информация, оптимальная функция распределения входящего в канал сигнала и емкость канала связи в лидирующем и следующем за лидирующим приближении по параметру отношения мощности сигнала к мощности шума и точно по параметру керровской нелинейности. Показано, что емкость данного канала связи растет как дважды логарифм средней мощности сигнала, что существенно отличается от линейного канала связи.

В заключение, хотелось бы выразить благодарность А. И. Мильштейну, Р. Н. Ли и А. В. Резниченко за многолетнее плодотворное сотрудничество. Автор очень признателен Александру Ильичу Мильштейну за поддержку, многократные обсуждения и советы, во время написания настоящей диссертации.

Основные результаты опубликованы в следующих работах:

1. Terekhov I. S., Milstein A. I., Kotov V. N., Sushkov O. P. Screening of Coulomb Impurities in Graphene // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100. P. 076803.
2. Milstein A. I., Terekhov I. S. Induced charge generated by a potential well in graphene // *Phys. Rev. B* 2010. Vol. 81. P. 125419.
3. Jackiw R., Milstein A. I., Pi S.-Y., Terekhov I. S. Induced current and Aharonov-Bohm effect in graphene // *Phys. Rev. B* 2009, Vol. 80. P. 033413.
4. Milstein A. I., Terekhov I. S. Induced current in the presence of a magnetic flux tube of small radius // *Phys. Rev. B* 2011. Vol. 83. P. 075420.
5. Lee R. N., Milstein A. I., Terekhov I. S. Quasilocalized states in a model of electron-electron interaction in graphene // *Phys. Rev. B* 2012, Vol. 86. P. 035425.
6. Milstein A. I., Terekhov I. S. Electron-electron interaction in graphene at finite Fermi energy // *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2019. Vol. 109. P. 73-77.
7. Kharkov Y. A., Terekhov I. S., Sushkov O. P. Impurity-induced magnetization in a three-dimensional antiferromagnet at the quantum critical point // *Phys. Rev. B* 2015. Vol. 92. P. 155122.
8. Terekhov I.S., Vergeles S.S., Turitsyn S.K. Conditional Probability Calculations for the Nonlinear Schrödinger Equation with Additive Noise // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, P. 230602.
9. Terekhov I. S., Reznichenko A. V., Kharkov Ya. A., Turitsyn S. K. Log-log growth of channel capacity for nondispersive nonlinear optical fiber channel in intermediate power range // *Phys. Rev. E* 2017. Vol. 95. P. 062133.
10. Panarin A. A., Reznichenko A. V., Terekhov I. S. Next-to-leading-order corrections to capacity for a nondispersive nonlinear optical fiber channel in the intermediate power region // *Phys. Rev. E* 2017. Vol. 95. P. 012127.
11. Reznichenko A. V., Chernykh A. I., Smirnov S. V., Terekhov I. S. The loglog growth of channel capacity for nondispersive nonlinear optical fiber

channel in intermediate power range. Extension of the model // Phys. Rev. E 2019. Vol. 99. P. 012133.

Приложение А

Методы вычисления функции $P[Y|X]$

А.1 Функция плотности условной вероятности

Наше рассмотрение основано на лекциях [126]. Пусть уравнение имеет вид:

$$\partial_z \psi_\omega(z) = i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \psi_\omega(z) + \gamma J[\psi] + \eta_\omega(z), \quad (\text{A.1})$$

где $J[\psi]$ – некоторый функционал. Напишем уравнение на действительную ϕ и мнимую χ части функции $\psi_\omega(z) = \phi_\omega(z) + i\chi_\omega(z)$:

$$\partial_z \phi_\omega(z) = -\frac{\beta_2}{2} \omega^2 \chi_\omega(z) + \gamma F[\psi] - \nu_\omega(z), \quad (\text{A.2})$$

$$\partial_z \chi_\omega(z) = \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \phi_\omega(z) + \gamma G[\psi] + \mu_\omega(z), \quad (\text{A.3})$$

где $\eta_\omega(z) = \mu_\omega(z) + i\nu_\omega(z)$ и $\gamma J[\psi] = F[\psi] + iG[\psi]$. Пусть $\eta_\omega(z)$ – некоторая известная функция, тогда плотность вероятности получить на выходе из канала связи сигнал $b(\omega)$ ($\psi_\omega(L) = b(\omega)$), если на входе в канал связи $\psi_\omega(0) = a(\omega)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} P_\eta[b(\omega)|a(\omega)] &= \Delta^{-2MN} \underbrace{\int \dots \int}_{2(N+1)M} d\phi_{N,j} d\chi_{N,j} \prod_{i=0}^{N-1} \prod_{j=1}^M d\phi_{i,j} d\chi_{i,j} \times \\ &\delta \left(\frac{\delta\phi_{i+1,j}}{\Delta} + \frac{\beta_2 \omega_j^2}{2} \chi_{i,j} + \gamma F_{i,j}[\psi] + \nu_{i,j} \right) \delta(\text{Re}\{b_j\} - \phi_{N,j}) \times \\ &\delta \left(\frac{\delta\chi_{i+1,j}}{\Delta} + \frac{\beta_2 \omega_j^2}{2} \phi_{i,j} + \gamma G_{i,j}[\psi] + \mu_{i,j} \right) \delta(\text{Im}\{b_j\} - \chi_{N,j}) \times \\ &\delta(\text{Re}\{a_j\} - \phi_{0,j}) \delta(\text{Im}\{a_j\} - \chi_{0,j}), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

где $\delta\phi_{i+1,j} = \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}$. Для того чтобы получить это выражение, мы использовали уравнения (A.2) в дискретном виде. Выражение для функции плотности условной вероятности в виде (A.4) означает, что уравнение (A.1) выполняется

в любой точке z и ω пространства. После интегрирования по всем промежуточным $\phi_{i,j}$ и $\chi_{i,j}$ мы получаем:

$$P_\eta[b(\omega)|a(\omega)] = \delta(\operatorname{Re}\{b(\omega) - K(a(\omega), \eta_\omega(z), \omega, L)\}) \times \delta(\operatorname{Im}\{b(\omega) - K(a(\omega), \eta_\omega(z), \omega, L)\}) , \quad (\text{A.5})$$

Здесь K – некоторый нелинейный функционал, который зависит от начальных данных и конкретной реализации шума. В случае $\gamma = 0$ мы получаем:

$$P_\eta[b(\omega)|a(\omega)] = \delta\left(\operatorname{Re}\left\{b(\omega) - e^{i\beta_2\omega^2 L/2} \left(a(\omega) + i \int_0^L e^{-i\beta_2\omega^2 z/2} \eta_\omega(z) dz\right)\right\}\right) \times \delta\left(\operatorname{Im}\left\{b(\omega) - e^{i\beta_2\omega^2 L/2} \left(a(\omega) + i \int_0^L e^{-i\beta_2\omega^2 z/2} \eta_\omega(z) dz\right)\right\}\right) . \quad (\text{A.6})$$

Для вычисления функции плотности условной вероятности $P[b(\omega)|a(\omega)]$ мы усредняем функцию $P_\eta[b(\omega)|a(\omega)]$ по реализациям гауссовского шума $\eta_\omega(z)$:

$$P[b(\omega)|a(\omega)] = \langle P_\eta[b(\omega)|a(\omega)] \rangle_\eta , \quad (\text{A.7})$$

где под усреднением мы понимаем вычисление интеграла по реализациям шума:

$$\langle (\dots) \rangle_\eta = \int \mathcal{D}\eta(\dots) \exp\left\{-\frac{1}{Q} \int_0^L \int \frac{d\omega}{2\pi} |\eta_\omega(z)|^2\right\} . \quad (\text{A.8})$$

Здесь мера имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}\eta = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{\Delta\delta}{\pi Q}\right)^{NM} \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N d\mu_{i,j} d\nu_{i,j} . \quad (\text{A.9})$$

Используя такую нормировку меры, мы получаем, что

$$\langle 1 \rangle_\eta = 1 , \quad \langle \eta_\omega(z) \rangle_\eta = 0 , \quad \langle \eta_\omega(z) \eta_{\omega'}^*(z') \rangle_\eta = 2\pi Q \delta(z - z') \delta(\omega - \omega') . \quad (\text{A.10})$$

Усреднение P_η в виде (A.4) по шуму η , используя (A.8), приводит к выражению для функции плотности условной вероятности, приведенной в уравнении (5.6).

Теперь мы можем показать, что функция $P[b(\omega)|a(\omega)]$ нормирована следующим образом:

$$\int \mathcal{D}b P[b(\omega)|a(\omega)] = 1, \quad \mathcal{D}b = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \prod_{j=1}^M d\text{Re}\{b_j\} d\text{Im}\{b_j\}. \quad (\text{A.11})$$

Для этого мы переставляем порядок интегрирования в выражении (A.11) по b и по шуму:

$$\int \mathcal{D}b P[b(\omega)|a(\omega)] = \int \mathcal{D}\eta \left(\int \mathcal{D}b P_\eta[b(\omega)|a(\omega)] \right) \times \exp \left\{ -\frac{1}{Q} \int_0^L \int \frac{d\omega}{2\pi} |\eta_\omega(z)|^2 \right\}. \quad (\text{A.12})$$

Затем мы подставляем $P_\eta[b(\omega)|a(\omega)]$ в уравнение (A.12) в виде (A.5), выполняем интегрирование по переменной b , после чего мы получаем выражение (A.11).

A.2 Теория возмущений по параметру γ

Используя стандартные методы квантовой теории поля, см. [2;4], мы раскладываем экспоненту в уравнении (5.3) в ряд по параметру γ при малом γ и получаем:

$$P[b(\omega)|a(\omega)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} P_{(\gamma)}^{(n)}[b(\omega)|a(\omega)], \quad (\text{A.13})$$

где

$$P^{(n)}[b(\omega)|a(\omega)] = \int_{\psi_\omega(0)=a(\omega)}^{\psi_\omega(L)=b(\omega)} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{S^{(0)}[\psi]}{Q} \right\} \left(\frac{\partial^n}{\partial \gamma^n} e^{-S_{\text{int}}[\psi]/Q} \right)_{\gamma=0}, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
S^{(0)}[\psi] &= \int_0^L dz \int \frac{d\omega}{2\pi} \left| \mathcal{L}^{(0)}[\psi] \right|^2, \\
S_{int}[\psi] &= \int_0^L dz \int \frac{d\omega}{2\pi} \left(2\text{Re} \left\{ \mathcal{L}^{(0)}[\psi] V^*[\psi] \right\} + |V[\psi]|^2 \right). \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

Для того, чтобы вычислить функцию плотности условной вероятности при нулевом параметре γ , мы полагаем $\gamma = 0$ в уравнении (5.6), после чего выполняем интегрирование по всем промежуточным $\psi_{N,j}$, $\psi_{N-1,j}$ и получаем:

$$P^{(0)}[b(\omega)|a(\omega)] = \prod_{j=1}^M \frac{\delta}{\pi QL} \exp \left\{ -\frac{\delta}{QL} \left| b_j - e^{i\beta_2 \omega_j^2 L/2} a_j \right|^2 \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Видно, что $P^{(0)}[b(\omega)|a(\omega)]$ имеет гауссовский вид.

Выражение в круглых скобках в выражении (A.14) имеет полиномиальный вид по функциям $\psi_\omega(z)$ и $\psi_\omega^*(z)$. Поэтому для вычислений $P^{(n)}$ при $n > 0$ мы должны уметь вычислять интегралы следующего вида:

$$\begin{aligned}
&I(\psi_{\omega_1}(z_1), \dots, \psi_{\omega_p}(z_p) | \psi_{\omega'_1}^*(z'_1), \dots, \psi_{\omega'_q}^*(z'_q)) = \\
&\int_{\psi_\omega(0)=a(\omega)}^{\psi_\omega(L)=b(\omega)} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{S^{(0)}[\psi]}{Q} \right\} \psi_{\omega_1}(z_1) \dots \psi_{\omega_p}(z_p) \psi_{\omega'_1}^*(z'_1) \dots \psi_{\omega'_q}^*(z'_q). \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

Вместо этого интеграла, рассмотрим интеграл с источниками $J_\omega(z)$:

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int_{\psi_\omega(0)=a(\omega)}^{\psi_\omega(L)=b(\omega)} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{S^{(0)}[\psi]}{Q} + \right. \\
&\left. i \int_0^L dz \int \frac{d\omega}{2\pi} (\text{Re}\{J_\omega(z)\} \text{Re}\{\psi_\omega(z)\} + \text{Im}\{J_\omega(z)\} \text{Im}\{\psi_\omega(z)\}) \right\}. \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

Используя дискретный вид интеграла по траекториям, мы вычисляем $Z[J]$ и получаем, что

$$Z[J] = P^{(0)}[b(\omega)|a(\omega)] \exp \left(i \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^L dz \operatorname{Re}\{\lambda_\omega(z) J_\omega^*(z)\} \right) \times \\ \exp \left(-\frac{Q}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^L dz \int_0^z dx \frac{x(L-z)}{L} \operatorname{Re} \left\{ J_\omega^*(z) J_\omega(x) e^{i\beta_2 \omega^2 (z-x)/2} \right\} \right), \quad (\text{A.19})$$

где

$$\lambda_\omega(z) = e^{i\beta_2 \omega^2 z/2} \left(\frac{z}{L} B(\omega) + a(\omega) \right), \quad B(\omega) = b(\omega) e^{-i\beta_2 \omega^2 L/2} - a(\omega). \quad (\text{A.20})$$

Интеграл I выражается через $Z[J]$ следующим образом:

$$I(\psi_{\omega_1}(z_1), \dots, \psi_{\omega_p}(z_p) | \psi_{\omega'_1}^*(z'_1), \dots, \psi_{\omega'_q}^*(z'_q)) = \\ (-4i\pi)^{p+q} \left(\frac{\delta}{\delta J_{\omega_1}^*(z_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{\omega'_q}^*(z'_q)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\delta J_{\omega_2}(z_2)}{\delta J_{\omega_1}(z_1)} = \delta(\omega_2 - \omega_1) \delta(z_2 - z_1). \quad (\text{A.22})$$

Используя эти выражения, мы можем вычислить $P^{(n)}[b(\omega)|a(\omega)]$ для любого n . Для демонстрации этого мы вычислили $P^{(1)}[b(\omega)|a(\omega)]$ см. (5.10).

Приложение Б

Бездисперсионный канал связи.

Б.1 Решение Ψ_{cl} и действие $S[\Psi_{cl}]$

В Главе 5.1 мы показали, что в случае $\text{SNR} = P/(QL) \gg 1$ функция плотности условной вероятности может быть записана в виде:

$$P[Y|X] = \exp \left\{ -\frac{S[\Psi_{cl}(z)]}{Q} \right\} \times \int_{\psi(0)=0}^{\psi(L)=0} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{S[\Psi_{cl}(z) + \psi(z)] - S[\Psi_{cl}(z)]}{Q} \right\}, \quad (\text{Б.1})$$

где для одноканальной модели действие имеет вид:

$$S[\psi] = \int_0^L dz \left| \partial_z \psi - i\gamma |\psi|^2 \psi \right|^2, \quad (\text{Б.2})$$

а мера $\mathcal{D}\psi$ определена следующим образом:

$$\mathcal{D}\psi = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta \pi Q} \right)^N \prod_{i=1}^{N-1} d\text{Re}\psi_i d\text{Im}\psi_i. \quad (\text{Б.3})$$

Здесь $\psi_i = \psi(z_i)$, а $\Delta = \frac{L}{N}$ – шаг дискретизации континуального интеграла.

Разница действий в экспоненте интеграла по траекториям см. (Б.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} S[\Psi_{cl}(z) + \psi(z)] - S[\Psi_{cl}(z)] = \int_0^L dz \left\{ \left| \partial_z \psi - i\gamma (2\psi |\Psi_{cl}|^2 + \psi^* \Psi_{cl}^2) \right|^2 + \right. \\ \left. 2\gamma \text{Im} \left[(\partial_z \Psi_{cl}^* + i\gamma \Psi_{cl}^* |\Psi_{cl}|^2) (2\Psi_{cl} |\psi|^2 + \Psi_{cl}^* \psi^2) + \right. \right. \\ \left. \left. (\partial_z \psi^* + i\gamma (2\psi^* |\Psi_{cl}|^2 + \psi (\Psi_{cl}^*)^2)) (2\Psi_{cl} |\psi|^2 + \Psi_{cl}^* \psi^2 + \psi |\psi|^2) + \right. \right. \\ \left. \left. (\partial_z \Psi_{cl}^* + i\gamma \Psi_{cl}^* |\Psi_{cl}|^2) \psi |\psi|^2 \right] + \gamma^2 |2\Psi_{cl} |\psi|^2 + \Psi_{cl}^* \psi^2 + \psi |\psi|^2|^2 \right\}. \quad (\text{Б.4}) \end{aligned}$$

В уравнении (Б.1) функция $\Psi_{cl}(z)$ является решением уравнения $\delta S[\Psi_{cl}] = 0$, которое принимает вид:

$$\frac{d^2\Psi_{cl}}{dz^2} - 4i\gamma |\Psi_{cl}|^2 \frac{d\Psi_{cl}}{dz} - 3\gamma^2 |\Psi_{cl}|^4 \Psi_{cl} = 0, \quad (\text{Б.5})$$

а граничные условия имеют вид: $\Psi_{cl}(0) = X = |X|e^{i\phi^{(X)}}$, $\Psi_{cl}(L) = Y = |Y|e^{i\phi^{(Y)}}$. Если представить функцию $\Psi_{cl}(z)$ в виде модуля и фазы $\Psi_{cl}(z) = \rho(\zeta)e^{i\theta(\zeta)}$, где $\zeta = z/L$, то решение может быть легко найдено. Решение зависит от четырех констант, которые мы обозначим следующим образом: E , $\tilde{\mu}$, ζ_0 и θ_0 . Существуют два различных типа решений: один – реализуется при $E = \frac{k^2}{2} \geq 0$ и мы называем его тригонометрическим режимом, второй – реализуется при $E = -\frac{k^2}{2} \leq 0$ и мы называем его гиперболическим. Для обоих режимов мы вводим положительный параметр $k = \sqrt{2|E|}$. В тригонометрическом режиме ($E = \frac{k^2}{2} \geq 0$) для случая $\tilde{\mu} \geq k \geq 0$ мы получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} \rho^2(\zeta) &= \frac{1}{2L\gamma} \left(\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2} \cos[2k(\zeta - \zeta_0)] \right), \\ \theta(\zeta) &= \frac{\tilde{\mu}}{2}(\zeta - \zeta_0) + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2} \frac{\sin[2k(\zeta - \zeta_0)]}{4k} + \\ &\arctan \left[(\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2}) \frac{\tan[k(\zeta - \zeta_0)]}{k} \right] + \theta_0, \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

где константы интегрирования $\tilde{\mu}$, k и ζ_0 должны быть найдены из граничных условий:

$$|X|^2 = \rho^2(0) = \frac{1}{2L\gamma} \left(\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2} \cos[2k\zeta_0] \right), \quad (\text{Б.7})$$

$$|Y|^2 = \rho^2(1) = \frac{1}{2L\gamma} \left(\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2} \cos[2k(1 - \zeta_0)] \right), \quad (\text{Б.8})$$

$$\begin{aligned} \phi^{(X)} = \theta(0) &= -\frac{\tilde{\mu}}{2}\zeta_0 - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2} \frac{\sin[2k\zeta_0]}{4k} - \\ &\arctan \left[(\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2}) \frac{\tan[k\zeta_0]}{k} \right] + \theta_0, \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

$$\begin{aligned} \phi^{(Y)} = \theta(1) &= \frac{\tilde{\mu}}{2}(1 - \zeta_0) + \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2} \frac{\sin[2k(1 - \zeta_0)]}{4k} + \\ &\arctan \left[(\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2}) \frac{\tan[k(1 - \zeta_0)]}{k} \right] + \theta_0. \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

Используя это решение, мы находим действие:

$$S[\Psi_{cl}(z; E = \frac{k^2}{2}, \tilde{\mu}, \zeta_0, \theta_0)] = \frac{k^2}{2\gamma L} \left(\tilde{\mu} - \sqrt{\tilde{\mu}^2 - k^2} \frac{\sin[2k(1 - \zeta_0)] + \sin[2k\zeta_0]}{2k} \right). \quad (\text{Б.11})$$

В гиперболическом режиме ($E = -\frac{k^2}{2} \leq 0$) в случае $k \geq 0$ и произвольного $\tilde{\mu}$, мы получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} \rho^2(\zeta) &= \frac{1}{2L\gamma} \left(-\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 + k^2} \cosh[2k(\zeta - \zeta_0)] \right), \\ \theta(\zeta) &= -\frac{\tilde{\mu}}{2}(\zeta - \zeta_0) + \sqrt{\tilde{\mu}^2 + k^2} \frac{\sinh[2k(\zeta - \zeta_0)]}{4k} - \\ &\arctan \left[(\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 + k^2}) \frac{\tanh[k(\zeta - \zeta_0)]}{k} \right] + \theta_0, \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

где константы интегрирования также находятся из граничных условий. Действие имеет вид:

$$\begin{aligned} S[\Psi_{cl}(z; E = -\frac{k^2}{2}, \tilde{\mu}, \zeta_0, \theta_0)] &= \\ \frac{k^2}{2\gamma L} \left(\tilde{\mu} + \sqrt{\tilde{\mu}^2 + k^2} \frac{\sinh[2k(1 - \zeta_0)] + \sinh[2k\zeta_0]}{2k} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

Отметим, что существует два решения уравнения (Б.5), модуль которых не меняется при изменении параметра z , то есть $\rho(z) = \rho(0) \equiv \rho$. Первое решение имеет вид:

$$\Psi_0(z) = \rho \exp \left\{ i\mu \frac{z}{L} + i\phi^{(X)} \right\}, \quad (\text{Б.14})$$

где $\mu = \gamma L \rho^2 = \gamma L |X|^2$. Данное решение соответствует решению (Б.6) с $k = 0$ и $\tilde{\mu} = -\mu$ или решению (Б.12) с $k = 0$ и $\tilde{\mu} = -\mu$. Функция $\Psi_0(z)$ удовлетворяет начальным условиям и является решением уравнения (5.30) с нулевым шумом. Более того, на функции $\Psi_0(z)$ действие имеет минимум $S[\Psi_0(z)] = 0$. Второе решение уравнения (Б.5) с постоянным модулем соответствует случаю (Б.6) с $\tilde{\mu} = k = 2\mu$:

$$\Psi_\rho(z) = \rho \exp \left\{ 3i\mu \frac{z}{L} + i\phi^{(X)} \right\}, \quad \mu = \gamma L \rho^2 = \gamma L |X|^2. \quad (\text{Б.15})$$

Для того чтобы найти решение уравнения (Б.5), мы должны выразить константы интегрирования из граничных условий. Вместо этого мы используем

то, что мощность шума QL много меньше, чем мощность входящего сигнала $P = |X|^2 \equiv \rho^2$. Другими словами, мы ищем решение уравнения (Б.5), которое близко к $\Psi_0(z)$. Поэтому мы подставляем решение $\Psi_{cl}(z)$ в виде

$$\Psi_{cl}(z) = (\rho + \varkappa(z)) \exp \left\{ i\mu \frac{z}{L} + i\phi^{(X)} \right\} \quad (\text{Б.16})$$

в уравнение (Б.5). Здесь функция $\varkappa(z)$ предполагается малой ($\varkappa(z) \ll \rho$). Для таких конфигураций $\varkappa(z)$ получаем, что $S[\Psi_{cl}(z)]/Q = \mathcal{O}(1)$ при малых QL . Подставляя представление (Б.16) в (Б.5), мы получаем следующее уравнение на функцию $\varkappa(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varkappa}{dz^2} - 2i \frac{\mu}{L} \frac{d\varkappa}{dz} - 4 \frac{\mu^2}{L^2} \text{Re}[\varkappa] &= \frac{\mu^2}{L^2 \rho} [5\varkappa^2 + 10|\varkappa|^2 + 3(\varkappa^*)^2] + \\ 4i \frac{\mu}{L \rho} (\varkappa + \varkappa^*) \frac{d\varkappa}{dz} + \frac{|\varkappa|^2 \mu}{L^2 \rho^2} \left[4iL \frac{d\varkappa}{dz} + 9\mu\varkappa^2 + 14\mu\varkappa \right] &+ \frac{3\mu^2}{L^2 \rho^2} \varkappa^3 + \\ \frac{3\mu^2}{L^2 \rho^3} |\varkappa|^2 [3|\varkappa|^2 + 2\varkappa^2] + \frac{3\mu^2}{L^2 \rho^4} |\varkappa|^4 \varkappa. & \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

Мы представляем функцию $\varkappa(z)$ в виде ряда по параметру $1/\sqrt{\text{SNR}}$: $\varkappa(z) = \varkappa_1(z) + \varkappa_2(z) + \dots$, где $\varkappa_i(z)$ имеет порядок $(1/\sqrt{\text{SNR}})^i$. Найдем два первых порядка $\varkappa_1(z)$, $\varkappa_2(z)$ и вычислим соответствующие вклады в действие.

Начнем с первого порядка. Представим функцию $\varkappa_1(z)$ в виде $\varkappa_1(z) = x_1(z) + iy_1(z)$. Оставляя только лидирующий порядок в уравнении (Б.17), мы получаем уравнение:

$$\frac{d^2 \varkappa_1}{dz^2} - 2i \frac{\mu}{L} \frac{d\varkappa_1}{dz} - 4 \frac{\mu^2}{L^2} \text{Re}[\varkappa_1] = 0. \quad (\text{Б.18})$$

Из граничных условий $\Psi_{cl}(0) = X$ и $\Psi_{cl}(1) = Y \equiv \rho' e^{i\phi^{(Y)}}$ следуют граничные условия на функцию $\varkappa(z)$:

$$\begin{aligned} \varkappa_1(0) &= 0, \\ \varkappa_1(L) &= x_0 + iy_0 = \rho' e^{i(\phi^{(Y)} - \phi^{(X)} - \mu)} - \rho, \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

где $x_0 = \rho' \cos(\phi^{(Y)} - \phi^{(X)} - \mu) - \rho$, $y_0 = \rho' \sin(\phi^{(Y)} - \phi^{(X)} - \mu)$. Решение уравнения (Б.18), удовлетворяющее граничным условиям (Б.19), имеет вид полино-

ма

$$\begin{aligned} x_1(z) &= \left(-\mu a_1(X,Y) \frac{z}{L} + a_2(X,Y) \right) \frac{z}{L}, \\ y_1(z) &= \left(-\frac{2}{3} \mu^2 a_1(X,Y) \frac{z^2}{L^2} + \mu a_2(X,Y) \frac{z}{L} + a_1(X,Y) \right) \frac{z}{L}, \end{aligned} \quad (\text{Б.20})$$

где коэффициенты $a_1(X,Y)$ и $a_2(X,Y)$ имеют вид

$$a_1(X,Y) = \frac{-\mu x_0 + y_0}{1 + \mu^2/3}, \quad a_2(X,Y) = \frac{(1 - 2\mu^2/3)x_0 + \mu y_0}{1 + \mu^2/3}. \quad (\text{Б.21})$$

Подставляя решение (Б.20) в действие, мы получаем следующий ответ в лидирующем приближении по параметру $1/\sqrt{\text{SNR}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} S \left[\Psi_0(z) + \varkappa_1(z) e^{i\mu \frac{z}{L} + i\phi(x)} \right] &= \frac{1}{Q} \int_0^L dz \left[\left| \partial_z \varkappa_1 - 2i \frac{\mu}{L} \text{Re}[\varkappa_1] \right|^2 \right] = \\ &= \frac{(1 + 4\mu^2/3)a_1^2 - 2\mu a_1 a_2 + a_2^2}{QL} = \frac{(1 + 4\mu^2/3)x_0^2 - 2\mu x_0 y_0 + y_0^2}{QL(1 + \mu^2/3)}. \end{aligned} \quad (\text{Б.22})$$

Для нахождения следующих по параметру $1/\sqrt{\text{SNR}}$ поправок к $P[Y|X]$ мы должны вычислить функцию $\varkappa_2(z)$. Уравнение на эту функцию имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varkappa_2}{dz^2} - 2i \frac{\mu}{L} \frac{d\varkappa_2}{dz} - 4 \frac{\mu^2}{L^2} \text{Re}[\varkappa_2] &= \\ 4i \frac{\mu}{L\rho} (\varkappa_1 + \varkappa_1^*) \frac{d\varkappa_1}{dz} + \frac{\mu^2}{L^2 \rho} [5\varkappa_1^2 + 10|\varkappa_1|^2 + 3(\varkappa_1^*)^2], \end{aligned} \quad (\text{Б.23})$$

Поскольку граничные условия удовлетворены с помощью функции $\varkappa_1(z)$, граничные условия на функцию $\varkappa_2(z)$ имеют простой вид: $\varkappa_2(0) = \varkappa_2(L) = 0$.

Решение $\varkappa_2(z) = x_2(z) + iy_2(z)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
x_2(z) = & -\frac{\mu/\rho}{270(1+\mu^2/3)^3} \left(1 - \frac{z}{L}\right) \frac{z}{L} \times \\
& \left\{ \mu (2\mu^4 - 15\mu^2 + 585) x_0^2 + 2 (13\mu^2 (\mu^2 + 15) - 180) x_0 y_0 + \right. \\
& \mu (2\mu^2 + 15) (5\mu^2 - 9) y_0^2 - \\
& 5 (\mu^2 + 3) \frac{z}{L} (\mu (\mu^2 - 15) x_0^2 - 4 (\mu^2 - 6) x_0 y_0 + \mu (\mu^2 + 9) y_0^2) + \quad (\text{B.24}) \\
& 5\mu (\mu^2 + 3) \frac{z^2}{L^2} (3 (5\mu^2 - 3) x_0^2 - 36\mu x_0 y_0 - (\mu^2 - 15) y_0^2) + \\
& 20\mu^2 (\mu^2 + 3) \frac{z^3}{L^3} (y_0 - \mu x_0) (2\mu y_0 - (\mu^2 - 3) x_0) - \\
& \left. 20\mu^3 (\mu^2 + 3) \frac{z^4}{L^4} (y_0 - \mu x_0)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(z) = & -\frac{\mu/\rho}{270(1+\mu^2/3)^3} \left(1 - \frac{z}{L}\right) \frac{z}{L} \times \\
& \left\{ (7\mu^4 - 75\mu^2 + 360) x_0^2 + 6\mu (\mu^2 + 75) x_0 y_0 + 3\mu^2 (5\mu^2 + 39) y_0^2 + \right. \\
& 2\frac{z}{L} ((\mu^6 - 4\mu^4 + 255\mu^2 + 180) x_0^2 + \mu (\mu^2 + 15) (13\mu^2 + 3) x_0 y_0 + \\
& \mu^2 (5\mu^4 + 36\mu^2 - 9) y_0^2) - \\
& 14\mu (\mu^2 + 3) \frac{z^2}{L^2} (y_0 - \mu x_0) ((15 - 4\mu^2) x_0 + 9\mu y_0) + \\
& \left. 84\mu^2 (\mu^2 + 3) \frac{z^3}{L^3} (y_0 - \mu x_0)^2 \right\}. \quad (\text{B.25})
\end{aligned}$$

Подставляя решения $\varkappa_1(z)$ и $\varkappa_2(z)$ в действие и вычисляя действие в лидирующем и следующем за лидирующем порядке по параметру $1/\sqrt{\text{SNR}}$, мы получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q} S[\Psi_{cl}(z)] = & \frac{(1 + 4\mu^2/3)x_0^2 - 2\mu x_0 y_0 + y_0^2}{QL(1 + \mu^2/3)} + \frac{\mu/\rho}{135QL(1 + \mu^2/3)^3} \times \\
& \left\{ \mu (4\mu^4 + 15\mu^2 + 225) x_0^3 + (23\mu^4 + 255\mu^2 - 90) x_0^2 y_0 + \right. \\
& \left. \mu (20\mu^4 + 117\mu^2 - 45) x_0 y_0^2 - 3 (5\mu^4 + 33\mu^2 + 30) y_0^3 \right\}. \quad (\text{B.26})
\end{aligned}$$

Б.2 Вычисление континуального интеграла

Перейдем к вычислению континуального интеграла

$$I_{QC}[\Psi_{cl}(z)] = \int_{\tilde{\psi}(0)=0}^{\psi(L)=0} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{S[\Psi_{cl}(z) + \psi(z)] - S[\Psi_{cl}(z)]}{Q} \right\} \quad (\text{Б.27})$$

в лидирующем и следующем за лидирующим порядке по параметру $1/\sqrt{\text{SNR}}$. Для этого нам необходимо оставить только квадратичные по функции ψ слагаемые в (Б.4). Ниже мы покажем, что слагаемые более высокого порядка по функции ψ приводят к возникновению дополнительного подавления по степеням параметра \sqrt{QL} . Кроме того, нам необходимо удерживать только первую поправку в функции $\varkappa(z)$. Для последующих вычислений удобно перейти от функции $\psi(z)$ к функции $u(z)$, которая определяется как $\psi(z) = u(z) \exp \{i\mu \frac{z}{L} + i\phi^{(X)}\}$. Подставляя функцию $\psi(z)$ в действие и удерживая только необходимые порядки по u и \varkappa , мы получаем:

$$\begin{aligned} S[\Psi_{cl}(z) + \psi(z)] - S[\Psi_{cl}(z)] &= \int_0^L dz \left\{ \left| \partial_z u - i\frac{\mu}{L}(u + u^*) \right|^2 + \right. \\ &2\frac{\mu}{L\rho} \text{Im} \left[2 \left(\partial_z u^* + i\frac{\mu}{L}(u + u^*) \right) \left(u(\varkappa_1 + \varkappa_1^*) + u^* \varkappa_1 \right) + \right. \\ &\left. \left. \left(\partial_z \varkappa_1^* + i\frac{\mu}{L}(\varkappa_1 + \varkappa_1^*) \right) \left(2|u|^2 + u^2 \right) \right] + \right. \\ &\left. \mathcal{O} \left(\frac{\gamma}{L} u^2 \varkappa_1^2 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\gamma}{L} \rho u^2 \varkappa_2 \right) + \mathcal{O} \left(\gamma^2 \rho^2 u^4 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.28})$$

При малых Q главный вклад в континуальный интеграл набирается в области $u \sim \sqrt{QL}$, поэтому мы подразумеваем, что более высокие степени функций u или \varkappa дают подавленный по параметру Q вклад. Подставляя (Б.28) в (Б.27),

получаем, что

$$I_{QC}[\Psi_0(z)] = \int_{u(0)=0}^{u(L)=0} \mathcal{D}u \exp \left\{ -\frac{1}{Q} \int_0^L dz \left| \partial_z u - i\frac{\mu}{L}(u + u^*) \right|^2 \right\} \left[1 - \frac{2\mu}{QL\rho} \operatorname{Im} \int_0^L dz \left[2 \left(\partial_z u^* + i\frac{\mu}{L}(u + u^*) \right) \left(u(\varkappa_1 + \varkappa_1^*) + u^* \varkappa_1 \right) + \left(\partial_z \varkappa_1^* + i\frac{\mu}{L}(\varkappa_1 + \varkappa_1^*) \right) \left(2|u|^2 + u^2 \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{QL}{\rho^2} \right) + \mathcal{O}(\gamma^2 QL^3 \rho^2) \right]. \quad (\text{Б.29})$$

Единица в квадратных скобках отвечает главному вкладу по параметру $1/\text{SNR}$, второе слагаемое в квадратных скобках отвечает первой поправке.

Приступим к вычислению лидирующего вклада

$$I_{QC}^{(0)}[\Psi_0(z)] = \int_{u(0)=0}^{u(L)=0} \mathcal{D}u \exp \left\{ -\frac{1}{Q} \int_0^L dz \left| \partial_z u - i\frac{\mu}{L}(u + u^*) \right|^2 \right\}.$$

Для этого представим интеграл в дискретном виде, причем при дискретизации мы учитываем запаздывание:

$$I_{QC}^{(0)}[\Psi_0(z)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{\pi QL} \right)^N \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N-1} du_i^{(1)} du_i^{(2)} \times \exp \left\{ -\frac{N}{QL} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ (u_{i+1}^{(1)} - u_i^{(1)})^2 + (u_{i+1}^{(2)} - u_i^{(2)} - 2\frac{\mu}{N} u_i^{(1)})^2 \right\} \right\}, \quad (\text{Б.30})$$

где мера взята из (Б.3) и введены следующие обозначения: $u(z_j) = u_j^{(1)} + iu_j^{(2)}$, $z_i = \Delta i$, $\Delta = L/N$. Так же учтено, что $u_0^{(1)} = u_{N+1}^{(1)} = u_0^{(2)} = u_{N+1}^{(2)} = 0$. Интегрирования по промежуточным $u_{N-1}^{(2)}$, $u_{N-2}^{(2)}$, \dots , $u_1^{(2)}$ тривиальны, поскольку

$$\int dY e^{-(A-Y)^2/(2\tau_1)} e^{-(Y-B)^2/(2\tau_2)} = \sqrt{2\pi \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}} e^{-\frac{(A-B)^2}{2(\tau_1 + \tau_2)}}. \quad (\text{Б.31})$$

Выполняя эти интегрирования, мы получаем интеграл по переменным $u_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, N-1$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{\pi QL} \right)^N \frac{(\pi QL/N)^{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N-1} du_i^{(1)} e^{-\frac{N}{QL} \sum_{i,j=1}^{N-1} u_i^{(1)} M_{i,j}(\alpha) u_j^{(1)}}, \quad (\text{Б.32})$$

где мы обозначили через $\alpha = \frac{4}{N} \left(\frac{\mu}{N} \right)^2$, а $(N-1) \times (N-1)$ матрица $M(\alpha)$ имеет следующие элементы: $M_{i,i} = 2 + \alpha$, $M_{i,i\pm 1} = -1 + \alpha$, $i = 1, \dots, N-1$, $M_{i,j} = \alpha$, $j \neq i, j \neq i \pm 1$. Легко вычислить определитель матрицы $M(\alpha)$ и, следовательно, гауссовский интеграл по переменным $u_i^{(1)}$ в выражении (Б.32):

$$\det[M(\alpha)] = N + \alpha \frac{N^2(N^2 - 1)}{12}, \quad (\text{Б.33})$$

$$I_{QC}^{(0)}[\Psi_0(z)] = \frac{1}{\pi QL \sqrt{1 + \mu^2/3}}. \quad (\text{Б.34})$$

Для вычисления вклада следующего порядка в континуальный интеграл (Б.29) мы должны уметь вычислять интегралы типа

$$\begin{aligned} \langle u^{(\alpha)}(z) u^{(\beta)}(z') \rangle &\equiv \frac{1}{I_{QC}^{(0)}[\Psi_0(z)]} \int_{u(0)=0}^{u(L)=0} \mathcal{D}u e^{-\frac{1}{Q} \int_0^L dz \left| \partial_z u - i \frac{\mu}{L} (u + u^*) \right|^2} u^{(\alpha)}(z) u^{(\beta)}(z') = \\ &QL G^{\alpha, \beta}(z, z'), \end{aligned} \quad (\text{Б.35})$$

то есть корреляторы. В выражении (Б.35) мы ввели функцию Грина $G^{\alpha, \beta}(z, z')$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Для вычисления корреляторов мы используем стандартный метод [4]. Рассмотрим интеграл с источниками

$$\begin{aligned} Z[J_1, J_2] &= \int_{u(0)=0}^{u(L)=0} \mathcal{D}u \exp \left\{ -\frac{1}{Q} \int_0^L dz \left| \partial_z u - i \frac{\mu}{L} (u + u^*) \right|^2 + \right. \\ &\left. \int_0^L dz \left(J_1(z) u^{(1)}(z) + J_2(z) u^{(2)}(z) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Б.36})$$

тогда любой коррелятор может быть получен дифференцированием $Z[J_1, J_2]$ по J_α , например,

$$\langle u^{(\alpha)}(z) u^{(\beta)}(z') \rangle = \frac{1}{Z[J_1, J_2]} \frac{\delta Z[J_1, J_2]}{\delta J_\alpha(z) \delta J_\beta(z')} \Big|_{J_1=0, J_2=0}. \quad (\text{Б.37})$$

Вычисление интеграла $Z[J_1, J_2]$ по J_α аналогично вычислению (Б.30): вначале выполняем интегрирование по переменным $u_j^{(2)}$, затем интегрируем по $u_j^{(1)}$.

Единственное отличие заключается в необходимости вычислить обратную матрицу $M(\alpha)_{i,j}^{-1}$ для матрицы $M(\alpha)_{i,j} = \alpha + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j}$, определенной выше. Результат имеет вид:

$$M(\alpha)_{i,j}^{-1} = N \left[\frac{i}{N} \left(1 - \frac{j}{N} \right) \theta(i \leq j) + \frac{j}{N} \left(1 - \frac{i}{N} \right) \theta(i > j) - \frac{\alpha N^4}{4 \det[M(\alpha)]} \frac{i}{N} \left(1 - \frac{i}{N} \right) \frac{j}{N} \left(1 - \frac{j}{N} \right) \right], \quad (\text{Б.38})$$

где $\det[M(\alpha)]$ приведен в (Б.33), а предел $\lim_{N \rightarrow \infty} (\alpha N^4 / (4 \det[M(\alpha)])) = 3\mu^2 / (3 + \mu^2)$. Используя эти результаты, мы получаем выражение для $Z[J_1, J_2]$:

$$Z[J_1, J_2] = \frac{1}{\pi Q L \sqrt{1 + \mu^2/3}} e^{\frac{QL}{2} \int_0^L dz \int_0^L dz' J_\alpha(z) G^{\alpha, \beta}(z, z') J_\beta(z')}, \quad (\text{Б.39})$$

где функция Грина имеет вид:

$$G^{1,1}(z, z') = \left\{ \theta(z' - z) \frac{z}{2L} \left(1 - \frac{z'}{L} \right) - \frac{3\mu^2}{4(3 + \mu^2)} \left(1 - \frac{z}{L} \right) \left(1 - \frac{z'}{L} \right) \frac{zz'}{L^2} \right\} + \{z \leftrightarrow z'\}, \quad (\text{Б.40})$$

$$G^{2,1}(z', z) = \frac{\mu}{2(3 + \mu^2)} \left\{ \theta(z - z') \frac{z'}{L} \left(1 - \frac{z}{L} \right) \times \left(3 \frac{z'}{L} - 3 \frac{z}{L} + \frac{z'}{L} \mu^2 \left[1 + \frac{z}{L} \left(2 \frac{z'}{L} - 3 \right) \right] \right) + \theta(z' - z) \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z'}{L} \right) \times \left(3 \frac{z'}{L} - 3 \frac{z}{L} + \left(\frac{z'}{L} - 1 \right) \mu^2 \left[\frac{z}{L} + 2 \frac{z'}{L} \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \right] \right) \right\}, \quad (\text{Б.41})$$

$$G^{2,2}(z, z') = \left\{ \frac{\theta(z - z')}{6(3 + \mu^2)} \left(1 - \frac{z}{L}\right) \frac{z'}{L} \times \right. \\ \left. \left[9 + 3\mu^2 \left(1 + \frac{z}{L} - 2\frac{z^2}{L^2} + 3\frac{zz'}{L^2} - 2\frac{z'^2}{L^2}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. 2\mu^4 \frac{z'}{L} \left(\frac{z}{L} - 1\right) \left(\frac{z'}{L} - 3\frac{z}{L} + 2\frac{zz'}{L^2}\right) \right] \right\} + \{z \leftrightarrow z'\}. \quad (\text{Б.42})$$

Отметим, что $G^{1,1}(z', z) = G^{1,1}(z, z')$, $G^{2,1}(z', z) = G^{1,2}(z, z')$, $G^{2,2}(z', z) = G^{2,2}(z, z')$.

Второй способ нахождения выражений для корреляторов (Б.35) и (Б.40)-(Б.42) связан с тем, что интеграл набирается в области перевальной точки, которая является решением уравнения Эйлера-Лагранжа для действия. Поэтому для нахождения функции Грина мы должны решить уравнение

$$\hat{K}_{\alpha, \gamma} G^{\gamma, \beta}(z, z') = \frac{1}{L} \delta_{\alpha}^{\beta} \delta(z - z'), \quad (\text{Б.43})$$

где дифференциальный оператор \hat{K} для функций удовлетворяющих граничным условиям $u(z = 0) = u(z = L) = 0$ определяется из уравнения

$$-\frac{1}{Q} \int_0^L dz \left| \partial_z u - i \frac{\mu}{L} (u + u^*) \right|^2 = -\frac{1}{2Q} \int_0^L dz u^{(\alpha)}(z) \hat{K}_{\alpha, \beta} u^{(\beta)}(z), \quad (\text{Б.44})$$

и имеет вид:

$$\hat{K} = 2 \begin{pmatrix} -\partial_z^2 + \frac{4\mu^2}{L^2}, & -2\frac{\mu}{L} \partial_z \\ 2\frac{\mu}{L} \partial_z, & -\partial_z^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.45})$$

Граничные условия для функции Грина, удовлетворяющей уравнению (Б.43), имеют вид $G^{\alpha, \beta}(z = 0, z') = G^{\alpha, \beta}(z = L, z') = 0$. Решение уравнения (Б.43) совпадает с решением (Б.40)-(Б.42).

Используя коррелятор (Б.35) и результат (Б.40)-(Б.42), мы можем вычислить первую поправку в выражении (Б.29). Это слагаемое пропорционально $\varkappa_1(z) \propto \sqrt{QL}$ и поэтому является поправкой порядка $1/\sqrt{\text{SNR}}$ к лидирующему вкладу (Б.34). При вычислении интегралов в поправке необходимо учитывать, что функция Грина имеет разрыв в точке $z = z'$. Поскольку мы проводили вычисление в запаздывающей схеме дискретизации, то про-

изводная функции Грина в точке разрыва определена следующим образом: $\partial_z G^{\alpha,\beta}(z, z')|_{z'=z} \rightarrow \partial_z G^{\alpha,\beta}(z + 0, z')|_{z'=z}$. В итоге, мы получаем:

$$I_{QC}[\Psi_0(z)] = \frac{1}{\pi QL \sqrt{1 + \mu^2/3}} \left[1 - \frac{\mu/\rho}{15(1 + \mu^2/3)^2} \times \right. \\ \left. (\mu(15 + \mu^2)x_0 - 2(5 - \mu^2/3)y_0) + \mathcal{O}(QL/\rho^2) + \mathcal{O}(\gamma^2 QL^3 \rho^2) \right]. \quad (\text{Б.46})$$

Здесь мы оценили точность вычисления по отброшенным слагаемым. Ошибка $\mathcal{O}(\gamma^2 QL^3 \rho^2)$ приводит к ограничению области применимости наших вычислений при больших мощностях.

В итоге, используя результаты (Б.26) и (Б.46), мы получаем, что

$$P[Y|X] = \frac{\exp \left\{ -\frac{(1 + 4\mu^2/3)x_0^2 - 2\mu x_0 y_0 + y_0^2}{QL(1 + \mu^2/3)} \right\}}{\pi QL \sqrt{1 + \mu^2/3}} \times \\ \left(1 - \frac{\mu/\rho}{15(1 + \mu^2/3)^2} (\mu(15 + \mu^2)x_0 - 2(5 - \mu^2/3)y_0) - \frac{\mu/\rho}{135QL(1 + \mu^2/3)^3} \times \right. \\ \left. \left\{ \mu(4\mu^4 + 15\mu^2 + 225)x_0^3 + (23\mu^4 + 255\mu^2 - 90)x_0^2 y_0 + \right. \right. \\ \left. \left. \mu(20\mu^4 + 117\mu^2 - 45)x_0 y_0^2 - 3(5\mu^4 + 33\mu^2 + 30)y_0^3 \right\} \right). \quad (\text{Б.47})$$

Используя это выражение, легко проверить, что

$$\int DY P[Y|X] = 1. \quad (\text{Б.48})$$

Б.3 Вычисление $P_{out}[Y]$

Рассмотрим интеграл $P_{out}[Y] = \int \mathcal{D}X P_X[X] P[Y|X]$, где в нашем случае $\mathcal{D}X = dx dy$, $x = \text{Re}\{X\}$, $y = \text{Im}\{X\}$, поэтому интеграл имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx dy P_X[x, y] P[Y|X]. \quad (\text{Б.49})$$

Напомним, мы предполагаем, что существенное изменение функции $P_X[x, y]$ происходит при изменении переменных x и y на величину порядка \sqrt{P} , а $P \gg QL$. Масштаб изменения переменных X и Y , на котором существенно меняется функция $P[Y|X]$, порядка \sqrt{QL} . Поэтому мы используем метод интеграла Лапласа. Можно заметить, что функция $P[Y|X]$ зависит от X через комбинацию $x_0 = \text{Re}\{X^*(Ye^{-i\mu} - X)/|X|\}$, $y_0 = \text{Im}\{X^*(Ye^{-i\mu} - X)/|X|\}$ и имеет максимум в точке $x_0 = y_0 = 0$. Перейдем от переменных интегрирования x и y к переменным η_1, η_2 , которые равны $\eta = \eta_1 + i\eta_2 = (Xe^{i\mu} - Y)e^{-i\phi^{(Y)}}$. Здесь $\phi^{(Y)}$ – фаза переменной Y . Обратное преобразование имеет вид: $X = (\eta + |Y|)e^{-i\gamma L|\eta + |Y||^2 + i\phi^{(Y)}}$. В новых переменных функция $P[Y|X]$ имеет максимум в точке $\eta_1 = \eta_2 = 0$, а интеграл (Б.49) имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 P_X[\text{Re}\{X\}, \text{Im}\{X\}] P[Y|X], \quad (\text{Б.50})$$

где мы использовали, что якобиан перехода равняется единице. Далее раскладываем функции $P_X[X]$ и $P[Y|X]$ вблизи точки $\eta = 0$:

$$P_X[\text{Re}\{X\}, \text{Im}\{X\}] \approx P_X[\text{Re}\{Ye^{-i\tilde{\mu}}\}, \text{Im}\{Ye^{-i\tilde{\mu}}\}], \quad (\text{Б.51})$$

$$P[Y|X] \approx \frac{1}{\pi QL \sqrt{1 + \tilde{\mu}^2/3}} \exp \left\{ -\frac{(1 + 4\tilde{\mu}^2/3)\eta_1^2 - 2\tilde{\mu}\eta_1\eta_2 + \eta_2^2}{QL(1 + \tilde{\mu}^2/3)} \right\}, \quad (\text{Б.52})$$

Для вычисления интеграла, приведем квадратичную форму в экспоненте выражения (Б.52)

$$(\eta_1, \eta_2) A (\eta_1, \eta_2)^T = \frac{(1 + 4\tilde{\mu}^2/3)\eta_1^2 - 2\tilde{\mu}\eta_1\eta_2 + \eta_2^2}{QL(1 + \tilde{\mu}^2/3)} \quad (\text{Б.53})$$

к каноническому виду. Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \frac{1}{QL(1 + \tilde{\mu}^2/3)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{4\tilde{\mu}^2}{3} & -\tilde{\mu} \\ -\tilde{\mu} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.54})$$

собственные значения матрицы A равны

$$\lambda_1 = \frac{1}{QL} \left(1 + \tilde{\mu} \frac{\tilde{\mu} + \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}^2}}{3 + \tilde{\mu}^2} \right), \quad (\text{Б.55})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{QL} \left(1 + \tilde{\mu} \frac{\tilde{\mu} - \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}^2}}{3 + \tilde{\mu}^2} \right). \quad (\text{Б.56})$$

Можно показать, что $\lambda_{1,2} > 0$. В случае, когда $\tilde{\mu} \gg 1$, собственные значения принимают вид:

$$\lambda_1 \approx \frac{4}{QL}, \quad \lambda_2 \approx \frac{3}{4QL\tilde{\mu}^2}. \quad (\text{Б.57})$$

Поскольку $\mu \approx \tilde{\mu}$, в интеграле Лапласа есть два параметра: один – QL , второй – $QL\tilde{\mu}^2$, поэтому условия, при котором применим метод интеграла Лапласа, имеют вид: $P \gg QL$, $P \gg QL\tilde{\mu}^2$. Эти условия приводят к условиям применимости метода интеграла Лапласа:

$$\text{SNR} \gg 1, \quad (\text{Б.58})$$

$$(\gamma^2 QL^3 P)^{-1} \gg 1. \quad (\text{Б.59})$$

Предполагая, что эти условия выполнены, мы вычисляем гауссовский интеграл (Б.50) и получаем следующий результат:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 P_X [\text{Re}\{X\}, \text{Im}\{X\}] P[Y|X] \approx P_X \left[Y e^{-i\gamma L |Y|^2} \right]. \quad (\text{Б.60})$$

Способ вычисления поправок по параметрам $1/\text{SNR}$ и $\gamma^2 QL^3 P$ очевиден.

Приложение В

Поправки к корреляторам

Ниже приведен результат для коррелятора (5.136), вычисленного с учетом поправок по параметру Q :

$$\begin{aligned}
\langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle) (\tilde{C}_n - \langle \tilde{C}_n \rangle) \rangle &= \delta_{m,n} \left(\langle (\tilde{C}_m - C_m) (\tilde{C}_m - C_m) \rangle - \right. \\
&\left. \left(\frac{QL^2\gamma}{\Delta} \right)^2 C_m^2 \left\{ -1 + \frac{n_4^2}{9} \gamma^2 L^2 |C_m|^4 + i \frac{2n_4}{3} \gamma L |C_m|^2 \right\} \right) = \\
&\delta_{m,n} \left(\frac{QL^2\gamma}{T_0} C_m^2 \left[-\frac{2n_6}{3} \gamma L |C_m|^2 - in_4 \right] + \right. \\
&\left. \left(\frac{QL^2\gamma}{T_0} \right)^2 \frac{T_0}{\Delta} C_m^2 \left[-\frac{9n_4}{2} + \frac{2n_8}{3} \gamma^2 L^2 |C_m|^4 + i \frac{58n_6}{15} \gamma L |C_m|^2 \right] \right). \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

Здесь мы используем соотношение

$$\begin{aligned}
\langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle) (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle) \rangle &= \\
\langle (\tilde{C}_m - C_m) (\tilde{C}_m - C_m) \rangle - \langle \tilde{C}_m - C_m \rangle^2, \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

Результат для коррелятора (5.137) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle) (\tilde{C}_n^* - \langle \tilde{C}_n^* \rangle) \rangle &= \delta_{m,n} \left(\langle (\tilde{C}_m - C_m) (\tilde{C}_m^* - C_m^*) \rangle - \right. \\
&\left. \left(\frac{QL^2\gamma}{\Delta} \right)^2 |C_m|^2 \left\{ 1 + \frac{n_4^2}{9} \gamma^2 L^2 |C_m|^4 \right\} \right) = \delta_{m,n} \left(\frac{QL}{T_0} \left[1 + \frac{2n_6}{3} \gamma^2 L^2 |C_m|^4 \right] + \right. \\
&\left. \left(\frac{QL^2\gamma}{T_0} \right)^2 \frac{T_0}{\Delta} |C_m|^2 \left[n_4 - \frac{2n_8}{9} \gamma^2 L^2 |C_m|^4 \right] \right). \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

Отметим, что результаты (B.1) и (B.3) содержат параметр дискретизации Δ .

Для того чтобы показать важность поправок по параметру Q , мы приводим сравнение численных и аналитических результатов для мнимой части

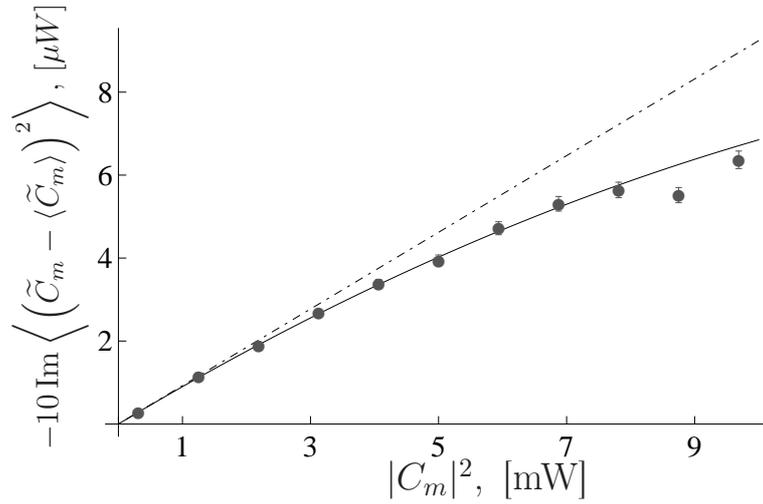


Рисунок В.1 — Зависимость величины $\text{Im} \langle (\tilde{C}_m - \langle \tilde{C}_m \rangle)^2 \rangle$ от $|C_m|^2$. Сплошная линия отвечает результату для коррелятора, вычисленного с учетом поправок (В.1). Пунктирная линия – без учета поправки.

коррелятора (5.136) без учета поправки и с учетом поправки (В.1). Численные результаты получены методом Рунге-Кутты для формы сигнала $f_2(t) = \sqrt{\frac{8}{3}} \cos^2(\pi t/T_0)$ и параметра шума $Q = 5.94 \times 10^{-21}$ Вт/(км×Гц). Результаты приведены на рис. В.1. Видно, что при малых значениях $|C_m|$ нет необходимости учитывать поправки, однако при $|C_m|^2 \sim 4$ мВт учет поправки необходим.

Список литературы

1. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. Москва “Наука”, 1987.
2. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля, Том 1. Москва “Наука”, 1984.
3. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля, Том 2. Москва “Наука”, 1984.
4. Zinn-Justin J. Quantum field theory and critical phenomena (3rd ed.). Oxford “University Press”, 1996.
5. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Москва “Физматгиз”, 1962.
6. Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 2. Москва “Наука”, 1967.
7. Kleinert H. Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polimer Physics and Financial Markets. Singapore “World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.”, 2009.
8. Wallace P. R. The Band Theory of Graphite // Physical Review. 1947. Vol. 71. P. 622.
9. J. Gonzalèz, F. Guinea, and M. A. H. Vozmediano, Nuclear Physics B. 1993. Vol. 406. P. 771-794.
10. J. Gonzalèz, F. Guinea, and M. A. H. Vozmediano, Nuclear Physics B. 1994. Vol. 424, 595-618.
11. Semenoff G. W. Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly // Physical Review Letters. 1984. Vol. 53. P. 2449.
12. Haldane F. D. M. Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the “Parity Anomaly” // Physical Review Letters. 1988. Vol. 61. P. 2015.

13. Ando Y. Topological Insulator Materials // Journal of the Physical Society of Japan. 2013. Vol. 82. P. 102001.
14. Hasan M. Z., Kane C. L. Colloquium: Topological insulators // Reviews of Modern Physics. 2010. Vol. 82. P. 3045.
15. Qi X.-L., Zhang S.-C. Topological insulators and superconductors // Reviews of Modern Physics. 2011. Vol. 83. P. 1057.
16. Novoselov K. S. [et al.] Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films // Science. 2004. Vol. 306. P. 666-669.
17. Novoselov K. S. [et al.] Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene // Nature. 2005. Vol. 438. P. 197-200.
18. Zhang Y. [et al.] Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene // Nature. 2005. Vol. 438. P. 201-204.
19. Novoselov K. S. [et al.] Unconventional quantum Hall effect and Berry's phase of 2π in bilayer graphene // Nature Physics. 2005. Vol. 2. P. 177-180.
20. Morozov S. V. [et al.] Strong Suppression of Weak Localization in Graphene // Physical Review Letters. 2006. Vol. 97. P. 016801.
21. Zhang Y. [et al.] Landau-Level Splitting in Graphene in High Magnetic Fields // Physical Review Letters. 2006. Vol. 96. P. 136806.
22. Chen J. H. [et al.] Charged-impurity scattering in graphene // Nature Physics. 2008. Vol. 4. P. 377-381.
23. Aharonov Y., Bohm D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory // Physical Review. 1959. Vol. 115. P. 485.
24. M. Peskin, A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
25. Hagen C. R. Aharonov-Bohm scattering of particles with spin // Physical Review Letters. 1990. Vol. 64. P. 503.
26. Khalilov V. R., Ho C.-L. Scattering of spin-polarized electron in an Aharonov-Bohm potential // Annals of Physics. 2008. Vol. 323. P. 1280-1293.

27. Khalilov V. R., Mansurov I. V., Eun L.-K. Spin-Polarized fermions in an Aharonov-Bohm field // *Modern Physics Letters A*. 2012. Vol. 27. P. 1250027.
28. Alford M. G., Wilczek F. Aharonov-Bohm interaction of cosmic strings with matter // *Physical Review Letters*. 1989. Vol. 62. P. 1071.
29. de Sousa Gerbert P., Jackiw R. Classical and quantum scattering on a spinning cone // *Communications in Mathematical Physics*. 1989. Vol. 124. P. 229-260.
30. Gerbert P. Fermions in an Aharonov-Bohm field and cosmic strings // *Physical Review D*. 1989. Vol. 40, 1346.
31. Deser S., Jackiw R., Templeton S. Topologically massive gauge theories // *Annals of Physics*. 1982. Vol. 140. P. 372-411.
32. Alford M. G., March-Russell J., Wilczek F. Enhanced baryon number violation due to cosmic strings // *Nuclear Physics B*. 1989. Vol. 328. P. 140-158.
33. Sitenko Yu. A. Nonlocality, Self-Adjointness and Theta-Vacuum in Quantum Field Theory in Spaces with Nontrivial Topology // *Ukrainian Journal of Physics*. 1998. Vol. 43. P. 1513 (1998).
34. Sitenko Yu. A. Induced vacuum condensates in the background of a singular magnetic vortex in (2+1)-dimensional space-time // *Physical Review D*. 1999. Vol. 60. P. 125017.
35. Yau J.-B., De Poortere E. P., Shayegan M. Aharonov-Bohm Oscillations with Spin: Evidence for Berry's Phase // *Physical Review Letters*. 2002. Vol.88. P. 14680.
36. Recher P. [et al.] Aharonov-Bohm effect and broken valley degeneracy in graphene rings // *Physical Review B*. 2007. Vol. 76. P. 235404.
37. Russo S. [et al.] Observation of Aharonov-Bohm conductance oscillations in a graphene ring // *Physical Review B*. 2008. Vol. 77. P. 085413.
38. Russo S. [et al.] Investigation of the Aharonov-Bohm effect in a gated graphene ring // *Physica Status Solidi B*. 2009. Vol. 246. P. 2756.

39. Wurm J., Wimmer M., Baranger H. U., Richter K. Graphene rings in magnetic fields: Aharonov–Bohm effect and valley splitting // *Semiconductor Science and Technology*. 2010. Vol. 25. No. 3. P. 034003.
40. Zarenia M. [et al.] Simplified model for the energy levels of quantum rings in single layer and bilayer graphene // *Physical Review B*. 2010. Vol. 81. P. 045431.
41. Schelter J., Bohr D., Trauzettel B. Interplay of the Aharonov-Bohm effect and Klein tunneling in graphene // *Physical Review B*. 2010. Vol. 81. P. 195441.
42. Schelter J., Bohr D., Trauzettel B. The Aharonov–Bohm effect in graphene rings // *Solid State Communications*. 2012. Vol. 152. P. 1411-1419.
43. Ando T. Screening Effect and Impurity Scattering in Monolayer Graphene // *Journal of the Physical Society of Japan*. 2006. Vol. 75. P. 074716.
44. Katsnelson M. I. Nonlinear screening of charge impurities in graphene // *Physical Review B*. 2006. Vol. 74. P. 201401(R).
45. Nomura K., MacDonald A. H. Quantum Transport of Massless Dirac Fermions // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98. P. 076602.
46. Hwang E. H., Adam S., Das Sarma S. Carrier Transport in Two-Dimensional Graphene Layers // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98. P. 186806.
47. Shytov A. V., Katsnelson M. I., Levitov L. S. Vacuum Polarization and Screening of Supercritical Impurities in Graphene // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 99. P. 236801.
48. Pereira V. M., Nilsson J., Castro Neto A. H. Coulomb Impurity Problem in Graphene // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 99. P. 166802.
49. Biswas R. R., Sachdev S., Son D. T. Coulomb impurity in graphene // *Physical Review B*. 2007. Vol. 76. P. 205122.
50. Fogler M. M., Novikov D. S., Shklovskii B. I. Screening of a hypercritical charge in graphene // *Physical Review B*. 2007. Vol. 76. P. 233402.

51. Pereira V. M., Kotov V. N., Casrto Neto A. H. Supercritical Coulomb impurities in gapped graphene // *Physical Review B*. 2008. Vol. 78. P. 085101.
52. Das Sarma S., Adam S., Hwang E. H., Rossi E. Electronic transport in two-dimensional graphene // *Reviews of Modern Physics*. 2011. Vol. 83. P. 407.
53. Kotov V. N., Uchoa B., Pereira V. M., Guinea F., Castro Neto A. H. Electron-Electron Interactions in Graphene: Current Status and Perspectives // *Reviews of Modern Physics*. 2012. Vol. 84, P. 1067.
54. Mishchenko E. G. Effect of Electron-Electron Interactions on the Conductivity of Clean Graphene // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98. P. 216801.
55. Das Sarma S., Hwang E. H., Tse W.-K. Many-body interaction effects in doped and undoped graphene: Fermi liquid versus non-Fermi liquid // *Physical Review B*. 2007. Vol. 75. P. 121406.
56. Roldán R., López-Sancho M. P., Guinea F. Effect of electron-electron interaction on the Fermi surface topology of doped graphene // *Physical Review B*. 2008. Vol. 77. P. 115410.
57. Hwang E. H., Das Sarma S. Quasiparticle spectral function in doped graphene: Electron-electron interaction effects in ARPES // *Physical Review B*. 2008. Vol. 77. P. 081412.
58. Polini M., Asgari R., Borghi G., Barlas Y., Pereg-Barnea T., MacDonald A. H. Plasmons and the spectral function of graphene // *Physical Review B*. 2008. Vol. 77. P. 081411.
59. Gamayun O. V., Gorbar E. V., Gusynin V. P. Gap generation and semimetal-insulator phase transition in graphene // *Physical Review B*. 2010. Vol. 81. P. 075429.
60. Sabio J., Sols F., Guinea F. Two-body problem in graphene // *Physical Review B*. 2010. Vol. 81. P. 045428.
61. Elias D. C. [et al.] Dirac cones reshaped by interaction effects in suspended graphene // *Nature Physics*. 2011. Vol. 7. P. 701–704.

62. Sachdev S., Keimer B. Quantum criticality // *Physics Today*. 2011. Vol. 64. P. 29.
63. Tanaka H. [et al.] Magnetic ordering under high pressure in the quantum spin system TlCuCl_3 // *Physica B: Condensed Matter*. 2003. Vol. 329-333. P. 697-698.
64. Oosawa A., Fujisawa M., Kakurai K., Tanaka H. Neutron scattering study of magnetic ordering and excitations in the doped spin-gap system $\text{TlCu}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Cl}_3$ // *Physical Review B*. 2003. Vol. 67. P. 184424.
65. Imamura H., Ono T., Goto K., Tanaka H. Crossover from impurity-induced ordered phase to uniform antiferromagnetic phase under hydrostatic pressure in the doped spin-gap system $\text{TlCu}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Cl}_3$ // *Physical Review B*. 2006. Vol. 74. P. 064423.
66. T. Suzuki, I. Watanabe, F. Yamada, Y. Ishii, K. Ohishi, Risdiana, T. Goto, H. Tanaka Evidence for continuous change of spin states between impurity-induced order and pressure-induced order in $\text{TlCu}_{0.985}\text{Mg}_{0.015}\text{Cl}_3$ probed via muon spin rotation // *Physical Review B*. 2009. Vol. 80. P. 064407.
67. Suzuki T., Yamada F., Ishii Y., Watanabe I., Goto T., Tanaka H., Kubo K. Change in magnetic ground states in nonmagnetic-impurity-doped spin-gap systems $\text{TlCu}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Cl}_3$ using muon spin relaxation // *Physical Review B*. 2011. Vol. 83. P. 174436.
68. Sandvik A. W., Dagotto E., Scalapino D. J. Nonmagnetic impurities in spin-gapped and gapless Heisenberg antiferromagnets // *Physical Review B*. 1997. Vol. 56. P. 11701.
69. M. Hase, I. Terasaki, Y. Sasago, K. Uchinokura, and H. Obara Effects of substitution of Zn for Cu in the spin-Peierls cuprate, CuGeO_3 : The suppression of the spin-Peierls transition and the occurrence of a new spin-glass state // *Physical Review Letters*. 1993. Vol. 71. P. 4059.
70. Bobroff J., Laflorencie N., Alexander L. K., Mahajan A. V., Koteswararao B., Mendels P. Impurity-Induced Magnetic Order in Low-Dimensional Spin-Gapped Materials // *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 103. P. 047201.

71. Vojta M., Buragohain C., Sachdev S. Quantum impurity dynamics in two-dimensional antiferromagnets and superconductors // Physical Review B. 2000. Vol. 61. P. 15152.
72. Höglund K. H., Sandvik A. W., Sachdev S. Impurity Induced Spin Texture in Quantum Critical 2D Antiferromagnets // Physical Review Letters. 2007. Vol. 98. P. 087203.
73. Yu R., Nohadani O., Haas S., Roscilde T. Magnetic Bose glass phases of coupled antiferromagnetic dimers with site dilution // Physical Review B. 2010. Vol. 82. P. 134437.
74. Saito Y., Koga A., Kawakami N. Hole-Doping Effects on a Two-Dimensional Kondo Insulator // Journal of the Physical Society of Japan. 2003. Vol. 72. P. 1208-1215.
75. Barzykin V., Affleck I. Screening cloud in the k -channel Kondo model: Perturbative and large- k results// Physical Review B. 1998. Vol. 57. P. 432.
76. Ingersent K., Si Q. Critical Local-Moment Fluctuations, Anomalous Exponents, and ω/T Scaling in the Kondo Problem with a Pseudogap// Physical Review Letters. 2002. Vol. 89. P. 076403.
77. Tomonaga S. I. Remarks on Bloch's Method of Sound Waves applied to Many-Fermion Problems // Progress of Theoretical Physics. 1950. Vol. 5. P. 544–569.
78. Luttinger J. M. An Exactly Soluble Model of a Many-Fermion System // Journal of Mathematical Physics. 1963. Vol. 4. P. 1154.
79. Putikka W. O., Glenister R. L., Singh R. R. P., Tsunetsugu H. Indications of spin-charge separation in the two-dimensional $t - J$ model // Physical Review Letters. 1994. Vol. 73. P. 170.
80. Chen Y. C., Moreo A., Ortolani F., Dagotto E., Lee T. K. Spin-charge separation in the two-dimensional Hubbard and $t - J$ models at low electronic density // Physical Review B. 1994. Vol. 50. P. 655.
81. Tohyama T., Maekawa S. Approximate Decoupling of Spin and Charge Excitations in the Two-Dimensional $t - J$ Model // Journal of the Physical Society of Japan. 1996. Vol. 65, 1902-1905.

82. Martins G. B., Eder R., Dagotto E. Indications of spin-charge separation in the two-dimensional extended $t - J$ model // Physical Review B. 1999. Vol. 60, P. R3716.
83. Holt M., Oitmaa J., Chen W., Sushkov O. P. Fermi surface reconstruction by dynamic magnetic fluctuations and spin-charge separation near an $O(3)$ quantum critical point // Physical Review B. 2013. Vol. 87. P. 075109.
84. Shannon C. A mathematical theory of communication // The Bell System Technical Journal. 1948. Vol. 27. P. 379-423; Shannon C. A mathematical theory of communication // The Bell System Technical Journal. 1948. Vol. 27. P. 623- 656.
85. Richardson D. J. Filling the Light Pipe // Science. 2010. Vol. 330. P. 327-328.
86. Mitra P. P., Stark J. B. Nonlinear limits to the information capacity of optical fibre communications // Nature. 2001. Vol. 411. P. 1027-1030.
87. Narimanov E. E., Mitra P. The channel capacity of a fiber optics communication system: Perturbation theory // Journal of Lightwave Technology. 2002. Vol. 20. No. 3, P. 530–537.
88. Kahn J. M., Ho K.-P. Spectral efficiency limits and modulation detection techniques for DWDM systems // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. 2004. Vol. 10. No. 2, P. 259–272.
89. Essiambre R.-J., Foschini G. J., Kramer G., Winzer P. J. Capacity Limits of Information Transport in Fiber-Optic Networks // Physical Review Letters. 2008. Vol. 101. P. 163901.
90. Essiambre R.-J., Kramer G., Winzer P. J., Foschini G. J., Goebel B., Capacity Limits of Optical Fiber Networks // Journal of Lightwave Technology. 2010. Vol. 28, No. 4. P. 662–701.
91. Killey R., Behrens C. Shannon's theory in nonlinear systems // Journal of Modern Optics. 2011. Vol. 58. No. 1. P. 1-10.
92. Agrell E., Alvarado A., Durisi G., Karlsson M. Capacity of a Nonlinear Optical Channel With Finite Memory // Journal of Lightwave Technology. 2014. Vol, 32. P. 2862 - 2876.

93. Sorokina M. A., Turitsyn S. K. Regeneration limit of classical Shannon capacity // Nature Communications. 2014. Vol. 5. P. 3861.
94. Mecozzi A. Limits to long-haul coherent transmission set by the Kerr nonlinearity and noise of the in-line amplifiers // Journal of Lightwave Technology. 1994. Vol. 12, No. 11. P. 1993 - 2000.
95. Mecozzi A., Shtaif M. On the capacity of intensity modulated systems using optical amplifiers // IEEE Photonics Technology Letters. 2001. Vol. 13. No. 9. P. 1029-1031.
96. Tang J. The Shannon channel capacity of dispersion-free nonlinear optical fiber transmission // Journal of Lightwave Technology. 2001. Vol. 19. No. 8, P. 1104 - 1109.
97. Turitsyn K. S., Derevyanko S. A., Yurkevich I. V., Turitsyn S. K. Information Capacity of Optical Fiber Channels with Zero Average Dispersion // Physical Review Letters. 2003. Vol. 91. P. 203901.
98. Yousefi M. I., Kschischang F. R. On the Per-Sample Capacity of Nondispersive Optical Fibers // IEEE Transactions on Information Theory. 2011. Vol. 57, No. 11, P. 7522 - 7541.
99. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Москва "Мир", 1968.
100. Wichmann E. H., Kroll N. M. Vacuum Polarization in a Strong Coulomb Field // Physical Review. 1956. Vol. 101. P. 843-859.
101. Brown L. S., Cahn R. N., McLerran L. D. Vacuum polarization in a strong Coulomb field. I. Induced point charge // Physical Review D. 1975. Vol. 12. P. 581.
102. A. I. Milstein and V. M. Strakhovenko Density of induced charge in a strong Coulomb field // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1983. Vol. 84. P. 1247-1256.
103. Зельдович Я. Б., Попов В. С. Электронная структура сверхтяжелых атомов // Успехи физических наук. 1971. Т. 105. С. 403-440.

104. DiVincenzo D. P., Mele E. J. Self-consistent effective-mass theory for intralayer screening in graphite intercalation compounds // Physical Review B. 1984. Vol. 29. P. 1685.
105. Kolezhuk A., Sachdev S., Biswas R. R., Chen P. Theory of quantum impurities in spin liquids // Physical Review B. 2006. Vol. 74. P. 165114.
106. Milstein A. I., Strakhovenko V. M. The $O(2,1)$ algebra and the electron green function in a Coulomb field // Physics Letters A. 1982. Vol. 90. P. 447450.
107. Milstein A. I., Sushkov O. P. Vacuum polarization radiative correction to parity violating electron scattering on heavy nuclei // Physical Review C. 2005. Vol. 71. P. 045503.
108. Kotov V. N., Uchoa B., Castro Neto A. H. Electron-electron interactions in the vacuum polarization of graphene // Physical Review B. 2008. Vol. 78. P. 035119.
109. Lee R. N., Milstein A. I. Finite nuclear size and vacuum polarization in heavy atoms // Physics Letters A. 1994. Vol. 189. P. 72-79.
110. Kittel C. Quantum Theory of Solids. New York-London "John Wiley & Sons", 1963.
111. W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, Quantum Electrodynamics of Strong Field, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
112. Gavrilov S. P., Gitman D. M., Smirnov A. A. Green functions of the Dirac equation with magnetic-solenoid field // Journal of Mathematical Physics. 2004. Vol. 45. P. 1873.
113. Sitenko Yu. A. Self-adjointness of the Two-Dimensional Massless Dirac Hamiltonian and Vacuum Polarization Effects in the Background of a Singular Magnetic Vortex // Annals of Physics. 2000. Vol. 282. P. 167-217.
114. Nohadani O., Wessel S., Haas S. Quantum phase transitions in coupled dimer compounds // Physical Review B. 2005. Vol. 72. P. 024440.
115. Jin S., Sandvik A. Universal Néel temperature in three-dimensional quantum antiferromagnets // Physical Review B. 2012. Vol. 85. P. 020409.

116. Milstein A. I., Sushkov O. P. Effective field theories and spin-wave excitations in helical magnets // *Physical Review B*. 2011. Vol. 84. P. 195138.
117. Харьков Я. А. Частное сообщение.
118. Mahan G. D. Many-particle physics. New York “Kluwer Academic/Plenum Publishers”, 2000.
119. Шапиро Е. Г., Шапиро Д. А. Оценка пропускной способности линий связи с конечной нелинейной памятью // *Квантовая электроника*. 2016. Т. 46. С. 1117–1120.
120. Shapiro E. G., Shapiro D. A. Influence of nonlinear interaction on the capacity of an optical dispersion-compensating channel // *Quantum Electronics*. 2017. Vol. 47. P. 1049 – 1052.
121. Shapiro E. G., Shapiro D. A. Optimization of the Capacity of a Fiber Communication Line with Nonlinear Memory // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2018. Vol. 54. P. 411-418.
122. Iannoe E., Matera F., Mecozzi A., Settembre M. Nonlinear Optical Communication Networks. New York “John Wiley & Sons”, 1998.
123. Falkovich G. E., Kolokolov I., Lebedev V., Turitsyn S. K. Statistics of soliton-bearing systems with additive noise // *Physical Review E*. 2001. Vol. 63. P. 025601(R).
124. Derevyanko S. A., Turitsyn S. K., Yakushev D. A. Fokker-Plank equation approach to the description of soliton statistics in optical fiber transmission systems // *Journal of the Optical Society of America B*. 2005. Vol. 22. P. 743-752.
125. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. Москва “Наука”, 1973.
126. В.В. Лебедев, Флуктуационные эффекты в макрофизике (Курс Лекций), МЦНМО 2004.
127. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва “Физматгиз”, 1963.

128. Agrawal G. P. Nonlinear Fiber Optics. San Diego "Academic press", 2007.
129. Hardin R.H., Tappert F. D. Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations // SIAM Review Chronicles. 1973. Vol. 15. P. 423.
130. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва "Наука", 1989.